

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE
DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de
l'informatique
Département des Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Mathématique et Numérique

Thème

Sur la classification des points singuliers d'un
système différentiel

Présenté par : *Chadi Meryem*

Devant le jury composé de :

<i>LAKHAL</i> Aissa	M.C.B, Université de M'sila	Président.
<i>KEHALI</i> Salima	M.C.B, Université de M'sila	Encadreur.
<i>DILMI</i> Mustapha	M.C.B, Université de M'sila	Examineur.

Année universitaire 2024/2025.

Remerciements

Je souhaite tout d'abord exprimer ma profonde gratitude à Dieu Tout Puissant, qui m'a accordé la force, la patience et la persévérance nécessaires pour mener à bien ce travail. Je tiens à remercier sincèrement les membres du jury pour avoir accepté d'évaluer ce mémoire et pour l'intérêt qu'ils lui ont accordé. J'exprime ma profonde reconnaissance à Madame Salima Kehali, ma directrice de mémoire, pour son encadrement rigoureux, sa disponibilité et la qualité de ses conseils tout au long de ce projet. J'exprime toute ma gratitude à ma mère, dont les prières, l'amour et le soutien inconditionnel et le soutien constant ont été une source inestimable de force et de motivation. Je remercie tous les professeurs du Département de Mathématiques, ainsi qu'à mes collègues et amies, sans oublier toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de cette thèse.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A ma mère en guise de remerciement et de reconnaissance pour toute la confiance, le soutien et l'aide qu'elle m'ont apporté tout en m'encourageant pour empreinter la voie de la réussite,

À l'âme pure de mon père Chadi saad ,que Dieu lui fasse miséricorde,

À ma chère amie B. Wahiba, qui est comme une soeur pour moi,

À toute la famille,

À toute mes amies,

En fin je dédie ce mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

Table des matières

Introduction	6
1 Rappels et notions fondamentales	9
1.1 Notions de base pour les systèmes différentiels	9
1.1.1 Systèmes différentiels planaires polynomiaux	9
1.1.2 Champs de vecteurs	10
1.1.3 Plan et portrait de phase	10
1.1.4 Système dynamique	10
1.2 Généralités sur les systèmes différentiels	12
1.2.1 Problème à valeur initiale (Problème de Cauchy)	13
1.2.2 Existence et unicité des solutions des problèmes à valeur initiale . .	13
1.2.3 Systèmes autonomes	14
2 Types des points singuliers	15
2.1 Point singulier	15
2.2 Linéarisation des systèmes dynamique	16
2.3 Classification des points singuliers	18
2.3.1 Cas 1: Système linéaire	18
2.3.2 Cas 2 : Système non linéaire	23
3 Méthodes de classification des points singuliers	24

3.1	Méthode de classification dans les systèmes linéaires à l'aide des valeurs propres	25
3.2	Méthode de la linéarisation pour les systèmes non linéaires	27
3.3	Méthode pour les points non hyperboliques	30
3.4	Méthode de la trace et du déterminant	33
3.5	Méthode des vecteurs propres (avec changement de base)	34
3.6	Exemples pratiques	37
	Conclusion	41
	Bibliographie	42

Notations

\mathbb{R}	L'ensemble des nombres réels.
\mathbb{R}^n	Espace vectoriel de dimension n construit sur le corps des réels.
C^1	Ensemble des fonctions continuellement différentiable.
$ $	Valeur absolue ou module.
$\ \ $	Norme sur \mathbb{R}^n .
$deg(P)$	degré d'un polynome P .
A	la matrice jacobienne.
Id	Matrice identité.
λ	Valeur propre.
$Re(\lambda)$	Partie réelle de valeur propre λ .
$\det(A)$	Déterminant de la matrice.
$tr(A)$	trace de la matrice A .
∇V	le vecteur gradient de $V(x, y)$.
$\frac{\partial}{\partial t}$	la dérivée partielle.
$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$	La dérivée de $x(t)$ par rapport à la variable t .

Introduction

Les systèmes différentiels sont des outils fondamentaux dans la modélisation mathématique de phénomènes dynamiques. Ils permettent de décrire l'évolution simultanée de plusieurs grandeurs interdépendantes en fonction du temps, et interviennent dans de nombreux domaines tels que la mécanique, la biologie, l'économie ou l'électronique. L'étude de ces systèmes vise à comprendre comment un état initial donné évolue au cours du temps, et sous quelles conditions le système tend vers une configuration stable ou instable.

L'intérêt pour les systèmes différentiels s'inscrit dans une longue évolution historique. Dès le XVII^e siècle, Isaac Newton a posé les fondements de la mécanique classique en décrivant le mouvement des corps à l'aide d'équations couplées entre position, vitesse et accélération. Au siècle suivant, Leonhard Euler a donné une formulation plus générale et systématique de ces équations, en introduisant des méthodes de résolution et des modèles abstraits pour des systèmes de dimension supérieure.

Au XIX^e siècle, Joseph-Louis Lagrange et Augustin-Louis Cauchy ont introduit plus de rigueur dans l'analyse des systèmes, en posant les bases du calcul différentiel rigoureux et des conditions d'existence et d'unicité des solutions. Mais c'est Henri Poincaré qui a véritablement transformé la manière d'étudier les systèmes dynamiques, en développant l'analyse qualitative, c'est-à-dire l'étude du comportement global des solutions sans les exprimer explicitement. Il a introduit des concepts clés tels que les trajectoires, les orbites, les portraits de phase et la sensibilité aux conditions initiales.

Dans ce même esprit, Aleksandr Lyapunov a développé une théorie générale de la stabilité des systèmes dynamiques. Sa contribution a permis de caractériser les comportements

locaux des solutions autour de certains points particuliers du système, appelés points d'équilibre ou points singuliers. Ces points, où le champ de vecteurs associé au système s'annule, constituent des configurations stationnaires à partir desquelles la dynamique peut radicalement changer.

L'étude locale autour des points d'équilibre est aujourd'hui une branche essentielle de l'analyse qualitative. En particulier, la classification de ces points permet de déterminer la nature du comportement du système dans leur voisinage : convergence, divergence, oscillations ou stabilité neutre. Cette classification repose généralement sur des outils issus de la linéarisation du système, notamment l'analyse de la matrice jacobienne et de ses valeurs propres.

Il existe plusieurs méthodes permettant de classer les points singuliers selon leur comportement dynamique local. Parmi les plus répandues, on trouve la méthode spectrale, qui repose sur l'étude des valeurs propres de la matrice jacobienne linéarisée ; la méthode de la trace et du déterminant, qui fournit une classification rapide dans le cas plan ; ainsi que la linéarisation locale, qui consiste à approximer le système non linéaire par un système linéaire autour du point d'équilibre. Chacune de ces approches apporte une lecture complémentaire de la dynamique locale du système.

Ce mémoire s'inscrit dans cette perspective. Il se propose d'étudier la classification locale des points singuliers dans les systèmes différentiels plans, en mettant en œuvre les méthodes analytiques appropriées, illustrées par des exemples concrets. Il est structuré en trois chapitres :

- Le premier chapitre présente les concepts fondamentaux nécessaires à la compréhension des systèmes différentiels. Il contient des définitions essentielles comme celles de champ de vecteurs, plan et portrait de phase, système dynamique, ainsi que le problème de Cauchy.
- Le deuxième chapitre définit formellement les points singuliers et rappelle les résultats clés de la linéarisation locale. Il explore les différents types de points singuliers et leurs configurations selon la nature des valeurs propres de la matrice jacobienne,

en distinguant les cas réels, complexes, simples ou multiples, et en illustrant chaque type par des portraits de phase et des exemples concrets.

