

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA

FACULTE de Technologie
DEPARTEMENT de Génie Mécanique
N° :



DOMAINE : Science Technologique
FILIERE : Génie Mécanique
OPTION : Fabrication mécaniques

Mémoire présenté pour l'obtention
Du diplôme de Master Académique

Par:

- Messaoudi Mohamed Dia Elhak
- Baghdadi Zin El abiddine

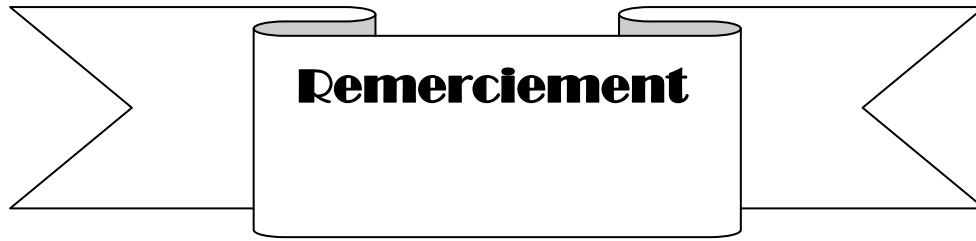
Intitulé

**Modélisation du comportement dynamiques d'une poutre
revêtue par pastilles piézoélectriques**

Soutenu devant le jury composé de:

Latrache M	Université de M'sila	Rapporteur
Benhamadouche L	Université de M'sila	Président
Benarioua Y	Université de M'sila	Examineur
Zemmamouche R	Université de M'sila	Examineur

Année universitaire : 2018/2019



Remerciement

Tout d'abord je remercie dieu le tout puissant qui m'a donné la volonté, le courage et l'audace pour réaliser ce modeste travail.

*Je remercie vivement, Mon encadreur **Latrache mohamed** pour avoir assuré la direction de ce travail, et pour m'avoir apporté rigueur scientifique nécessaire à son bon déroulement, Ses compétences et ses bonnes directives*

m'ont aidé à achever ce mémoire de master. Merci aussi pour son attention et ses exigences pendant la période de rédaction du mémoire

*Je remercie également monsieur le président de jury **benhamadouche L** et le examinateur Monsieur **Benarioua Y** et **Zemmamouche R** d'avoir acceptées d'examiner mon travail.*

Je remercie les enseignants de la faculté de technologie de M'sila, et en particulier les enseignants de département de génie mécanique.

Mes vifs remerciements s'adressent également à toute personne qui a contribué à ma formation ou participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

إهداء

برا و إحسانا و امتنانا بالجميل اهدي هذا العمل المتواضع إلى :
إلى والدي الكريمين أمي وأبي اللذين , من كانا سببا في وجودي
ربياني و علماني صغيرا

إليك أبي اهدي ثواب صنيعتي واليك يا أمي ثوابها يرجع
فلولاكما ما كنت اقرأ و اكتب ولا كنت اسعي في الوجود و ارتع
فجزاكما الإله خيرا فإنني لشكركما ابغي وفي الرضا اطمع
واسأل الله أن يحفظ أمي و يطيل في عمرها و يبارك في حياتها ,
وان يرحم أبي برحمته الواسعة و يسكنه فسيح جناته وان يجعل هذا
العمل في ميزان حسناتهما

إلى كل إخوتي و أحبائي سائلا الجواد أن يهديهم إلى كل خير وان
يصرف عنهم كل سوء و شر
محمد ضياء الحق مسعودي

الاهداء

بسم الله و الصلاة و السلام على رسول الله

بحول الله وقوته و توفيقه أتممنا هذه المذكرة ... مذكرة للتخرج و نيل شهادة الماجستير انشاء الله و على هذا الأثر الطيب امدي هذا العمل المتواضع و البسيط لامى العزيزة (نوبيه فاطمة) و أبوي الشريف (بغدادى عبد الرحمان) اللذان لهما الفضل الأكبر فيما وصل به اليه هاخرنا لهما جعلهما لي الرجل الفخور الذي حرس عليه و اسأل الله إن يجعل هذا المنصب ذخرا لهما و تهربنا لمقامهما العظيم عندي ولو جمع كل علماء الامتازان ما وفق قدركو يا أمزاني دمتو سالمين لي يا رب... قد تظنين إنني نسيك لكك في بال ما حبيب و إنك الطيب باق لا يزول اخس بالشكر أيضا لك جدتي الفاخلة (القائمة) رحمما الله و اسكنها نوح جناه طيبة أبك و خاليتي ... كنه الحرفه إنني سأل إلى هذه اللحظة يا جدتي لكن عالم أكن الحرفه انك لن تكوني بجانبى و تفرحي معي لكن ما حرك انك في مكان أعلى و احرفه عند ملك مقتدر... لم ولن أنساك ما حبيب هاخرنا أمي الثانية و تممك الله برحمته... و اخس بجزيل الشكر استاذي المشرف الدكتور محمد لطرف الذي لم يجهل علينا بأي معلومة كانه او جمد كنه خير مشرف لنا فشكروا لكل إنسان قدر محتوه و سويل في هذه الحياة مسيرا كان أم مخير لكل إنسان نصيبه من الأصدقاء لكن بالنسبة لي املك الكثير من الإخوة و اشكر الجامعة في أمر واحد و هو أنما جمع شملنا خس بالذكر زميلي في المذكرة مسعودي محمد ضياء الحق و رفيقا الكفاح و حديقنا العمر و اخوي الذي لن نجهه أمي الروجي فؤاد شان و بوغزارة جمال الدين تيرى يا جمال تيرى و جاري خلطي و لا ننسى دفعة تخرجي في الهندسة الميكانيكية المصابل لسنة 2018-2019 أشكركو من القلب على هذه السنوات الرائعة و المليئة بالذكريات طوال خيال الإقامة . و كما يقولون العبرة في الخواتيم اشكر الجميع بدون استثناء لي عائلتي و أصدقاء الطفولة و الكهولة و عرشي الحملات و كل من كان صاحب فضل علي اللما جعل هذه الخاتمة الطيبة لهداية لحلم جميل عنوانه النجاح ارب .

الطالب بغدادى زين العابدين

Liste de figure

Chapitre I :

Figure I.1 : Plan Σ	1
Figure I.2 : Représentation d'une poutre droite dans le repère (0, 1, 2, 3).....	2
Figure I.3 : Le domaine Ω étudié et une section droite S.....	5
Figure I.4 : Schématisation de la poutre par sa ligne moyenne et sa section.....	5
Figure I.5 : Conservation de l'angle droit entre la section et la ligne moyenne.....	6
Figure I.6 : Composantes du torseur des efforts internes : résultante à gauche, moment à droite.....	8
Figure I.7 : Conséquences du principe d'action réaction sur la résultante des efforts internes, pour deux sections en vis-à-vis.....	10
Figure I.8: Poutre droite à plan moyen, section symétrique.....	10
Figure I.9 : Passage du milieu 3D a la poutre droite : système d'efforts et champ de déplacement virtuel.....	12
Figure I.10 : Poutre droite sur appui simple.....	16
Figure I.11: Vibrations libres d'une poutre bi-encastree.....	18
figure I.12: Poutre droite encastree-libre en flexion.....	18
Figure I.13: Tracés des fonctions utilisées pour résoudre l'équation (L).....	20
Figure I.14: Déformation d'une poutre en flexion.....	24
Figure I.15 : Rotation et courbure.....	26
Figure I.16: Élément de poutre plane.....	27

Figure I.17 :Élément de poutre plan echargé uniformément.....	30
Figure I .18: Coupe d'une cellule élémentaire d'un cristal de quartz sous l'action d'un effort mécanique.....	33
Figure I.19:Organigramme des 32 classes cristallines.....	34
Figure I.20 : Microstructure typique d'une surface céramique.....	35
Figure I.21: Notation tensorielle utilisée dans les équations. (l'axe de polarisation est 3).....	41

Chapitre II :

Figure II.1: Système de coordonnées, numérotation des couches et des tronçons de la poutre stratifiée.....	47
Figure II.2: Champ de déplacement de la poutre en traction / flexion.....	48
Figure II.3: Pastille piézoélectrique métallisée : champ électrique E, charge électrique Q contenue à la surface de l'électrode supérieure, différence de potentiel V aux bornes de la pastille.....	50
Figure II.4 :Équivalent électrique de la pastille piézoélectrique.....	51

Chapitre IV :

Figure IV .1 : géométrie de la poutre étudiée.....	58
Figure IV.2 : élément type« solide 5 ».....	59
figure IV .3 (a , b) : un maillage de la poutre de base.....	60
figure IV.4 (a ,b) fixation des nœuds de l'extrême droite de la poutre.....	61
Figure IV.5 :Six premiers fréquences naturelles de vibration libre de la poutre.....	65
Figure IV .6 : géométrie de la poutre intelligente.....	66
Figures IV .7 : maillage de la poutre intelligente.....	67
Figures IV .8(a,b) : Deux pastilles piézoélectriques collés symétriquement sur la poutre.....	68

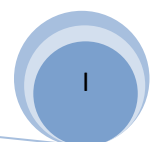
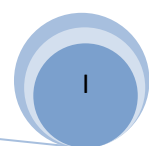


Figure IV .9 : couplage électromécanique sur les nœuds communs.....	69
Figure IV.10: la poutre intelligente.....	69
Figure IV .11 : couplage électromécanique entre les la poutre et les deux pastilles.....	70
Figure IV.12 : Six premiers modes de vibration libre de la poutre intelligente.....	73
Figure IV.13 : Réponse harmonique de la poutre de base et la poutre intelligente.....	75



Liste de tableau

Chapitre I :

Tableau I.1 :Correspondances des équilibres dynamiques d'un milieu continu et d'une poutre droite a plan moyen chargée dans ce plan.....15

Tableau I.2 :Pulsations propres de vibrations d'une poutre uniforme pour différentes conditions aux limites : $\omega_1^2 = \lambda^4 \frac{El}{\rho s l^4} = \lambda^4 \frac{El}{ml^3}$ 20

Tableau I.3: Modes de résonance fondamentaux pour matériaux piézoélectriques.....44

Chapitre IV :

Tableau IV.1 : propriétés mécaniques de la poutre de basse.....59

Tableau IV .2 : Six premiers fréquences naturelles de vibration libre de la poutre.....62

Tableau IV.3 : propriétés des matériaux piézoélectrique PZT5A.....66

Tableau IV.4 : Six premières fréquences naturelles de la poutre intelligente.....70

Tableau IV.5 : fréquences naturelles de la poutre de basa et la poutre intelligente.....74

Sommaire

Liste figure	I
Liste tableau	II
Introduction General.....	III

Chapitre I : Généralité et synthèse bibliographique

I -1»Introduction.....	1
I -2»Mécanique des structures.....	2
I-2-1)Historique.....	2
I-2-2) Introduction.....	4
I-2-3) Définitions.....	4
I-2-4) Hypothèses cinématiques.....	5
I-2-5) Déformations.....	7
I-2-6) Contraintes intégrées - Efforts internes.....	7
I -3 »Vibration des poutres.....	10
I -3 -1) Introduction.....	10
I -3-2)équations de la dynamique des poutres droites a plan moyen.....	13
I -3-3) Vibrations libres d'une poutre en flexion simple.....	16
I -3-4) Modes et fréquences propres.....	16
A)Poutre sur appuis simples.....	16
B)Poutre bi-encastree.....	17
C)Poutre encastree-libre - methode generale.....	18
I -4 »La methode des elements finis.....	21
I -4-1)Histoire.....	21
I -4-2)Introduction.....	23
I -4-3) Elements de Poutre a deux Noeuds.....	23
A) matrices de rigidite elementaire en repere local.....	27
*Champ de deplacement axial $u(x)$	27
*Champ de deplacement transversal $v(x)$	27
*Champ de deformation.....	28
*matrice de rigidite elementaire.....	29
B) matrices de rigidite elementaire en repere global.....	29
C)Vecteur Charges exprime en repere local.....	30
D)Calcul des efforts internes en repere local.....	31
I -5» Matériaux piézoélectriques.....	32

I -5-1)Historiques	32
I -5-2) Définition matériaux piézoélectriques	32
I -5-3)Principales catégories de matériaux piézoélectriques Cristaux.....	32
A)Effet direct.....	33
B)Effet inverse	33
I -5-4) Propriétés générales des PZT	34
A) Liaisons chimiques.....	35
B) Microstructure	35
I -5-5) Certain Matériaux piézoélectriques.....	35
I -5-6) Applications des Matériaux piézoélectriques.....	37
I -5-7) Types et synthèse des matériaux piézoélectriques	39
I -5-8) Equations de la piézoélectricité.....	40
I -5-9)Modes de la réponse piézoélectrique	42
A)Couplage électromécanique	44
B)Facteur de qualité mécanique	45

Chapitre II : Analyse semi-analytique d'une poutre

II -1 »introduction :	46
II -2»Formulation générale :.....	46
II -2-1) Géométrie :	46
II -2-2) Hypothèses mécaniques :.....	48
II -2-3) Hypothèses électriques :	50
II -2-4) Réduction de la loi de comportement :	50
II -2-5) Grandeurs généralisé.....	50

Chapitre III : Equation général de couplage électromécanique

Equation général de couplage électromécanique.....	53
--	----

Chapiter IV : sumilation numirique

IV-1 » Introduction.....	58
IV-2 » Présentation de ANSYS	58
IV-3» Fréquences et modes propres de poutre sans piézo.....	58
IV.3 .1) définition de la géométrie du modèle	58
IV.3.2) Définition des données caractérisant le modèle	59
IV.3. 3)Choix d'élément	59

IV.3 .4)Maillage.....	59
IV.3.5) Condition aux limites : Encastrement – libre	61
IV.3.6)Analyse modale	62
IV-4»Modélisation de la poutre équipée par deux pastilles piézoélectriques	65
IV.4.1)Définition de la géométrie du modèle	65
IV.4.2) Propriétés mécanique.....	66
IV.4.3) Choix d'élément.....	67
IV.4.4) maillage	67
IV.4.5) Condition aux limites : Encastrement – libre	68
IV.4.5) la couplage.....	69
IV.4.6) Type d'analyse Modale	70
IV-5 » la comparaison de la fréquence de vibration d'un poutre sans pzt et un poutre avec pzt	74
IV-6 » Réponse harmonique de la poutre de base et la poutre intelligente.....	74
Conclusion général.....	IV
Notifications.....	V
Référence.....	VI
Résumé	

Introduction Général

Ces dernières années ont vu l'apparition de nombreux développements dans le domaine des structures dites intelligentes, c'est-à-dire des structures intégrant des capteurs et des actionneurs couplés à un ordinateur et capables de réagir aux stimulations extérieures. Parmi les nombreux types de matériaux qu'on peut trouver, les matériaux piézoélectriques présentent des caractéristiques remarquables. Grâce à leur aptitude de conversion électromécanique et à leur faible encombrement, l'utilisation de transducteurs piézoélectriques ouvre la porte à un vaste choix d'applications en dynamique des structures.

L'objectif principal de cette étude est de mettre en évidence et d'exploiter les propriétés des matériaux piézoélectriques, sous la forme de pastilles piézoélectriques dans le cadre de l'analyse modale avec la simulation numérique par le cde éléments finis ANSYS apdl et d'étudier ainsi la réponse de la poutre de base et la poutre intelligente.

Cette étude en quatre parties a pour objet la simulation des structures utilisant des éléments piézo-électriques.

La première partie s'attache à rassembler les principes fondamentaux nécessaires à la compréhension des phénomènes mis en jeu. Des exemples d'applications sont présentés.

La deuxième partie est consacrée à la formulation semi analytique de la piézoélectricité

La troisième partie introduit la formulation élément finie du phénomène électromécanique entre la structure de base et les pastilles piézoélectriques.

La quatrième et dernière partie présente une simulation et une modélisation numérique de poutre intelligente.



Chapitre I :

***Généralité et synthèse
bibliographique***

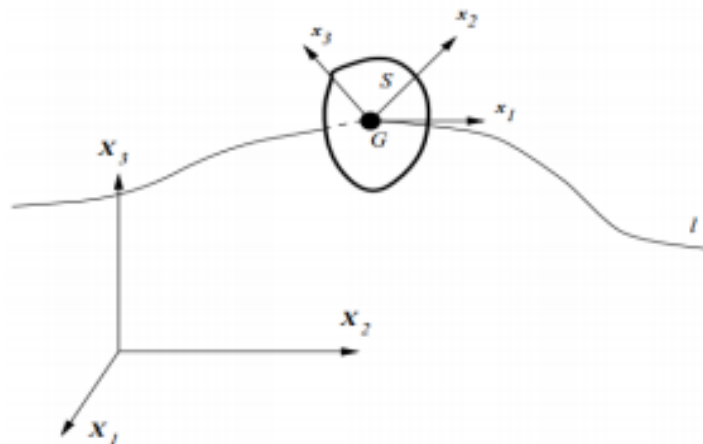
I -1»Introduction :

Déf 1 : On appelle poutre un solide engendré par une surface plane (Σ) qui peut être variable et dont le centre de gravité G décrit un segment $[AB]$, le plan de (Σ) restant perpendiculaire à cette courbe. Il faut également que la longueur AB soit grande devant les dimensions des sections transverses [2].

Une poutre est une membrure mince soumise à des charges transversales généralement normales à son axe. La poutre est l'élément structural le plus répandu, puisqu'elle fait partie intégrante de la plupart des ouvrages de construction ou des pièces machines. Une poutre est un solide engendré par une aire plane S qui est déplacée dans l'espace de manière que durant son mouvement, le centre de gravité G de la section S parcourt une ligne donnée L , et que l'aire se maintienne constamment normale à cette surface. La ligne L est appelée fibre moyenne de la poutre. Une poutre est caractérisée géométriquement par :

- une section S suffisamment massive .
- une longueur selon L grande devant les dimensions transversales.
- un rayon de courbure de L grand devant les dimensions transversales.
- un profil sans discontinuité.

La théorie élastique des poutres est basée sur celle des milieux curvilignes. Une position sur la poutre sera caractérisée uniquement par l'abscisse curviligne l d'un point sur la fibre moyenne L

Figure I.1 : Plan Σ

Une poutre est donc un milieu continu ayant une dimension très grande par rapport aux deux autres figures (I.2). Pour que la théorie du poutre soit applicable il faut que les

sections droites soient lentement variables ou constantes en fonction de l'abscisse curviligne, et que la plus grande dimension de la section droite soit petite devant le rayon de courbure et la longueur de la poutre.

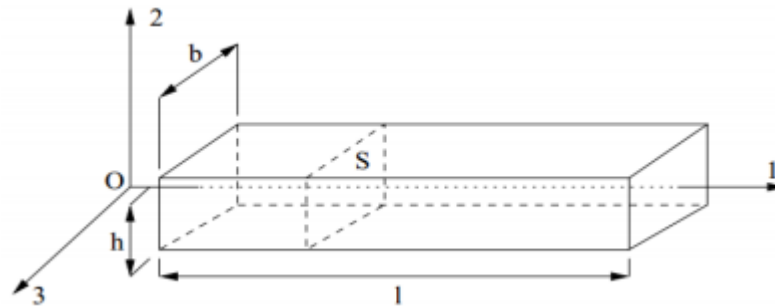


Figure I.2 : Représentation d'une poutre droite dans le repère (0, 1, 2, 3)

Déf 2 : Contraction des mots grec piézein (pression) et électron, la piézoélectricité est la capacité de certains matériaux (cristaux, céramiques, polymères ou composites) de pouvoir transformer une énergie mécanique en une énergie électrique (et vice-versa).[6]

Dans cette chapitre étudie la poutre avec la module mécanique de structures et la vibration de poutre et la poutre dans la milieu élément finis et elle définie le matériaux piézoélectrique et les équation de couplage..

I -2»Mécanique des structures :

I-2-1)Historique :

La Mécanique des Structures est une discipline très ancienne, qui s'est développée pour répondre à des besoins de construction, initialement dans le domaine du Génie-Civil. Elle repose sur l'utilisation de modèles simplifiés, qui vont permettre l'analyse des structures de façon rapide.

Ces modèles exploitent une caractéristique essentielle des structures qui sont des solides déformables tridimensionnels : leurs trois dimensions ne sont pas du même ordre de grandeur. Il y a ainsi deux catégories de structures.

– les structures minces dont une dimension (l'épaisseur) est très petite devant les deux autres, et qui sont appelées plaques ou coques selon que leur surface moyenne est plane ou non .

– les structures élancées dont une dimension (la longueur) est très grande devant les deux autres, et qui sont appelées poutre ou arc selon que leur ligne moyenne est droite ou non.

Ces structures constituent aujourd’hui l’immense majorité des structures industrielles, et ce dans tous les domaines : aéronautique, automobile, construction ferroviaire et navale, génie civil, etc. Ces deux types de structures sont aussi souvent combinés entre elles, par exemple en renforçant des plaques par des poutres. La popularité de ces structures vient du fait qu’elles présentent des propriétés optimales en termes de raideur et de résistance, vis-à-vis de la quantité de matière utilisée. A contrario, les solides déformables massifs, c’est-à-dire avec des longueurs comparables dans les trois dimensions de l’espace, sont très peu utilisés.

La théorie de la Mécanique des Structures a été initiée au 17^{ème} siècle, donc bien avant la Mécanique des Milieux Continus dont le formalisme actuel a été mis au point au début de la 2^{ème} moitié du 20^{ème} siècle. Les modèles simplifiés développés sont assis sur des hypothèses a priori validées à l’époque par l’expérience. Ce n’est seulement que dans la 2^{ème} moitié du 20^{ème} siècle que ces modèles ont été justifiés a posteriori. En effet, les mathématiciens appliqués ont démontré leur bien fondé, au sens asymptotique du terme. Ainsi, lorsque la minceur d’une structure tend vers 0 ou son élancement vers l’infini, la différence entre la solution du problème de l’élasticité tridimensionnelle et du modèle simplifié tend vers 0. Ces modèles simplifiés sont respectivement le modèle de Love-Kirchhoff pour les plaques, et celui de Navier-Bernoulli pour les poutres.

C’est à ce dernier modèle qu’est consacré ce document qui traite donc de la mécanique des structures élancées. L’exposé débute par un rappel de la théorie de l’élasticité linéaire, dans le cadre de la Mécanique des Milieux Continus tridimensionnelle. Dans ce contexte est ensuite abordée la résolution analytique de problèmes posés sur une structure tridimensionnelle élancée (problèmes dits de Saint-Venant). L’objectif est ici de disposer de résultats de référence pour guider la construction du modèle simplifié. La théorie de poutre de Navier-Bernoulli est alors présentée, avec la volonté délibérée de monter le parallèle avec la Mécanique des Milieux Continus tridimensionnelle. Enfin, deux chapitres courts concernent l’illustration de la théorie sur des structures treillis et sur des problèmes de flexion plane.

Ce document est naturellement amené à évoluer, au gré des remarques et commentaires des lecteurs qui sont les bienvenus. Il s’enrichira également dans une prochaine version de la présentation du flambement et des vibrations des poutres.[1]

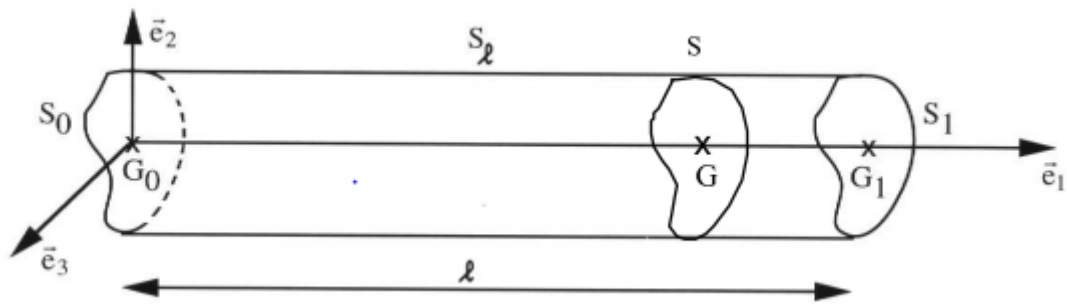
I-2-2) Introduction :

Le problème de Saint-Venant, étudié précédent, bien que simple par sa géométrie et ses conditions aux limites (ces dernières étant définies par un torseur d'efforts sur les sections extrêmes), donne lieu à des calculs fastidieux avec une approche tridimensionnelle. Il serait donc très utile de proposer une modélisation simplifiée des poutres (classiquement appelée Résistance des Matériaux) pour obtenir rapidement les informations jugées essentielles (déformée, répartition des contraintes) sous l'action d'efforts extérieurs connus globalement. Il s'agit donc de réaliser le passage d'une modélisation tridimensionnelle à une schématisation monodimensionnelle. De ce fait, le formalisme de l'élasticité linéaires et ses équations aux dérivées partielles va se transformer en un système d'équations différentielles. Il en résulte un gain énorme sur le temps de résolution du problème, au prix de quelques approximations qui seront soulignées ci-après.

Pour effectuer cette simplification $3D \rightarrow 1D$, les résultats obtenus sur le problème de Saint-Venant vont largement être exploités, et extrapolés à des situations plus générales (c'est-à-dire pour d'autres types de chargement et de conditions aux limites). Le cadre de travail est donc le même que dans les chapitres précédents, à savoir celui des petites perturbations. D'autre part, la structure étudiée est supposée constituée d'un même matériau, à comportement élastique isotrope. [2]

I-2-3) Définitions :

L'étude concerne des structures élancées, encore appelées poutres, qui ont la caractéristique géométrique d'avoir une dimension très supérieure aux deux autres. Selon la grande dimension, la poutre est assimilée à une courbe correspondant à sa ligne moyenne. Transversalement à celle-ci est définie la section S de la poutre, dont le centre de surface appartient à la ligne moyenne. Dans ce chapitre, l'exposé est limité aux poutres dont la ligne moyenne est une droite. [2]

Figure I.3 : Le domaine Ω étudié et une section droite S

I-2-4) Hypothèses cinématiques :

Pour définir le déplacement de la poutre dans le cadre d'une modélisation 1D, il est prévisible que des hypothèses sur la déformation des sections seront nécessaires, afin de "gagner" deux dimensions. Or, pour le problème de Saint-Venant, il a été remarqué qu'excepté pour le cas de la torsion, une bonne approximation de la déformation de la section de la poutre pouvait être obtenue en considérant que celle-ci subissait un mouvement d'ensemble (i.e. de solide rigide), qui après déformation la maintient perpendiculaire à la ligne moyenne. Ceci conduit à la formulation de l'hypothèse de Navier-Bernoulli. [2]

Hypothèse de Navier-Bernoulli : toute section droite d'une poutre subit un déplacement de solide rigide qui la maintient perpendiculaire à la ligne moyenne déformée. [2]

L'interprétation graphique de la décomposition de la poutre en sa section et sa ligne moyenne est donnée figure 1.2.

