512.02

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

TM/01/2000
5e (ex)
TM 8/11

THESE

Présentée :

Au Centre Universitaire Mohamed Boudiaf-M'sila

Pour L'obtention Du Diplôme de **Magister En Mathématiques**

Option : Logique Algébrique

Par

Lemnaouar ZEDAM

Thème

Sur les algèbres de *Moisil - Łukasiewicz*

Soutenue le: 31 / 10 / 2000 devant le jury composé de :

Président :	**Mr, L. NOUI**	**M.C**	**Université de Batna**
Rapporteur :	**Mr, A. AMROUNE**	**C.C**	**Centre universitaire de M'sila**
Examinateurs :	**Mr, D. MIHOUBI**	**C.C**	**Centre universitaire de M'sila**
	Mr, N. TRABELSI	**C.C**	**Université de Setif**
	Mr, A. BOUDAOUD	**M.C**	**Centre universitaire de M'sila**

2000

Dédicace

A Mes Chers
PARENTS.

Remerciements

Je tiens à remercier vivement Monsieur le Docteur A. Amroune pour avoir accepter de diriger ce travail, ainsi pour sa gentillesse, son dévouement et ses conseils précieuses.

Je remercie aussi Monsieur le professeur L. Noui pour avoir accepter la présidence du jury et pour ses conseils qui m'ont été très utiles.

Aussi je remercier Monsieur A. Boudaoud, D. Mihoubi, N. Trabelssi pour avoir accepter de juger ce travail et faire partie du jury.

Monsieur le conservateur de la Bibliothèque universitaire de M'sila S. Belkhiri pour son aide et son soutien psychologique.

Ainsi à tous les amis qui m'ont aidé de près ou de loin dans l'élaboration de ce travail.

SOMMAIRE

NOTATIONS. I

INTRODUCTION. II

CHAPITRE I Généralités sur les ensembles ordonnés et les treillis.

I.1. Ensembles ordonné et treillis. 1

I.2. Type d'ordre. 5

CHAPITRE II Théorème de représentation d'une algèbre de Moisil-Łukasiewicz.

II. 1 Généralités sur les parties floues. 7

II. 2 Généralités sur les Algèbres de Moisil-Łukasiewicz. 11

II. 3 Démonstration de la condition de continuité (C) 13

II.4 La représentation d'une algèbre de Moisil-Łukasiewicz. 16

CHAPITRE III. (Annexe) Représentation topologique.

III.1 Représentation des treillis distributifs. 23

III.2 Représentation des algèbres de Moisil-Łukasiewicz θ – valentes. 32

III.3 Représentation des algèbres de Moisil-Łukasiewicz θ – valentes involutives 41

Conclusion. 50

REFERENCES. 51

NOTATIONS

$\leq$: Relation d'ordre .

$\wedge$: Conjonction.

$\vee$: Disjonction.

$\bigvee S$: La borne supérieure de S.

$\bigwedge S$: La borne inférieure de S.

θ : Le type d'ordre de J (la chaîne de l'algèbre de Moisil-Łukasiewicz).

$\bar{\theta}$: Le type d'ordre de ζ (la chaîne de l'algèbre floue).

$(X, \tau, \leq)$: Espace ordonné .

τ : Une topologie définie sur X.

of : Ensemble ouvert et fermé à la fois.

$\bar{\alpha}$: L'ensemble de tous les minorants des majorants de α.

$T(A)$: Le dual des treillis distributif fermé A c'est l'ensemble des homomorphismes des treillis qui prennent la valeur 1 en A.

$L(\gamma)$: Le treillis des ofs croissants d'un espace ordonné γ.

X_A : La fonction caractéristique de l'ensemble A.

INTRODUCTION

En 1920 , *£ukasiewicz* présente un système logique non formalisé (c'est -à-dire sous forme sémantique) à trois valeurs de vérité : le vrai , le possible et le faux . Il retrouve l'idée d'aristote en introduisant les connecteurs de possibilité et de nécéssité.
En 1930, *£ukasiewicz* publia des systèmes semblables pour un nombre quelcanque et même pour une infinité dénombrable de valeurs de vérité intermidiaires entre le vrai et faux .
La première formalisation de la logique trivalente de *£ukasiewicz* eest due à Wajsberg en 1931. A partir de ce moment, en assiste a l'éclosion d'un très grand nombre de travaux sur les logiques multi valentes et leurs algèbrisations.