- Enfin, le troisième chapitre expose les méthodes analytiques de classification des points singuliers, telles que les méthodes des valeurs propres, de la trace et du déterminant, de la linéarisation locale, ainsi que des exemples des applications sur des systèmes différentiels réels.

L'objectif de ce mémoire est d'offrir un cadre mathématique rigoureux et accessible pour l'analyse local des systèmes dynamiques, à travers la classification des points singuliers.

CHAPITRE 1

Rappels et notions fondamentales

Dans ce chapitre on rappelle quelques notions fondamentales pour l'étude des systèmes différentiels.

1.1 Notions de base pour les systèmes différentiels

1.1.1 Systèmes différentiels planaires polynomiaux

Définition 1.1.1 ([6]). *Soit le système différentiel planaire :*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1(t), x_2(t)), \\ \dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1(t), x_2(t)). \end{cases} \quad (1.1)$$

où f_1 et f_2 sont des polynômes à coefficients réels. Le système (1.1) est de degré d .

où : $d = \max(\deg f_1, \deg f_2)$.

Si f_1 et f_2 ne dépendent pas de t explicitement, alors le système (1.1) est autonome.

1.1.2 Champs de vecteurs

Définition 1.1.2 ([7]). On appelle champ de vecteurs, une région du plan simplement connexe dans laquelle il existe en tout point M un vecteur $\frac{dM}{dt}$. C'est-à-dire une application :

$$M(x_1, x_2) \rightarrow \frac{dM}{dt} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

où f_1, f_2 sont de classe C^1 sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Remarque 1.1.1 ([7]). Le champ de vecteurs associé au système (1.1) est noté $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$.

On peut l'écrire aussi sous la forme suivante :

$$F = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

1.1.3 Plan et portrait de phase

Définition 1.1.3 ([8, 11]). Un portrait de phase d'un champ de vecteurs est l'ensemble des orbites ou trajectoires dans l'espace de phase. En particulier, pour les systèmes autonomes d'équations différentielles ordinaires de deux variables, les solutions $(x_1(t), x_2(t))$ du système (1.1) représentent dans le plan (x_1, x_2) des courbes appelées **orbites**.

1.1.4 Système dynamique

Définition 1.1.4. Un système dynamique sur \mathbb{R}^n est une application $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

1. $g(., x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
2. $g(t, .) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
3. $g(0, x) = x$.
4. $g(t + s, x) = g(t, g(s, x)) \quad \forall t, s \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Proposition 1.1.1. *Les systèmes dynamiques sont engendrés par des systèmes différentiels.*

Exemple 1.1.1. *Soit le système différentiel linéaire :*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1.2)$$

où A est une matrice constante, $t \in \mathbb{R}^+$ et $x \in \mathbb{R}^n$. la solution de (1.2) est donnée par :

$$x(t) = e^{tA}x_0,$$

Le système (1.2) engendre un système dynamique :

$$g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad g(t, x) = e^{tA}x.$$

En effet :

1. On a $\forall t, s \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \|g(t+s, x) - g(t, x)\| &= \|e^{(t+s)A}x - e^{tA}x\| \\ &\leq \|e^{tA}\| \|e^{sA}x - x\| \\ &\leq e^{t\|A\|} \|e^{sA} - I\| \|x\| \\ &\leq e^{t\|A\|} (e^{s\|A\|} - 1) \|x\| \rightarrow 0 \quad \text{quand } s \rightarrow 0, \end{aligned}$$

d'où $g(\cdot, x)$ est continue.

2. On a $\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\|g(t, x) - g(t, y)\| = \|e^{tA}x - e^{tA}y\| = \|e^{tA}(x - y)\| < M\|x - y\|,$$

où M est constante et puisque t est fixé, d'où la continuité de $g(t, \cdot)$.

3. On a $g(0, x) = e^{A \cdot 0} x = Ix = x$.

4. $\forall t, s \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$g(t+s, x) = e^{(t+s)A} x = e^{tA} e^{sA} x = g(t, e^{sA} x) = g(t, g(s, x)).$$

Définition 1.1.5. Un système dynamique g sur \mathbb{R}^n est linéaire si

$$g(t, \alpha x + \beta y) = \alpha g(t, x) + \beta g(t, y)$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1.2 Généralités sur les systèmes différentiels

Définition 1.2.1 (Écriture vectorielle d'un système différentiel). On rappelle qu'une équation différentielle (linéaire ou non linéaire) dans un espace vectoriel E est de la forme :

$$\dot{x}(t) = f(t, x) \tag{1.3}$$

On s'intéressera plus particulièrement aux systèmes différentiels, dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$, l'équation ci-dessus étant écrite avec les notations usuelles :

$$\vec{x} = \vec{f}(t, \vec{x}) \quad : \quad \vec{\dot{x}}(t) = \vec{f}(t, \vec{x}(t)) \iff \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dot{x}_2 = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases}$$

avec $x \in S \subset \mathbb{R}^n$, $t \in J \subset \mathbb{R}$; où S est l'espace d'état. où f_1, f_2, \dots et f_n sont des fonctions continues de $\theta \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R} .

Exemple 1.2.1. Soit le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_1 - 2x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases}$$

C'est un système différentiel autonome (linéaire), de solution sur \mathbb{R} , tel que

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad f_1 = 4x_1 - 2x_2 \quad \text{et} \quad f_2 = x_1 + x_2.$$

1.2.1 Problème à valeur initiale (Problème de Cauchy)

Définition 1.2.2 ([3]). Soient θ un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f: \theta \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue.

1. Pour (t_0, x_0) donné, un problème à valeur initiale associé à l'équation (1.3) est donné sous la forme :

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{1.4}$$

2. La fonction $x(t)$ est dite solution de l'équation (1.3) sur un intervalle $\Omega \subset \mathbb{R}$ si elle est définie et continûment dérivable sur Ω , si $(t, x(t)) \in \theta$ pour tout $t \in \Omega$ et si $x(t)$ satisfait la relation (1.3) sur Ω .
3. Soit $(t_0, x_0) \in \theta$ donné, la fonction $x(t)$ est dite solution du problème à valeur initiale (1.4) s'il existe un intervalle Ω contenant t_0 tel que $x(t)$ est une solution de l'équation (1.3) sur Ω est vérifie $x(t_0) = x_0$.

1.2.2 Existence et unicité des solutions des problèmes à valeur initiale

Théorème 1.2.1 (Existence[2, 4]). Soit θ un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ Si $f: \theta \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continue alors pour tout $(t_0, x_0) \in \theta$, le problème (1.4) admet au moins une solution.

Définition 1.2.3. Soient θ un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f = f(t, x) : \theta \rightarrow \mathbb{R}^n$. f est dite localement lipschitzienne en x si pour tout fermé et borné (compact) K dans θ , il existe une constante $k > 0$ telle que :

$$\left| f(t, x_1) - f(t, x_2) \right| \leq k \left| x_1 - x_2 \right|$$

pour tout (t, x_1) et (t, x_2) dans K .

Définition 1.2.4. Pour $(t, x_0) \in \theta$ donné, une solution du problème à valeur initiale (1.4) est dite unique si, pour toute autre solution définie sur un domaine contenant (t, x_0) , les deux solutions coïncident sur l'ensemble de leur domaine de définition commun.