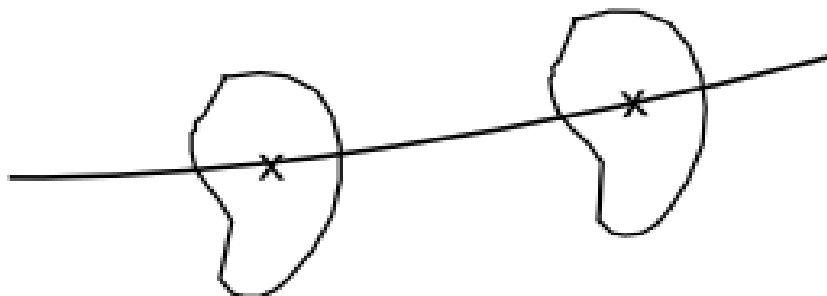


Figure I.4 : Schématisation de la poutre par sa ligne moyenne et sa section

La cinématique de la section est donc régie par 6 degrés de liberté. Les 3 degrés de liberté de translation sont définis par les composantes u , v et w du déplacement \vec{u}_G du centre

de surface G de la section. Ainsi, pour un point M quelconque appartenant à la section de centre de surface G , avec

$\vec{GM} = x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$ le déplacement de solide rigide de la section se traduit par ;

$$\vec{u}_M = u_G + \vec{\theta} \wedge \vec{GM} \rightarrow \{\vec{u}_M\}_{\{\vec{e}_i\}} = \begin{cases} u(x_1) - x_2 \theta_3(x_1) + x_3 \theta_2(x_1) \\ v(x_1) - x_3 \theta_1(x_1) \\ w(x_1) + x_2 \theta_1(x_1) \end{cases}$$

en notant $\vec{\theta}$ la rotation de la section. [2]

Pour le centre de surface de la section, les composantes du déplacement correspondent pour u au déplacement axial de la ligne moyenne, et aux déplacements transverses pour v et w . Ces derniers sont encore appelés flèches. [2]

La conservation de l'angle droit entre la section et la ligne moyenne conduit aux relations

$$\begin{cases} \theta_3 = v_{,1} \\ \theta_2 = -w_{,1} \end{cases}$$

Cette relation est illustrée dans le plan (\vec{e}_1, \vec{e}_2) ;

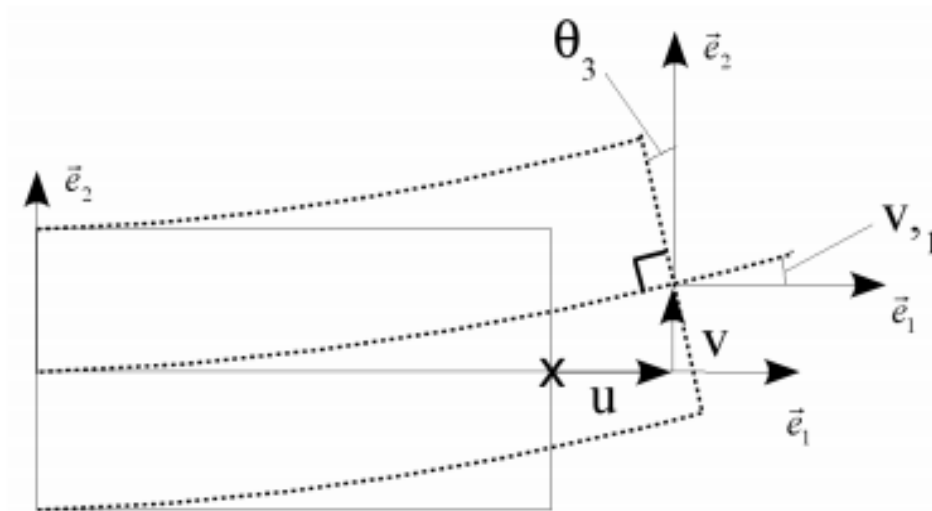


Figure I.5 : Conservation de l'angle droit entre la section et la ligne moyenne

La rotation θ_1 , quant à elle, ne peut être reliée au déplacement de la ligne moyenne.

Finalement

$$\{\vec{u}_M\}_{\{\vec{e}_i\}} = \begin{cases} u(x_1) - x_2 v_{,1}(x_1) + x_3 w_{,1}(x_1) \\ v(x_1) - x_3 \theta_1(x_1) \\ w(x_1) + x_2 \theta_1(x_1) \end{cases}$$

La comparaison de ce champ avec la solution élastique 3D du problème de Saint-Venant fait apparaître une approximation, conséquence directe de l'hypothèse de mouvement de solide rigide de la section : ses changements de forme sont négligés. Ceux-ci peuvent être décomposés en deux parties : ceux qui ont lieu dans le plan de la section, et ceux qui se produisent en dehors de celui-ci, et qui correspondent au gauchissement. Les premiers d'entre eux peuvent effectivement être négligés si la poutre est suffisamment élancée. Quant au gauchissement, qui peut être dû à la torsion ou à la flexion simple, il peut se calculer en résolvant un problème local sur la section de la poutre, sans qu'il soit utile de le prendre en compte dans la modélisation globale de la poutre. Pour finir, il convient de remarquer que pour ces deux sollicitations, la cinématique définie par I.5 permet d'obtenir les déplacements et rotations d'ensemble de la section. [2]

I-2-5) Déformations :

Le champ de déplacement étant connu, le champ de déformation s'en déduit simplement, grâce à la partie symétrique de son gradient, puisque le cadre adopté est celui des petites perturbations. Le gradient est donné par : [2]

$$\overline{\text{grad}} \vec{u} = \vec{u}_{,i} \otimes \vec{e}_i$$

Et l'expression des déformations devient ;

$$\bar{\bar{\epsilon}}_{\{\vec{e}_i\}} = \begin{bmatrix} \vec{u}_{,i} - x_3 w_{,11} - x_2 v_{,11} & -\frac{1}{2} x_3 \theta_{1,1} & \frac{1}{2} x_2 \theta_{1,1} \\ \text{sym} & 0 & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

I-2-6) Contraintes intégrées - Efforts internes :

Comme il a été déjà mentionné à plusieurs reprises, la théorie simplifiée de poutre est une théorie globale, dans laquelle les effets locaux sont négligés ou restitués à une échelle supérieure. Ainsi, pour la cinématique, les déformations d'une section dans son plan ne sont pas représentées dans la théorie, qui ne retient que les mouvements de solide rigide de celle-ci, qui peuvent s'interpréter comme ses mouvements globaux. De façon analogue, la modélisation adoptée pour les efforts internes consiste en une représentation globale. C'est

ainsi que les efforts internes, définis sur la section, sont décrits par un torseur pris en son centre de surface. Notons que cette définition est tout à fait cohérente avec le principe de Saint-Venant, cf. section 1.5, qui est largement utilisé dans les modèles à base de poutres, dans lesquels les sollicitations extérieures sont définies globalement. [2]

Une façon classique de faire apparaître ce torseur des efforts internes consiste à décomposer artificiellement une poutre en 2 parties, notées 1 et 2, grâce à une coupure selon une section S. Les efforts intérieurs sur la section S de normale extérieure e_1 sont les efforts exercés par la partie 2 sur la partie 1, et leur torseur est noté $T_{1 \rightarrow 2}$. De même, lorsque c'est la normale extérieure $-e_1$ qui est considérée, le torseur des efforts intérieurs est noté $T_{1 \rightarrow 2}$ et en vertu du principe d'action-réaction, $[T_{2 \rightarrow 1}] = -[T_{1 \rightarrow 2}]$ si aucune sollicitation n'est exercée sur la section S. [2]

Le torseur $[T_{2 \rightarrow 1}]$ sera dorénavant noté $[T_{int}(x_1, e_1)]$ la notation (x_1, e_1) indiquant de façon explicite la dépendance de ce torseur à l'abscisse de la section, et à l'orientation de sa normale extérieure. Ainsi, $[T_{1 \rightarrow 2}]$ aura pour expression $[T_{int}(x_1, -e_1)]$ [2]

Le torseur des efforts intérieurs se décompose en une résultante $\vec{R}_{int}(x_1, \vec{e}_1)$ et un moment résultant au centre de surface $\vec{M}_{int}(x_1, \vec{e}_1)$. La projection de la résultante et du moment résultant sur la normale à la section et dans le plan de la section conduit aux définitions suivantes ($:=$ indique une définition). L'illustration est donnée figure I.6, où les moments sont représentés par des flèches doubles. [2]

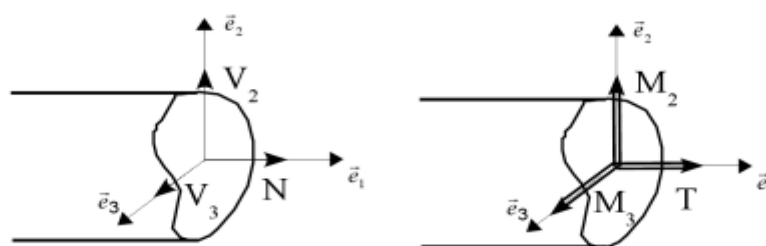


Figure I.6 : Composantes du torseur des efforts internes : résultante à gauche, moment à droite

$$\begin{cases} \vec{R}_{int}(x_1, \vec{e}_1) = N\vec{e}_1 + \vec{V} = N\vec{e}_1 + V_2\vec{e}_2 + V_3\vec{e}_3 \\ \vec{M}_{int}(x_1, \vec{e}_1) = T\vec{e}_1 + \vec{M} = T\vec{e}_1 + M_2\vec{e}_2 + M_3\vec{e}_3 \end{cases}$$

Avec :

- N : effort normal
- V : effort tranchant
- T : moment de torsion
- M : moment de flexion (ou moment fléchissant)

Il est facile de relier ces quantités aux contraintes. En effet, dès lors que la poutre est décomposée en deux tronçons, apparaît sur sa section une distribution surfacique d'efforts qui par définition correspond au vecteur contrainte $\vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{T}(\mathbf{M}, \vec{n})$ ($\vec{T}(\mathbf{M}, \vec{n})$ ne doit pas être confondu avec T qui représente le moment de torsion), \vec{n} est la normale extérieure. Celle-ci vaut \vec{e}_1 pour la partie 1 (respectivement $-\vec{e}_1$ pour la partie 2). Le torseur des efforts internes est donc simplement le torseur résultant du vecteur contrainte, soit pour la résultante[2]

$$\vec{R}_{int}(x_1, \vec{e}_1) = \int \vec{T}(x_1, \vec{e}_1) dS = \begin{Bmatrix} N \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \int \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} dS$$

et pour le moment résultant

$$\vec{M}_{int}(x_1, \vec{e}_1) = \int \overline{GM} \wedge \vec{T}(x_1, \vec{e}_1) dS = \begin{Bmatrix} T \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \int \begin{Bmatrix} x_2 \sigma_{31} - x_3 \sigma_{21} \\ x_{23} \sigma_{11} \\ -x_2 \sigma_{11} \end{Bmatrix} dS$$

Ces relations jouent le rôle de la relation de Cauchy $\vec{T} = \vec{\sigma} \cdot \vec{n}$ pour un milieu continu tridimensionnel. Elles peuvent être écrites de façon synthétique sous la forme[2]

$$\begin{cases} \vec{R}_{int}(x_1, n\vec{e}_1)_{\vec{e}_i} = n \begin{Bmatrix} N \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} \\ \vec{M}_{int}(x_1, n\vec{e}_1)_{\vec{e}_i} = n \begin{Bmatrix} T \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} \end{cases} \quad \text{avec } n = \pm 1$$

ce qui est interprété graphiquement figure

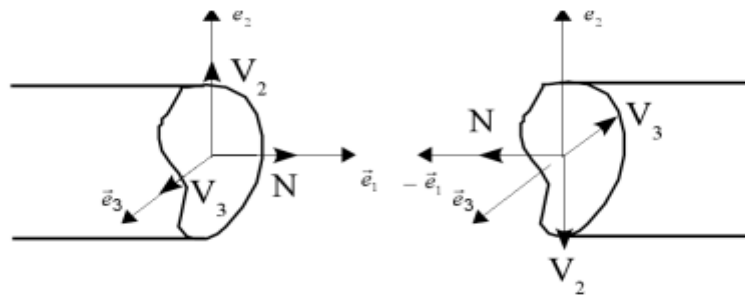


Figure I.7 : Conséquences du principe d'action réaction sur la résultante des efforts internes, pour deux sections en vis-à-vis

I-3 »Vibration des poutres :

I-3 -1) Introduction :

La notion de structure est donc essentielle à l'ingénieur. Par des considérations géométriques, un problème 3D peut se ramener à un problème 2D ou 1D. Notamment, lorsque qu'une des dimensions d'un solide est grande vis à vis des autres, le problème 3D se réduit à un problème dit de poutre, tandis que si une des dimensions est très faible devant les deux autres, on se ramène à un problème de plaque pour les cas plans, et de coques pour les solides courbes. Les barres quant à elles sont les structures les plus simples, ce sont des poutres ne supportant que de la tension-compression. Pour plus de détails, on consultera des ouvrages de Résistance des Matériau et de Mécanique des Structures [3]

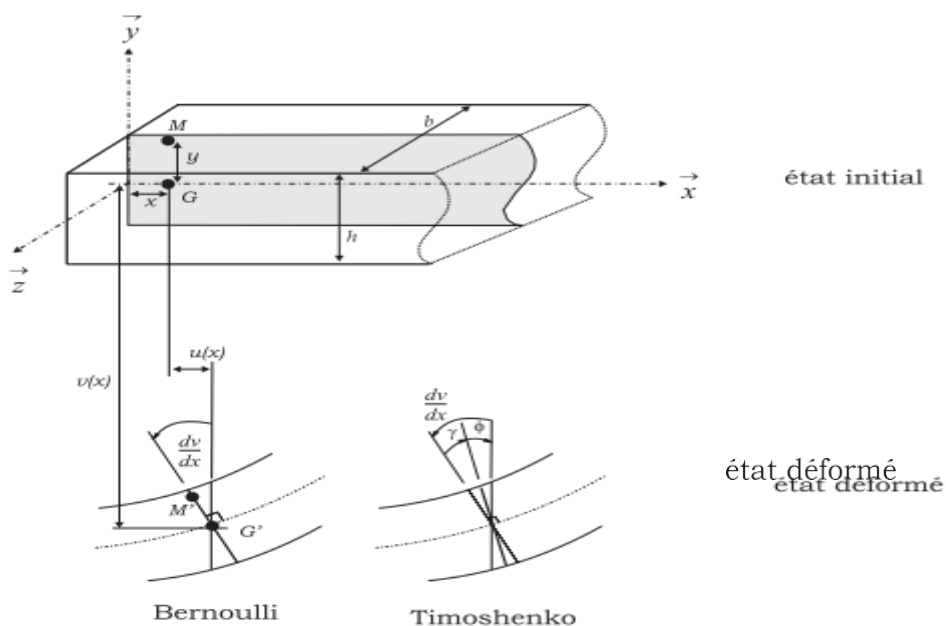


Figure I.8: Poutre droite à plan moyen, section symétrique

Considérons la poutre droite telle que représentée sur la figure I.8. L' étude de cette structure se ramène d'abord, par symétrie de la géométrie et des conditions aux limites cinématiques et statiques, à l'étude de son plan moyen. Ensuite, lorsqu'on observe les déplacements des points situés initialement sur une même verticale (en fait appartenant à un même section), on constate que ces points restent alignés. Ils tendent à se déplacer à la façon d'un corps rigide tournant autour du centre de gravité de la section, ce centre de section pouvant se déplacer dans le plan. Dans ce cas le déplacement de tout point d'une section est complètement décrit par la connaissance des déplacements du centre de section dans le plan et de la rotation de la section autour de la ligne moyenne joignant les centres de gravité de toutes les sections. [3]

Pour les poutres droites à plan moyen, le vecteur des déplacements d'un point M d'une section de la poutre représentée sur la figure I.8 est dans le cadre de la dynamique en HPP : [3]

$$\vec{u}(\vec{x}_M, t) = \begin{cases} u_M(\vec{x}_M, t) = u(\vec{x}, t) - y\phi(\vec{x}, t) \\ v_M(\vec{x}_M, t) = v(\vec{x}, t) \end{cases}$$

Donc les accélérations correspondantes s'écrivent :

$$\vec{\gamma}(\vec{x}_M, t) = \begin{cases} \ddot{u}_M(\vec{x}_M, t) = \ddot{u}(\vec{x}, t) - y\ddot{\phi}(\vec{x}, t) \\ \ddot{v}_M(\vec{x}_M, t) = \ddot{v}(\vec{x}, t) \end{cases}$$

Où la notation utilisée est définie par $\ddot{X} = \frac{\partial^2 X}{\partial t^2}$ De façon similaire, on définit les

dérivées partielles par rapport a x, $X' = \frac{\partial X}{\partial x}$ Finalement, la poutre droite a plan moyen est maintenant complètement représentée par sa ligne moyenne. Le champ de déplacement étant 1D, les conditions aux limites statiques et cinématiques doivent être modifiées en conséquence puisque les points matériels sont maintenant devenus des sections. Par exemple, les contraintes qui règnent dans le matériau ont été remplacées par les efforts internes, décrits par des forces et des moments résultant de l'intégration de σ_{xx} et σ_{yy} les seules composantes non nulles du tenseur des contraintes sur la section S de normale sortante \vec{x} (figure I.9) : [3]

$$\checkmark \text{ effort NORMAL } / \vec{x} \quad N(x,t) = \int_{S(x)} \sigma_{xx} (M, x, t) ds$$

✓ effort TRANCHANT / \vec{y} $T(x,t) = \int_{S(x)} \sigma_{xy} (M, x, t) ds$

✓ moment de FLEXION / \vec{z} $M(x,t) = \int_{S(x)} -y \sigma_{xx} (M, x, t) ds$

Pour ce qui est des conditions cinématiques, elles se réduisent aux degrés de liberté des sections, soit deux déplacements plans ($u(x), v(x)$) et une rotation ($\varnothing(x)$). Pour les efforts imposés, compte-tenu des degrés de liberté, ils sont supposés appliqués sur la ligne moyenne de la poutre grâce au principe de Saint-Venant. Les efforts volumiques sont maintenant des efforts linéiques représentés par trois efforts répartis. Les efforts ponctuels sont remplacés également par un torseur des efforts extérieurs caractérisé par des efforts et moments ponctuels (figure I.9). On notera que ces efforts dépendent maintenant du temps, la dynamique des poutres est donc une extension de la RdM 'classique'. [3]

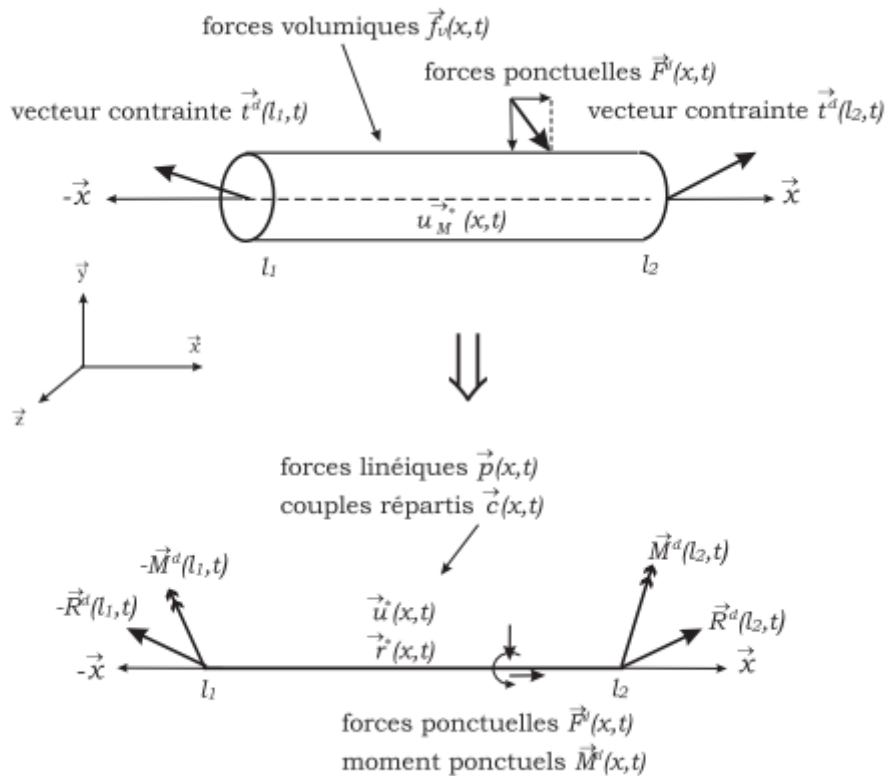


Figure I.9 : Passage du milieu 3D à la poutre droite : système d'efforts et champ de déplacement virtuel.

I -3-2)équations de la dynamique des poutres droites a plan moyen :

Nous nous intéresserons ici plus particulièrement aux vibrations libres des poutres droites a plan moyens chargées dans ce plan (en abrégé poutres droites, figure I.8), c'est à dire la réponse vibratoire caractérisée par les modes et pulsation propres. Comme nous l'avons vu dans le cas des systèmes discrets, ces caractéristiques intrinsèques aux structures considérées dépendent a la fois des caractéristiques mécaniques (rigidité = module d'Young E), géométriques (section S et moment quadratique par rapport a \vec{z} I) et de masse (masse volumique ρ_m) Dans la suite de cette partie concernant les poutres, on considérera ρ_m la masse volumique du milieu constitutif, et ρ la masse linéique 'apparente' de la poutre telle que $\rho = \frac{m_u}{S}$ avec m_u la masse unitaire et S la surface de la section transverse. La masse totale est donc $m = \rho S L$ si les propriétés sont indépendantes de l'abscisse. Cette définition de masse linéique apparente permet de traiter sans modifications complémentaires le cas de sections constituées de matériaux hétérogènes (empilement de composites) ou bien le cas des sections creuse spas exemple. [3]

Dans le cadre de la statique les équations des poutres quelconques peuvent se déduire, via le Principe des Puissances Virtuelles (et pas le PTV car ici les grandeurs physiques ne peuvent être intégrées simplement dans le temps), de la formulation générale de l'équilibre statique des milieux continus. Dans le cadre de la dynamique ,la démarche est similaire. Elle fait cette fois-ci intervenir les accélérations, c'est à dire les variations dans le temps des vitesses de déplacement des sections des poutres. Finalement, on peut également recourir à l'expression du principe de Hamilton ou aux équations de Lagrange. [3]

I -3-2-1)Equilibre a partir du PPV :

Dans un premier temps, on peut intégrer sur la section de la poutre la puissance virtuelle développée par le terme d'origine inertielle des équations de la dynamique des milieux continus :

$$\begin{aligned} \int_{\pi} \rho_m(\vec{x}) \vec{u}(\vec{x}, t) d\pi &= \int_0^L (\rho(x) [(\ddot{u} - y\ddot{\phi})(\delta u - y\delta\phi) + v\delta\ddot{v}]) ds \\ &= \int_0^L (\rho(x)s(x)\ddot{u}\delta u + \langle \rho l \rangle \phi\delta\phi + \rho(x)s(x)v\delta\ddot{v}) dl \end{aligned}$$

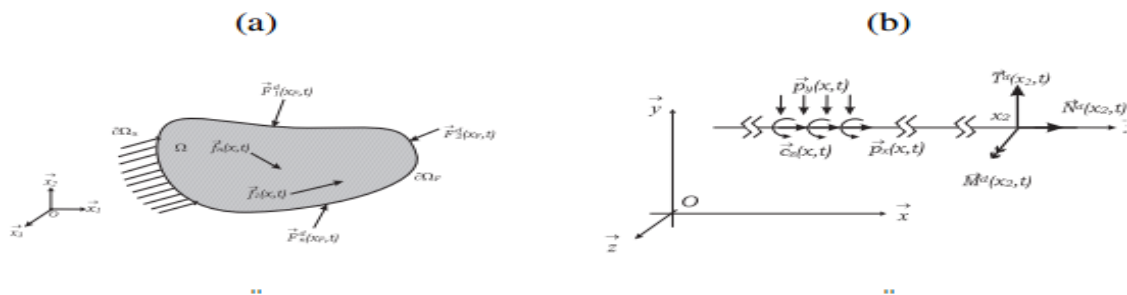
En substituant cette quantité dans le PPV, on aboutit après intégrations par parties en temps et en espace aux équations d'équilibre dynamique des poutres droites (tableau I.1-b). Dans la suite, pour alléger les notations et lorsqu'il n'y aura aucune ambiguïté, on notera les valeurs des grandeurs physiques au point \vec{x}_i avec l'indice i, et au temps t_j par l'exposant (j) [3]

I -3-2-2)équations de Lagrange :

Dans le cas des poutre droites, les équations de Lagrange peuvent être établies de façon générale. Considérons le cas des poutres de Bernoulli pour lesquelles la rotation des sections est directement égale a $v'(x)$ la pente de la ligne moyenne, c'est-à-dire sans cisaillement possible des sections (voir tableau I.1). Dans nos poutres qui possèdent comme composantes du champ de déplacement $u(x)$, $v(x)$, et $v'(x)$, l'énergie cinétique, l' énergie de déformation, et le potentiel des efforts donnés conduisent a l'expression du principe de Hamilton : [3]

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\vec{u}, \vec{\dot{u}}, t) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (\int_0^1 T(\vec{u}, \vec{\dot{u}}, t) - v_{ext}(\vec{u}, t) dl) dt \quad , \forall \delta \vec{u}(x) \text{ C.A.(0) et C.I.(0)}$$

$$\begin{cases} T(\vec{u}, \vec{\dot{u}}, t) = T(u, u', \dot{u}, v, v', v'', \dot{v}, \dot{v}', \dot{v}'') \\ w(\vec{u}, \vec{\dot{u}}, t) = w(u, u', v, v', v'') \\ T(\vec{u}, \vec{\dot{u}}, t) = T(u, u', v', v'') \end{cases}$$



<p>1/ Champ C.A. - C.I. :</p> $\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{u}^d(\vec{x}, t), \forall \vec{x} \in \partial\Omega_u, \forall t$ $\begin{cases} \vec{u}(\vec{x}, t_j) = \vec{u}^j \\ \dot{\vec{u}}(\vec{x}, t_j) = \dot{\vec{u}}^j \end{cases} \quad \forall \vec{x}$	<p>1/ Champ C.A. - C.I. :</p> $u(x_i, t) = u_i^d(t), v(x_i, t) = v_i^d(t),$ $\Phi(x_i, t) = \Phi_i^d(t), \forall t$ $\begin{cases} u(x, t_i) = u^j, v(x, t_i) = v^j, \Phi(x, t_i) = \Phi^j \\ \dot{u}(x, t_i) = \dot{u}^j, \dot{v}(x, t_i) = \dot{v}^j, \dot{\Phi}(x, t_i) = \dot{\Phi}^j \end{cases} \quad \forall \vec{x}$
<p>2/équilibre intérieur :</p> $\frac{\partial \sigma_{ij}(\vec{x}, t)}{\partial x_j} + f_i(\vec{x}, t) = \rho \ddot{u}_i(\vec{x}, t)$	<p>2/équilibre intérieur :</p> $\frac{\partial N(\vec{x}, t)}{\partial x} + P_x(x, t) = \rho S \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$ $\frac{\partial T(\vec{x}, t)}{\partial x} + P_y(x, t) = \rho S \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2}$ $\frac{\partial M(\vec{x}, t)}{\partial x} + T(x, t) + c_z(x, t)$
<p>3/équilibre au bord :</p> $\sigma_{ij}(\vec{x}, t) n_j(\vec{x}) = F_i^d(\vec{x}, t), \forall \vec{x} \in \partial\Omega_F$	<p>3/équilibre au bord :</p> $N(x_i, t) = N^t(t), v(x_i, t) = v^t(t),$ $M(x_i, t) = M^t(t),$
<p>4/Loi de comportement :</p> $\sigma_{ij}(x, t) = l_{ijkl} \varepsilon_{kl}(x, t)$	<p>4/Loi de comportement :</p> $N(x, t) = ES \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ $N(x, t) = KGS\gamma(x, t),$ $\gamma(x, t) = \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} - \Phi(x, t)$ $M(x, t) = EI \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial x}$

Tableau I.1 :Correspondances des équilibres dynamiques d'un milieu continu et d'une poutre droite a plan moyen chargée dans ce plan[3]

La variation du lagrangien du système conduit donc a autant d'équations d'équilibre intérieur qu'il existe de composantes du déplacement, et autant de conditions aux limites cinématiques qu'il est nécessaire. Afin d'éviter des calculs trop lourds, nous allons appliquer ceci successivement au cas particulier de la traction et de la flexion des poutres droites. [3]

I -3-3) Vibrations libres d'une poutre en flexion simple :

Nous étudions plus spécifiquement les vibrations libres d'une poutre en flexion simple. Afin de faciliter l'approche, les déformations de cisaillement seront négligées, ce qui est justifié dans la plupart des poutres constituées de matériaux homogènes. Dans ce cadre, la flexion de la poutre se traduit par la rotation des sections droites autour de leur centre de gravité. Ceci a pour effet de générer des déplacements des points de la section qui sont proportionnels à l'altitude de ce point. Il en résulte bien évidemment un déplacement de la ligne moyenne $v(x, t)$, mais aussi un déplacement $u(x) = -y \frac{\delta v(x,t)}{\delta x}$. Ceci est illustré sur la figure (b) du tableau I.1. En conséquence, seules les déformations de flexion $\varepsilon_{xx} = -y \frac{\delta^2 v(x,t)}{\delta x^2}$ sont non nulles. Le chargement appliqué sur cette poutre en flexion simple peut être ponctuel ou réparti (par unité de longueur, composé d'efforts et de moments, conformément à la représentation de la figure (b) du tableau I.1. [3]

I -3-4) Modes et fréquences propres :

A) Poutre sur appuis simples :

La poutre considérée repose cette fois sur 2 appuis simples, comme indiqué sur la figure I.10. Les conditions aux limites cinématiques sont dites articulées. [3]

Dans ce cas, la prise en compte des conditions aux limites cinématiques conduit à l'existence d'une infinité de pulsations propres. La n^{iem} pulsation propre du système [3]

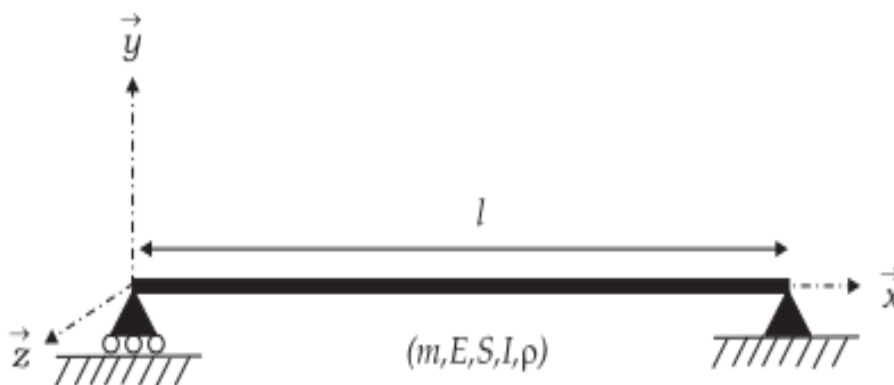


Figure I.10 : Poutre droite sur appui simple.