En 1940 *Gr.C.Moisil* a introduit la notion d'algèbre de *Moisil-£ukasiewicz* comme modèle algèbrique de la logique de £ukasiewicz. Par la suite dans son article (Ensembles floues et logiques à plusieur valeurs)[6]. (Université de montréal , Mai 1973).
Moisil a mis en lumière les relations existantes entre les structures floues au sens de *Zedah* et les algèbres de *Moisil-£ukasiewicz* $\theta-$valentes .
Ces rapports ont encore été précises par *D.Ponasse* dans son article (Algèbres floues et algèbres de £ukasiewicz)[4] ,dans le cas des algèbres $\theta-$valentes involutives et régulières.
Dans ce travail nous proposons la représentation de certaines algèbres de *Moisil-£ukasiewicz* notament le cas où la chaine de depart est complète, ainsi qu' une démonstration de la condition de continuité (condition nécessaire et suffisante pour le plongement d'une algèbre de *Moisil-£ukasiewicz* $\theta-$valente involutive dans une algèbre de parties floues $\overline{\theta}-$valente avec $\overline{\theta} \geq \theta$).
Nous signalons par ailleur que le problème de représentation à été connu sous le nom de (représentation des algèbres de *£ukasiewicz)* et qui'a été aborde par plusieur chercheurs [0], [1], [4], [9], [10], [12], [13], [14].
L'idée de ce travail fait suite à deux articles (J.Coulon et J.L. Coulon) [9], (Redunne) [14].

Le premier [9]. Nous a proposé la question ouverte :
(necessite de la condition de continuité CH II. 3.)
Le second avait introduit une nouvelle notion pour le plongement de l'algèbre de *Moisil-Łukasiewicz* $\theta-$valente involutive dans une structure floue involutive qui exige l'egalité entre les deux types d'ordres (i.e $\overline{\theta} = \theta$) aux quelles nous avons donné une réponse dans le cas où la chaîne de départ est complète. (Résultat également originale).
Enfin nous allons étendre les résultats de *A.Filipiou* [3] et *H.Priestley* [8] concernant la représentation théorique des treillis fermés à des algèbres de *Moisil-Łukasiewicz* $\theta-$valentes involutives.(CH III)

CHAPITRE I.

Généralités sur les ensembles ordonnés et les treillis

I.1 Notations et définitions.

Définition 1.1.(Ensemble ordonné).

Un ensemble ordonné est un couple $(L, \leq)$*, tel que* L *est un ensemble non vide, et* $\leq$ *est un ordre sur* L *(i.e réflexive* $(x \leq x)$*, antisymétrique* $(x \leq y$ *et* $y \leq x \Rightarrow x = y)$ *, et transitive* $(x \leq y$ *et* $y \leq z \Rightarrow x \leq z)$*).*

Définition 1.2.

-Soit L *un ensemble ordonné. Deux éléments* $x, y \in L$ *sont comparables si* $x \leq y$ *ou* $y \leq x$ *(incomparables si* $x \nleq y$ *et* $y \nleq x$*).*

-Un ensemble totalement ordonné ou une chaîne est un ensemble ordonné tel que chaque deux éléments x, y *sont comparables .*

-Soient x, y *deux éléments de* $(L, \leq)$*;*

Si $x < y$ *et s'il n'existe aucun élément* $z \in L$ *tel que* $x < z < y$*, on dit que* y *est un successeur de* x *et on note* $y = x^+$ *équivalente ou que* x *est un prédécesseur de* y *et on note* $x = y^-$*.*

Remarque 1.1.

Dans une chaîne, le successeur (prédécesseur) d'un élément, s'il existe, est unique, car si on suppose que y et y' sont deux successeurs de x alors $x < y \leq y'$ n'est possible que si

$y = y'$.

Définition 1.3.(Application ordonnée).

Soient $(L, \leq)$, et $(L', \leq')$ deux ensembles ordonnés on dit que l'application $f : L \longrightarrow L'$ est ordonnée si pour tout $x, y \in L$ tel que $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

Définition 1.4.(Ensemble croissant).

Soit L un ensemble ordonné, un sous-ensemble E de L est dit croissant si $x \in E$ et $x \leq y$ implique $y \in E$. Un ensemble décroissant se définit dualement .

Définition 1.5.(Treillis).

Un treillis est un ensemble ordonné $(L, \leq)$ tel que chaque paire $\{x, y\}$ d'éléments a une borne supérieure et une borne inférieure .

Généralement on note $\sup\{x, y\}$ par $x \vee y$, et $\inf\{x, y\}$ par $x \wedge y$.

Exemples.

1)-Toute chaîne est un treillis avec $\begin{cases} x \vee y = Max(x, y). \\ x \wedge y = Min(x, y). \end{cases}$

2)-$P(E)$ est un treillis avec $\begin{cases} A \cap B = Inf(A, B). \\ A \cup B = Sup(A, B). \end{cases}$

3)-Si tout sous-ensemble $S \subseteq L$ admet une borne supérieure et une borne inférieure on dit que L est un treillis complet (achevé), et on note par $\vee S$ et $\wedge S$ de $\sup(S)$ et $\inf(S)$ respectivement. Tout treillis fini et $(P(E), \subseteq)$ sont des treillis complets.