Théorème 1.2.2 (Unicité). Soit θ un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Si $f : \theta \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue est localement lipschitzienne en x , alors pour tout $(t_0, x_0) \in \theta$, le problème (1.4) admet une solution unique.

1.2.3 Systèmes autonomes

Définition 1.2.5. On appelle équation différentielle **autonome** une équation différentielle pour laquelle f ne dépend pas explicitement du temps $f(t, x) = f(x)$. C'est donc une équation différentielle de type :

$$\dot{x} = f(x). \tag{1.5}$$

Remarque 1.2.1. Un système **autonome** est un système dynamique dont l'évolution dépend uniquement de son état actuel, sans dépendance explicite du temps. Un système non autonome est système dynamique dont l'équation différentielle dépend directement du temps. Cela signifie que l'évolution du système dépend explicitement du temps initial.

CHAPITRE 2

Types des points singuliers

2.1 Point singulier

Les points singuliers (points d'équilibres) jouent un rôle important dans l'étude des systèmes différentiels. Henri Poincaré (1854–1912) montra que pour caractériser un système dynamique à plusieurs variables il n'est pas nécessaire de calculer les solutions détaillées, il suffit en effet de connaître les points d'équilibres.

Définition 2.1.1 ([6]). On appelle **point d'équilibre** (ou point singulier, point critique, point stationnaire ou point fixe) du système (1.1), tout point $x^* \in \mathbb{R}^n$ qui vérifie $f(x^*) = 0$.

Remarque 2.1.1. Un point qui n'est pas critique est dit régulier.

Exemple 2.1.1. Soit le système différentielle suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - 4y - x^2 \end{cases}$$

Déterminons les points d'équilibre :

$$\begin{cases} y = 0 \\ -x - 4y - x^2 = 0 \end{cases}$$

$$y = 0 \text{ et } -x - 4y - x^2 = 0 \iff y = 0 \text{ et } -x - x^2 = 0 \iff y = 0 \text{ et } x \in \{-1; 0\}$$

donc les points d'équilibre sont : $(0, 0)$ et $(-1, 0)$

2.2 Linéarisation des systèmes dynamiques

Les systèmes qui modélisent des phénomènes naturels sont non linéaires. Afin d'étudier le comportement des trajectoires de ces systèmes, on se ramène à l'étude de ces systèmes linéarisés associés.

Définition 2.2.1. Soit x^* un point d'équilibre du système (1.1). Le système

$$\dot{x} = Ax \tag{2.1}$$

où

$$A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^*) \right) = Df(x^*)$$

avec $1 \leq i, j \leq n$, est appelé le système linéarisé associé au système (1.1) en x^* .

Remarque 2.2.1. La matrice A est dite matrice jacobienne associée au système (1.1).

Exemple 2.2.1. Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2 - x - y), \\ \dot{y} = x - y. \end{cases}$$

alors les points d'équilibre de sont $(0, 0)$ et $(1, 1)$. Le système linéarisé est :

$$A = Df(x, y) = \begin{pmatrix} 2 - 2x - y & -x \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

- au point $(0, 0)$:

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

- au point $(1,1)$:

$$Df(1,1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les systèmes linéarisés associés sont :

- a) Au point $(0,0)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$$

- b) Au point $(1,1)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$$

Exemple 2.2.2. Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2 - 1 \\ \dot{y} = 2y \end{cases}$$

d'où

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 - 1 \\ 2y \end{pmatrix},$$

alors les points d'équilibre de $f(x,y) = 0$ sont $(1,0)$ et $(-1,0)$.

La Jacobienne de f en (x,y) est :

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

- au point $(1,0)$:

$$Df(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

- au point $(-1,0)$:

$$Df(-1,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les systèmes linéarisés associés sont :

- a) Au point $(1,0)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x \\ \dot{y} = 2y \end{cases}$$

- b) Au point $(-1,0)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x, \\ \dot{y} = 2y, \end{cases}$$

Remarque 2.2.2. La linéarisation d'un système différentiel nous amène à l'étude de la nature des points d'équilibres.

2.3 Classification des points singuliers

2.3.1 Cas 1: Système linéaire

Définition 2.3.1 ([6]). Considérons le système linéaire (1.1)

$$\dot{x} = Ax \tag{2.2}$$

où A est une matrice constante inversible d'ordre 2.

Soit le polynôme caractéristique de la matrice A :

$$P_A(x) = \det(A - \lambda I) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$$

Soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de cette matrice. On distingue les différents cas selon les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice A .

1) Si λ_1 et λ_2 sont réelles, non nulles et de même signe.

- Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, le point $x = x^*$ est un **nœud stable** (*Fig 2.1*).

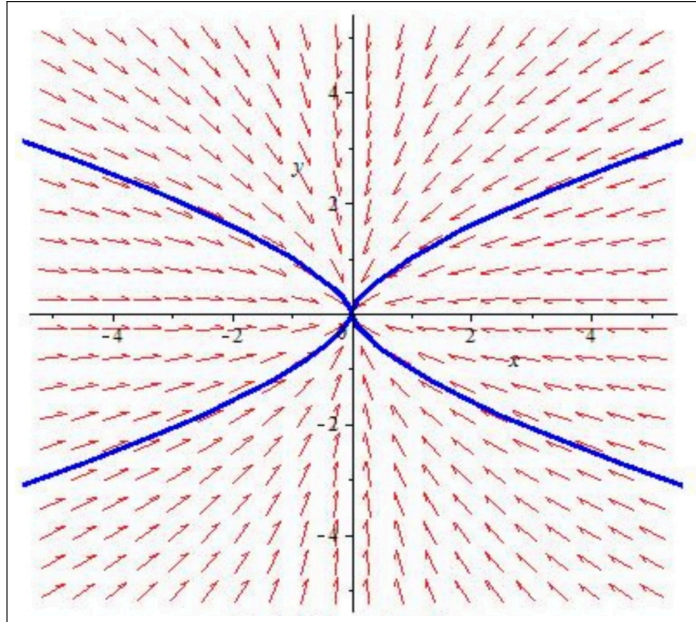


FIG. 2.1: nœud stable

- Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, le point $x = x^*$ est un **nœud instable** (*Fig 2.2*).

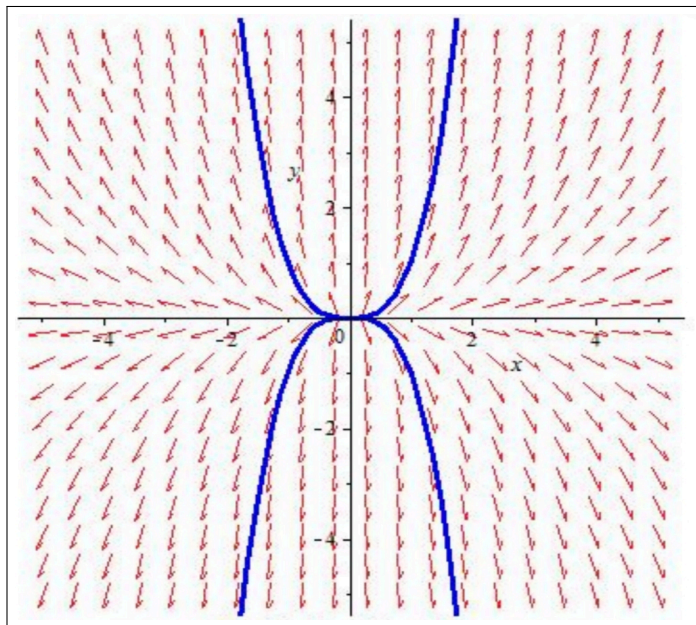


FIG. 2.2: nœud instable

- Si $\lambda_1 = \lambda_2$, le point $x = x^*$ est un **nœud propre stable** si $\lambda < 0$, et **instable** si $\lambda > 0$. (*Fig 2.3*) et (*Fig 2.4*).