Est :

$$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} = n^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$$

La solution exacte de ce problème est la somme des solutions particulières de rang n , et s'écrit sous la forme :

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} (A_n \cos(w_n t) + B_n \sin w_n t)$$

Où les A_n et B_n sont des constantes (incluant donc B_1) déterminées grâce aux conditions initiales (à $t = 0$), Généralement, la vitesse initiale est supposée nulle ($\psi(x) = 0 \Rightarrow B_n = 0$), et la condition sur les déplacements est prise proportionnelle à la déformée statique $\varphi(x) = c v_0(x)$. Ce type de conditions initiales conduit à une solution de la forme :

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} A_n'(c, n) \cos w_n t$$

c'est-à-dire définie à une constante multiplicative près, les modes propres étant également définis à une constante près. [3]

B) Poutre bi-encastée :

Dans le cas où la poutre est bi-encastée (figure I.11), les pulsations propres ne peuvent plus être déterminées analytiquement du fait de la relation trigonométrique qui découle des conditions aux limites cinématiques $\cos \alpha l = \frac{1}{\cosh \alpha l}$. On considère dans ce cas l'approximation suivante pour $n > 3$:

$$\omega_n = \left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} = (2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4} \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$$

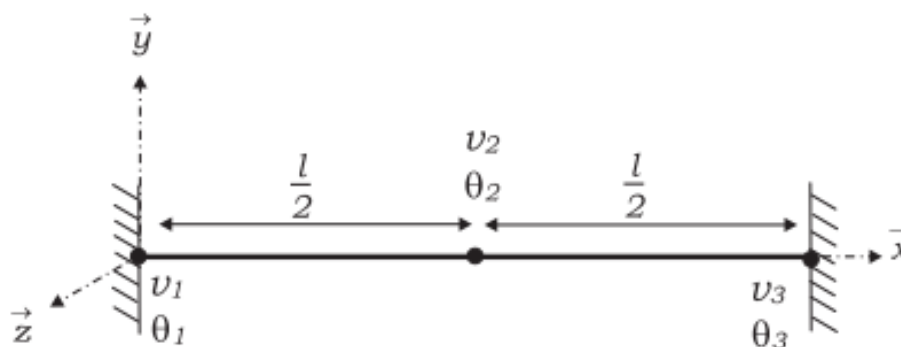


Figure I.11: Vibrations libres d'une poutre bi-encastree.

La solution générale des vibrations libres étant connue, un calcul d'analyse modale permettra, par exemple, de connaitre facilement la réponse de la structure a une sollicitation générale. Par exemple, si la poutre étudiée est sollicitée en son milieu par une impulsion, les modes propres pairs ne seront pas "actifs", car le déplacement résultant ne pourra être qu'impair : pas de point d'inflexion au centre, sous la charge. [3]

C) Poutre encastree-libre - méthode générale :

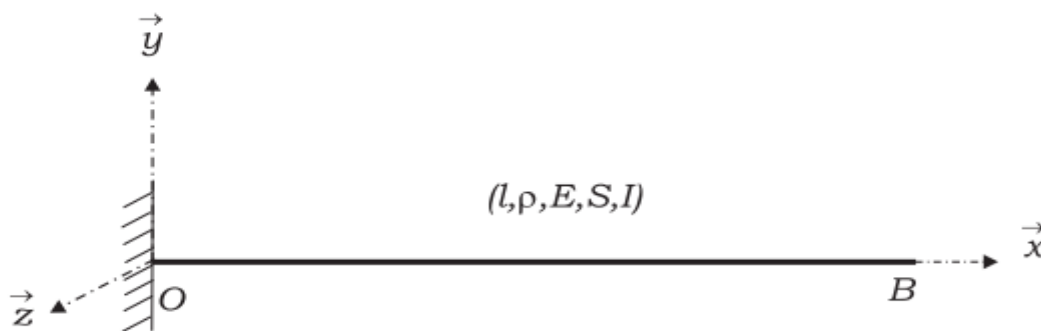


figure I.12: Poutre droite encastree-libre en flexion.

Considérons la même poutre en flexion, mais avec cette fois une extrémité $x = 0$ encastree et l'autre extrémité $x = l$ libre, telle que représentée sur la figure I.11. Dans ce cas, les conditions aux limites ne sont plus symétriques, ce qui rend le problème plus complexe a résoudre. [3]

Cherchons la solution sous la forme classique : $v(x, t) = v(x) \sin(\omega t)$. Posons le problème de flexion propre sous forme dimensionnalité qui se déduit :

$$\psi^4(x) = -\lambda^4 \psi(x) = 0 \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} \xi = \frac{x}{l} \\ \psi(x) = \frac{v(x)}{1} \end{cases}$$

avec comme précédemment $\lambda^4 = \omega^2 \frac{\rho S l^4}{EI} = \omega^2 \frac{m l^3}{EI}$, la longueur intervenant ici du fait de l'adimensionnalisation des variables. Comme précédemment, si on cherche des solutions du type $\psi(x) = e^{p\xi}$, on aboutit à l'expression générale déjà rencontrée :

$$\psi(x) = A_1 \sin(\lambda\xi) + A_2 \cos(\lambda\xi) + A_3 \sinh(\lambda\xi) + A_4 \cosh(\lambda\xi)$$

ou en utilisant les fonctions de Duncan :

$$\begin{cases} s_1(\lambda\xi) = \sin(\lambda\xi) + \sinh(\lambda\xi) \\ c_1(\lambda\xi) = \cos(\lambda\xi) + \cosh(\lambda\xi) \\ s_2(\lambda\xi) = -\sin(\lambda\xi) + \sinh(\lambda\xi) \\ c_2(\lambda\xi) = -\cos(\lambda\xi) + \cosh(\lambda\xi) \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \psi(x) = B_1 s_1(\lambda\xi) + B_2 c_1(\lambda\xi) + B_3 s_2(\lambda\xi) + B_4 c_2(\lambda\xi)$$

Les solutions sont alors connues. Traitons par exemple le cas encasturé-libre. Les conditions aux limites cinématiques permettent de résoudre :

$$\text{en } x = 0 \text{ encastrement : } \psi(x) = 0 \text{ et } \psi'(x) = 0 \rightarrow B_2 = \lambda B_1 = 0$$

$$\text{en } x = l \text{ bord libre : } \psi''(l) = 0 \text{ et } \psi'''(l) = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} s_1(\lambda) & c_1(\lambda) \\ \lambda c_1(\lambda) & \lambda s_2(\lambda) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} B_3 \\ B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour cette dernière condition, la solution $\lambda = 0$ n'est pas acceptable, car le déplacement correspondrait à un mouvement de corps rigide. Il faut donc avoir un déterminant nul pour ce système, ce qui conduit à :

$$s_1(\lambda)s_2(\lambda) - c_1^2(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\cos(\lambda l) = \frac{1}{\cosh(\lambda l)} \dots\dots(\text{I})$$

que l'on résout numériquement (figure I.11). On trouve la première solution $\lambda_1 = 1,8751$ et $\omega_1^2 = 12,36 \frac{EI}{m l^3}$. Quelles que soient les conditions aux limites, on arrive à une équation de type semblable. Les pulsations propres de la poutre sont présentées dans le tableau I.2 pour différents cas de conditions aux limites. [3]

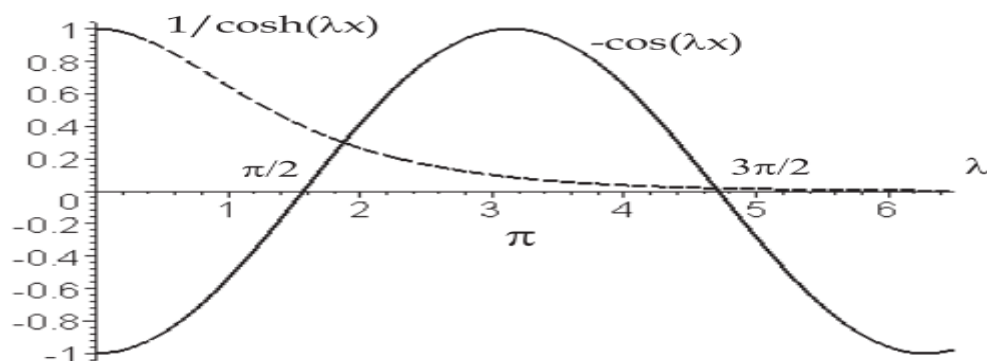


Figure I.13:Tracés des fonctions utilisées pour résoudre l'équation (L) [3]

Conditions aux limites	Pulsation λ_n			
	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n > 3$
libre-libre	0	4,730	7,853	$(2n - 1)\frac{\pi}{2}$ (aprox.)
libre-guidée	0	2,365	5,498	$(4n - 5)\frac{\pi}{2}$ (approx.)
libre-articulée	0	3,927	7,069	$(4n - 3)\frac{\pi}{4}$ (approx.)
guidée-guidée	0	3,142	6,283	$(n - 1)\pi$ (exact)
guidée-articulée	1,561	5,712	7,854	$(2n - 1)\frac{\pi}{2}$ (exact)
encastrée-libre	1,875	4,694	7,855	$(2n - 1)\frac{\pi}{2}$ (approx.)
bi-articulée	3,142	6,283	9,425	$n\pi$ (exact)
encastrée -articulée	3,927	7,069	10,210	$(4n + 1)\frac{\pi}{4}$ (approx.)
encastrée-guidée	2,365	5,498	8,639	$(4n - 1)\frac{\pi}{4}$ (approx.)
bi-encastrée	4,730	7,853	10,996	$(2n + 1)\frac{\pi}{2}$ (approx.)

Tableau I.2 :Pulsations propres de vibrations d'une poutre uniforme pour différentes

conditions aux limites : $\omega_1^2 = \lambda^4 \frac{El}{\rho sl^4} = \lambda^4 \frac{El}{ml^3}$ [3]

I -4 »La méthode des éléments finis :**I -4-1) Histoire :**

C'est l'ingénieur américain Ray William Clough qui, semble-t-il, a utilisé le terme de méthode des éléments finis le premier dans un article de 1960 intitulé *The Finité Elément Méthode in Plane Stress Analysais*. Le mot rigidité (Stiffness) apparaissait dans le titre de son article *Stiffness and Déflexion Analysais of Complexe Structures* datant de 1956 (et coécrit avec M. Turner, H. C. Martin et L. J. Topp).

Si on veut replacer très brièvement cela dans un contexte Clough Courant Zienkiewicz plus global, on peut dire que l'analyse des structures est née vers 1850.

La RdM, recourant au calcul manuel, était développée par Maxwell, Castigliano, Mohr. Le concept d'éléments finis est né vers 1940, avec des figures comme Newmark, Hrennikoff (1941), Mc Henry, Courant (1942)...

Son réel essor ne commence toutefois que dans les années 60 avec le développement du calcul numérique sur ordinateur.

La méthode des éléments finis (MEF) prend ses origines dans le besoin de résoudre des problèmes complexes d'élasticité et d'analyse de structures en ingénierie civile et aéronautique. Son développement remonte aux travaux d'Alexander Hrennikoff (1941) et de Richard Courant (1942). Bien qu'utilisant des approches différentes, ces deux pionniers partagent la même caractéristique essentielle à savoir la discrétisation par maillage du domaine continu en sous-domaines discrets, que l'on appelle éléments. C'est Olgierd Zienkiewicz de l'Imperial College qui synthétisa ces deux méthodes en ce que l'on peut appeler la méthode des éléments finis et qui fit la première formalisation mathématique de la méthode.

Dans ses travaux, Hrennikoff discrétise le domaine en utilisant une analogie avec les treillis, tandis que l'approche de Courant divise le domaine en sous-régions finies triangulaires pour résoudre les équations aux dérivées partielles elliptiques du second ordre issues du problème de la torsion d'un cylindre. On peut dire que la contribution de Courant était une évolution s'appuyant sur un vaste corpus de résultats antérieurs pour les équations aux dérivées partielles développés par Rayleigh, Ritz et Galerkin.

Le développement de la méthode des éléments finis a véritablement commencé au milieu de années 1950 pour l'analyse structurale et aéronautique, et prit de l'ampleur à l'Université de Stuttgart grâce au travail de John Argyris et à Berkeley grâce au travail de Ray W. Clough. Ray Clough est également l'un des pionniers du génie para sismique et s'est vu décerné en 2008, à la World Conference of Earthquake Engineering en Chine, le titre de « légende du génie para sismique » (“Legend of Earthquake Engineering”).

À la fin des années 50, les concepts clés de matrice de rigidité et d'assemblage d'éléments existaient quasiment sous la forme actuelle. La NASA publia une demande de propositions pour le développement du logiciel d'éléments finis NASTRAN en 1965.

La base mathématique rigoureuse de la méthode des éléments finis a été consolidée en 1973 avec la publication de Strang et Fix de *An Analysis of The Finite Element Method*. Elle a depuis été intégrée comme une branche des mathématiques appliquées à la modélisation numérique des systèmes physiques dans une large variété de disciplines. Pour une discussion plus approfondie des apports et contributions relatives des différents pionniers de cette méthode, on pourra se référer. [14]



I -4-2) Introduction

La méthode des éléments finis fait partie des outils de mathématiques appliquées. Il s'agit de mettre en place, à l'aide des principes hérités de la formulation vibrationnelle ou formulation faible, un algorithme discret mathématique permettant de rechercher une solution approchée d'une équation aux dérivées partielles (ou EDP) sur un domaine compact avec conditions aux bords et/ou dans l'intérieur du compact. On parle couramment de conditions de type Dirichlet (valeurs aux bords) ou Neumann (gradients aux bords) ou de Robin (relation gradient/valeurs sur le bord).

Il s'agit donc avant tout de la résolution approchée d'un problème, où, grâce à la formulation vibrationnelle, les solutions du problème vérifient des conditions d'existence plus faibles que celles des solutions du problème de départ et où une discrétisation permet de trouver une solution approchée. Comme de nombreuses autres méthodes numériques, outre l'algorithme de résolution en soi, se posent les questions de qualité de la discrétisation :

- existence de solutions
- unicité de la solution
- stabilité
- convergence
- et bien sûr : mesure d'erreur entre une solution discrète et une solution unique du problème initial.

La partie 2 va présenter le cadre général de la méthode des éléments finis, ainsi que le cas pratique le plus courant considérant des équations aux dérivées partielles linéaires dont on cherche une approximation par des fonctions affines.

La présentation en partie 3 est essentiellement physique, notamment mécanique. Elle ne doit être considérée que comme une présentation des éléments constitutifs de la modélisation discrète utilisée en résistance des matériaux *via* la méthode des éléments finis. C'est une approche tout à fait valide, un bon exemple pédagogique. Elle apporte un biais certain quant à une approche plus générale, du fait notamment de la linéarité supposée des matériaux. [15]

I -4-3) Éléments de Poutre à deux Nœuds :

I -4-3-1) Équation générale des poutres planes :

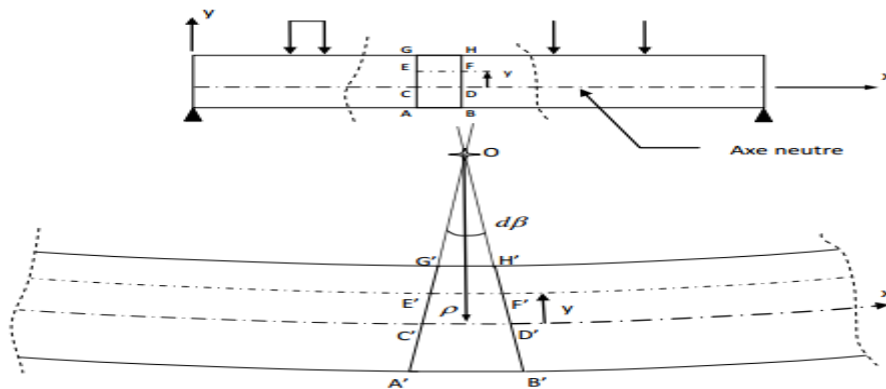


Figure I.14: Déformation d'une poutre en flexion.

Les sections droites d'une poutre en flexion restant droites après déformations (principe de Navier-Bernoulli), l'étude des déformations longitudinales sur un tronçon ABGH permet d'établir une relation linéaire entre la déformation longitudinale et le rayon de courbure ρ . la déformation à l'ordonnée y est égale à :

$$\epsilon_{xx} = \frac{E'F' - EF}{EF}$$

Comme $EF = CD$ et $CD = C'D'$, on déduit que :

$$\epsilon_{xx} = \frac{E'F' - EF}{EF} = \frac{(\rho - y)d\beta - \rho d\beta}{\rho d\beta} = -\frac{y}{\rho}$$

Enfin et en combinant l'équation d'équilibre de la section à celle liant contrainte et déformation, on retrouve la relation moment-courbure de la théorie des poutres :

$$\left. \begin{matrix} \int_s \sigma_{xx} \cdot y \cdot ds \\ \sigma_{xx} = E \cdot \epsilon_{xx} \end{matrix} \right\} \Rightarrow M_Z = -\frac{E}{\rho} \int_s y^2 ds \Leftrightarrow -\frac{M_Z}{EI_Z} = \frac{1}{\rho} \dots\dots(*)$$

Avec $I_Z = \int_s y^2 \cdot ds$: moment d'inertie autour de l'axe z (perpendiculaire au plan xy).

De plus et sous l'effet des charges extérieures, le point situé sur l'axe neutre à l'abscisse x subira un déplacement vertical $v(x)$ et une rotation $\beta(x)$. Par ailleurs et d'après la figure (I.13), on sait que ;

$dx = \rho d\beta \Rightarrow \frac{d\beta}{dx} = \frac{1}{\rho}$ mais également que $\beta = \frac{dv}{dx}$ ce qui permet de déduire :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\beta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2} \dots\dots\dots(\text{¥})$$

En égalisant (*) et (¥), les relations moment-courbure et déformation-courbure deviennent :

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{M_Z}{EI_Z} = \frac{d^2v}{dx^2}$$

$$\varepsilon_{xx} = -\frac{y}{\rho} = -y \frac{d^2v}{dx^2}$$

Sachant que l'effort tranchant correspond à la dérivée du moment fléchissant $\frac{dM_Z}{dx} = T_y$ et que celle de l'effort tranchant est équivalente à la charge répartie $\frac{dT_y}{dx} = -q_y$, on obtient finalement :

$$E \cdot I_Z \frac{d^2v}{dx^2} = -M_Z(x) \dots\dots\dots(\text{£})$$

$$E \cdot I_Z \frac{d^3v}{dx^3} = -T_y(x)$$

$$E \cdot I_Z \frac{d^4v}{dx^4} = q_y(x) \dots\dots\dots(\text{¢})$$

Les relations(£) et (¢) sont les formes les plus connues de l'équation générale des poutres. [16]

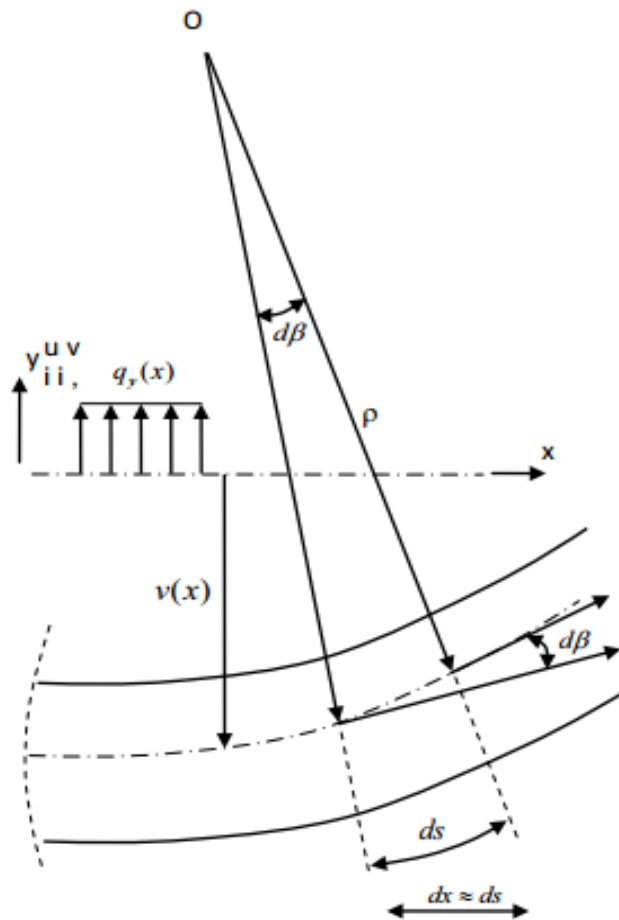


Figure I.15 :Rotation et courbure.

I -4-3.2) Élément de poutre plane à 2 nœuds :

Soit un élément de poutre plane de longueur L , de section S et d'inertie I constantes et dont le matériau a un module d'élasticité longitudinal E . Cet élément à deux nœuds destiné au calcul des réseaux de poutres chargés dans leur plan fait appel à la théorie des poutres qui permet de ramener le problème tridimensionnel à un problème unidimensionnel en condensant ses caractéristiques au niveau de sa fibre moyenne. Chacun de ses nœuds possède trois degrés de liberté u_i, v_i et $\frac{dv_i}{dx}$ qui permettent de reconstituer les fonctions de déplacements axial $u(x)$ et transversal $v(x)$. Ses caractéristiques sont donc :

- L : Longueur.
- E : Module d'élasticité longitudinal.
- S : Section axiale.
- $I=I_z$: Moment d'inertie suivant l'axe z (perpendiculaire au plan xy).

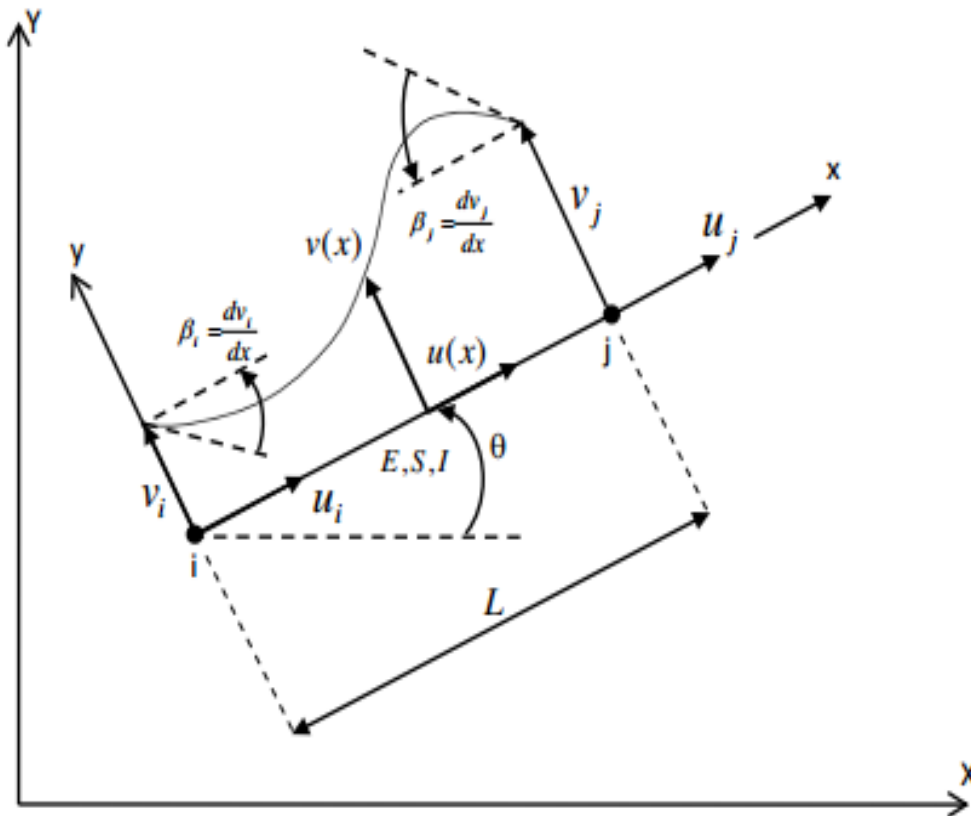


Figure I.16:Élément de poutre plane.