Propriétés.

Dans un treillis on a :

i) $$\begin{aligned} x \leq y &\Leftrightarrow x = x \wedge y \\ &\Leftrightarrow y = x \vee y \end{aligned}$$

ii) $x \vee y = y \vee x$ et $x \wedge y = y \wedge x$ (commutativités) .

iii) $x \vee x = x$, $x \wedge x = x$ (idempotente).

iv) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ (associatives).

v) $x \vee (y \wedge x) = x$ et $x \wedge (y \vee x) = x$ (loi d'absorption).

Définition 1.6.(Treillis fermé).

On dit que le treillis $(A, \vee, \wedge)$ est fermé s'il admet un plus petit élément 0 et un plus grand élément noté 1.

$(A, \vee, \wedge)$ est distributif si $\forall x, y, z \in A : x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ ou $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

Exemple.

$(P(E), \cup, \cap)$ est un treillis distributif fermé (avec $\emptyset$ et E).

Propriétés.

1) Dans un treillis $(a \leq b$ et $c \leq d) \Rightarrow (a \wedge c \leq b \wedge d$ et $a \vee c \leq b \vee d)$.

2) Dans un treillis fermé $\wedge\emptyset = 1$ et $\vee\emptyset = 0$.

Définition 1.7. (Sous treillis)

Soit A un sous ensemble non vide de L, on dit que A est un sous treillis de $(L, \vee, \wedge)$ si $\forall x, y \in A$; $x \vee y \in A$ et $x \wedge y \in A$.

Définition 1.8. (Homomorphisme des treillis).

Soient L et L' deux treillis , on dit que l'application $f : L \longrightarrow L'$ est un homomorphisme des treillis si : $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$ et $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.

Remarque 1.9.

Tout homomorphisme est une application croissante.

Définition 1.10.(Involution).

Une involution sur le treillis L est une application $f : L \longrightarrow L$, telle que

$f(f(x)) = x$, donc une involution est une bijection.

Exemple.

Soit J une chaîne fermée $n\alpha = 1 - \alpha$ est une involution sur J (décroissante).

Treillis complémentés.

Soit $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ un treillis fermé .

Définition 1.11.

On dit que $x \in L$ est chrysippien (complémenté) s'il existe $x' \in L$ tel que $x \wedge x' = 0$ et $x \vee x' = 1$. x' est appelle le complément de x.

Si tous les éléments de L sont chrysippiens on dit que L est un treillis complémente.

On note par $C(L)$ l'ensemble des éléments complémentés de L.

Proposition 1.12.

Soit L un treillis distributif si $x \in L$ chrysippien alors il y a unicité de complément .

Remarque 1.13.

Un treillis fermé distributif et complémenté est appelé treillis de Boole.

Exemple.

$(\{0, 1\}, \vee, \wedge, 0, 1)$ et $(P(E), \cup, \cap, \emptyset, E)$ sont des treillis de Boole.

Filtres et idéal dans un treillis.

Définition 1. 14.

On appelle filtre (resp idéal) dans un treillis $(L, \vee, \wedge)$ toute partie F (resp I) non vide vérifiant :

Pour tout $x, y \in L$

1) $x, y \in F \Rightarrow x \wedge y \in F$;

2) $x \in F$ et $y \geq x \Rightarrow y \in F$.

(resp 1) $x, y \in I \Rightarrow x \vee y \in I$, 2) $x \in I$ et $y \leq x \Rightarrow y \in I$).

Remarque 1. 15.

Les concepts de filtre et idéal sont duals l'un par rapport à l'autre c'est pour quoi tout théorème et définition concernant les filtres on peut associer le théorème dual ou la définition duale concernant les idéaux .

*On dit que F est un filtre propre si $F \neq L$.

*F est un filtre premier s'il est propre et $\forall x, y \in L$ avec $x \vee y \in F \Rightarrow x \in F$ ou $y \in F$.

*F est un filtre maximal (ultra-filtre) s'il est propre et s'il n'existe aucun filtre propre T tel que $F \subseteq T$ et $F \neq T$.

Filtre engendré.

Soit G un sous-ensemble de L , le plus petit filtre de L contenant G est appelé le filtre engendré par G et égal à l'intersection de tous les filtres qui contiennent G.
On le note par (G).

Proposition 1. 16.

$(G) = \{x \in L \ / \ \exists a_1, ..., a_n \in G \ / \ x \geq a_1 \wedge ... \wedge a_n \}$.

Cas particulier.

Si $G = \{a\}$ donc $(G) = (a) = \{x \in L \ / \ x \geq a\}$, est appelé le filtre principal engendré par a.

I.2. Type d'ordre.

Définition 2.1. (Type d'ordre).