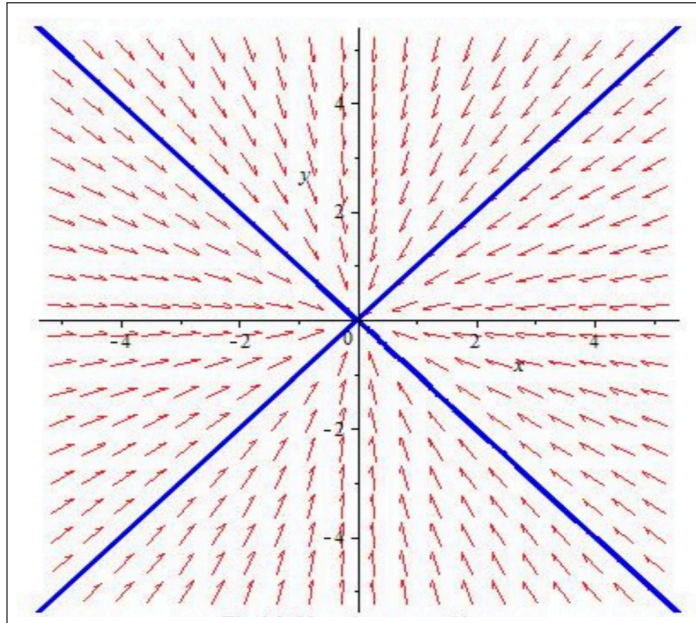


FIG. 2.3: nœud propre stable

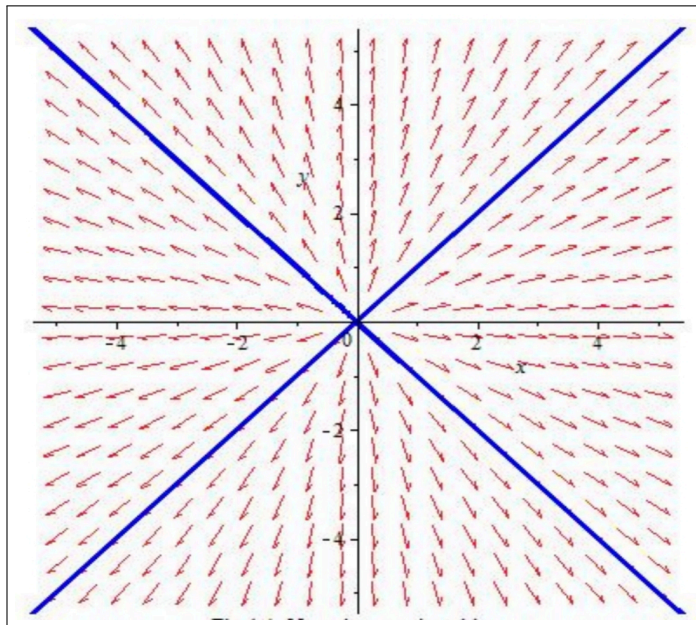


FIG. 2.4: nœud propre instable

- 2) Si λ_1 et λ_2 sont réelles, non nulles et de signes différents, le point critique $x = x^*$ est appelé **selle** ou un **col**, il est toujours instable. (Fig 2.5).

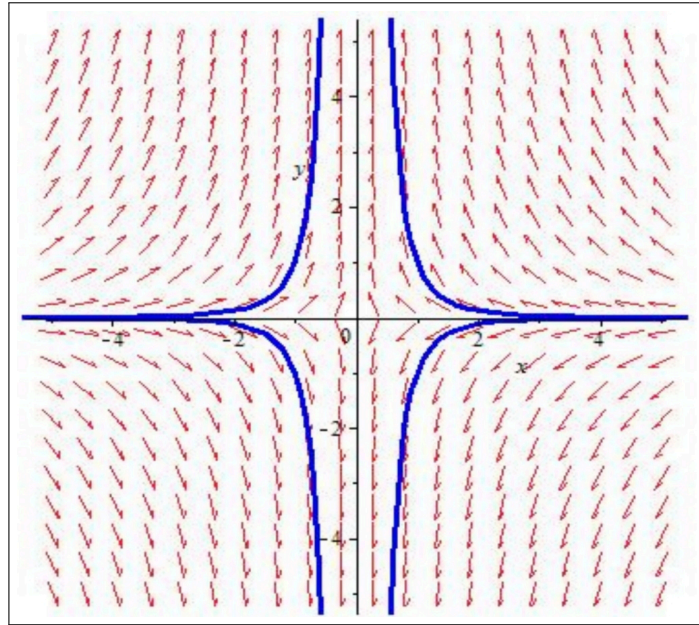


FIG. 2.5: Selle

3) Si λ_1 et λ_2 sont complexes conjuguées c'est-à-dire $\forall j = \overline{1,2}$,

$\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ avec $Re(\lambda_j) \neq 0$, alors le point critique $x = x^*$ est appelée **foyer**, il est instable si $Re(\lambda_j) > 0$ et stable si $Re(\lambda_j) < 0$ (Fig 2.6) et (Fig 2.7).