Les inconnues étant les déplacements en i et en j , la première opération consistera à exprimer ces champs de déplacement en fonction des valeurs nodales $u_i, v_i, \frac{dv_i}{dx}$ et $u_j, v_j, \frac{dv_j}{dx}$. [16]

A) matrices de rigidité élémentaire en repère local :

***Champ de déplacement axial $u(x)$:**

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot u_i + \left(\frac{x}{l}\right) \cdot u_j$$

***Champ de déplacement transversal $v(x)$:**

l'expression de $v(x)$ sous la forme d'un polynôme de degré 3 :

$$v(x) = \{1 \ x \ x^2 \ x^3\} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{l^2} & \frac{-2}{l} & \frac{3}{l^2} & \frac{-1}{l} \\ \frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} & \frac{-2}{l^3} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \beta_i \\ v_j \\ \beta_j \end{Bmatrix}$$

Finalement :

$$v(x) = \left\{ 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{3x^3}{l^3} \quad x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \quad \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} \quad -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \right\} \begin{Bmatrix} v_i \\ \beta_i \\ v_j \\ \beta_j \end{Bmatrix}$$

C'est d'ailleurs grâce à cette relation que certains logiciels arrivent à tracer la déformée entre les nœuds. Ils calculent les valeurs de $v(x)$ en certains points inter-médiaires¹ et reconstituent ensuite la déformée. Ceci permet de se limiter à la géométrie de la structure et donc de réduire le nombre de nœuds. [16]

***Champ de déformation :**

le champ de déplacement complet de l'élément s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{cccccc} 1 - \frac{x}{l} & 0 & 0 & \frac{x}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{3x^3}{l^3} & x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} & 0 & \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} & -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \beta_i \\ u_j \\ v_j \\ \beta_j \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{Bmatrix} = [N] \cdot \{q_e\}$$

La déformation de la poutre résultant de la concomitance de la flexion et des variations de longueur on a :

$$\epsilon_{xx} = \frac{du}{dx} - y \frac{d^2v}{dx^2}$$

Le champ de déformation devient alors :

$$\epsilon_{xx} = \left\{ -\frac{1}{l} \quad \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} \right) \cdot y \quad \left(\frac{4}{l} - \frac{6x}{l^2} \right) \cdot y \quad \frac{1}{l} \quad \left(-\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3} \right) \cdot y \quad \left(\frac{2}{l} - \frac{6x}{l^2} \right) \cdot y \right\} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \beta_i \\ u_j \\ v_j \\ \beta_j \end{Bmatrix}$$

Alors : $\epsilon_{xx} = [B] \cdot \{q_e\}$ [16]

***matrice de rigidité élémentaire :**

l'expression finale de la matrice de rigidité élémentaire : [16]

$$k_e = E \int_{v_e} [B]^T \cdot [B] \cdot dV_e = E \int_0^l \left(\int_{S_e} dS_e \right) \cdot [B] \cdot dx$$

$$E \int_0^l \left(\int_{S_e} dS_e \right) \begin{pmatrix} -\frac{1}{l} \\ \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}\right)y \\ \left(\frac{4}{l} - \frac{6x}{l^2}\right)y \\ \frac{1}{l} \\ \left(-\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3}\right)y \\ \left(\frac{2}{l} - \frac{6x}{l^2}\right)y \end{pmatrix} \left\{ -\frac{1}{l} \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}\right)y \quad \left(\frac{4}{l} - \frac{6x}{l^2}\right)y \quad \frac{1}{l} \left(-\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3}\right)y \quad \left(\frac{2}{l} - \frac{6x}{l^2}\right)y \right\} dx$$

$$k_e = \begin{bmatrix} \frac{Es}{l} & 0 & 0 & -\frac{Es}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12El}{l^3} & \frac{6EL}{l^2} & 0 & -\frac{12El}{l^3} & \frac{6EL}{l^2} \\ 0 & \frac{6EL}{l^2} & \frac{4El}{l} & 0 & \frac{6EL}{l^2} & \frac{2El}{l} \\ -\frac{Es}{l} & 0 & 0 & \frac{Es}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12El}{l^3} & -\frac{6EL}{l^2} & 0 & \frac{12El}{l^3} & -\frac{6EL}{l^2} \\ 0 & 0 & \frac{2El}{l} & 0 & -\frac{6EL}{l^2} & \frac{4El}{l} \end{bmatrix}$$

B) matrices de rigidité élémentaire en repère global :

L'élément de poutre plane possédant deux nœuds à trois degrés de liberté, la matrice De changement de base s'écrit en vertu de : [16]

$$\{q_e\} = [R_e] \cdot \{Q_e\} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \beta_i \\ u_j \\ v_j \\ \beta_j \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ B_i \\ U_j \\ V_j \\ B_j \end{Bmatrix}$$

C) Vecteur Charges exprimé en repère local :

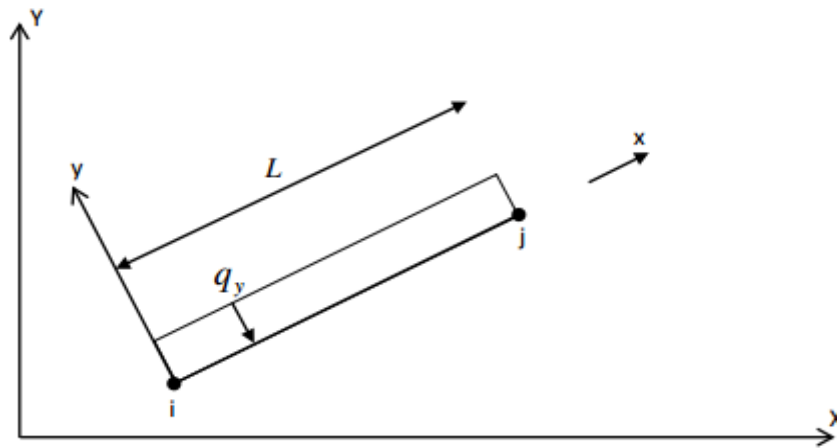


Figure I.17 :Élément de poutre plan echargé uniformément.

Considérant une poutre plane chargée uniformément, le vecteur charges $\{f_e\}$ se Réduit à celui des forces nodales de surface soit :

$$\{f_e^s\} = \int_{s_e} [N]^T \cdot \{f^s\} \cdot ds_e = \{f_e\} = \int_0^l [N]^T \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -q_y \end{Bmatrix} dx$$

$$= \begin{Bmatrix} F_{iy} \\ M_{iZ} \\ F_{jy} \\ M_{jZ} \end{Bmatrix} = \int_0^l \begin{Bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{3x^3}{l^3} \\ x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \\ \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} \\ -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -q_y \end{Bmatrix} \cdot dx = \begin{Bmatrix} -\frac{q_y l}{2} \\ -\frac{q_y l^2}{12} \\ -\frac{q_y l}{2} \\ \frac{q_y l^2}{12} \end{Bmatrix}$$

D'une manière générale et dans le cas de forces orientées dans le sens y négatif, le vecteur charges d'un élément de poutre plane soumis à un système de charges Transversales est égal à l'inverse des réactions et moments d'encastrement de la Poutre bi-encastree subissant le même chargement. [16]

D)Calcul des efforts internes en repère local :

Une fois les déplacements en repère global connus, il suffit de calculer pour chacun des éléments, les déplacements associés en repère local puis de les injecter dans la relation de rigidité élémentaire pour obtenir les efforts aux nœuds correspondants. On a donc :

$$\begin{Bmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \\ N_j \\ T_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \{k_e\} \cdot \{q_e\} - \{f_e\}$$

$$\begin{Bmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \\ N_j \\ T_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Es}{l} & 0 & 0 & -\frac{Es}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12El}{l^3} & \frac{6EL}{l^2} & 0 & -\frac{12El}{l^3} & \frac{6EL}{l^2} \\ 0 & \frac{6EL}{l^2} & \frac{4El}{l} & 0 & \frac{6EL}{l^2} & \frac{2El}{l} \\ -\frac{Es}{l} & 0 & 0 & \frac{Es}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12El}{l^3} & -\frac{6EL}{l^2} & 0 & \frac{12El}{l^3} & -\frac{6EL}{l^2} \\ 0 & \frac{6EL}{l^2} & \frac{2El}{l} & 0 & -\frac{6EL}{l^2} & \frac{4El}{l} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \beta_i \\ u_j \\ v_j \\ \beta_j \end{Bmatrix} - \{f_e\}$$

Avec :

$$\{q_e\} = [R_e] \cdot \{Q_e\}$$

$\{f_e\}$: vecteur des charges nodales équivalentes au chargement appliqué sur la poutre. [16]

I -5» Matériaux piézoélectriques :**I -5-1)Historiques :**

Les premières théories et observations de l'effet piézoélectrique direct sont dues aux travaux de Pierre et Jacques Curie présentés en 1880 sur les cristaux présentant une structure asymétrique. Gabriel Lippman a montré en 1881 que la thermodynamique impliquait l'existence de l'effet indirect, mis en évidence de manière expérimentale par les frères Curie l'année suivante. Les premières applications seront des appareils de mesure en laboratoire (balance de précision et générateur de charges utilisant l'effet piézoélectrique respectivement direct et indirect). [4]

En 1910, Woldemar Voigt publie une étude rigoureuse des classes de cristaux asymétriques et de leur propriétés piézoélectriques . Pendant la première guerre mondiale. [4]

I -5-2) Définition matériaux piézoélectriques :

La piézoélectricité est la propriété que présentent certains corps de se polariser électriquement lorsqu'ils sont soumis à une contrainte mécanique.

Ce comportement, spontané dans plusieurs cristaux naturels ou synthétiques tels que le quartz ou le sel de Seignette, se manifeste à l'échelle de la maille cristalline: une action mécanique provoque l'apparition d'un dipôle électrique dans chaque maille du matériau par déplacement des centres des charges positives et négatives. C'est l'effet piézoélectrique direct. Réciproquement, l'application d'un champ électrique induit une déformation mécanique du matériau. C'est l'effet inverse. Comme le montre la figure II.2, parmi les 32 classes cristallines, 21 sont non Centro symétriques (dépourvues d'un centre d'inversion) et manifestent l'effet piézoélectrique à l'exception du groupe ponctuel (432).[5]

I -5-3)Principales catégories de matériaux piézoélectriques Cristaux :

Un certain nombre de cristaux présentent un comportement piézoélectrique ; on peut citer le quartz, la tourmaline, le sel de Seignette , le sucre ... Ce comportement apparaît dans des cristaux présentant une structure asymétrique et des liaisons ioniques ; il peut être décrit en observant la figure (II.1), qui représente une vue de la structure du quartz : [4]

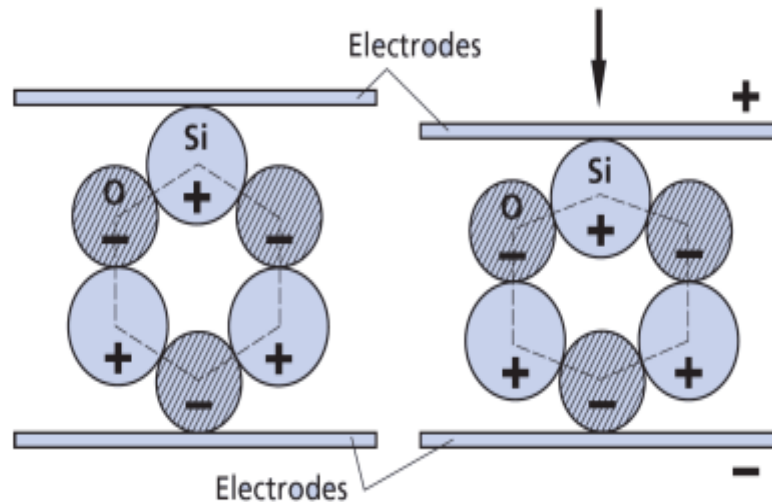


Figure I .18: Coupe d'une cellule élémentaire d'un cristal de quartz sous l'action d'un effort mécanique

A) Effet direct :

Si on applique un effort, les contraintes mécaniques qui apparaissent dans le matériau provoquent des déformations de sa structure cristalline et ainsi des déplacements relatifs des charges électriques des ions. Ces déplacements correspondent à une polarisation électrique dans le matériau. L'état électrostatique (représenté par les champs électrique E et déplacement électrique D , reliés à la polarisation P par du matériau) est ainsi modifié par une action mécanique : c'est l'effet direct. Dans le cas du cristal de quartz de la figure II .1, les centres de gravité des charges positives et négatives sont confondus en l'absence d'effort extérieur. Sous l'action de l'effort de compression, le centre des charges positives descend et celui des charges négatives remonte : un vecteur polarisation dirigé vers le bas apparaît alors. [4]

B) Effet inverse :

Inversement, l'application d'un champ électrique extérieur crée des forces électrostatiques sur les charges électriques liées aux molécules du cristal, qui se déplacent les unes par rapport aux autres, créant ainsi des déformations dans le matériau. Ainsi, l'état mécanique du matériau est modifié par une action électrostatique : c'est l'effet piézoélectrique inverse. [4]

La piézoélectricité est une propriété de certains cristaux. Un milieu cristallin est composé de particules chargées. Dans un cristal, la piézoélectricité naît du décalage des

barycentres des charges positives et négatives de la maille cristalline provoqué par la déformation mécanique de cette maille. De ce fait la propriété de piézoélectricité est fortement liée à la symétrie de la maille et une maille "Centro symétrique" (i.e. qui possède un centre de symétrie) ne peut donner lieu à un cristal piézoélectrique.[6]

Sur les 32 classes cristallines, il en existe 21 non Centro symétriques, dont 20 sont piézoélectriques et dont 10 possèdent une polarisation électrique en l'absence de champ électrique appliqué et sont dites piézoélectriques (leurs moments dipolaires étant sensibles à la température). Parmi les cristaux piézoélectriques on peut distinguer les cristaux ferroélectriques. La figure 1-18 présente un organigramme des cristaux piézoélectriques. [6]

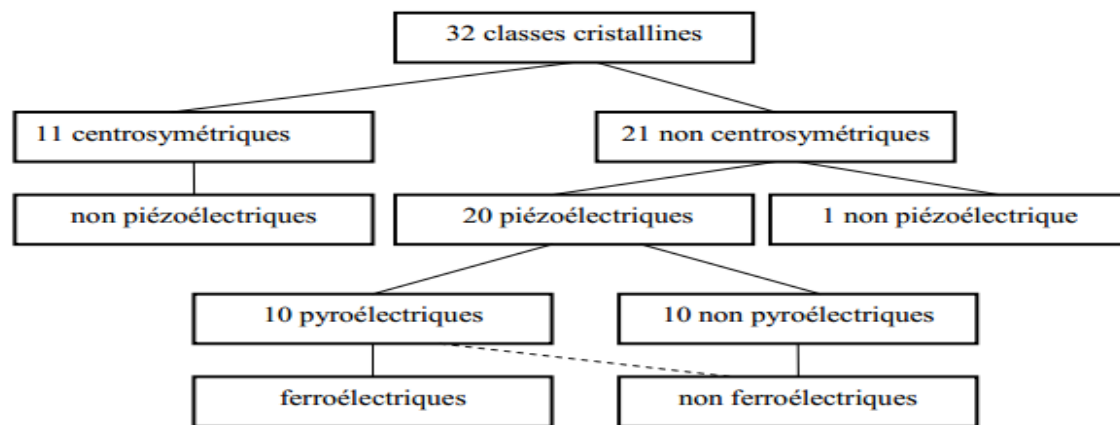


Figure I.19:Organigramme des 32 classes cristallines

Certains cristaux sont donc intrinsèquement piézoélectriques (comme le quartz). D'autres, les ferroélectriques, présentent des propriétés piézoélectriques si ils sont préalablement polarisés. [6]

I -5-4) Propriétés générales des PZT :

Les céramiques sont des matériaux inorganiques, non métalliques obtenu suite à la mise en forme d'une poudre et un traitement thermique à haute température. Elles sont très dures et très rigides (supportent bien des tensions très élevées), elles résistent à la chaleur, à l'usure, aux agents chimiques et à la corrosion. Leur principale inconvénient est la fragilité (se casse facilement sous une sollicitation). [13]

Les propriétés générales des céramiques découlent des propriétés de leurs liaisons chimiques, de leur état (cristallin ou amorphe) et de leur microstructure : [13]

A) Liaisons chimiques :

Les éléments qui entrent dans la composition des céramiques sont liés entre eux par des liaisons fortes, covalentes ou ioniques, et forment des composés hétéropolaires (anion et cation). Les propriétés générales qui découlent de ces liaisons sont :

* Mauvaise conductivité de l'électricité et de la chaleur par les céramiques. Donc on les utilise comme diélectriques et comme isolants thermiques.

* Les céramiques ont des températures de fusion très élevée due à la forte stabilité des liaisons ioniques et covalentes. Donc on les utilise largement comme matériaux réfractaires.

B) Microstructure :

La plupart des céramiques sont des matériaux polycristallins, c'est à dire comportant un grand nombre de microcristaux bien ordonnés (grains) reliés par des zones moins ordonnées (joints de grains).

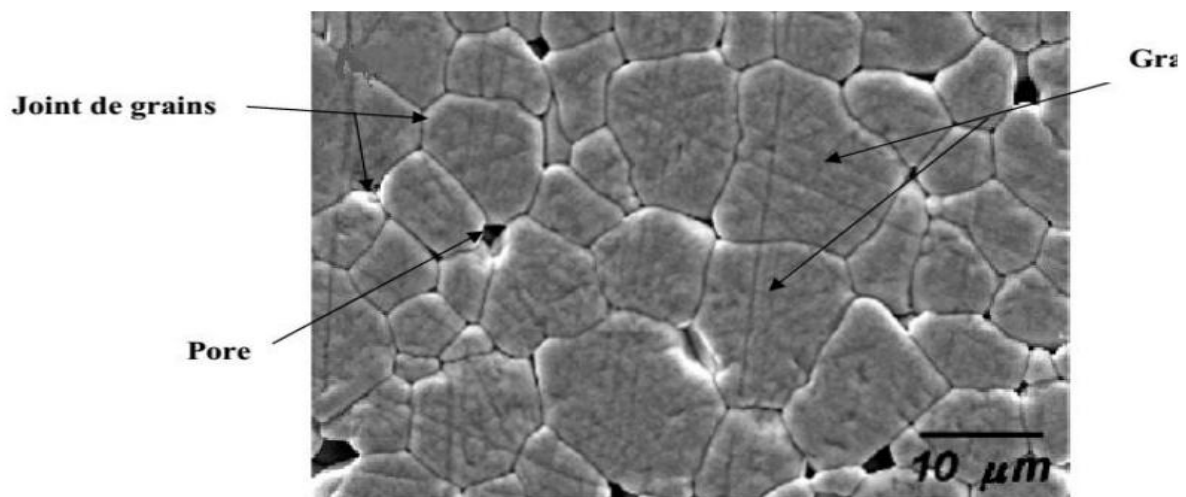


Figure I.20 : Microstructure typique d'une surface céramique.

I -5-5) Certain Matériaux piézoélectriques :

Rapidement après la découverte de la piézoélectricité, plusieurs matériaux ayant cette caractéristique ont été trouvés. Néanmoins des nouveaux matériaux

continuent à apparaître, toujours avec des meilleures caractéristiques et performances. Maintenant les matériaux, leurs présentations, leurs tailles, peuvent s'adapter à leurs applications pratiques et non l'inverse comme on le faisait il y a quelques années. C'est pour cela que les innovations dans le domaine de la piézoélectricité sont à l'ordre du jour. [13]

Les matériaux piézoélectriques peuvent être soit des cristaux ou matières minérales naturelles, soit des créations de l'homme. [13]

➤ Cristaux naturels :

- Berlin ite
- Quartz
- Topaze

➤ Céramiques et cristaux fabriquées par l'homme

- Phosphate de gallium
- Titanate de barium
- Sodium tungstane
- Lithium niobate

• Titanate zirconate de plomb nommé PZT par ses sigles en anglais. Ses propriétés piézoélectriques sont efficaces pour fabriquer des outils de type capteurs ou actionneurs. Les plaques piézoélectriques que l'on a achetées aux Etats-Unis sont en PZT.

➤ Céramiques sans plomb fabriquées par l'homme :

- Sodium potassium niobate
- Ferrite de bismuth
- Titanate de bismuth

➤ Polymères (Substance composée de macromolécules comme

- polyvinylide fluoride

La performance des différents matériaux est différente, leur prix et accessibilité sont tout à fait inégaux. La plupart des matériaux sont encore très rares, et par conséquence, très chers. Il n'y a que quelques entreprises qui les fabriquent et distribuent. La piézoélectricité reste encore un domaine qui se renouvelle chaque jour mais qui manque de - 13 - recherche et d'investissement. C'est pour cela que dans notre pays presque tous les matériaux piézoélectriques artificiels peuvent être considérés comme inexistant[13]

I -5-6) Applications des Matériaux piézoélectriques :

On trouve d'ores et déjà des éléments piézoélectriques dans de bien des applications industrielles : [20]

- Dans des capteurs de pression, d'effort, ou d'accélération où l'effet direct est utilisé : la linéarité et la sensibilité (tensions détectables même pour de faibles efforts) sont mises à profit.
- Des émetteurs ultrasonores utilisent l'effet indirect ; en particulier on peut citer l'utilisation comme émetteur dans les systèmes sonar, première application de l'effet indirect proposée par Langevin en 1915. Des éléments piézoélectriques sont également utilisés pour détecter les ondes sonores dans l'eau, où leur impédance mécanique et leur sensibilité fait de très bons hydrophones. On peut aussi utiliser ce type de systèmes en imagerie médicale (échographie). Ces systèmes sont aussi utilisés dans l'air et maintenant répandus jusque dans les pare-chocs de certaines voitures (improprement appelés radars de recul).
- Le rendement et la puissance des émetteurs peuvent être très élevés si on les utilise à leur résonance mécanique ; on le trouve dans des applications comme le nettoyage à ultrasons (les ondes de pression émises dans un liquide provoquent de la cavitation à la surface de la pièce à nettoyer), la soudure par ultrasons (où les vibrations à l'interface entre deux pièces créent de la chaleur), la destruction de calculs rénaux et tumeurs cancéreuses (où on focalise des ultrasons sur la partie à détruire), le détartrage des dents (où l'outil du dentiste vient gratter la surface des dents) ...

- On peut aussi utiliser des éléments piézoélectriques comme haut-parleurs d'aigu (tweeters à pavillon avec élément céramique) ou large bande (où la membrane du haut-parleur est un film PVDF) ; ils ont un meilleur rendement que des haut-parleurs électrodynamiques mais une qualité souvent réduite, du fait de la présence de résonances mécaniques.
 - On utilise des éléments piézoélectriques dans des circuits d'horloge (montre à quartz) où les oscillations mécaniques à haute fréquence d'un petit élément piézoélectrique (souvent appelé quartz) sont couplées à un circuit qui compte les oscillations ; l'oscillateur ainsi constitué est très stable et constitue l'horloge de nombreux circuits électroniques.
 - On peut également réaliser des gyroscopes piézoélectriques ; un élément piézoélectrique est mis en vibration par effet indirect ; puis l'effet direct est utilisé pour mesurer les variations de ces vibrations liées aux effets de Coriolis.
 - Dans certains transformateurs, on utilise les vibrations d'un bloc de matériau piézoélectrique pour abaisser une tension ; le bloc est mis en vibration par le circuit primaire
- ❖ et l'énergie des vibrations est récupérée pour alimenter le circuit secondaire, avec une tension différente.
- Dans les briquets dits "électroniques", les hautes tensions générées par un choc ou une pression importante sur une céramique permettent d'obtenir une étincelle.
 - On utilise des éléments piézoélectriques pour des applications de micro-positionnement dans des microscopes, de contrôle de déformation dans des optiques adaptatives, ou de contrôle de vibrations
 - Dans des moteurs piézoélectriques, ou moteurs à ultrasons, on utilise un élément piézoélectrique pour produire des ondes de surface dans une pièce métallique au contact d'une autre ; suivant la nature des ondes les points de contact vont se déplacer et provoquer le mouvement relatif des deux pièces. Ce type de moteur est utilisé dans certains dispositifs autofocus d'appareils photo ;

ses avantages sont d'être bloqué à l'arrêt et d'avoir la forme d'un anneau monté autour de l'objectif.

- ❖ D'autres applications font actuellement l'objet de développements :
 - On envisage de récupérer l'énergie de vibrations mécaniques sous forme électrique : on parle de piézoélectrique énergie harvesting
 - La miniaturisation croissante fait que les procédés de fabrication permettent d'intégrer des éléments piézoélectriques directement sur des circuits intégrés ; puis les échelles ont diminué jusqu'à ce que l'on parle de MEMS et NEMS (Micro et Nano Electro Mechanical Systems) ; ils sont toujours utilisés comme capteurs ou actionneurs, mais l'application finale peut différer complètement ; on peut ainsi créer de nouveaux capteurs physiques ou chimiques , ou encore des filtres électroniques.
 - Un effort est en cours pour réduire les coûts des capteurs piézoélectriques, en utilisant des films PVDF par exemple, et pour les adapter à des cas spécifiques : écrans ou capteurs tactiles par exemple ; en imprimant des électrodes adaptées on peut réaliser différentes fonctions .

I -5-7) Types et synthèse des matériaux piézoélectriques :

Les matériaux piézoélectriques sont synthétisés sous différentes formes en utilisant différentes techniques :

- **Les céramiques:** ce sont généralement des solutions solides de structure pérovskite dans un système binaire ou ternaire. Actuellement des raisons environnementales, des recherches intensives sont axées sur l'élaboration des solutions solides sans plomb de structure pérovskite ayant des propriétés comparables à celles de PZT.[10]
- **Les polymères :** l'effet piézoélectrique dans le polymère synthétique, Polyvinylidène Difluoride (PVDF) $(-CH_2-CF_2-)_n$ et ses dérivés sont couramment utilisés dans l'industrie [11].
- **Les cristaux :** ce sont généralement des oxydes ferroélectriques qui possèdent des structures en domaines. On distinguera alors les monocristaux mono domaines et Poly domaines selon qu'une ou plusieurs directions de polarisation coexistent dans le

cristal. Les propriétés d'un monocristal piézoélectrique sont optimisées en jouant sur la composition chimique, l'orientation cristallographique et la structure des domaines ferroélectriques. Les coefficients piézoélectriques les plus élevés sont obtenus pour les cristaux poly domaines de BTNN (BaTiNaNbO_3), $\text{Pb}(\text{Mg}_{1/3}\text{Nb}_{2/3})_{1-x}\text{Ti}_x\text{O}_3$, ($\text{PMN}_{1-x}\text{PT}$, $x=0,35$) et $\text{Pb}(\text{Zn}_{1/3}\text{Nb}_{2/3})_{1-x}\text{Ti}_x\text{O}_3$ ($\text{PZN}_{1-x}\text{PT}$, $x=0,08$) de symétrie rhomboédrique orientés suivant la direction [001][12]

- **Les composites** : ce sont des céramiques massives divisées et plongées dans une matrice non piézoélectrique (une résine). Ces matériaux possèdent des performances plus intéressantes, par rapport, à leurs meilleurs coefficients de couplage électromécaniques couplés avec leurs impédances acoustiques plus adaptées permettant une bonne résolution en imagerie médicale. [10]

I -5-8) Equations de la piézoélectricité :

La piézoélectricité est un phénomène de couplage entre les grandeurs électriques (champ électrique E , déplacement électrique D) et les grandeurs mécaniques (contrainte T , déformation S). Elle peut être décrite mathématiquement à partir d'un modèle phénoménologique faisant intervenir des potentiels thermodynamiques. L'ensemble des équations décrivant l'effet piézoélectrique dépendent alors du choix de la grandeur thermodynamique et des variables indépendantes utilisées . Dans le cas d'un matériau piézoélectrique sous des conditions adiabatiques et isothermes, la fonction de Gibbs élastique G_1 est définie comme: [7]

$$G_1 = \frac{1}{2} (S_{ijkl}^D T_{ij} T_{kl} + 2g_{nij} D_n T_{ij}) + \frac{1}{2} \beta_{mn}^T D_m D_n$$

où g est le coefficient piézoélectrique de tension, s est la compliance élastique et β est l'inverse de la permittivité. Les variables indépendantes sont la contrainte T et le déplacement électrique D . Les équations linéaires de la piézoélectricité sont obtenues en dérivant l'équation comme suit :

$$\begin{cases} S_{ij} = -\frac{\partial G_1}{\partial T_{ij}} = S_{ijkl}^D T_{kl} + g_{nij} D_n \\ E_m = \frac{\partial G_1}{\partial D_m} = \beta_{mn}^T D_n - g_{nij} T_{ij} \end{cases}$$

Où S est la déformation relative et E est le champ électrique. Il existe d'autres représentations des équations linéaires de piézoélectricité qui Dérivent d'autres grandeurs thermodynamiques[8] . L'ensemble de ces équations sont données avec des éléments des tenseurs notés de manière condensée en utilisant les conventions de Voigt schématisée figure

$$I.20 \quad \begin{cases} S_p = S_{pq}^D T_q + g_{pm} D_m \\ E_m = \beta_{mn}^T D_n - g_{pm} T_p \end{cases} \quad \begin{cases} S_p = S_{pq}^E T_q + d_{pm} E_m \\ D_m = \epsilon_{mn}^T E_n - d_{pm} T_p \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_p = C_{pq}^D S_q + e_{pm} E_m \\ E_m = \epsilon_{mn}^T E_n - e_{pm} S_p \end{cases} \quad \begin{cases} S_p = C_{pq}^E S_q + h_{pm} D_m \\ E_m = \beta_{mn}^T D_n - h_{pm} S_p \end{cases}$$

O^x Indique que la grandeur considérée est à x constant ou nul

Les paramètres des équations sont des tenseurs en raison de la dépendance directionnelle des propriétés du matériau (anisotropie). Les couples des indices (m, n) et (p, q) varient entre $(1 \text{ à } 3)$ et $(1 \text{ à } 6)$ respectivement. Les coefficients élastiques c et s sont des tenseurs d'ordre 4 constituant une matrice (6×6) . Les grandeurs électriques ϵ et β sont des tenseurs d'ordre 2 représentés par une matrice (3×3) . Quant aux coefficients piézoélectriques d , e , et h , ils sont des tenseurs d'ordre 3 et forment une matrice de (3×6) . Le nombre des éléments de ces tenseurs peuvent être réduits par des considérations de symétrie.[7]

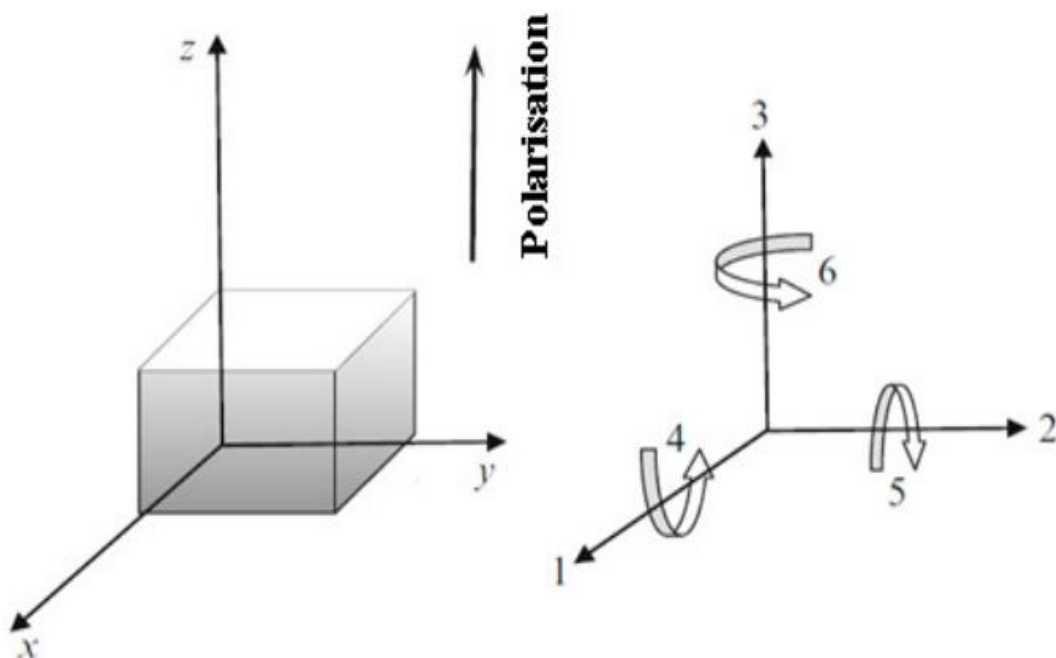


Figure I.21: Notation tensorielle utilisée dans les équations. (l'axe de polarisation est 3)

A titre d'exemple, pour une céramique ferroélectrique polarisée suivant l'axe 3 mais dont l'orientation des cristallites ne présente pas de direction privilégiée, la symétrie est de type (∞ mm) et les matrices des coefficients piézoélectriques, diélectriques et élastiques sont réduites à :

$$d_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{11} & d_{22} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

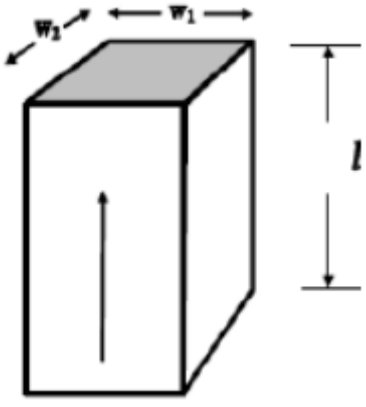

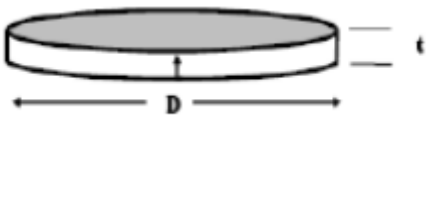

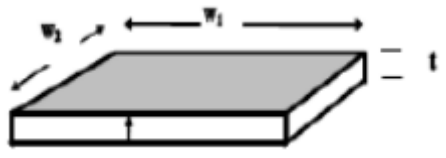

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix}$$

Ces coefficients seront utilisés pour la modélisation des propriétés piézoélectriques des céramiques polarisées.