On dira que deux ensembles ordonnés $(X_1, \leq_1)$ et $(X_2, \leq_2)$ ont le même type d'ordre s'il existe un isomorphisme d'ensembles ordonnés entre $(X_1, \leq_1)$ et $(X_2, \leq_2)$, c'est à dire une bijection f de X_1 dans X_2 telle que $x \leq_1 y$ équivaut a $f(x) \leq_2 f(y)$.

Si on préfère, on peut définir le type d'ordre comme la classe d'équivalence pour la relation (être isomorphe).

Comme la notion d'ordre totale est un cas particulier de l'ordre (ordre partiel), on peut donc parler du type d'ordre d'un ensemble totalement ordonné (chaîne).

Exemple.

L'ensemble des entiers naturels munis de l'ordre naturel ($\leq$), est un exemple d'ensemble infinis totalement ordonné qu'on note par w son type d'ordre.

Mais si l'ensemble totalement ordonné est fini, son type d'ordre défini par une seule méthode par le nombre n (n = le nombre des éléments). Et on le note par n.

Définition 2.2.

soit θ et $\overline{\theta}$ deux types d'ordre des ensembles totalement ordonnés M et N respectivement, on dit que

1) $\theta = \overline{\theta}$ s'il existe un isomorphisme de M dans N.

2) $\theta < \overline{\theta}$ s'il existe un monomorphisme de M dans N.

3) $\theta > \overline{\theta}$ s'il existe un monomorphisme de N dans M.

CHAPITRE II.

Théorème de représentation d'une algèbre de Moisil-Łukasiewicz.

II. 1 Généralités sur les parties floues

II. 1. 1 Structure floue.

Soit E un ensemble non vide et $P(E)$ l'ensemble des parties de E, on sait que $P(E)$ est un treillis de Bool pour les opérations $\cup, \cap, C_E$.

Si on note par $U = \{0,1\}$, il y a une correspondance bijective entre $P(E)$ et U^E (l'ensemble des applications de E dans U) tel que à chaque partie A de E on associe X_A sa fonction caractéristique.

Par ailleurs l'ensemble U est une chaîne, donc c'est également un treillis de Boole ,

avec les opérations

$$\begin{aligned} \alpha \vee \beta &= \max(\alpha, \beta) \\ \alpha \wedge \beta &= \min(\alpha, \beta) \\ \alpha' &= 1 - \alpha \end{aligned}$$

Avec les identifications précédentes les opérations ensemblistes traduites par

$A \cup B$ par $(A \cup B)(x) = A(x) \vee B(x)$.

$A \cap B$ par $(A \cap B)(x) = A(x) \wedge B(x)$.

CA par $(CA)(x) = (A(x))'$.

$\emptyset$ par $\emptyset(x) = 0$.

Définition 1.1.

On appelle structure floue tout couple (E, J) où E est un ensemble non vide quelconque (dont les éléments seront notés $x, y, z...$); J est une chaîne fermée (i.e. avec un plus petit élément 0 et un plus grand élément 1, avec $0 \neq 1$).

Les éléments de J seront notés $\alpha, \beta, \gamma...$

Dans une structure floue on appelle partie floue de E , toute application de E dans J .

Les parties floues seront généralement notées $\tilde{A}, \tilde{B}, ...$

L'ensemble des parties floues de E sera noté $\tilde{P}(E)$. Ce n'est autre que J^E.

On notera également que si $J = U = \{0, 1\}$ alors $\tilde{P}(E) = P(E)$ qui est l'ensemble des parties de E, dit l'ensemble des parties nettes de E.

Niveaux de flou.

On note désormais $J^0 = J - \{0\}$, $J^1 = J - \{1\}$, $J^{01} = J - \{0, 1\}$

Soit $\tilde{A}$ une partie floue dans une structure floue (E, J) .

Pour tout $\alpha \in J$ on définit le niveau de flou de degré α comme étant l'application

$N_\alpha : \tilde{P}(E) \longrightarrow P(E)$ *définie par* $N_\alpha(\tilde{A}) = \left\{x \in E / \tilde{A}(x) \geq \alpha\right\}$

Pour tout $\alpha \in J^1$ on définit le niveau strict de flou de degré α comme étant l'application

$N'_\alpha : \tilde{P}(E) \longrightarrow P(E)$ *définie par* $N'_\alpha(\tilde{A}) = \left\{x \in E / \tilde{A}(x) > \alpha\right\}$

Pour tout $\alpha \in J$ on définie la ligne de flou de degré α comme étant l'application

$L_\alpha : \tilde{P}(E) \longrightarrow P(E)$ *définie par* $L_\alpha(\tilde{A}) = \left\{x \in E / \tilde{A}(x) = \alpha\right\}$

$= N_\alpha(\tilde{A}) - N'_\alpha(\tilde{A})$

Propriétés 1.2.