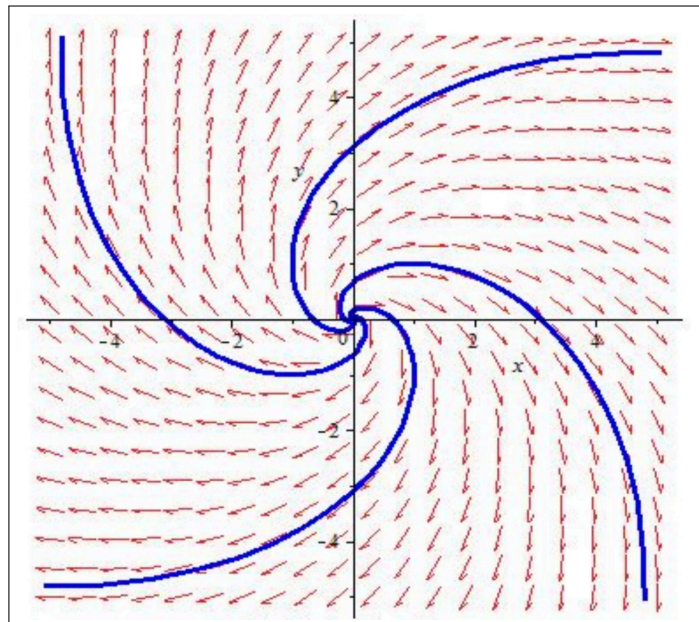


FIG. 2.6: Foyer instable

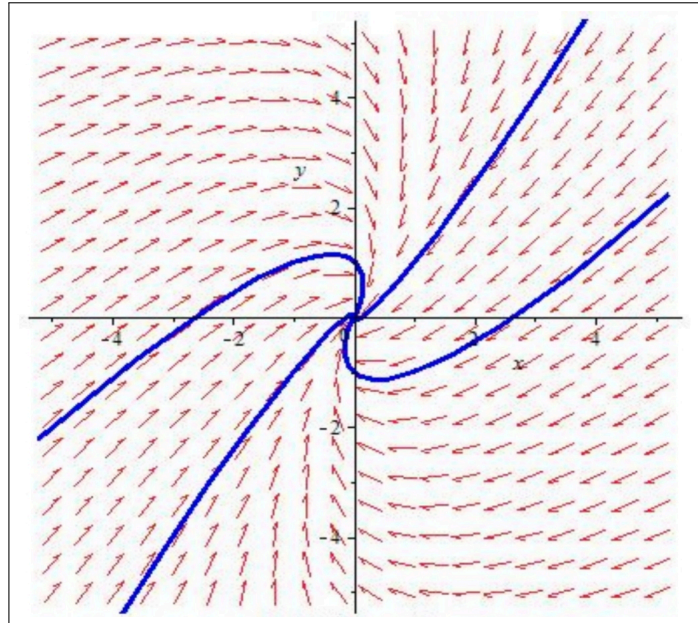


FIG. 2.7: Foyer stable

- 4) Si λ_1 et λ_2 sont imaginaires pures avec $Im(\lambda_j) \neq 0$ et $Re(\lambda_j) = 0$, alors le point $x = x^*$ est un **centre**, il est **stable** (Fig 2.8).

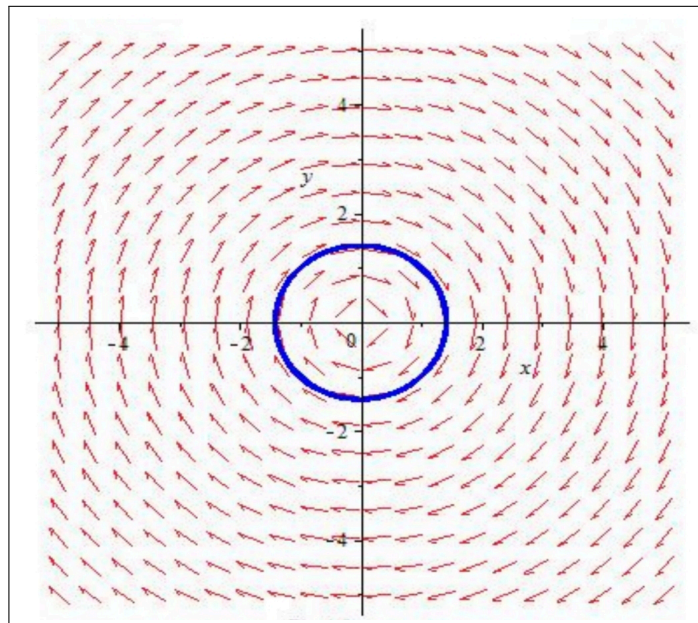


FIG. 2.8: Centre

5) Si A est diagonalisable : ceci a lieu si tous les vecteurs sont des vecteurs propres, chaque droite qui passe par le point d'équilibre est une trajectoire, on distingue deux cas :

- Si $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$: le point d'équilibre est un nœud asymptotiquement instable.
- Si $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$: le point d'équilibre est un nœud asymptotiquement stable.

6) Si A n'est pas diagonalisable : il existe un seul vecteur propre et donc une seule droite qui contient une trajectoire. Le point d'équilibre est dénommé nœud dégénéré.

- Si $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ le point d'équilibre est un nœud dégénéré instable.
- Si $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ le point d'équilibre est un nœud dégénéré stable.

2.3.2 Cas 2 : Système non linéaire

Considérons le système non-linéaire (1.1) où $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $f = (f_1, \dots, f_n)$.

Définition 2.3.2. *Un point critique x^* de (1.1) est appelé **puits** si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x^*)$ ont des parties réelles négatives.*

*Il est appelé **source** si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x^*)$ ont des parties réelles positives.*

*Il est appelé **selle** s'il est hyperbolique et si $A = Df(x^*)$ a au moins une valeur propre avec une partie réelle positive et au moins une valeur propre avec une partie réelle négative.*

CHAPITRE 3

Méthodes de classification des points singuliers

Les points singuliers (ou points fixes) d'un système différentiel sont les points où les dérivées s'annulent, c'est-à-dire où $\dot{x} = f(x) = 0$. Leur classification repose sur l'analyse du comportement local du système autour de ces points, en utilisant principalement la matrice jacobienne et ses valeurs propres. Ce chapitre détaille les principales théories et les méthodes utilisées pour cette classification, avec des exemples détaillés pour chaque méthode.

3.1 Méthode de classification dans les systèmes linéaires à l'aide des valeurs propres

Principe

Pour un système linéaire de la forme :

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad A \text{ matrice } n \times n,$$

Le point singulier est généralement $x = 0$. La classification repose sur les **valeurs propres** (λ_i) de la matrice A , calculées en résolvant l'équation caractéristique :

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Pour un système bidimensionnel ($n = 2$), les types de points singuliers sont :

- **Nœud stable** : $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, réelles et distinctes.
- **Nœud instable** : $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, réelles et distinctes.
- **Nœud propre** : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$, stable si $\lambda < 0$, instable si $\lambda > 0$.
- **Point selle (col)** : $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$, réelles.
- **Foyer stable** : $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \alpha < 0$.
- **Foyer instable** : $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \alpha > 0$.
- **Centre** : $\lambda_{1,2} = \pm i\beta, \beta \neq 0$.

Étapes

1. Écrire le système sous forme matricielle $\dot{x} = Ax$.
2. Calculer les valeurs propres en résolvant $\det(A - \lambda I) = 0$.

3. Classifier le point en fonction des valeurs propres.

Exemple 3.1.1 (Nœud instable). *Considérons le système :*

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}$$

- *Matrice jacobienne* : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

- *Valeurs propres* :

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = (3 - \lambda)(2 - \lambda) - 1 = \lambda^2 - 5\lambda + 5 = 0.$$

$$\lambda_1 = \frac{5 + \sqrt{25 - 20}}{2} = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \approx 3.618 \quad \lambda_2 = \frac{5 - \sqrt{25 - 20}}{2} = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \approx 1.382.$$

- *Classification* : $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, réelles et distinctes. Le point $(0, 0)$ est un **nœud instable**.

Exemple 3.1.2 (Point selle). *Considérons le système :*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

- *Matrice jacobienne* : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- *Valeurs propres* :

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ 0 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = (2 - \lambda)(-1 - \lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = -1.$$

- *Classification* : $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. Le point $(0,0)$ est un **point selle (col)**.

3.2 Méthode de la linéarisation pour les systèmes non linéaires

Principe

Pour un système non linéaire :

$$\dot{x} = f(x),$$

où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est différentiable, les points singuliers sont les solutions x^* telles que $f(x^*) = 0$.

On utilise la **matrice jacobienne** :

$$A = Df(x^*) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^*) \right).$$

Le système linéarisé autour de x^* est :

$$\dot{x} = A(x - x^*).$$

La classification repose sur les valeurs propres de A , comme dans les systèmes linéaires, sauf pour les points non hyperboliques.

Étapes

1. Trouver les points singuliers en résolvant $f(x) = 0$.
2. Calculer la matrice jacobienne $Df(x^*)$.
3. Calculer les valeurs propres de A .
4. Classifier le point selon les valeurs propres.

Exemple 3.2.1. *Considérons le système :*

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - x - y) \\ \dot{y} = y(x - 1) \end{cases}$$

• *Points singuliers :*

$$x(1 - x - y) = 0, \quad y(x - 1) = 0$$

De la deuxième équation : $y = 0$ ou $x = 1$.