I -5-9) Modes de la réponse piézoélectrique :

Un matériau piézoélectrique, excité par un champ électrique alternatif de faible intensité (quelques volts /cm) et de pulsation ω , se déforme en générant une onde acoustique de même pulsation: plus explicitement, lorsque ω est égale à un mode propre de résonance du matériau, une résonance est induite. Cette résonance électromécanique dépend de la géométrie de l'échantillon, de la direction du champ d'excitation E et de la polarisation. La caractérisation d'un résonateur piézoélectrique nécessite différentes géométries avec des dimensions bien définies, afin de contraindre la vibration dans une direction spécifiée et d'assurer la séparation des modes de résonances (tableau. II.1)[9]

Mode de vibration	Dimensions	Constantes musseés
<p>Mode longitudinal</p> 	<p>Déformation</p>  <p>$l > 5\omega_1, l > 5\omega_2$</p>	<p>$k_{33}, d_{33}, g_{33}, \epsilon_{33}^T,$ $\epsilon_{33}^S, S_{33}^D, S_{33}^E, Q_{33}$</p>
<p>Mode radial</p> 	 <p>$20t < d$</p>	<p>$k_p, d_{31}, \epsilon_{33}^T,$ S_{11}^E, S_{12}^E</p>
<p>Mode en épaisseurs</p> 	 <p>$10t < \omega_1, 10t < \omega_2$ Pour un disque ($20t < D$)</p>	<p>$k_t, e_{33}, h_{33} \epsilon_{33}^S,$ c_{33}^p, c_{33}^E, Q_t</p>

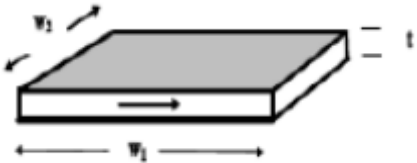

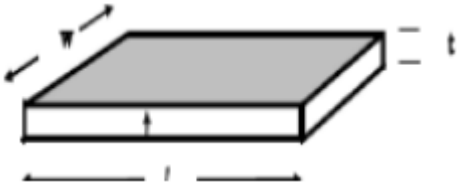

<p>Mode de cisaillement</p> 	 <p>ω_1 et $\omega_2 > 10t$</p>	<p>$k_{15}, d_{15}, g_{15}, \epsilon_{11}^T,$</p> <p>$\epsilon_{11}^S, S_{55}^D, c_{55}^D,$</p> <p>$S_{55}^E, c_{55}^E, Q_{15}$</p>
<p>Mode transverse au latéral</p> 	 <p>$l > 10t, \omega > 3t$ et $l > \omega$</p> <p>Pour un disque ($20t < D$)</p>	<p>$k_{31}, d_{31}, g_{31}, \epsilon_{33}^T,$</p> <p>$S_{11}^D, S_{11}^E, Q_{31}$</p>

Tableau I.3: Modes de résonance fondamentaux pour matériaux piézoélectriques.

La caractérisation des matériaux piézoélectrique dépend : la géométrie, les dimensions de l'échantillon et la direction de polarisation (axe 3 toujours perpendiculaire aux électrodes grisées), sont des éléments déterminants pour sélectionner les modes de vibration[9]

A)Couplage électromécanique :

Le couplage électromécanique définit la capacité d'un matériau piézoélectrique à transformer l'énergie électrique en énergie mécanique et réciproquement. Il n'est pas relié aux pertes ni au rendement mais traduit plutôt une adaptation entre ces deux formes d'énergie du matériau. Le coefficient de couplage est obtenu à partir d'une étude thermodynamique du système considéré comme linéaire en négligeant les effets thermiques. Il peut s'écrire sous la forme suivante : [9]

$$k_{ij}^2 = \frac{\text{energie mecanique transformée (S et T) dans la direction i}}{\text{energie electrique fornnie (E et D) dans la derection j}}$$

k_{ij}^2 varie suivant la forme de l'échantillon et le mode de vibration provoqué (tableau I.3) et dépend des coefficients élastiques, diélectriques et piézoélectriques. Les expressions du facteur de couplage pour les cinq modes de résonance piézoélectrique sont : [9]

- mode longitudinal :
$$k_{33} = \frac{d_{33}}{\sqrt{S_{33}^E + \epsilon_{33}^T}}$$

- mode transverse :
$$k_{31} = \frac{d_{31}}{\sqrt{S_{11}^E + \epsilon_{33}^T}}$$

- mode radial :
$$k_p = k_{31} \sqrt{\frac{2S_{11}^E}{S_{11}^E + S_{12}^E}}$$

- mode en épaisseur :
$$k_t = \frac{e_{33}}{\sqrt{c_{33}^p \cdot \epsilon_{33}^s}}$$

- mode de cisaillement :
$$k_{15} = \frac{d_{31}}{\sqrt{\epsilon_{11}^T \cdot S_{55}^E}}$$

B) Facteur de qualité mécanique :

Ce facteur caractérise les pertes mécaniques dans le matériau. Il peut être écrit de la manière suivante : [9]

$$Q_m = \frac{\text{énergie maximale emmagasinée pendant une période}}{\text{énergie dissipée pendant une période}}$$

Chapitre II :

Analyse semi-analytique d'une poutre avec éléments piézoélectriques

II -1 »introduction :

Dans ce chapitre, un modèle semi-analytique de poutre stratifiée avec éléments piézoélectriques est proposé. L'intérêt d'un tel modèle est en premier lieu l'écriture d'un problème simplifié où des paramètres physiques peuvent être facilement dégagés. En second lieu, il permet d'obtenir une écriture réduite du problème, sous formes de modes ; dans l'écriture de chacun des modes apparaît naturellement un coefficient de couplage électromécanique. Ce coefficient joue le même rôle que celui défini pour le matériau seul au chapitre 2 ; la différence est qu'ici son expression tient compte du couplage entre la structure et les éléments piézoélectriques.(dans toute information de cette chapitre référencé par [4])

II -2»Formulation générale :

Ce chapitre vise tout d'abord à exposer les principales étapes qui mènent à l'établissement des équations dynamiques qui gèrent les états élastique et piézoélectrique couplés d'une poutre stratifiée munie de pastilles piézoélectriques, éventuellement couplées à un circuit électrique. Ces équations dynamiques font intervenir les grandeurs généralisées classiques qui sont :

- l'effort N de traction compression dans la poutre,
- le moment M de flexion dans la poutre,
- la différence de potentiel V_k aux bornes de la k -ième pastille,
- la charge Q_k à la surface de l'une des électrodes de la k -ième pastille (la charge est considérée la même sur les électrodes supérieure et inférieure).

II -2-1) Géométrie :

La figure III.1 décrit le système : la poutre est composée de N couches, chacune d'elles étant constituée d'un matériau homogène isotrope transverse, piézoélectrique ou non. L'axe x est l'axe de la poutre, c'est-à-dire la direction d'élanement de la géométrie et l'axe z est normal au plan des couches. Les caractéristiques sont les suivantes :

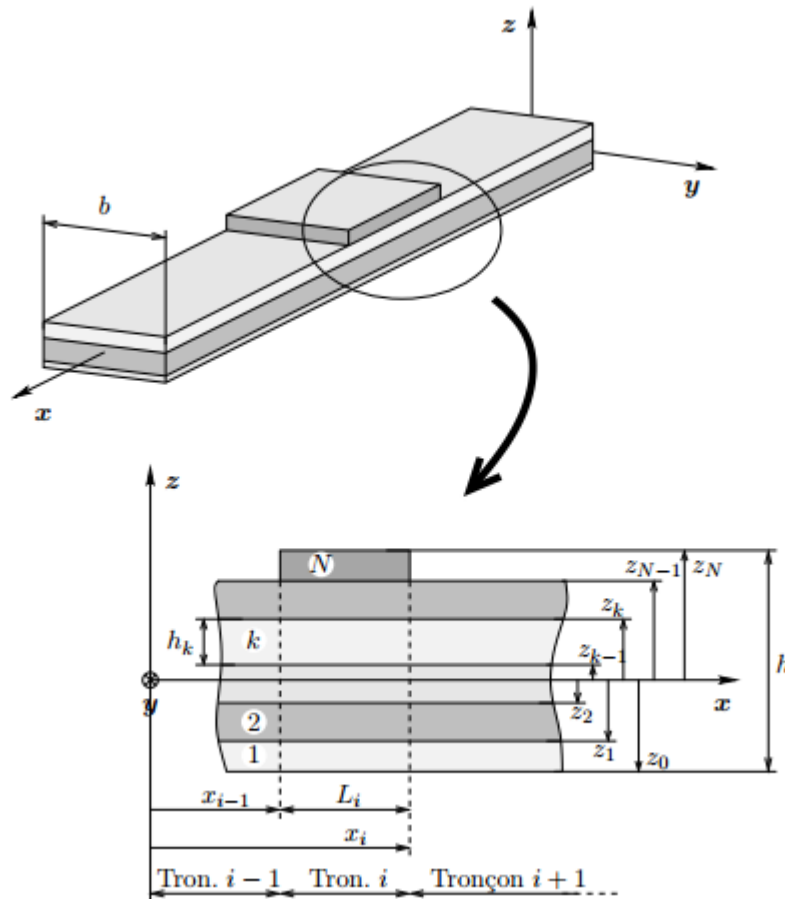


Figure II.1: Système de coordonnées, numérotation des couches et des tronçons de la poutre stratifiée

- La k -ième couche est située entre les cotes $z = z_{k-1}$ et $z = z_k$, son épaisseur est notée $h_k = z_k - z_{k-1}$ et sa masse volumique ρ_k
- Plusieurs tronçons sont considérés suivant la direction x : le i -ième est situé entre les abscisses $x = x_{i-1}$ et $x = x_i$, et à l'intérieur de chaque tronçon, les quantités matérielles et géométriques sont uniformes pour chaque couche (leur épaisseur, les constantes de la relation de comportement. . .). La longueur du i -ième tronçon est et $l_i = x_i - x_{i-1}$.
- La largeur de la poutre (suivant l'axe y) est notée b

L'origine O du repère est choisie dans le plan de symétrie suivant y de la poutre (de sorte que $y \in [-b/2; b/2]$), à une extrémité suivant x , la poutre étant située du côté des x

positifs ($x \in [0; l]$, avec l la longueur totale de la poutre). La cote de O est choisie en fonction d'éventuelles symétries verticales.

II -2-2) Hypothèses mécaniques :

La cinématique de la poutre utilisée est une extension au cas des poutres (milieu élancé unidimensionnel) de la théorie classique des plaques stratifiées. Les hypothèses principales sont les suivantes :

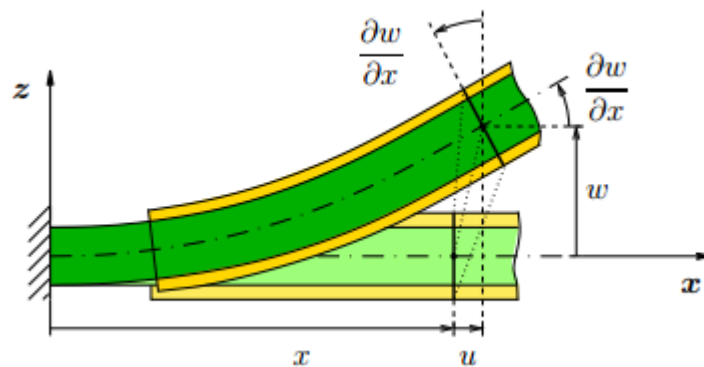


Figure II.2: Champ de déplacement de la poutre en traction / flexion

- la poutre est un milieu mince, c'est-à-dire que l'épaisseur est très faible devant la longueur totale de la poutre .
- les effets de bord sont négligés .
- les couches sont parfaitement collées les unes aux autres si bien qu'un éventuel délaminage entre couches n'est pas pris en compte ici .
- les modules d'élasticité des différentes couches sont du même ordre de grandeur .
- les déformations de cisaillement transverse $\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz}$ sont négligeables. À partir de ces cinq hypothèses, on suppose que.

hypothèse 1 :

toute section normale et droite (à travers toutes les couches) reste normale, droite et indéformable. C'est une généralisation des hypothèses d'Euler-Bernoulli au cas d'une poutre stratifiée.

De plus, en supposant que :

- le chargement extérieur de la poutre est contenu dans le plan (x, z) .
- les déformations des pastilles piézoélectriques suivant la direction y sont négligées (la poutre ne s'incurve pas autour de son axe).

Hypothèse 2

les déplacements suivant la profondeur y et la dépendance des variables en y est négligée.

Si les coordonnées de tout point M de la poutre sont notées (x, y, z), on obtient le déplacement de ce point M par :

$$U(x, y, z, t) = \left(u(x, t) - z \frac{\partial \omega}{\partial x}(x, t) \right) x + \omega(x, t) z \quad (\text{III .1})$$

où (u, w) sont les composantes du déplacement de tout point de coordonnée x de la ligne moyenne (voir figure III.2).

La composante normale des déformations suivant x est alors :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \quad (\text{III .2})$$

En considérant là encore que la poutre est élancée,

Hypothèse 3

on suppose que la contrainte normale suivant l'axe x de la poutre est prépondérante, si

bien que $\sigma_{yy} \ll \sigma_{xx}$, $\sigma_{zz} \ll \sigma_{xx}$ soit encore :

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0 \quad (\text{III .3})$$

II -2-3) Hypothèses électriques :

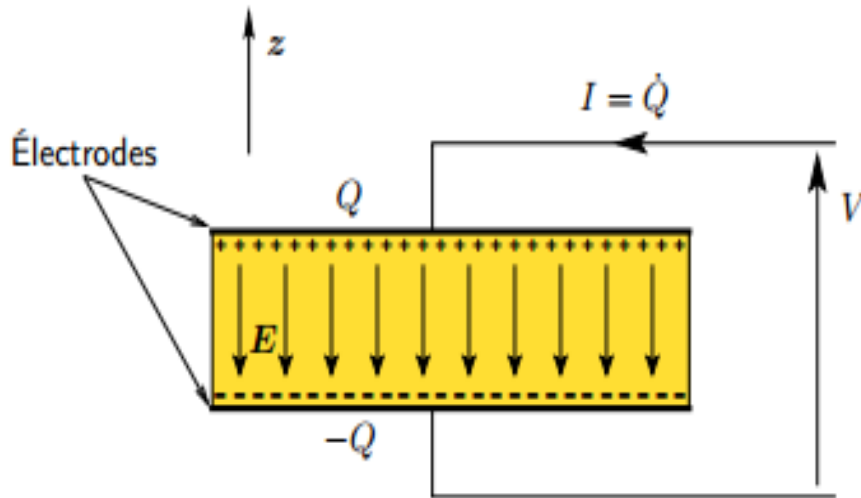


Figure II.3: Pastille piézoélectrique métallisée : champ électrique E , charge électrique Q contenue à la surface de l'électrode supérieure, différence de potentiel V aux bornes de la pastille.

Hypothèse 4

Le potentiel électrique dans un élément piézoélectrique dépend linéairement de z

Cela a pour conséquence que le champ électrique est orienté suivant z et constant :

$$E = -grad \psi = -\frac{\partial \Psi}{\partial z} z$$

II -2-4) Réduction de la loi de comportement :

la relation de comportement de la k -ième couche sera notée :

$$\begin{cases} \sigma_1 = c_k \varepsilon_1 - e_k E_3 \\ D_3 = e_k \varepsilon_1 + \varepsilon_k E_3 \end{cases} \quad (\text{III}.3)$$

où σ_1 , D_3 , ε_1 et E_3 sont des fonctions de (x, z, t) et c_k, e_k, ε_k sont les constantes réduites du matériau de la k -ième couche.

II -2-5) Grandeurs généralisées :

➤ On définit tout d'abord la force de traction et le moment de flexion de la poutre par :

$$\begin{cases} N = A \frac{\partial u}{\partial x} - B \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \sum_{k \in P} \Xi_k V_K \\ M = B \frac{\partial u}{\partial x} - D \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \sum_{k \in P} \Theta_k V_K \end{cases} \quad (\text{III .4})$$

où P est un ensemble d'entiers contenant les numéros des couches piézoélectriques et :

Les grandeurs N , M , u et w sont des fonctions de (x, t), V_K est une fonction de t uniquement et les paramètres A, B, D, Ξ_k et Θ_k sont des fonctions constantes par morceau de x (elles varient d'un tronçon de poutre à l'autre).

➤ La charge Q_k de la k-ième pastille est par définition la quantité de charges électriques libres contenues dans l'une des électrodes , on obtient :

$$Q_k = -\Xi_k [u]_{x=x_{i-1}}^{x=x_i} + \Theta_k \left[\frac{\partial \omega}{\partial x} \right]_{x=x_{i-1}}^{x=x_i} C_K V_K \quad (\text{III .5})$$

où C_K est la capacité du condensateur électrique équivalent à la pastille piézoélectrique sans déformation, définie par :

$$C_K = \epsilon_k \frac{bl_i}{h_k} - \epsilon_k \frac{S_k}{h_k}$$

Avec $l_i = x_i - x_{i-1}$ la longueur de l'électrode, longueur du i-ième tronçon de la poutre, et S_k l'aire de la surface de l'électrode.

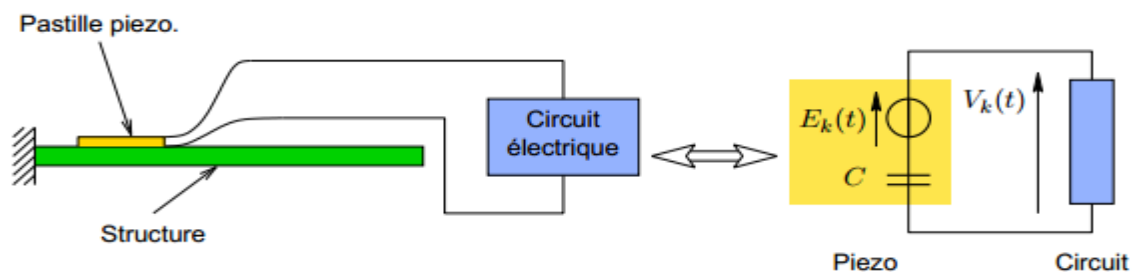


Figure II.4 :Équivalent électrique de la pastille piézoélectrique

- l'équation (III .5) montre que chaque pastille (disons la k-ième) est équivalente du point de vue électrique à un condensateur de capacité C_K en série avec une source de tension de force électromotrice E_k (figure III.4) :

$$V_k(t) = E_k(t) + \frac{Q_k(t)}{C_K} \quad \text{Avec : } E_k(t) = \frac{\Xi_k}{C_K} [u]_{x=x_{i-1}}^{x=x_i} - \frac{\Theta_k}{C_K} \left[\frac{\partial \omega}{\partial x} \right]_{x=x_{i-1}}^{x=x_i}$$

- dans les équations (III .4), le terme B est directement lié à la non-symétrie dans l'épaisseur de la poutre stratifiée : il couple les mouvements longitudinaux au moment de flexion et les mouvements de flexion à l'effort normal.
- les équations (III .4) représentent l'effet piézoélectrique inverse, c'est-à-dire que des différences de potentiel V_k aux bornes des pastilles piézoélectriques modifient l'état mécanique de la structure, représenté par l'effort normal N et le moment de flexion M. En terme de sens, lorsque $e_{31} > 0$, une différence de potentiel V_k positive produit un raccourcissement de la pastille lorsque celle-ci est libre.
- l'équation (III .5) représente l'effet piézoélectrique direct, c'est-à-dire qu'une déformation de la structure, représentée par les déplacements longitudinal u et transversal w, modifie les charges électriques Q_k des pastilles piézoélectriques. En terme de sens, une élévation de la pastille produit une différence de potentiel négative ($V < 0$) en circuit ouvert (à charge Q_k nulle) ou un amoncellement de charges négatives ($Q < 0$) sur l'électrode supérieure en court-circuit ($V_k = 0$)
- es équations (III .4) et (III .5) font apparaître les coefficients A ,B,D, Ξ_k , Θ_k et C_K de manière symétrique :

$$\begin{pmatrix} N \\ M \\ -Q_1 \\ \vdots \\ -Q_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & \Xi_1 & \cdots & \Xi_p \\ B & D & \Theta_1 & \cdots & \Theta_p \\ \Xi_1 & \Theta_1 & C_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Xi_p & \Theta_p & 0 & \cdots & C_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \text{ ou } [u]_{x_{i-1}}^{x_i} \\ -\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \text{ ou } -\left[\frac{\partial \omega}{\partial x} \right]_{x_{i-1}}^{x_i} \\ V_1 \\ \vdots \\ V_p \end{pmatrix}$$

A decorative graphic of a scroll with a grey shadow on the left side, framing the text.

Chapitre III :

*Equation général de
couplage
électromécanique*

Le comportement électromécanique couplé du milieu piézoélectrique peut être décrits avec une précision adéquate par des équations constitutives linéaires. Ces équations piézoélectriques sont utilisés pour étudier les comportements à la fois de la piézoélectrique capteurs et actionneurs. En supposant que les forces mécaniques et électriques soient équilibrées à tout moment, la forme générale des équations piézoélectriques linéaires s'écrit [17]:

$$\begin{aligned} D &= e^t S + \varepsilon E \\ T &= cS - eE \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

où,

- D: vecteur de déplacement électrique (charge par unité de surface),
- T: vecteur de stress,
- S: vecteur de déformation,
- E: vecteur du champ électrique,
- e: matrice de constante piézoélectrique,
- ε : matrice diélectrique à déformation constante
- c: matrice d'élasticité à champ électrique constant.

Les relations pour les champs mécaniques et électriques dans le les moyens sont piézoélectrique comme suit [17]:

$$\begin{aligned} S &= Lu \\ E &= -\nabla\phi \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

Où Est-ce qu'un opérateur différentiel reliant le vecteur de déformation au déplacement vecteur u, et ϕ est le potentiel électrique.

Pour dériver l'équation dynamique du système, une fonction énergétique Π est défini comme:

$$\Pi = \int_V u^t P_b dV - \int_{S_1} u^t P_S dS - u_t P_c - \int_{S_2} \phi \sigma dS \quad (\text{III. 3})$$

Où H Sien la densité d'énergie définie comme [19]:

$$H = \frac{1}{2} S^T c S - \frac{1}{2} E^T \varepsilon E - S^T e E \quad (\text{III.4})$$

P_b et P_S sont les vecteurs respectifs des forces du corps et de la surface appliquées au volume V et surface S_1 , P_c est le vecteur des forces concentrées et σ est le charge de surface à la surface S_2 .