Les niveaux de flou ont les propriétés suivantes :

(1) $\alpha \leq \beta \Rightarrow N_\beta \leq N_\alpha, i.e. N_\beta(\tilde{A}) \subseteq N_\alpha(\tilde{A})$. pour tout $\tilde{A}$ dans $\tilde{P}(E)$;

(2) Si A est une partie nette : $N_\alpha(A) = A$ pour tout $\alpha \in J^0$;

(3) Quel que soit α, βdans J^0 : $N_\beta N_\alpha = N_\alpha$;

Moisil).

ces quatre propriétés restent valables pour les niveaux stricts de flou.

Relation d'ordre sur les parties floues.

On définit dans $\tilde{P}(E)$, une relation d'ordre par

$\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ si et seulement si $\tilde{A}(x) \leq \tilde{B}(x)$ pour tout $x \in E$.

Soient $\tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{P}(E)$, l'union et l'intersection dans $\tilde{P}(E)$ prolongent d'une manière naturelle l'union et l'intersection dans $P(E)$.

$\tilde{A} \cup \tilde{B}$ par $(\tilde{A} \cup \tilde{B})(x) = \max(\tilde{A}(x), \tilde{B}(x))$.

$\tilde{A} \cap \tilde{B}$ par $(\tilde{A} \cap \tilde{B})(x) = \min(\tilde{A}(x), \tilde{B}(x))$.

Remarques.1. 3.

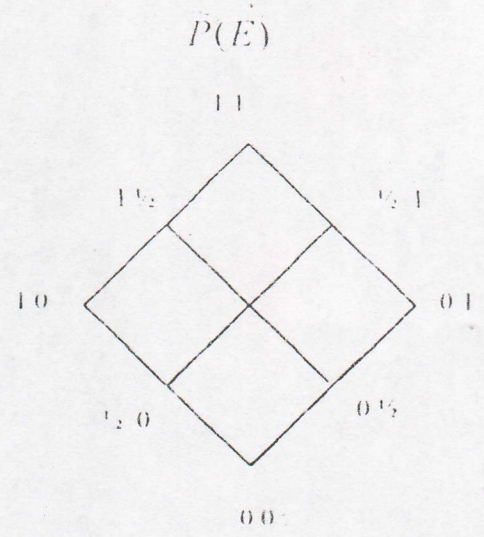
1) $(\tilde{P}(E), \cup, \cap, \emptyset, E)$ est un treillis distributif fermé.

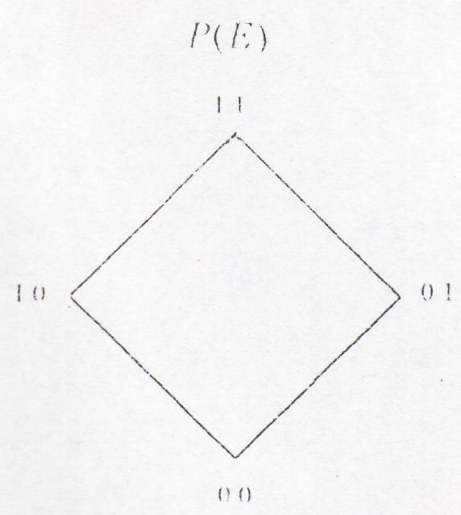
2) Si la chaîne J est complète alors $\tilde{P}(E)$ est un treillis complet aussi.

Exemple 1 .4.

$E = \{a, b\}$, $J = \{0, 1/2, 1\}$, $\tilde{P}(E) = J^E$ et $\text{card}\tilde{P}(E) = 3^2 = 9$.

$\tilde{P}(E)$ est représenté par:





Remarque 1.5.

Rappelons que dans un treillis $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ un élément a est dit chrysippien s'il existe au moins un élément a' tel que $a \vee a' = 1$ et $a \wedge a' = 0$. Si en outre le treillis est distributif a' est unique lorsqu'il existe. Il est alors appelé le complément de a. Dans ce cas l'ensemble $C(L)$ forme un sous treillis (treillis de Boole) de L.

Dans le cas du treillis $\tilde{P}(E)$, on montre que les éléments chrysippiens sont exactement les parties nettes. Ainsi $C(\tilde{P}(E)) = P(E)$.

Définition 1. 6. (Algèbre floue).

On appelle algèbre floue tout couple (A, J) où A est un sous treillis de $\tilde{P}(E)$ contenant $\emptyset$ et E, pour une structure floue (E, J).

A est stable pour les niveaux de flou, (i.e si $\tilde{A} \in A$, pour tout $\alpha \in J^0$ alors $N_\alpha(\tilde{A}) \in A$)

Si B est une partie nette appartenant à A alors $C(B) \in A$.

On dit que A est une algèbre floue $\theta-$valente si θ et le type d'ordre de J.