– *Si $y = 0$, alors $x(1 - x) = 0 \implies x = 0$ ou $x = 1$. Points : $(0, 0)$, $(1, 0)$.*

– *Si $x = 1$, alors $1(1 - 1 - y) = -y = 0 \implies y = 0$. Point : $(1, 0)$.*

alors les points singuliers sont : $(0, 0)$ et $(1, 0)$.

• *Matrice jacobienne :*

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x(1 - x - y) \\ y(x - 1) \end{pmatrix}, \quad Df(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - 2x - y & -x \\ y & x - 1 \end{pmatrix}.$$

Au point $(0, 0)$:

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)(-1 - \lambda) = 0.$$

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$.

Classification : Point selle.

Au point $(1, 0)$:

$$Df(1, 0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det \begin{pmatrix} -1 - \lambda & -1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda(-1 - \lambda) = 0.$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0.$$

Classification : Point non hyperbolique (nécessite une analyse supplémentaire).

Exemple 3.2.2. Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y^2 \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$$

• **Points singuliers :**

$$x + y^2 = 0, \quad x - y = 0.$$

De la deuxième équation : $x = y$. Substituons dans la première :

$$y + y^2 = y(1 + y) = 0 \implies y = 0, \quad y = -1.$$

Les points singuliers sont : $(0,0)$, $(-1,-1)$.

• **Matrice jacobienne :**

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 2y \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

– À $(0,0)$:

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1$$

Classification : Point selle.

– À $(-1,-1)$:

$$Df(-1,-1) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) + 2 = \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda_1 = -i \quad , \quad \lambda_2 = i$$

Classification : Centre (nécessite une analyse non linéaire).

Exemple 3.2.3. Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

- **Points singuliers :**

$$-x^3 = 0, \quad -y = 0 \Rightarrow x = 0, y = 0$$

Le Point singulier est : (0,0)

- **Matrice jacobienne :**

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} -3x^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

À (0,0) :

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1$$

Classification : Point non hyperbolique (nécessite une analyse supplémentaire).

3.3 Méthode pour les points non hyperboliques

Principe

Un point singulier est **non hyperbolique** si au moins une valeur propre de la matrice jacobienne a une partie réelle nulle ($\lambda = 0$) ou $\lambda = \pm i\beta$. Dans ce cas, la linéarisation ne suffit pas, et on utilise :

- **Théorie du centre de variété :** Réduit le système à un sous-espace associé aux valeurs propres à partie réelle nulle.

- **Fonctions de Lyapunov** : Détermine la stabilité sans dépendre des valeurs propres.

Étapes (fonction de Lyapunov)

1. Choisir une fonction $V(x)$, positive définie.
2. Calculer $\dot{V} = \nabla V \cdot f$.
3. Si $\dot{V} \leq 0$, le point est stable ; si $\dot{V} < 0$, il est asymptotiquement stable.

Exemple 3.3.1 (Centre). *Considérons le système :*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

- *Point singulier* : $(0,0)$.
- *Matrice jacobienne* :

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = \pm i.$$

- *Analyse de Lyapunov* : Choisissons $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

$$\dot{V} = x\dot{x} + y\dot{y} = x \cdot y + y \cdot (-x) = 0.$$

Classification : centre stable.

Exemple 3.3.2 (Point non hyperbolique). *Considérons le système :*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

- *Points singuliers* : $\{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

- *Matrice jacobienne* :

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} -3x^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{à } (0, y) : \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

- *Analyse de Lyapunov* : Choisissons $V(x, y) = \frac{1}{2}x^2$.

$$\dot{V} = x \cdot (-x^3) = -x^4 \leq 0.$$

Classification : Stable dans la direction x , mais nécessite une analyse du centre de variété pour y .

Exemple 3.3.3. Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + y^3 \end{cases}$$

- *Point singulier* : $(0, 0)$.
- *Matrice jacobienne* :

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3y^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Au point } (0, 0) : Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_{1,2} = \pm i.$$

- *Analyse de Lyapunov* : Choisissons $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

$$\dot{V} = x \cdot y + y \cdot (-x + y^3) = y^4 \geq 0.$$

3.4 Méthode de la trace et du déterminant

Principe

Pour un système linéaire bidimensionnel $\dot{x} = Ax$, on utilise :

- **Trace** : $\text{tr}(A) = a + d$.
- **Déterminant** : $\det(A) = ad - bc$.
- **Discriminant** : $\Delta = \text{tr}(A)^2 - 4\det(A)$.

Classification

- **Nœud stable** : $\det(A) > 0$, $\text{tr}(A) < 0$, $\Delta > 0$.
- **Nœud instable** : $\det(A) > 0$, $\text{tr}(A) > 0$, $\Delta > 0$.
- **Point selle** : $\det(A) < 0$, $\Delta > 0$.
- **Foyer stable** : $\det(A) > 0$, $\text{tr}(A) < 0$, $\Delta < 0$.
- **Foyer instable** : $\det(A) > 0$, $\text{tr}(A) > 0$, $\Delta < 0$.
- **Centre** : $\det(A) > 0$, $\text{tr}(A) = 0$, $\Delta < 0$.

Exemple 3.4.1 (Nœud instable). *Considérons le système :*

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + y \\ \dot{y} = x + 3y \end{cases}$$

- **Matrice jacobienne** : $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

- **Trace et déterminant** :

$$\text{tr}(A) = 4 + 3 = 7, \quad \det(A) = (4)(3) - (1)(1) = 11, \quad \Delta = 7^2 - 4 \cdot 11 = 49 - 44 = 5 > 0.$$

- *Classification* : $\det(A) > 0$, $\operatorname{tr}(A) > 0$, $\Delta > 0$. Le point $(0,0)$ est un **nœud instable**.

Exemple 3.4.2 (Point centre). *Considérons le système :*

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = -2x - y \end{cases}$$

- *Matrice jacobienne* : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

- *Trace et déterminant* :

$$\operatorname{tr}(A) = 1 - 1 = 0, \quad \det(A) = (1)(-1) - (1)(-2) = -1 + 2 = 1, \quad \Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 = -4 < 0.$$

- *Classification* : $\det(A) > 0$, $\operatorname{tr}(A) = 0$, $\Delta < 0$. Le point $(0,0)$ est un **centre** (mais nécessite une vérification pour les systèmes non linéaires).

3.5 Méthode des vecteurs propres (avec changement de base)

Principe

La méthode des vecteurs propres analyse le comportement local en calculant les **vecteurs propres** associés aux valeurs propres de la matrice A . Ces vecteurs définissent les directions des trajectoires. Le **changement de base** utilise une matrice P (formée des vecteurs propres) pour transformer le système en une forme diagonale ou de Jordan :

$$\dot{y} = P^{-1}APy.$$

Étapes

1. Calculer les valeurs propres de A .

2. Calculer les vecteurs propres associés.
3. Analyser les trajectoires selon les vecteurs propres.
4. (Optionnel) Effectuer un changement de base avec P .