En utilisant le principe de Hamilton avec l'approximation par éléments finis, on peut obtenir les équations dynamiques d'éléments finis du support piézoélectrique. Le principe de Hamilton est exprimé comme suit:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) dt = 0 \quad (\text{III.5})$$

Où l'énergie cinétique T peut être donnée comme :

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{u}^T \dot{u} dV \quad (\text{III.6})$$

Où ρ est la masse volumique, \dot{u} est le vecteur vitesse. Maintenant, en utilisant (III.6), l'équation (III.5) peut être réécrit comme:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \Pi dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_V \rho \delta u^T \ddot{u} dV dt \quad (\text{III.7})$$

Lors de l'utilisation de l'intégration par pièces avec des conditions aux limites appropriées pour l'énergie densité H , on peut montrer que :

$$\delta H = \delta S^T T - \delta E^T D \quad (\text{III.8})$$

L'approximation par éléments finis, sous forme générale, pour le déplacement et le potentiel électrique est écrit comme:

$$\begin{aligned} u_{el} &= N_u u_i \\ \phi_{el} &= N_\phi \phi_i \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

Où u_{el} et ϕ_{el} sont le vecteur de déplacement et le potentiel électrique appartenant à l'élément fini. Dans l'équation (III.9), u_i et ϕ_i le déplacement nodal et vecteurs de potentiel électrique, et N_u et N_ϕ sont les matrices de fonction de forme pour la déplacement et champs électriques, respectivement. En conséquence, Eq. (III.2) peut être réécrit comme:

$$S_{el} = [LN_u]u_i = B_u u_i$$

$$E_{el} = -[\nabla N_\phi]\phi_i = -B_\phi \phi_i \quad (III.10)$$

Utilisation de l'équation (III.10) avec Eq. (III.5) donne les équations dynamiques pour le piézoélectrique milieu après l'assemblage:

$$M_{uu} \ddot{u} + K_{uu} u + K_{u\phi} \phi = F \quad (III.11)$$

$$K_{\phi u} u - K_{\phi\phi} \phi = G \quad (III.12)$$

Ou u, ϕ, F et G sont le déplacement nodal global, le potentiel électrique, la force et vecteurs de charge appliqués, respectivement. Les matrices et vecteurs de l'élément fini dans les équations (III.11) et (III.12), on trouve ce qui suit:

$$[M_{uu}]_{el} = \int_{V_{el}} \rho N_u^T N_u dV, [K_{u\phi}]_{el} = \int_{V_{el}} B_u^T e B_\phi dV,$$

$$[K_{uu}]_{el} = \int_{V_{el}} B_u^T c B_u dV, [K_{\phi\phi}]_{el} = \int_{V_{el}} B_\phi^T \epsilon B_\phi dV$$

$$G_{el} = - \int_{S_{2el}} N_\phi^T \sigma ds, F_{el} = \int_{V_{el}} N_u^T P_b dV + \int_{S_{1el}} N_u^T P_s ds + N_u^T P_c \quad (III.13)$$

Comme il n'ya pas de charge appliquée sur le capteur piézoélectrique, c'est $G = 0$ pour la couche de capteur, la sortie du capteur peut être écrite depuis

Eq. (III.12) comme:

$$\phi = K_{\phi\phi}^{-1} K_{\phi u} u \quad (III.14)$$

La relation entre la tension appliquée et la charge pour est donnée par:

$$G = c_p V \quad (III.15)$$

Où c_p est la capacité du matériau piézoélectrique. Équations de substitution (III.11) et (III.15) en Eq. (III.11) donne l'équation pour la couche d'actionneur comme suit:

$$M_{uu} \ddot{u} + c_{uu} \dot{u} + [K_{uu} K_{u\phi} K_{\phi\phi}^{-1} K_{\phi u}] u = F + c_P K_{u\phi} K_{\phi\phi}^{-1} V \quad (\text{III.16})$$

Où c_{uu} est la matrice d'amortissement proportionnelle supposée être:

$$c_{uu} = \alpha M_{uu} + \beta K_{uu} \quad (\text{III.17})$$

Où α et β sont les coefficients de Rayleigh.

En équation (III.16), la tension peut être utilisée comme tension de retour vers l'actionneur couche. L'entrée dans le contrôleur est prise comme la dérivée temporelle de la sortie du capteur piézoélectrique (ϕ) et la sortie du contrôleur est renvoyée à la actionneur piézoélectrique (V). Dans l'hypothèse d'une loi de retour négative pour le contrôleur et en utilisant Eq. (III.14), la tension de retour vers l'actionneur est obtenue comme suit:

$$V = -K \dot{\phi} = -K K_{\phi\phi}^{-1} K_{\phi u} \dot{u} \quad (\text{III.18})$$

Où est la matrice de gain de rétroaction constante qui peut être déterminée pour différents types de contrôleurs.

Utilisation de l'équation (III.18) dans l'équation (III.16) donne l'équation du mouvement pour le fermé systèmes de boucle

$$M_{uu} \ddot{u} + [c_{uu} + c_P K_{u\phi} K_{\phi\phi}^{-1} K_{\phi u}] \dot{u} + [K_{uu} + K_{u\phi} K_{\phi\phi}^{-1} K_{\phi u}] u = F \quad (\text{III.19})$$

Pour les méthodes de contrôle linéaires dans l'espace des états telles que LQR, LQG et H^∞ , la l'équation du mouvement doit être écrite sous la forme d'un espace d'état. Pour convertir l'équation (III.16) en sous forme d'espace à états, les vecteurs de force et de tension de réaction s'écrivent d'abord comme suit:

$$\begin{aligned} F &= D_f f \\ V &= D_v v \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

Où D_f et D_v sont les matrices de position pour la force et la tension. Maintenant, Eq. (III.16) est exprimé sous la forme d'un espace d'états:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + Bv \\ y &= Cz + Dv \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

où A , B , C et d Ose l'état, l'entrée de l'actionneur, la sortie du système et directe matrices de transmission, Z et définissez les vecteurs d'état et de sortie système. L'état les matrices z et de vecteur A et B se trouvent sous la forme:

$$Z = \begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -M_{uu}^{-1}K_{uu}^* & -M_{uu}^{-1}C_{uu} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ M_{uu}^{-1}c_P K_{u\phi} K_{\phi\phi}^{-1} K_{\phi u} Dv \end{bmatrix} \quad (\text{III.22})$$

Où I est la matrice d'identité, et K_{uu}^* est défini comme:

$$K_{uu}^* = K_{uu} + K_{u\phi} K_{\phi\phi}^{-1} K_{\phi u} \quad (\text{III.23})$$

Les lois LQR et LQG peuvent être appliquées à l'équation. (III.21) pour trouver le gain optimal matrice K . Un contrôleur PID peut également être conçu en utilisant soit Eq. (III.16) ou (III.21).



Chapitre IV :

Simulation numérique



IV-1 » Introduction :

Le chapitre qui suit sera une simulation numérique d'une poutre en aluminium avec une couche piézoélectrique, Le piézo utilisé est : PZT5A ,avec un logiciel conçu spécialement pour étudier le comportement mécanique de toute structure. La simulation permet d'une part de comprendre les phénomènes internes en accédant aux mécanismes internes qui les régissent et d'autre part d'appliquer les connaissances des structures dans des nouvelles configurations .

IV-2 » Présentation de ANSYS :

Pour déterminer le couplage électromécanique entre la structure de base (poutre) et la couche piézoélectrique le code ANSYS a été adopté. Ce code général de calcul est basé sur la méthode des éléments Finis et conçu pour l'analyse des structures. Il permet de traiter des problèmes d'interaction mécanique – électrique .

IV-3» Fréquences et modes propres de poutre sans piézo :

IV.3 .1) définition de la géométrie du modèle :

La poutre proposée est des dimensions (figure IV.1)

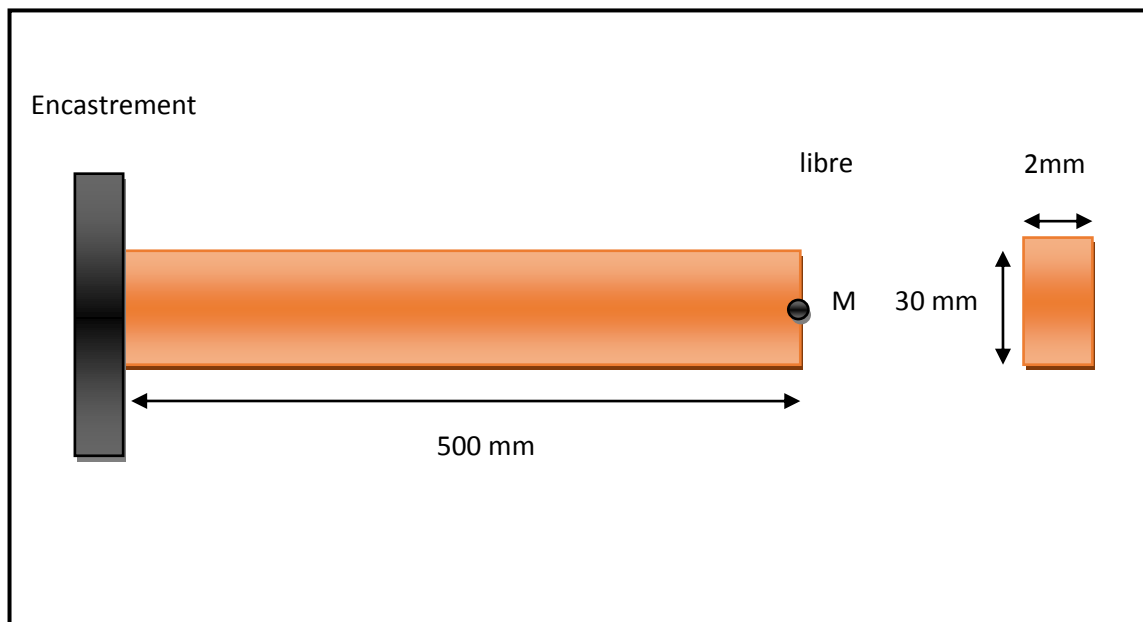


Figure IV .1 : géométrie de la poutre étudiée

IV.3.2) Définition des données caractérisant le modèle :

Le tableau IV .1 montre les propriétés mécaniques de la poutre considérée:

Module Young E(Pa)	$68 \cdot 10^9$
Coefficients de Poisson ν	0.33
Masse volumique $\rho(\text{Kg}/\text{m}^3)$	2692

Tableau IV.1 : propriétés mécaniques de la poutre de basse

IV.3. 3)Choix d'élément :

L'élément SOLID5,3 (figure IV.3)de la bibliothèque ansysapdl permet de modéliser la structure mécaniques de base (la poutre). L'élément SOLID5 possède 8 nœuds et 3 degrés de libertés (u_x , u_y , u_z).

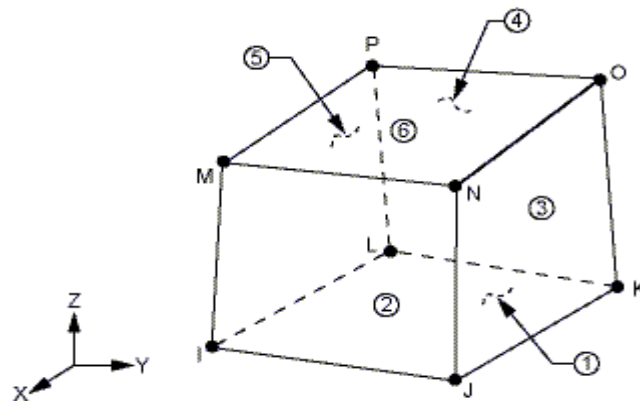


Figure IV.2 : élément type« solide 5 »

IV.3 .4)Maillage :

La poutre est maillée de 1245 éléments (figure IV .5) ,chaque élément rectangulaire (7, 8125* 7,5 mm), la structure possède 5760 (1920 * 3) degrés de libertés mécaniques (u_x , u_y , u_z) .

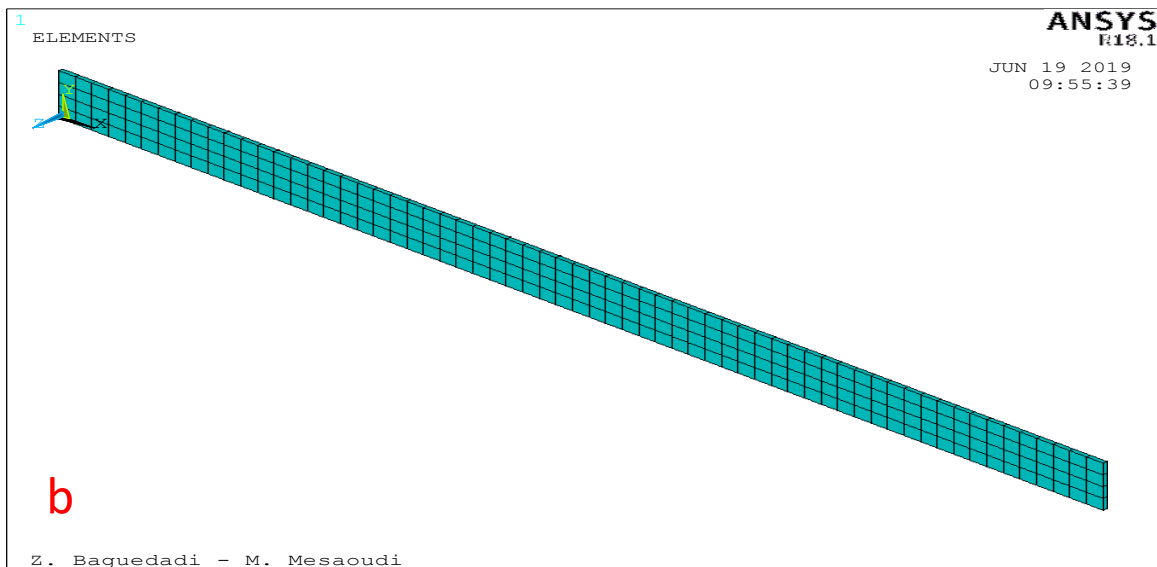
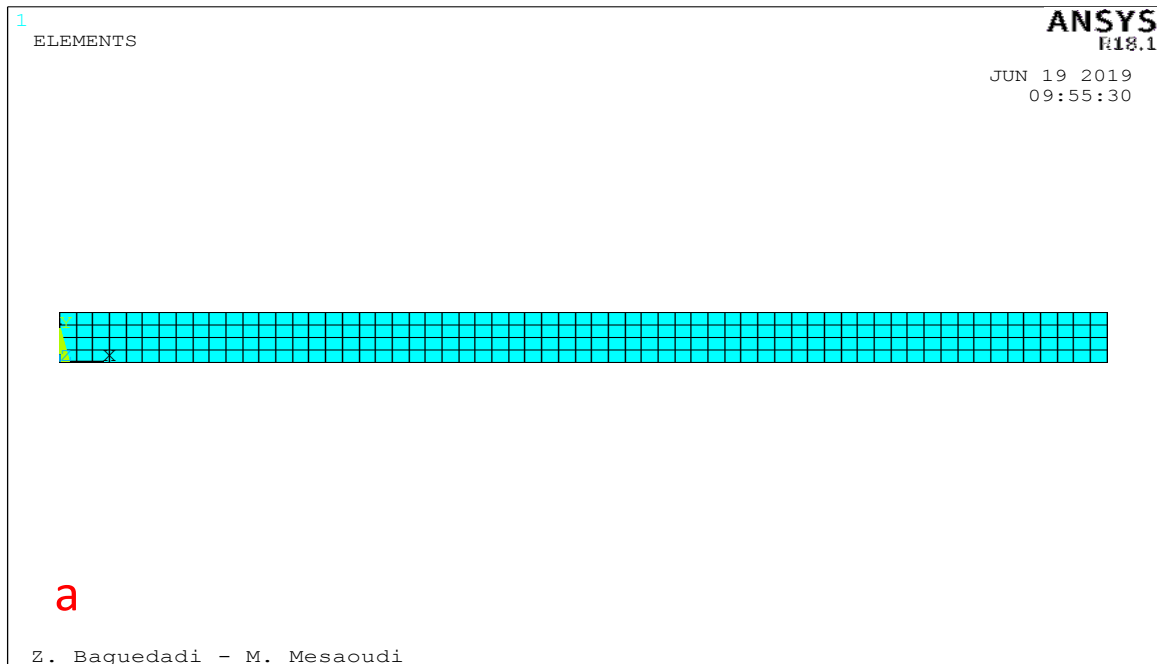
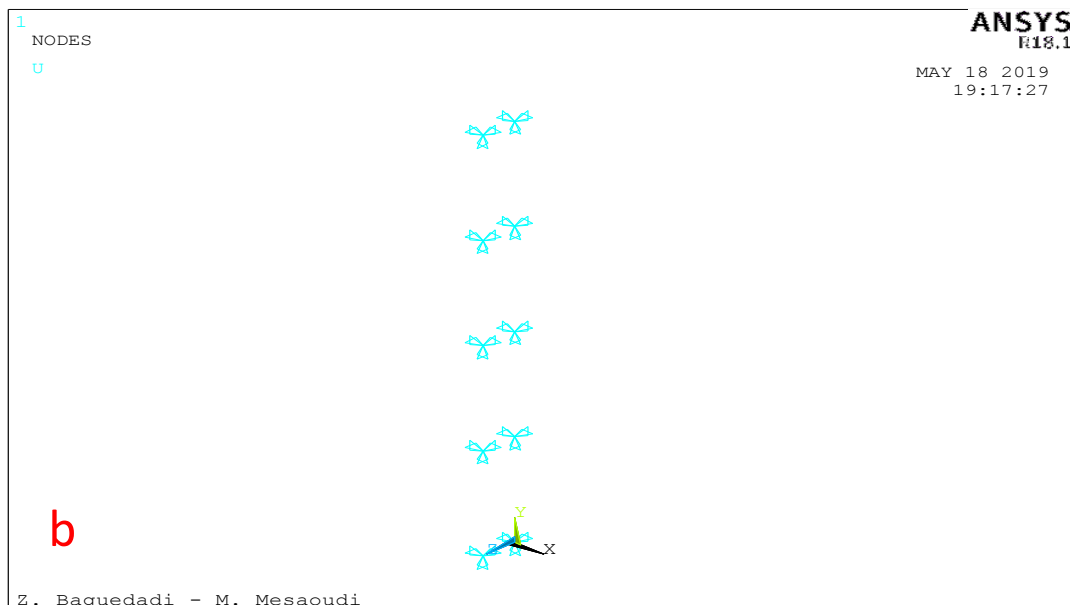
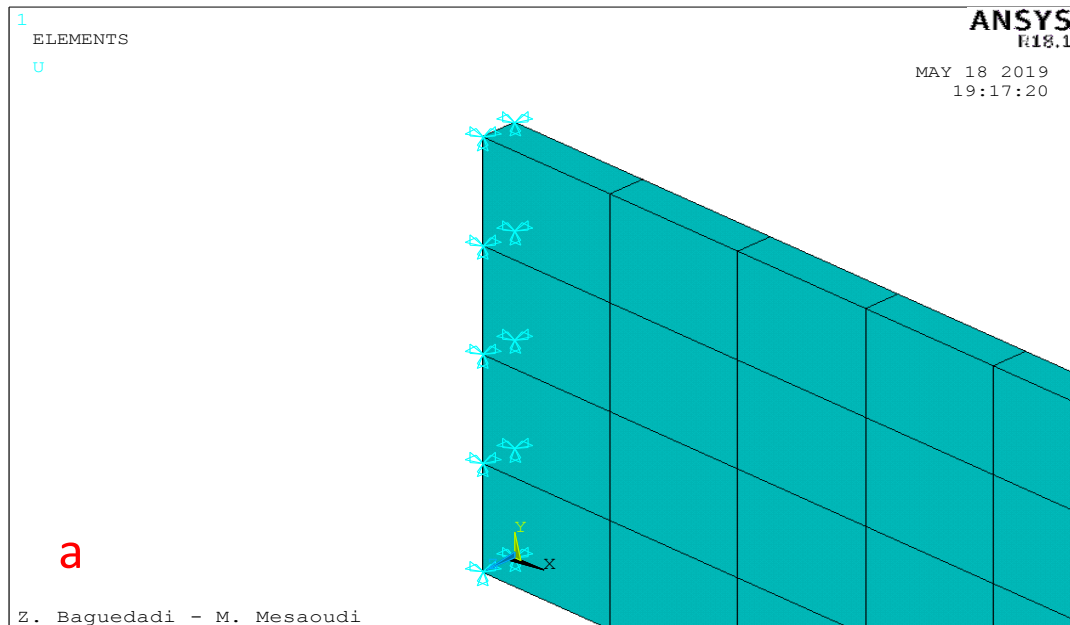


figure IV .3 (a , b) : un maillage de la poutre de base

IV.3.5) Condition aux limites : Encastrement – libre :

La figure IV.4 (a ,b) illustre la fixation des nœuds de l'extrême droite de la poutre de la basse .



La figure IV.4 (a ,b) fixation des nœuds de l'extrême droite de la poutre

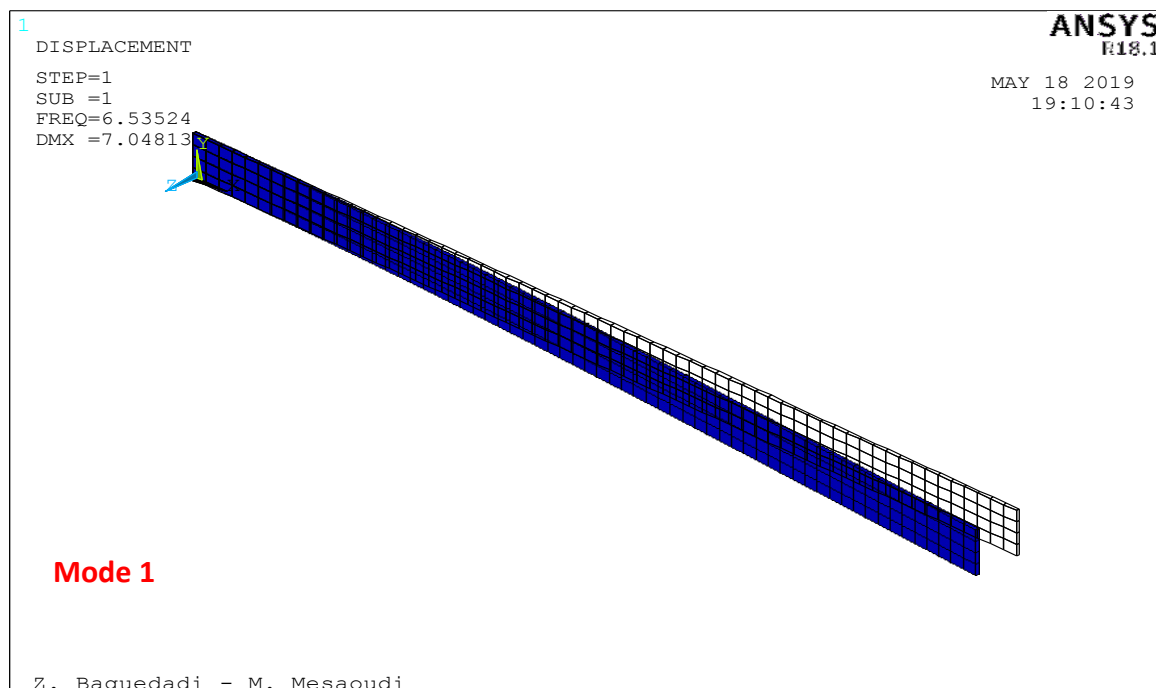
IV.3.6)Analyse modale :

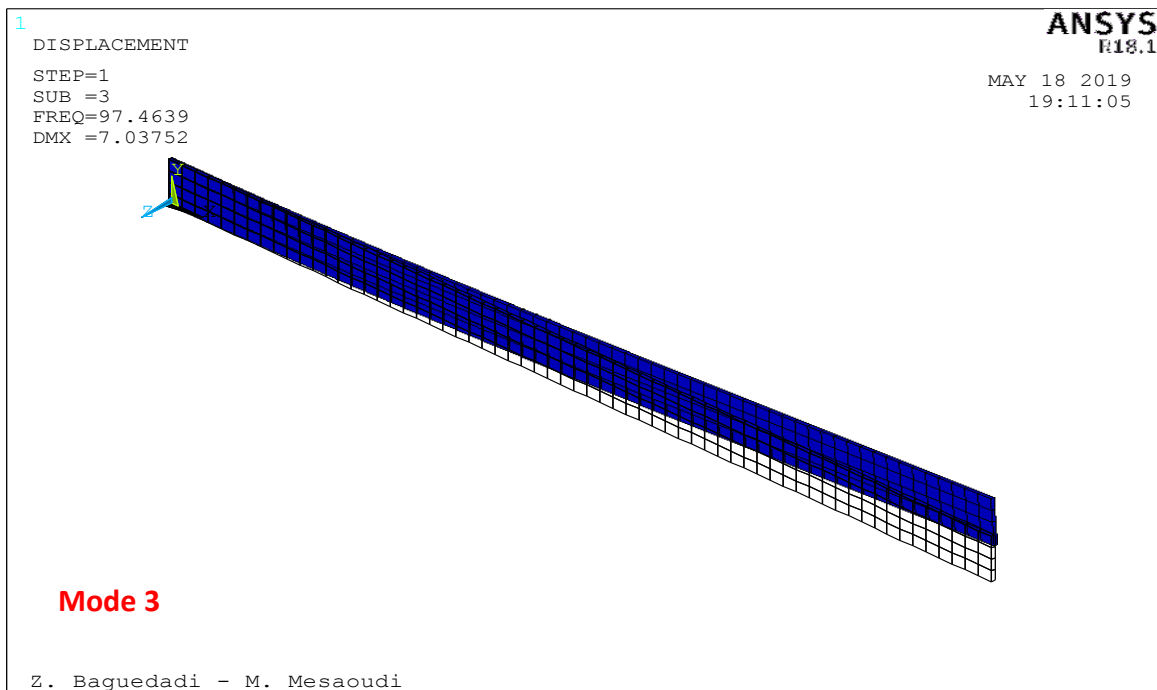
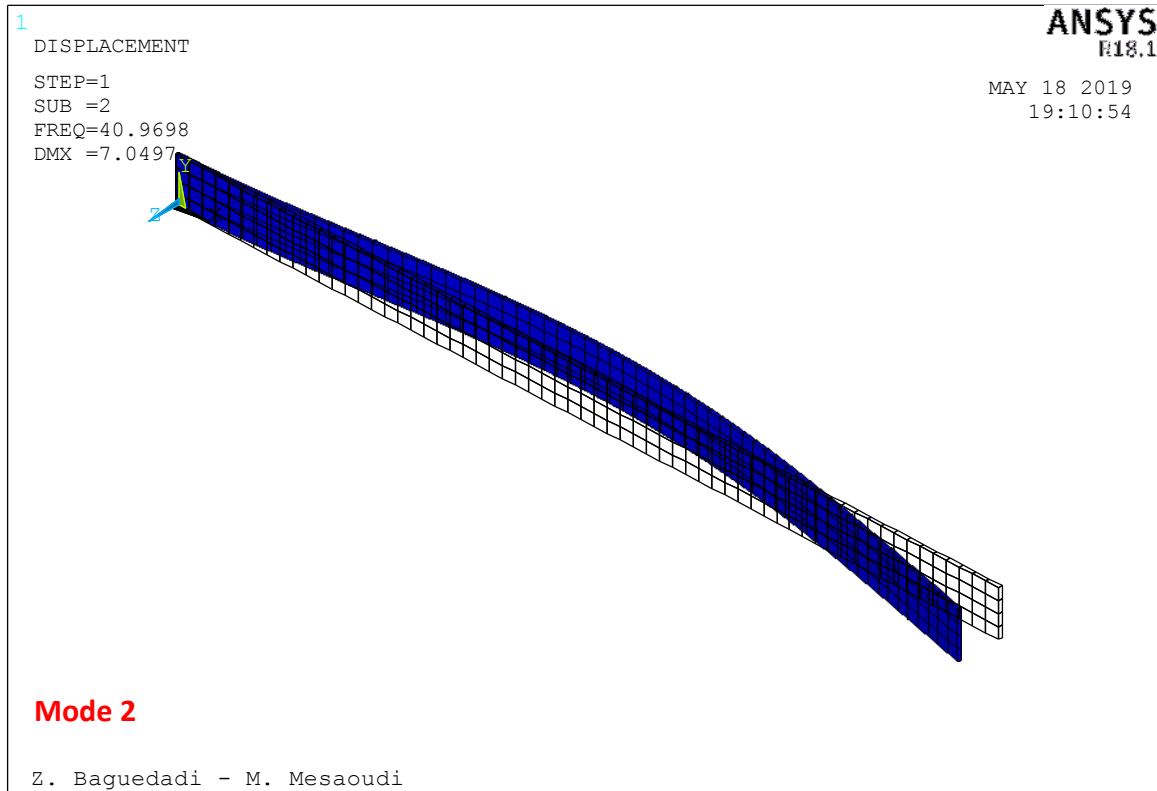
Le tableau IV .2présente les 6 premiers fréquences naturelles de vibration libre de la structure.