II 1.2. Structure floue involutive

On appelle structure floue involutive tout triplet (E, J, n) où (E, J) est une structure floue, n est une involution décroissante sur J,c'est-à-dire

$$\begin{aligned} nn\alpha &= \alpha \\ \text{Si } \alpha &\leq \beta \Rightarrow n\beta \leq n\alpha \end{aligned}$$

(Il en résulte que $n0 = 1, n1 = 0$).

Dans une structure floue involutive on peut définir le complémentaire de la manière suivante :

$$\left(n\tilde{A}\right)(x) = n(\tilde{A}(x)) \text{ pour tout } x \in E$$

dans ce cas on a

$$N'_\alpha = nN_{n\alpha}n.$$

On note également qu'on a la relation suivante :

$$N_\beta = \bigcap_{\alpha<\beta} N'_\alpha, \text{ pour tout } \alpha, \beta \in J^{01}$$

Définition 1. 7. (Algèbre floue involutive).

On appelle algèbre floue involutive tout triplet (A, J, n) où (A, J) est une algèbre floue pour une structure floue involutive.

II. 2 Généralités sur les Algèbre de Moisil-Łukasiewicz

Algèbre de Moisil-Łukasiewicz $\theta-$valente.

Définition 2.1.

On appelle algèbre de Moisil-Łukasiewicz θ-valente la structure $(L, J, (\varphi_\alpha)_{\alpha\in J^0})$ vérifiant les axiomes suivants:

1) L est un treillis distributif fermé (avec 0 et 1);

2) J est une chaîne fermée de type d'ordre θ;

3) $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in J^0}$ est une famille d'endomorphismes de L conservant le 0 et le 1;

4) Pour tout $x \in L$, $\varphi_\alpha(x)$ appartient à l'algèbre de Boole $C(L)$ des éléments complémentés de L;

5) Si $\alpha \leq \beta$ alors $\varphi_\beta \leq \varphi_\alpha$.

6) Quel que soit α et β dans J^0 $\varphi_\alpha\varphi_\beta = \varphi_\beta$

7) Si $\varphi_\alpha(x) = \varphi_\alpha(y)$ pour tout $\alpha \in J^0$ alors $x = y$ (principe de détermination de Moisil).

Exemples 2.2.

1) Si la chaîne $J = \{0, 1, 2..., P-1\}$ on dit que l'algèbre $(L, J, (\varphi_\alpha)_{\alpha \in J^0})$ est une algèbre de *Moisil-Łukasiewicz* p-valente.

2) La chaîne J, est elle même une algèbre de *Moisil-Łukasiewicz* $\theta-$valente en définissant pour $\alpha \in J^0$, $\varphi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \alpha \\ 1 & \text{si } x \geq \alpha \end{cases}$

3) Toute structure floue (E, J) est une algèbre de *Moisil-Łukasiewicz* $\theta-$valente en définissant par: pour $\alpha \in J^0$ $\varphi_\alpha = N_\alpha$ (niveau de flou de degré α).

Proprietés.2.3.

Si $x \in L$, il y a équivalence entre les assertions suivantes:

i) x est chrysippien.

ii) Il existe $\alpha \in J^0$ tel que $x = \varphi_\alpha(x)$.

iii) Pour tout $\alpha \in J^0$, $x = \varphi_\alpha(x)$.

Algèbre de Moisil-Łukasiewicz $\theta-$valente involutive.

Définition 2.4.

Une algèbre de Moisil-Łukasiewicz θ-valente involutive est une structure $(L, J, (\varphi_\alpha)_{\alpha \in J^0}, (\Psi_\alpha)_{\alpha \in J^1}, n, N)$ vérifiant les axiomes suivants:

1) $(L, J, (\varphi_\alpha)_{\alpha \in J^0})$ *est une algèbre de Łukasiewicz θ-valente .*

2) n est une involution décroissante sur J.

3) N est une involution décroissante sur L telle que si $x \in L$ alors $N(x)$ est le complément de x;

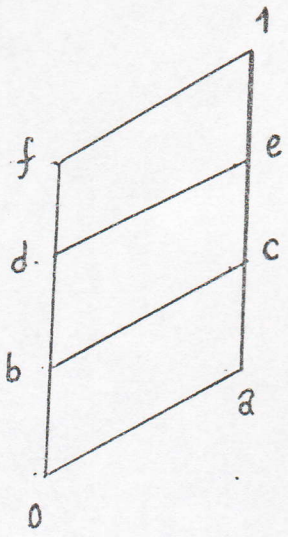
4) $(\Psi_\alpha)_{\alpha \in J^1}$ *est une famille d'applications de L dans L vérifiant*

- *Pour tout $\alpha \in J^{01}$:$\Psi_\alpha \leq \varphi_\alpha$;*
- *Pour tout $\alpha \in J^0$: $\varphi_\alpha N = N\Psi_{n\,\alpha}$*

(On peut montrer que chaque Ψ_α est un endomorphisme de L.).