Exemple 3.5.1 (Point col). *Considérons le système :*

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x \\ \dot{y} = -2y \end{cases}$$

- *Valeurs propres :*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -2$$

- *Vecteurs propres :*

$$- \text{ Pour } \lambda_1 = 3 : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow v_2 = 0, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$- \text{ Pour } \lambda_2 = -2 : \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow v_1 = 0, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- *Classification : Point col (trajectoires divergentes selon \mathbf{v}_1 , convergentes selon \mathbf{v}_2).*

- *Changement de base : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, système déjà diagonal.*

Exemple 3.5.2 (Noeud instable). *Considérons le système :*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}$$

- *Valeurs propres :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0.$$

$$\lambda_1 = \frac{4 + \sqrt{16 - 12}}{2} = 3, \quad \lambda_2 = \frac{4 - \sqrt{16 - 12}}{2} = 1$$

- *Vecteurs propres :*

$$- \text{ Pour } \lambda_1 = 3 : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow v_1 = v_2, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$- \text{ Pour } \lambda_2 = 1 : \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow v_1 = -v_2, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- *Classification : Noeud instable.*

- *Changement de base :*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \dot{y} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y$$

3.6 Exemples pratiques

Exemple 3.6.1. Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x \\ \dot{y} = 2y \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ sont toute positives et différentes on parle de nœud instable ou de source.

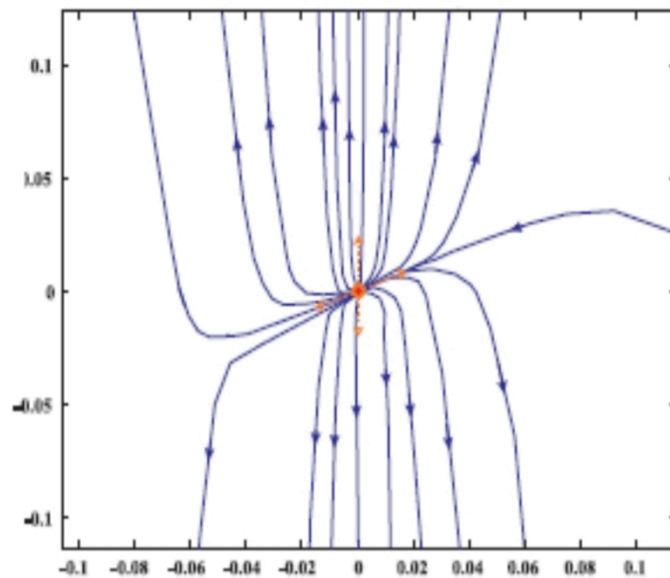


FIG. 3.1: Nœud instable

Exemple 3.6.2.

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont : $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -1$

sont toute , négatives et différentes on parle de noeud stable .

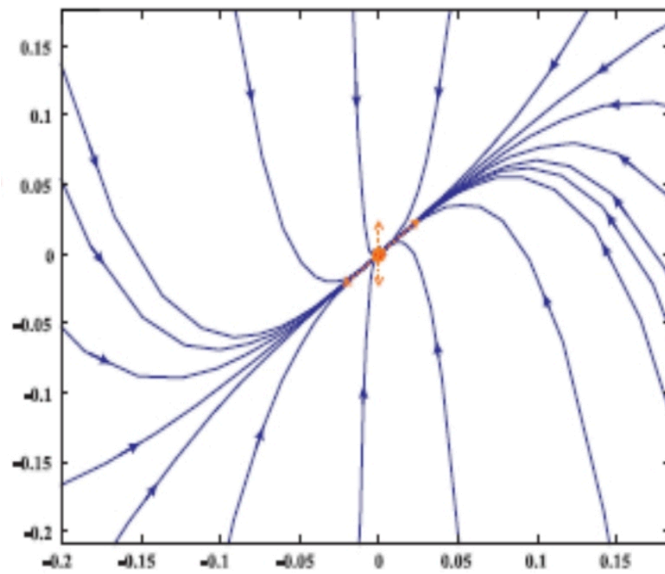


FIG. 3.2: noeud stable

Exemple 3.6.3. Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -2y \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont : $\lambda_1 = 1 > 0$, $\lambda_2 = -2 < 0$, alors on parle d'un point *selle*.

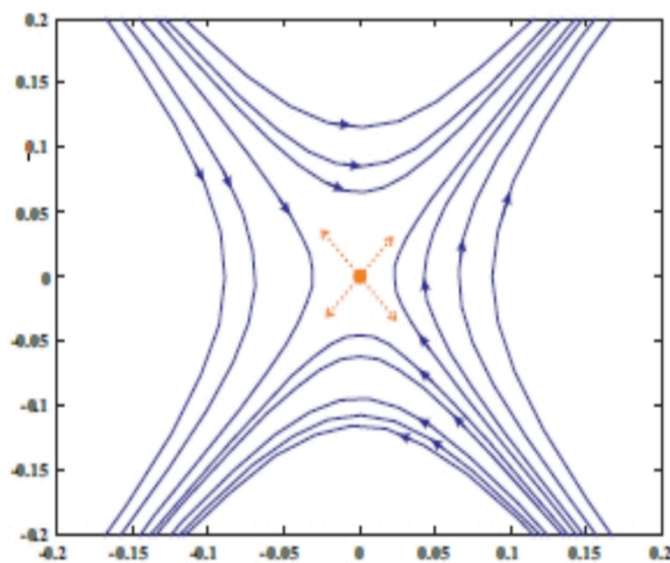


FIG. 3.3: Point selle

Exemple 3.6.4. Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y \\ \dot{y} = -2x \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont : $\lambda_1 = 2i$ et $\lambda_2 = -2i$ sont complexes et $\alpha = 0$ alors le point d'équilibre est un **centre** .

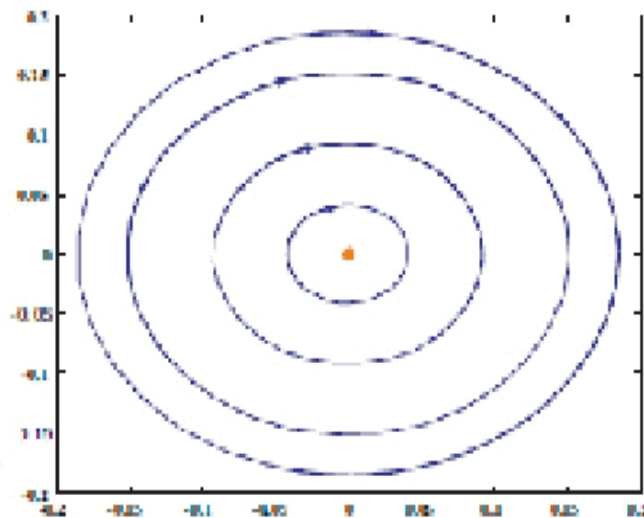


FIG. 3.4: centre

Exemple 3.6.5. Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y \\ \dot{y} = -2x - y \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont : $\lambda_1 = -1 + 2i$ et $\lambda_2 = -1 - 2i$ sont complexes et $\alpha = -1 < 0$ alors le point d'équilibre est un **foyer stable** .

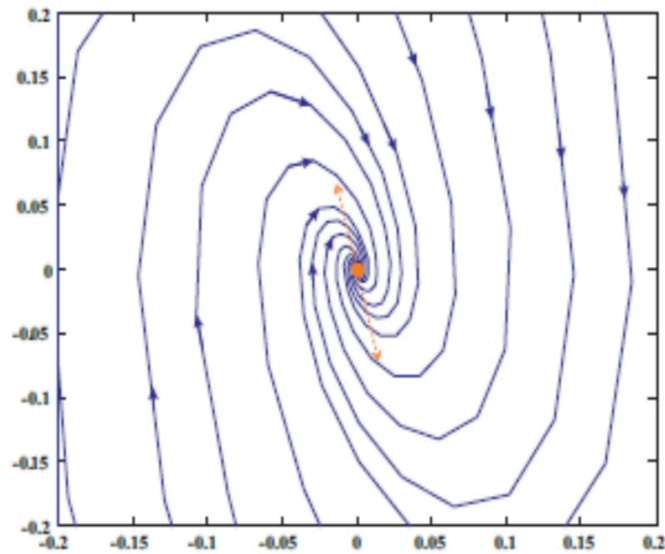


FIG. 3.5: Foyer stable

Exemple 3.6.6. Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y \\ \dot{y} = 2x + 2y \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont : $\lambda_1 = 2i + 2$ et $\lambda_2 = -2i + 2$ sont complexes et $\alpha = 2 > 0$ alors le point d'équilibre est un **foyer instable**.