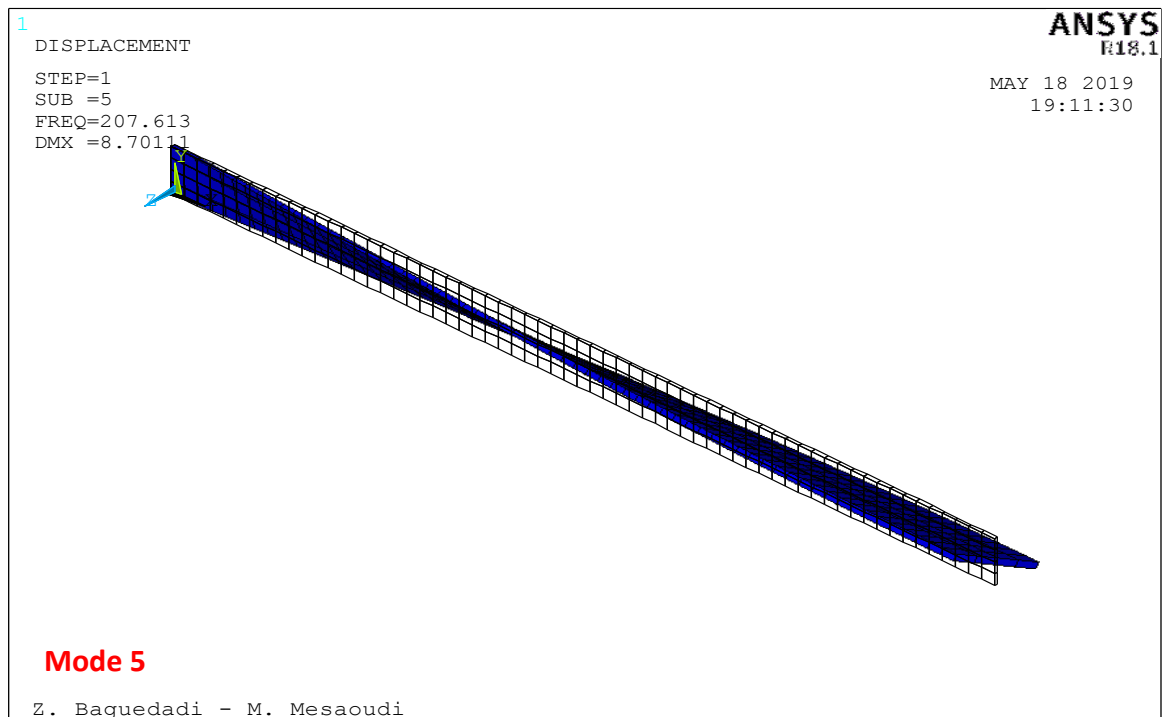
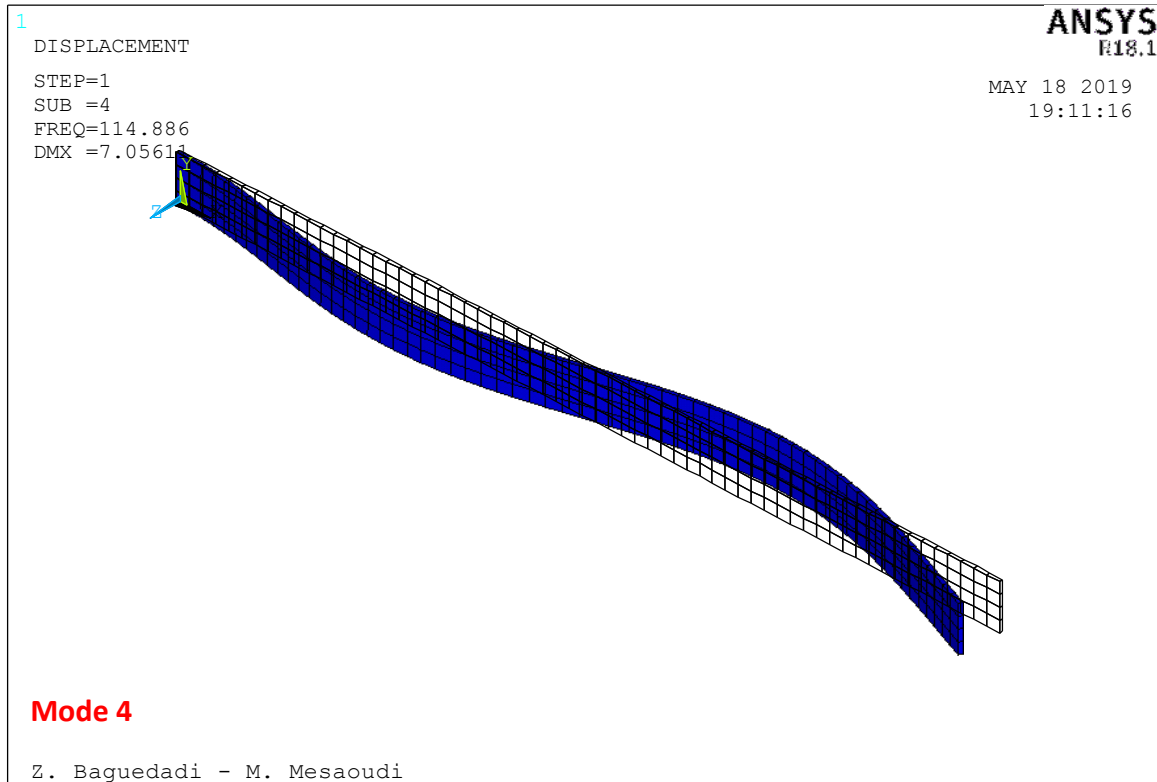
Fréquences (Hz)	Poutre sans couche piézoélectrique
Mode 1	6 ,5352
Mode 2	40 ,970
Mode 3	97 ,464
Mode 4	114,89
Mode 5	207,61
Mode 6	225,72

Tableau IV .2 : Six premiers fréquences naturelles de vibration libre de la poutre

Les formes des modes de la vibration libre de la poutre de base sont montrés de la figure IV.5







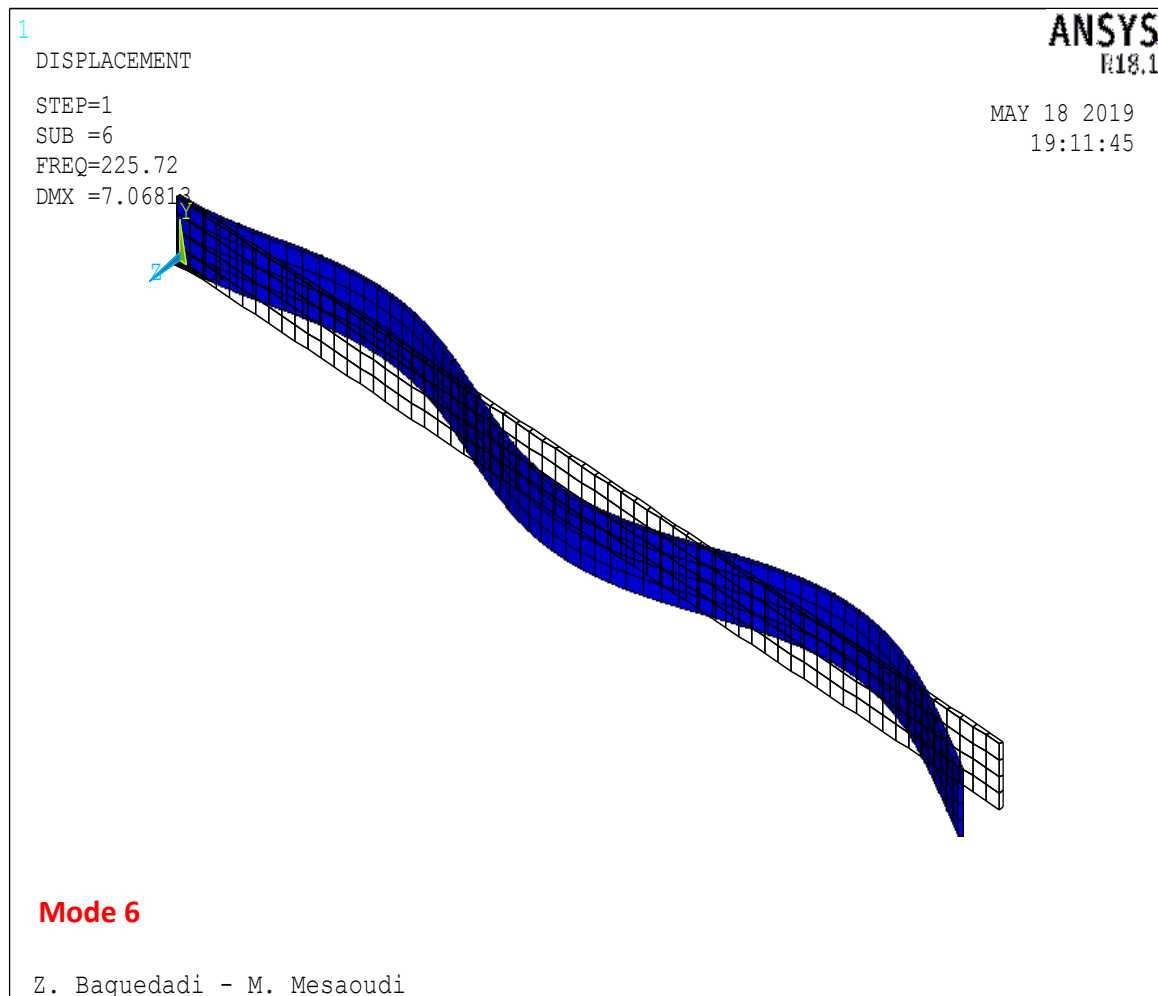


Figure IV.5 :Six premiers fréquences naturelles de vibration libre de la poutre.

IV-4»Modélisation de la poutre équipée par deux pastilles piézoélectriques

IV.4.1)Définition de la géométrie du modèle :

La poutre étudiée (figure IV.5)est la même poutre considérée précédemment avec les couches piézoélectriques de la géométrie suivante : $L_p=50 \text{ E }^{-3} \text{ m}$, $b_p=30 \text{ E }^{-3} \text{ m}$, $H_p=1 \text{ E }^{-3} \text{ m}$.

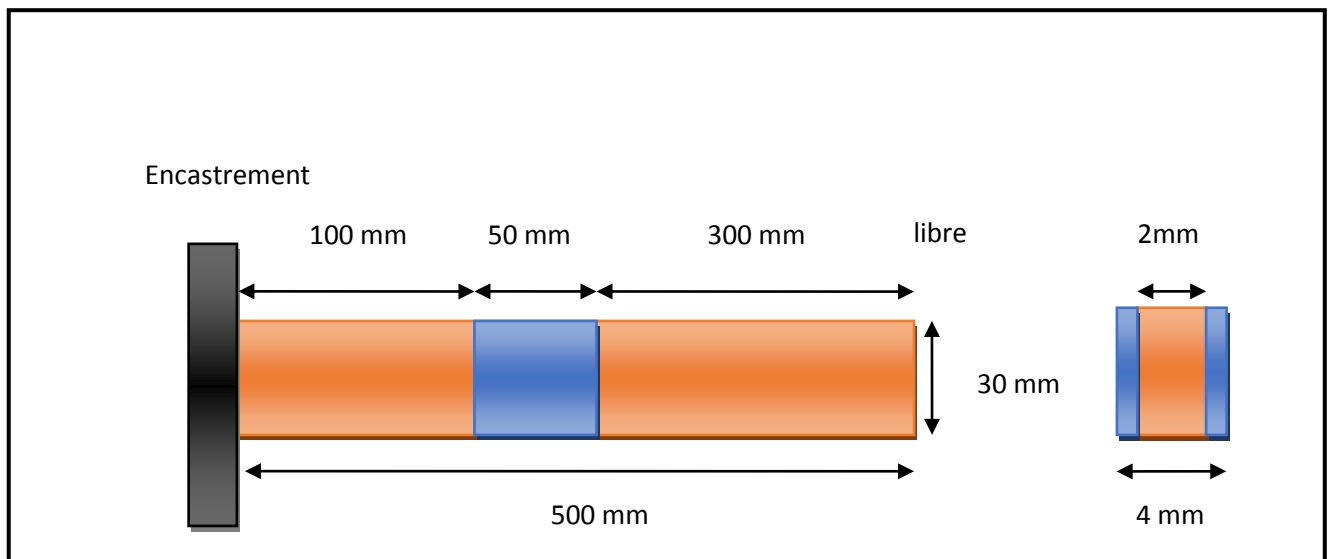


Figure IV .6 : géométrie de la poutre intelligente

IV.4.2) Propriétés mécanique :

Le matériau piézoélectrique utilisé est : PZT5A (tableau IV.3)

Propriétés	PZT-5A
Module de Young E (N/m ²)	63x10 ⁹
Coefficient de poisson	0.3
Masse volumique ρ(kg/m ³)	7750
Constantes piézoélectriques(c/m²)	
e 31	
e 33	6.5
e 15	23.3
	17
Constantes diélectriques (F/m)	
g 11	1.53x10 ⁻⁸
g 22	1.53x10 ⁻⁸
g 33	1.5x10 ⁻⁸

Tableau IV.3 : propriétés des matériaux piézoélectrique PZT5A

IV.4.3) Choix d'élément :

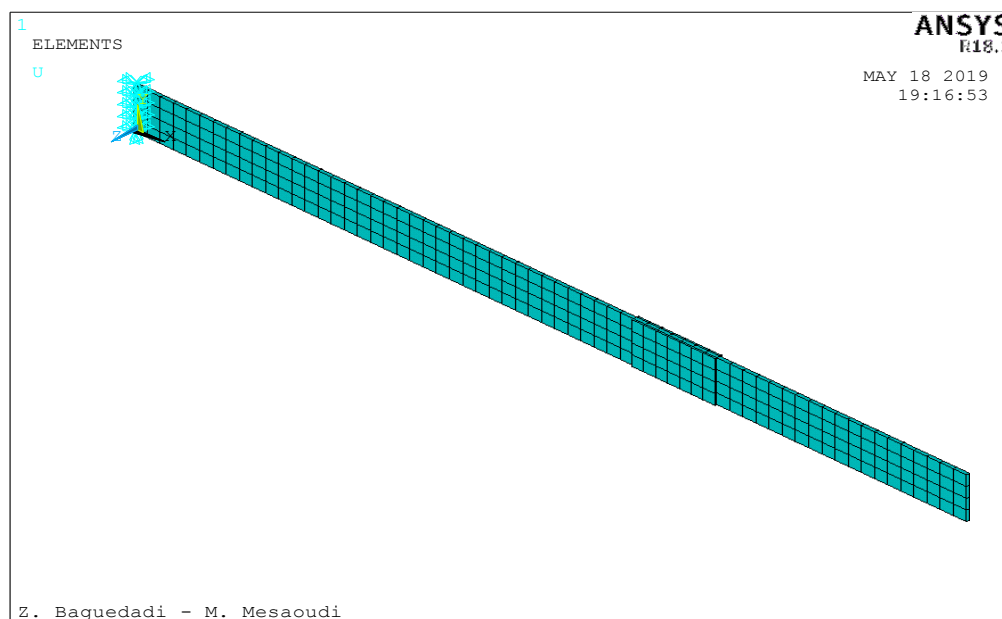
L'élément de couplage piézoélectrique SOLID5,3 de la bibliothèque ansysapdl est utilisé dans la modélisation de couplage électro- mécanique .

L'élément SOLID5,3 possède 4 DDL (ux ,uy ,uz , volts) .

IV.4.4) maillage :

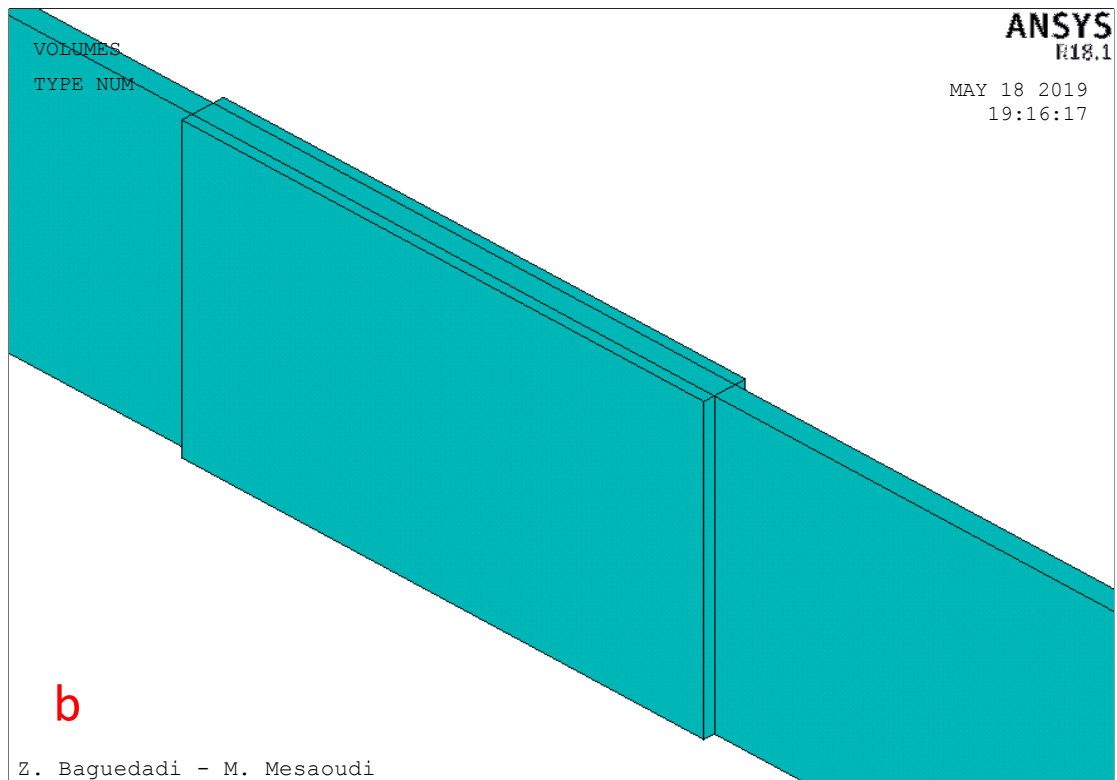
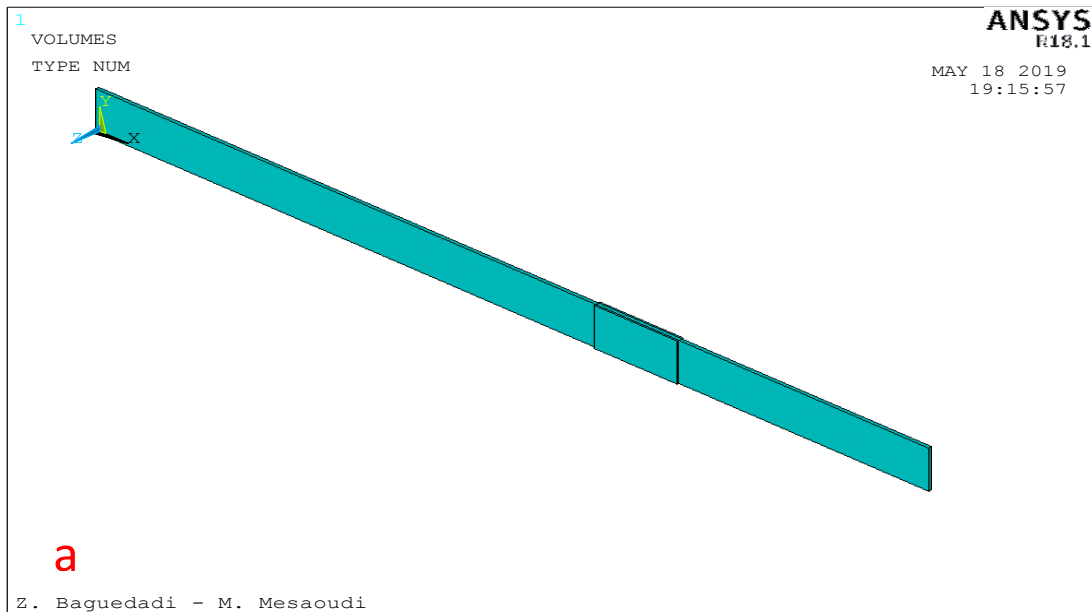
Le modèle volumétrique a été maillé par une taille maximale d'élément global de 8 mm. Parce que la plaque a été sectionnée en sous-blocs, les nœuds dans la ligne piézoélectrique s'alignent parfaitement avec les nœuds de la plaque située en dessous.

La structure intelligente possède 7680 degrés de libertés (1920* 3 mécaniques + 1920 * 1 électriques).



Figures IV .7 : maillage de la poutre intelligente

IV.4.5) Condition aux limites : Encastrement – libre :



Figures IV .8(a,b) : Deux pastilles piézoélectriques collés symétriquement sur la poutre

IV.4.5) la couplage :

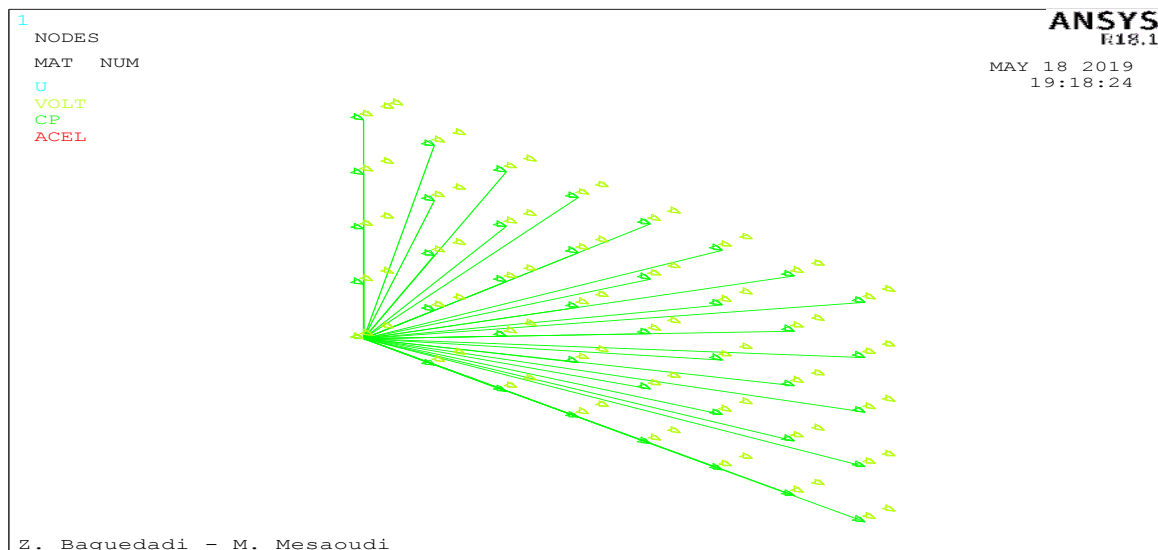


Figure IV .9 : couplage électromécanique sur les nœuds communs

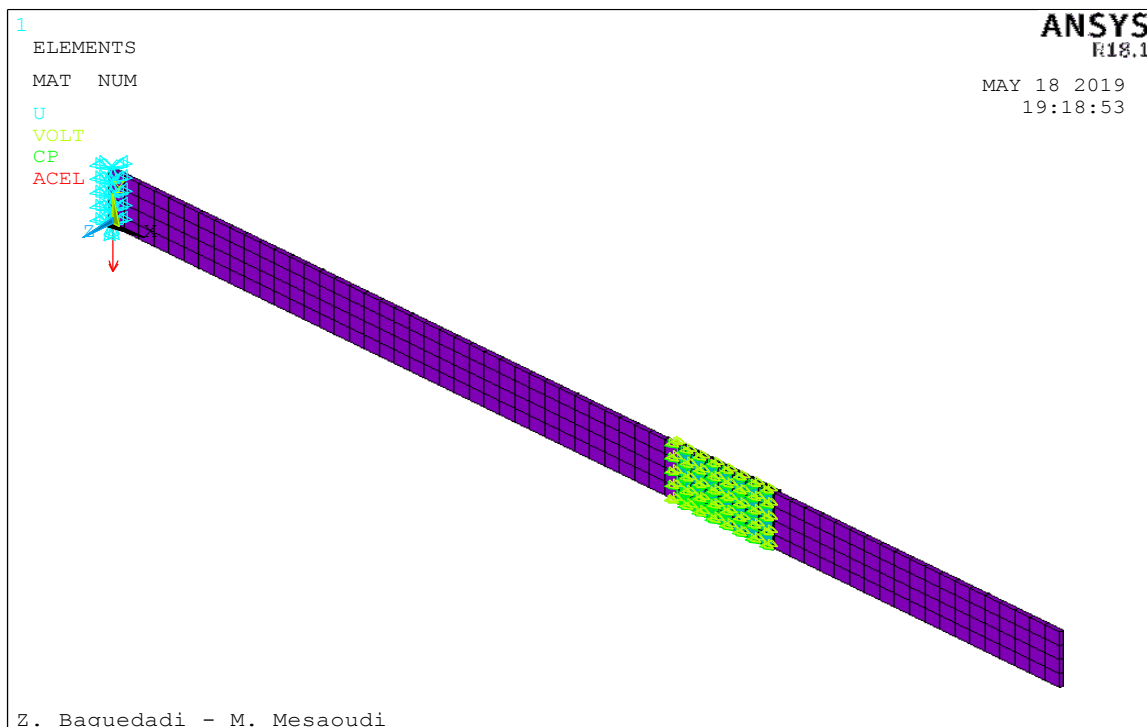


Figure IV.10: la poutre intelligente

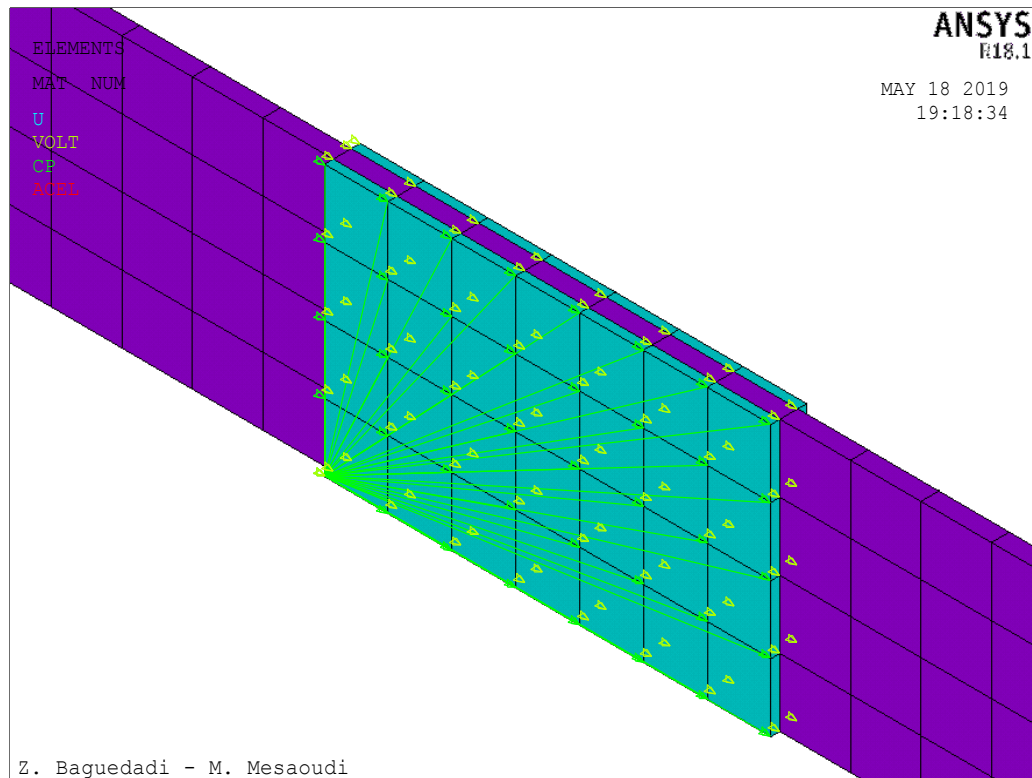


Figure IV .11 : couplage électromécanique entre les la poutre et les deux pastilles