Exemple d'algèbre de Moisil-Łukasiewicz 4 valente involutive.

L =





= J

on définit $N : L \longrightarrow L$ par

$N0 = 1$

$Na = f$

$Nb = e$

$Nc = d$

$Nd = c$

$Ne = b$

$Nf = a$

$N1 = 0$

$\eta : J \longrightarrow J$

$\eta 0 = 1$

$\eta \alpha = \beta$

$\eta \beta = \alpha$

$\eta 1 = 0$

x	φ_α	φ_β	φ_1
0	0	0	0
a	a	a	a
b	f	0	0
c	1	a	a
d	f	f	0
e	1	1	1
f	f	f	f
1	1	1	1

Tableau des modalités algébriques.

Exemples.2.5.

1) La chaîne J, est elle même une algèbre de *Moisil-Łukasiewicz* $\theta-$valente involutive en définissant par: pour $\alpha \in J^0)$, $\varphi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \alpha \\ 1 & \text{si } x \geq \alpha \end{cases}$, et $Nx = nx$.

2) Toute structure floue involutive (E, J, n) est une algèbre de *Moisil-Łukasiewicz* $\theta-$valente involutive en définissant pour $\alpha \in J^0$ $\varphi_\alpha = N_\alpha$, $N'_\alpha = \Psi_\alpha$, $NA(x) = nA(x)$.

Cas particulier.

1) Si $\theta = p$, $p \in /N$ alors $(L, J, (\varphi_\alpha)_{\alpha \in J^0}, (\Psi_\alpha)_{\alpha \in J^1}, n, N)$ est une algèbre de *Moisil-Łukasiewicz* $p-$valente involutive où $J = \{0, 1, 2, ...p-1\}$, $n\alpha = p - (\alpha + 1), \varphi_\alpha = \Psi_{\alpha+1}$, $\alpha \in J - \{1\}$;

2) Si $\theta = 2$ alors $L = C(L)$ est une algèbre de Boole.

Morphisme d'algèbre de Moisil-Łukasiewicz $\theta-$valente involutive.

Définition 2.6.

Soit $(L, J, (\varphi_\alpha)_{\alpha \in J^0}, (\Psi_\alpha)_{\alpha \in J^1}, n, N)$et $(L', J, (\varphi'_\alpha)_{\alpha \in J^0}, (\Psi'_\alpha)_{\alpha \in J^1}, n, N')$ *deux algèbres de Moisil-Łukasiewicz* $\theta-$*valentes involutives, un morphisme est dit morphisme d'algèbre de Moisil-Łukasiewicz* $\theta-$*valente involutive si :*

(i) $f o \varphi_\alpha = \varphi'_\alpha o f$;

(ii) $f\ N = N' o f$. (*et donc* $f\ o\ \Psi_\alpha = \Psi'_\alpha\ o\ f$).

II .3. Démonstration de la condition de continuité (C).

Le problème de continuité dans les algèbres de Łukasiewicz proposé par -J.Coulon et J .L.coulon dans leur article (*Un nouveau résultat concernant la représentation d'une algèbre de Łukasiewicz involutive dans l'algèbre des parties floues d'une structure floue involutive. Revus Romaine de mathématique pures et appl.38(1993), 319-326*).[9]. Sous

la forme suivante. Etant donné une algèbre de £ukasiewicz

$(L, J, (\varphi_\alpha)_{\alpha\in J^0}, (\Psi_\alpha)_{\alpha\in J^1}, n, N)$ $\theta-$valente involutive qui se plonge dans une algèbre de partie floue involutive quelconque (E, K). Est- ce qu'elle a nécéssairement la condition de continuité à savoir : $\varphi_\alpha(x) = \bigwedge\limits_{\gamma<\alpha} \Psi_\gamma(x)$.

L'objectif de cette partie est de donner une réponse à cette question.

Soit $(L, J, (\varphi_\alpha)_{\alpha\in J^0}, (\Psi_\alpha)_{\alpha\in J}, n, N)$ une algèbre de Moisil-£ukasiewicz qui se plonge dans la structure floue $K^E = \breve{P}(E)$. et f le monomorphisme qui assure ce plongement. Dans ce cas J se plonge dans K et nous identifions J à son image dans K