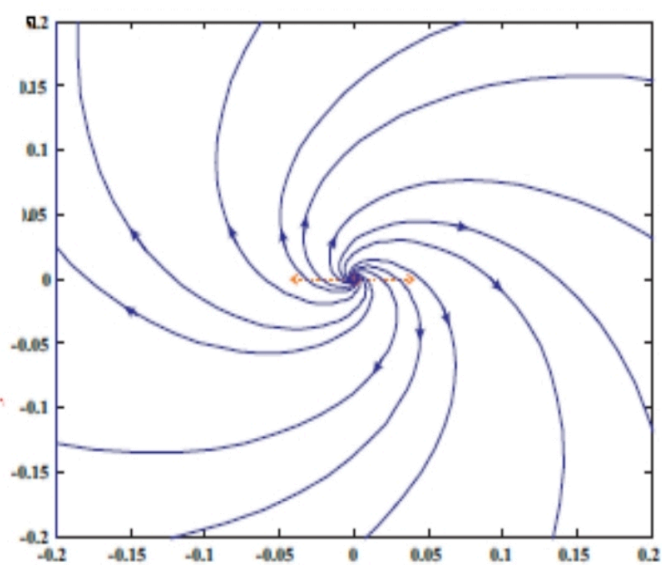


FIG. 3.6: foyer instable

Conclusion

Ce mémoire a porté sur l'étude de la classification des points d'équilibre d'un système différentiel plan, un aspect essentiel de l'analyse qualitative des systèmes dynamiques. La compréhension de la nature de ces points permet en effet de prévoir le comportement local des trajectoires sans qu'il soit nécessaire de résoudre explicitement les équations différentielles.

Les différentes méthodes utilisées ont montré leur efficacité pour identifier les types de points d'équilibre, comme les nœuds, les foyers, les centres et les selles, et pour analyser la stabilité locale des systèmes étudiés. Parmi ces méthodes, l'analyse spectrale et la linéarisation locale se sont révélées particulièrement utiles pour distinguer les différentes configurations possibles et fournir des informations précieuses sur la dynamique du système.

Pour des perspectives futures, il serait intéressant d'approfondir l'étude des systèmes non linéaires complexes, en particulier ceux présentant des points d'équilibre non hyperboliques, et d'explorer des approches numériques ou graphiques qui pourraient enrichir l'analyse des comportements locaux et globaux des systèmes différentiels.

Bibliographie

- [1] A. Fortin, *Analyse numérique pour ingénieurs*, Presses inter Polytechnique, 2008.
- [2] C. C. Chicone, *Ordinary Differential Equations with Applications*, 2nded. NewYork : Springer, 2006.
- [3] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Macmillan, New York, 3e edition, 2002.
- [4] J. P. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles* (pp. 237-243). Les Ulis : EDP, sciences, 2006.
- [5] J. J. Sloyine, W. Li, *Applied non linear control*. Prentice Hall, 1991.
- [6] J. Libre, A. E. Turuel, *Introduction to the qualitative theory of differential systems*. Springer Basel, 2014.
- [7] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*. Third Edition, Texts in applied mathematics, 7. Springer-Verlag, New-York, 2007.
- [8] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos : With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, 3rded. CRC Press Taylor and Francis Group, 2018.
- [9] S. N. Chow, R. Johnson, R. Nussbaum, R. Conti, J. Mallet-Paret, *Dynamical Systems*. Springer- Verlag ,2003.
- [10] S. Wiggins, Golubitsky, M. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos* (Vol. 2, No. 3). New York : Springer, 2003.

- [11] V. I. Arnold, *Graduate Texts in Mathematics : Ordinary Differential Equations*, vol.
- [12] W. Hahn, H. H. Hosenthien, and H. Lehnigk, *Theory and Application of Liapunov's Direct Method*, vol. 3, Englewood Cliffs, NJ :Prentice- Hall, 1963.

Résumé

Le but de ce travail est d'étudier la classification locale des points singuliers dans les systèmes différentiels plans, en mettant l'accent sur l'analyse qualitative du comportement des solutions autour des points d'équilibre.

Notre étude repose sur la linéarisation locale du système au voisinage d'un point singulier, à partir de laquelle nous analysons la matrice jacobienne afin de déterminer le type du point : nœud, foyer, selle ou centre. Ces classifications permettent de prédire la stabilité locale et la dynamique du système sans résoudre explicitement les équations. Nous avons exploré plusieurs méthodes de classification, notamment la méthode spectrale, la méthode de la trace et du déterminant, ainsi que la linéarisation locale. Chaque configuration théorique a été illustrée par des exemples concrets et des portraits de phase, et une application a été présentée pour montrer la pertinence des outils étudiés dans l'analyse des systèmes dynamiques.

Mots clés : Système différentiel, points singuliers, classification des points singuliers., stabilité, , valeurs propres, linéarisation, classification spectrale.

ملخص

يهدف هذا العمل إلى دراسة التصنيف المحلي للنقاط الشاذة في الأنظمة التفاضلية المستوية، مع التركيز على التحليل النوعي لسلوك الحلول في جوار نقاط التوازن.

تعتمد دراستنا على خطية النظام تفاضلياً في جوار النقطة الشاذة، حيث نقوم بتحليل مصفوفة جاكوبي المرتبطة بالنظام لتحديد نوع النقطة: عقدة، بؤرة، سرج، أو مركز. يسمح هذا التصنيف بالتنبؤ بالاستقرارية والسلوك المحلي للنظام دون الحاجة إلى حل المعادلات صراحة.

لقد قمنا بدراسة عدة طرق تصنيف، من بينها الطريقة الطيفية (القيم الذاتية)، وطريقة الأثر والمحدد، إضافة إلى الخطية المحلية. وقد تم توضيح كل نوع بنماذج تطبيقية وتمثيلات بيانية، مع تقديم تطبيق عملي يبرز فعالية هذه الأدوات في تحليل الأنظمة الديناميكية.

الكلمات المفتاحية: نظام تفاضلي، نقاط شاذة، تصنيف النقاط الشاذة، الاستقرار، القيم الذاتية، التخطي الخطي، التصنيف الطيفي.

Abstract

The aim of this work is to study the local classification of singular points in planar differential systems, with a focus on the qualitative analysis of the behavior of solutions near equilibrium points.

Our approach is based on local linearization around the singular point. By analyzing the Jacobian matrix, we determine the nature of the point—whether it is a node, focus, saddle, or center. This classification enables us to predict the local stability and dynamics of the system without solving the differential equations explicitly.

Several classification methods have been explored, including the spectral method (based on eigenvalues), the trace and determinant method, and local linearization. Each configuration was illustrated with concrete examples and phase portraits, and a practical application was presented to demonstrate the effectiveness of these tools in the qualitative study of dynamical systems.

Keywords : differential systems, singular points, classification of singular points, stability, eigenvalues, local linearization, spectral classification.