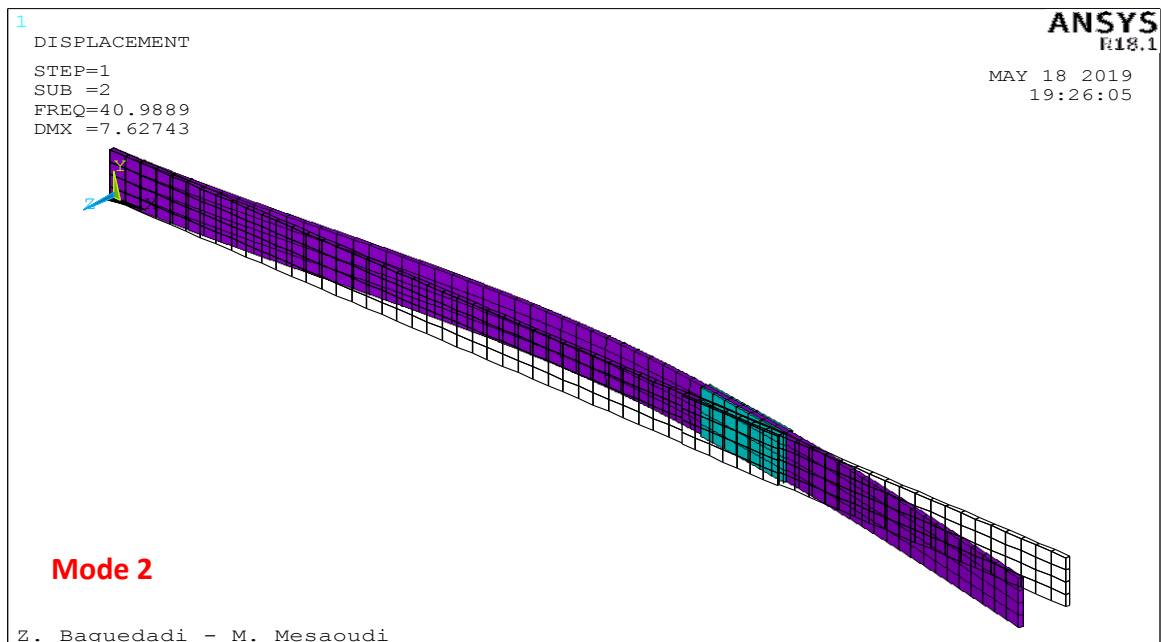
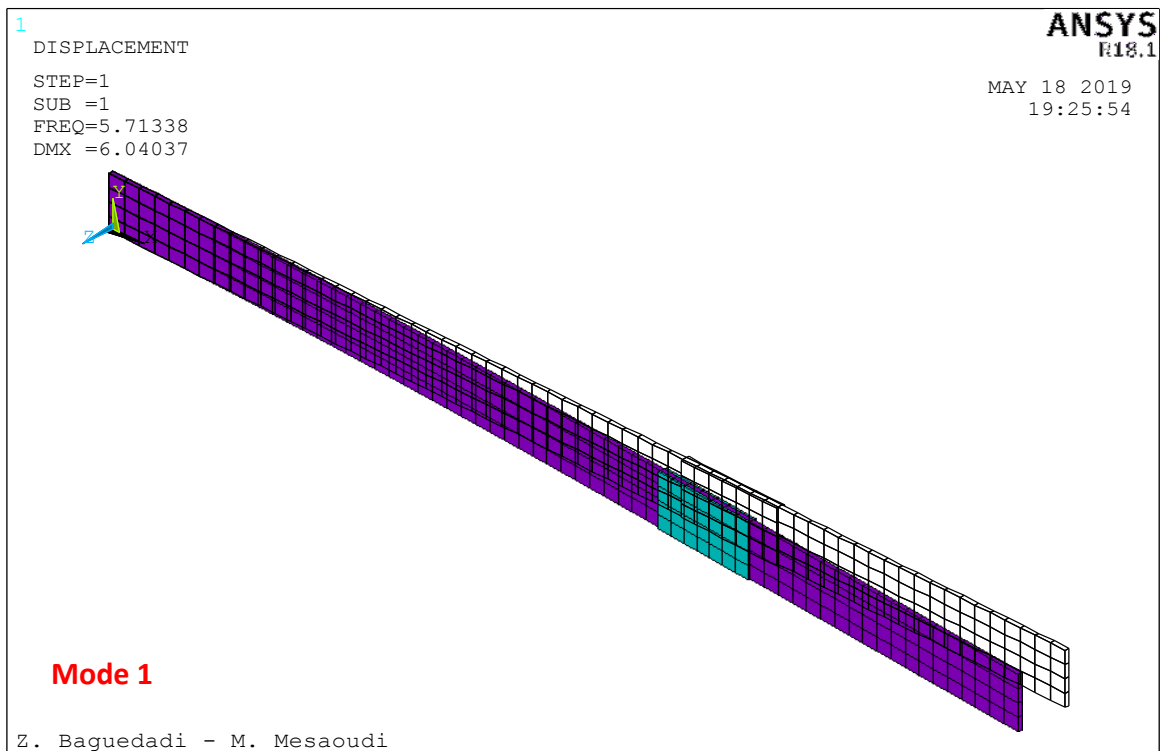
IV.4.6) Type d'analyse Modale :

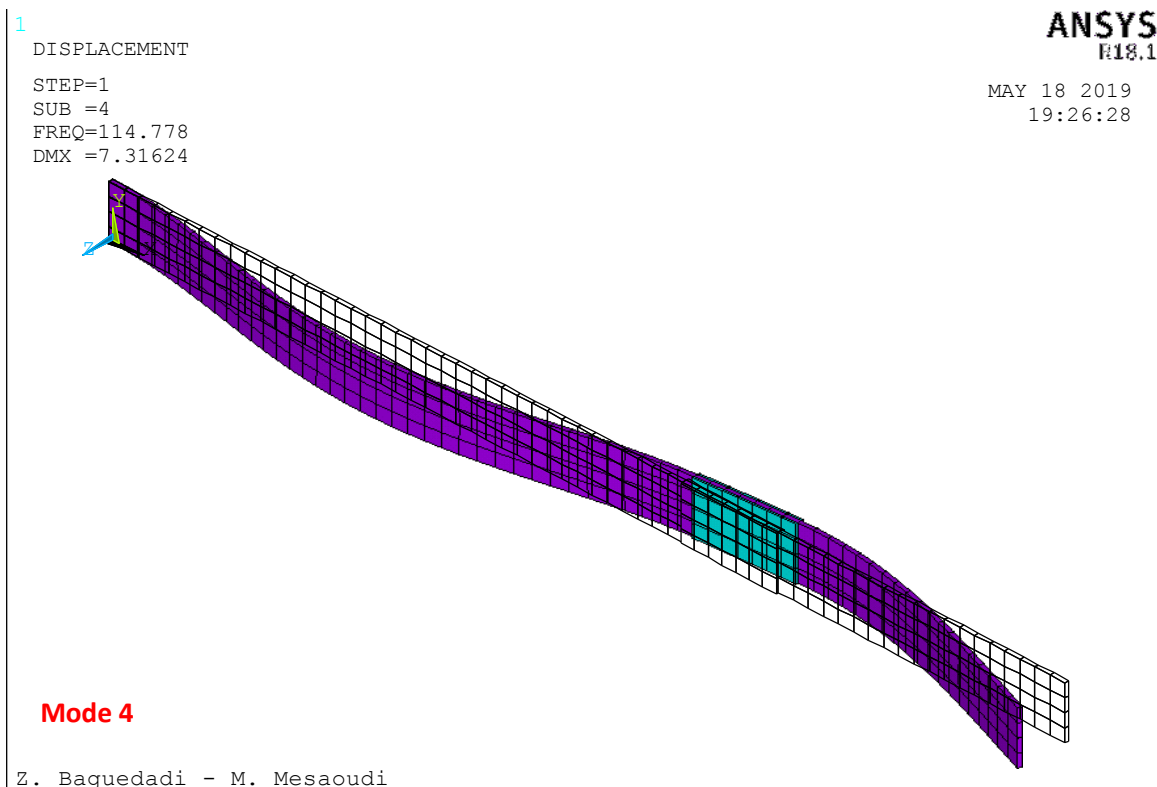
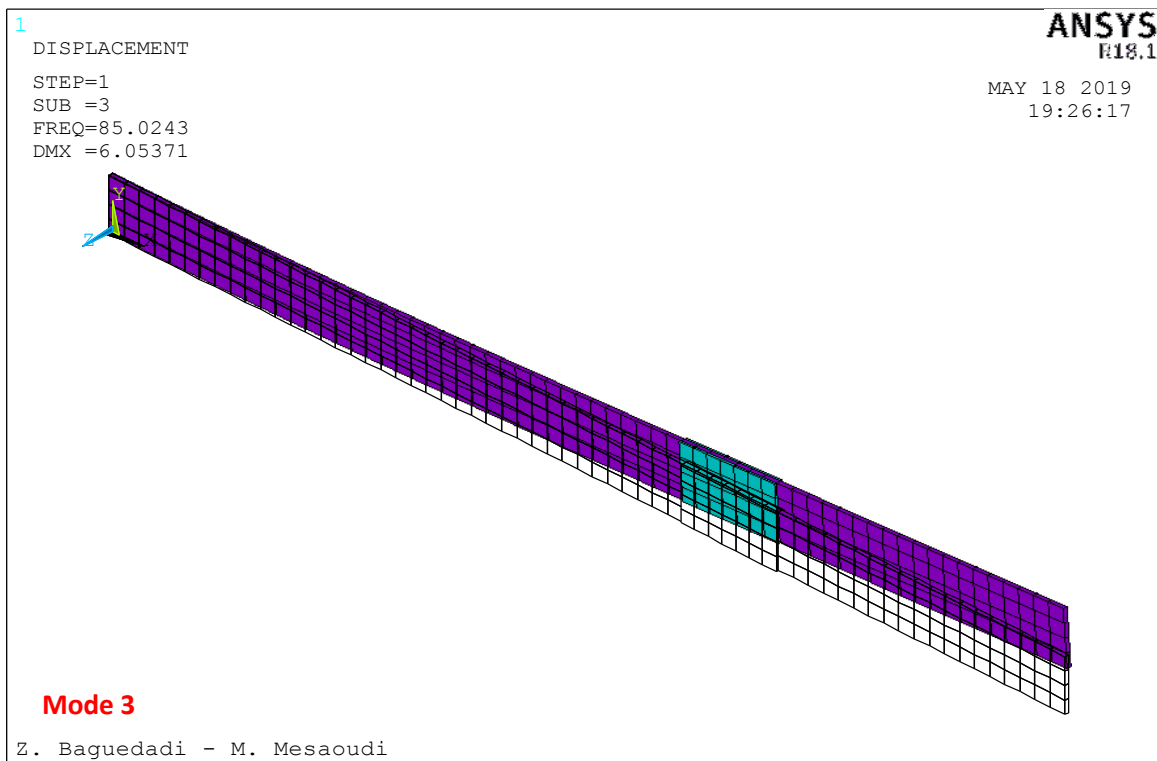
Le tableau IV.4 présente les six premières fréquences naturelles de la poutre intelligente

Fréquences (Hz)	Poutre intelligent (avec patch)
Mode 1	5,7134
Mode 2	40,989
Mode 3	85,024
Mode 4	114,78
Mode 5	178,31
Mode 6	222,89

Tableau IV.4 : Six premières fréquences naturelles de la poutre intelligente

Les formes des modes de la vibration libre de la poutre intelligent sont montrées de la figure IV.11





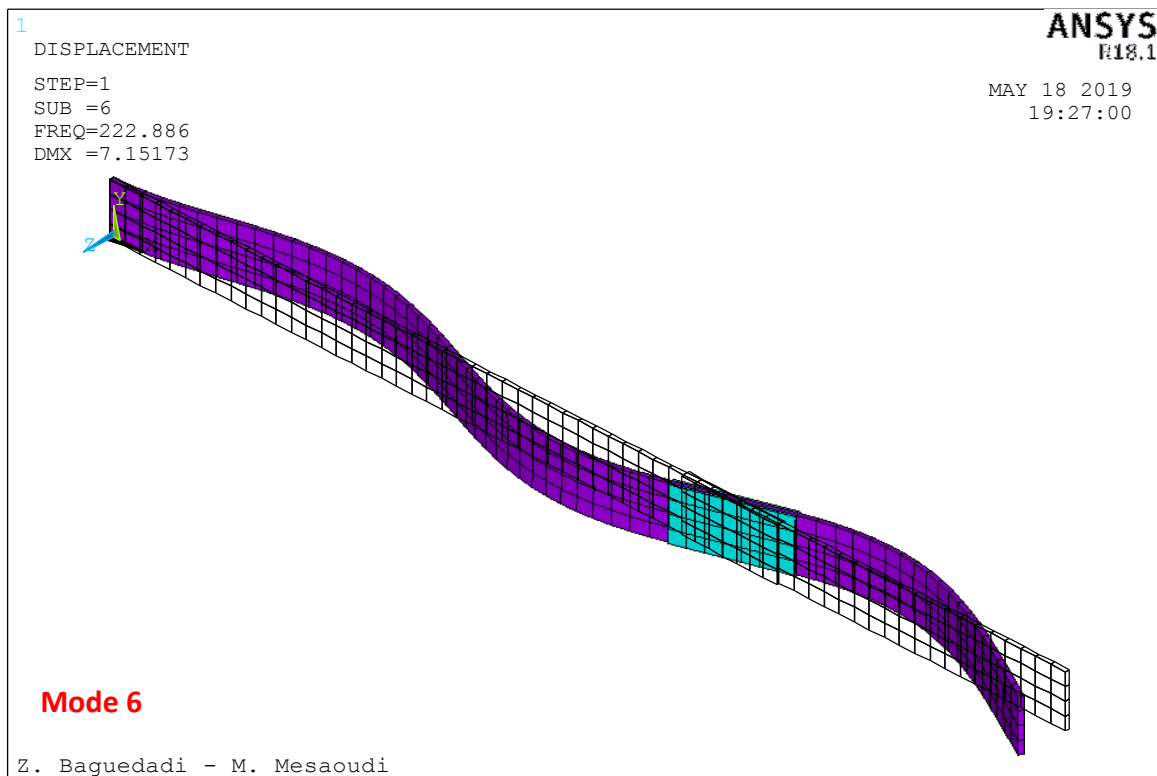
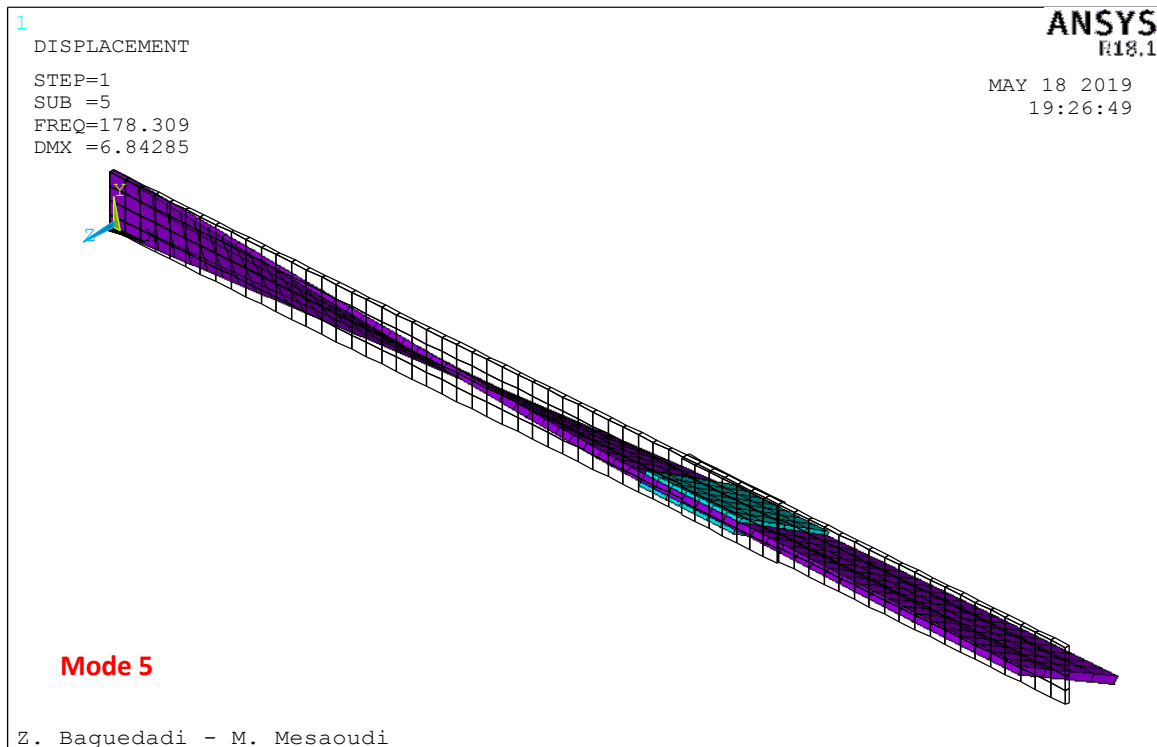


Figure IV.12 : Six premiers modes de vibration libre de la poutre intelligente

IV-5 » la comparaison de la fréquence de vibration d'un poutre sans pzt et un poutre avec pzt :

Le tableau IV.5 présente une comparaison entre les fréquences naturelles de la poutre de base et la poutre intelligente :

Modes (Hz)	ANSYS apdl (Sans piézo)	ANSYS apdl (poutre intelligente)
1	6.53524	5.71338
2	40.9698	40.9889
3	97.4639	85.0243
4	114.886	114.778
5	207.613	178.309
6	225.72	222.886

Tableau IV.5 : fréquences naturelles de la poutre de base et la poutre intelligente

IV-6 » Réponse harmonique de la poutre de base et la poutre intelligente

La figure IV.13 montre la réponse au point M(500,15) (Figure IV.1) de la poutre de base et la poutre intelligente en fonction des impulsions (rd/s).

Les résultats sont obtenus avec le code ANSYS apdl et importés au MATLAB afin de tracer les deux courbes dans le même graphe.

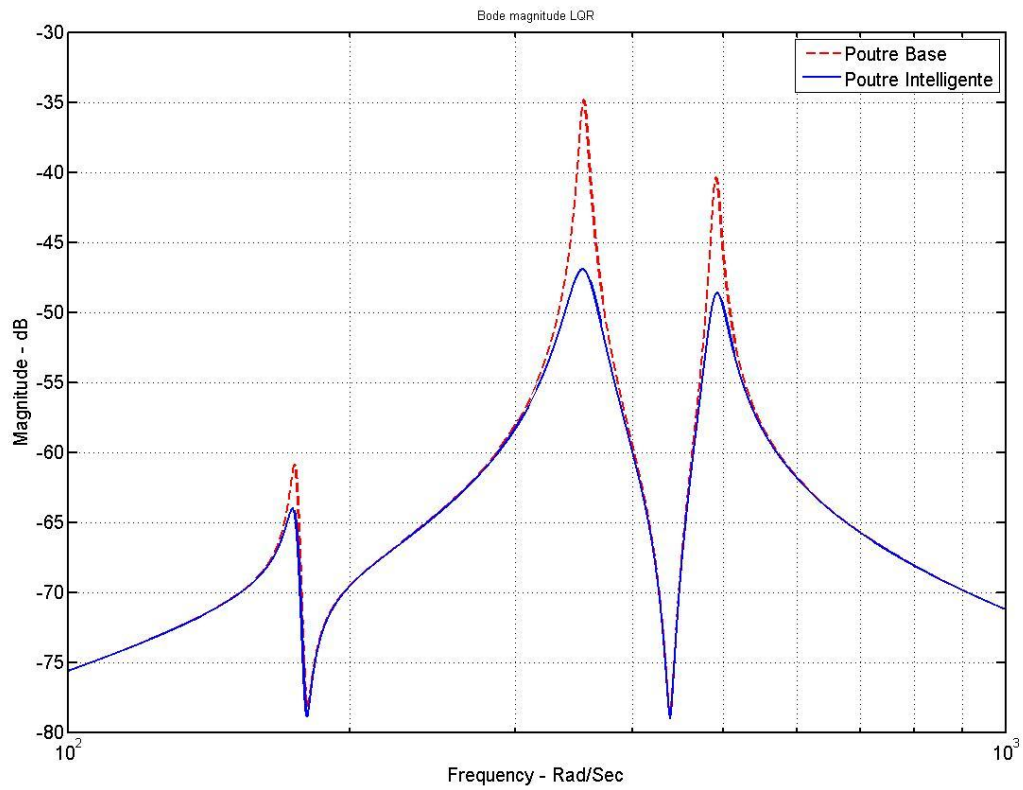


Figure IV.13 : Réponse harmonique de la poutre de base et la poutre intelligente

Conclusion générale

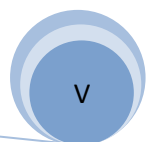
Le travail présenté dans ce mémoire est une contribution à la compréhension le phénomène piézoélectrique et la simulation et la modélisation de l'interaction mécanique et électrique dans la structure intelligente. Nous avons proposé d'une part une approche numérique à travers le développement d'un modèle intelligent (Poutre équipé par deux pastilles piézoélectriques).

Le modèle qui a été développé au chapitre quatre permet principalement d'obtenir les modes et les fréquences propres, cette étude est la première étape pour réaliser un contrôle passif de la structure de base.

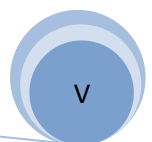
Notifications :

- u déplacement axial
- v, w déplacements transverses
- $\bar{\varepsilon}_{\{\bar{e}_i\}}$ le champ de déformation
- \vec{M}_{int} moment résultant au centre de surface N
- \vec{R}_{int} Le torseur des efforts intérieurs N
- N effort normal Nm
- V effort tranchant N
- T moment de torsion Nm
- M moment de flexion (ou moment fléchissant) Nm
- $\bar{\sigma}$ contrainte Pa
- \vec{u} le vecteur des déplacements
- $\vec{\gamma}$ accélération
- E rigidité (module d'Young ou module d'élasticité longitudinal) $N.m^{-2}$
- S section m^2
- ρ_m masse volumique $Kg.m^{-3}$
- ρ la masse linéique 'apparente'
- m_u la masse unitaire
- m La masse Kg
- ε_{xx} la déformations de flexion
- ω_n la fréquence rad/s
- λ_n Pulsation
- l la longueur de poutre m
- ρ rayon de courbure
- I_z moment d'inertie autour de l'axe z
- k_e la matrice de rigidité élémentaire
- q_e la matrice de rigidité globale
- f_e le vecteur charges nodales
- G la fonction de Gibbs élastique
- g est le coefficient piézoélectrique $m^2.C^{-1}$
- s est la compliance élastique $m^2.N^{-1}$

- β l'inverse de la permittivité $m.N^{-1}$
- D le déplacement électrique $C.m^{-2}$
- d_{ij} les matrices des coefficients piézoélectriques $C.N^{-1}$
- d_{15} Constante piézoélectrique (module de piézoélectrique) $C.N^{-1}$ ou $m.V^{-1}$
- $\varepsilon_{11}^T, \varepsilon_{11}^S$ Permittivité piézoélectrique à déformation $F.m^{-1}$
- k_{ij}^2 Le coefficient de couplage %
- Q_m le Facteur de qualité mécanique
- T vecteur de stress $N.m^{-2}$
- S vecteur de déformation
- E vecteur du champ électrique $V.m^{-1}$
- e matrice de constante piézoélectrique $C.m^{-2}$
- ε matrice diélectrique à déformation constante $F.m^{-2}$
- c matrice d'élasticité à champ électrique constant $N.m^{-2}$
- ϕ le potentiel électrique
- Π une fonction énergétique
- H la densité d'énergie
- P_b, P_s les vecteurs respectifs
- V volume m^3
- P_c le vecteur des forces concentrées
- σ le charge
- δ Le principe de Hamilton
- T l'énergie cinétique
- u_{el}, ϕ_{el} le vecteur de déplacement et le potentiel électrique par à l'élément fini
- u_i, ϕ_i le déplacement nodal et vecteurs de potentiel électrique
- N_u, N_ϕ les matrices de fonction de forme pour la déplacement et champs électriques
- u, ϕ, F, G le déplacement nodal global
- c_{uu} la matrice d'amortissement proportionnelle
- α, β les coefficients de Rayleigh.
- V la tension de retour vers l'actionneur
- F le vecteur de force N



- D_f, D_v les matrices de position
- ν Coefficients de Poisson



Référence :

- [1] Nantes, janvier 2009 P. Cartraud
- [2] Mécanique des Structures Etude des Poutres Patrice Cartraud
- [3] Dynamique des Solides et des Structures Sylvain Drapier
- [4] Première partie I Modèle électromécanique Pierre Desproges
- [5] Chapitre I Généralités sur les matériaux piézoélectriques
- [6] Apport des nouveaux matériaux piézoélectriques dans le domaine des micro-gyromètres vibrants . ARNAUD PARENT
- [7] J. F. Nye, Physical Properties of Crystals: Their Representation by Tensors and Matrices, Clarendon Press, Oxford (1979).
- [8] T. O. Ikeda, Fundamentals of piezoelectricity, Oxford University Press (1990)
- [9] O. Elkechai. «Céramiques ferroélectrique dans les systèmes $\text{Na}_{1/2}\text{Bi}_{1/2}\text{TiO}_3$ $\text{K}_{1/2}\text{Bi}_{1/2}\text{TiO}_3$, $\text{Na}_{1/2}\text{Bi}_{1/2}\text{TiO}_3\text{-PbTiO}_3$, $\text{K}_{1/2}\text{Bi}_{1/2}\text{TiO}_3\text{-PbTiO}_3$ » thèse, Université de Limoges, (1995).
- [10] A. Aydi, « Élaboration et caractérisations diélectriques de céramiques ferroélectriques et/ou relaxeur de formule $\text{MSnO}_3\text{-NaNbO}_3$ (M = Ba, Ca)», thèse, Université Bordeaux 1. (2005).
- [11] S.B. Lang and S. Muensit, Applied Physics A: Materials Science & Processing, vol. 85, 125-134, (2006).
- [12] S-E. Park and T. R. Shrout, J. Appl. Phys. vol. 82, 1804-1811, (1997).
- [13] Etude des propriétés piézoélectriques d'un nouveau matériau céramique BEKKOUCHE Mohammed Nahi BELKOU Ahmed
- [14] Méthode des éléments finis Vincent Manet
- [15] https://fr.wikipedia.org/wiki/Méthode_des_éléments_finis

[16] Méthode des éléments finis Approche pratique en mécanique des structures Michel Cazenave

[17] Tiersten H. F., "Linear Piezoelectric Plate Vibrations", Plenum Press, New York, 1969.

[18] Anders Thorin, Gilles Foret: Calcul des structures : Introduction au calcul de structures élastiques linéaires. Ecole d'ingénieur. (MEC441) MODAL - Génie Civil, Palaiseau, France

[19] Mindlin, R. D., "Equations of High Frequency Vibrations of Thermopiezoelectric Crystal Plates", International Journal of Solids & Structures, Vol. 10, 1974, pp. 625-637.

[20] Capteurs piézoélectriques 2014-2015 DIMOKRATI Ahmed

Résumé :

Cette étude concerne la détermination des modes et des fréquences naturelles des structure intelligente (cas d'une poutre) avec la modélisation par la méthode des éléments finis. Cette dernière permet aussi d'obtenir la réponse de la poutre de base et la poutre intelligente.

La méthode des éléments finis des éléments finis est utilisée pour l'analyse modale et dynamique du système couplé et simulée avec le code ANSYS apdl. La bibliothèque de ce dernier disposant plusieurs d'éléments solides (SOLID5, SOLID226...) pour modéliser les effets piézoélectriques, un maillage spécial doit être utilisé pour bien quantifier les problèmes d'interaction mécanique électrique.

ملخص

إن هذه الدراسة تتضمن تحديد الأنماط و الترددات للبنية الذكية (حالة عارضة) بالتمذجة بواسطة طريقة العناصر المنتهية.

إن طريقة العناصر المنتهية استعملت من اجل التحليل النمطي الديناميكي لنظام التزاوج وبالمحاكاة في البرنامج انسيس , إن مكتبة هذا الأخير تحتوي على العديد من العناصر الصلبة (SOLID5, SOLID226...) من اجل تمذجة الأثر الكهروضغطي , التقسيم الخاص استعمل من اجل حل مشاكل التداخل الميكانيكي الكهربائي