$f(\varphi_\alpha(x)) = N_\alpha(f(x))$

$f(\Psi_\alpha(x)) = N'_\alpha(f(x))$

On sait que :

$$N_\alpha(\tilde{A}) = \bigcap_{\substack{\mu\in K\\ \mu<\alpha}} N'_\mu(\tilde{A}) \subseteq \bigcap_{\substack{\gamma\in J\\ \gamma<\alpha}} N'_\gamma(\tilde{A})$$

$$\begin{aligned}
f(\varphi_\alpha(x)) &= N_\alpha(f(x)) \subseteq \bigcap_{\substack{\gamma\in J\\ \gamma<\alpha}} N'_\gamma(f(x)) \\
&\Rightarrow f(\varphi_\alpha(x)) = N_\alpha f(x) \subseteq N'_\gamma(f(x)),\ \forall\gamma<\alpha \\
&\Rightarrow f(\varphi_\alpha(x)) \subseteq f(\Psi_\gamma(x)),\ \forall\gamma<\alpha \\
&\Rightarrow \varphi_\alpha(x) \leq \Psi_\gamma(x),\ \forall\gamma<\alpha \\
&\Rightarrow \varphi_\alpha(x) \leq \bigwedge_{\gamma<\alpha} \Psi_\gamma(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)
\end{aligned}$$

Pour démontrer l'autre sens de l'inégalité, on aura besoin de la définition et du résultat suivants :

Soit J une chaîne fermée

Définition 3.1.

(J est dense) $\Leftrightarrow (\forall \alpha, \beta \in J$ *tels que* $\alpha < \beta \Rightarrow \exists \gamma \in J/\ \alpha < \gamma < \beta)$

Donc :

(J non dense) $\Leftrightarrow (\exists \alpha, \beta \in J$ *tel que* $\alpha < \beta$ *et* $\nexists$ *aucun* $\gamma \in J/\ \alpha < \gamma < \beta)$

Dans ce cas $\alpha = \beta^-$.

Résultat 3.2.

*Si J est dense alors

$$\bigvee_{\gamma<\alpha} \gamma = \alpha$$

donc:

$$\bigwedge_{\gamma<\alpha} \Psi_\gamma(x) = \Psi_\alpha(x) \leq \varphi_\alpha(x) \qquad ((2))$$

donc (1) et (2)

$$\Rightarrow \bigwedge_{\gamma<\alpha} \Psi_\gamma(x) = \varphi_\alpha(x).$$

*Si J est non dense.

Soient α, γ de J^{01} tel que $\gamma < \alpha$

a)-S'il existe un $\delta_0/\ ]\delta_0, \alpha]$est dense alors :

$$\bigwedge_{\gamma<\alpha} \Psi_\gamma(x) = \Psi_\alpha(x) \leq \varphi_\alpha(x) \text{.....} (2').$$

donc (1) et (2'):

$$\Rightarrow \bigwedge_{\gamma<\alpha} \Psi_\gamma(x) = \varphi_\alpha(x).$$

b)-Si non il n'existe aucun $\delta_0/\ ]\delta_0, \alpha]$ est dense alors α admet un prédécesseur α^- et dans ce cas on a

$$\bigwedge_{\gamma<\alpha} \Psi_\gamma(x) = \Psi_{\alpha^-}(x) = \varphi_\alpha(x)$$

II. 4 Représentation d'une algèbre de Moisil-Łukasiewicz.

II. 4.1 Introduction et résultats déjà connus.

1) D. Ponasse a montré dans [4] que toute algèbre de *Moisil-Łukasiewicz* involutive régulière (C'est a dire où la chaîne fermée J est telle que tout élément de J possède un successeur), se plonge dans l'algèbre des parties floues d'une structure floue involutive plus précisément , si X est l'ensemble des ultra-filtre de $C(L)$ et si ξ est la chaîne des sections initiales de J^0. Le plongement f de L dans ξ^X est donné par $f(x)(U) = \{\alpha \in J^0 \quad / \quad \varphi_\alpha(x) \in U\}$.

2) A. Amroune. avait donné dans [0] , un théorème de représentation d'une algèbre de Łukasiewicz involutive dans une algèbre des parties floues involutives avec la condition suivante $(\varphi_\alpha(x) \in U \Longleftrightarrow \Psi_\gamma(x) \in U \ , \forall \gamma < \alpha)$. pour tout $x \in L$ et U est un élément de X.

3) J. L. coulon et J. coulon. dans [9] donnent le même résultat mais sous la condition

$$(\bigwedge_{\gamma<\alpha} \Psi_\gamma(x) = \varphi_\alpha(x) \forall x \in L).....(C).$$

C'est pourquoi, dans ce paragraphe, on suppose que l'algèbre de Moisil-Łukasiewicz $\theta-$valente involutive vérifie la condition (C).

Théorème 4.1

Toute algèbre de Moisil-Łukasiewicz $\theta-$valente involutive $(L, J, (\varphi_\alpha)_{\alpha\in J^0}, (\Psi_\alpha)_{\alpha\in J^1}, n, N)$ vérifiant la condition (C) est isomorphe à une sous-algèbre d'une structure floue involutive.

Preuve

La preuve reprend des idées utilisées dans [0] et [4] en particulier l'utilisation ad hoc du complété de Mc Neille de J et de l'involution décroissante que prolonge n.

L'utilisation de ce complété permet d'obtenir un théorème de représentation même lorsque la chaîne J de départ n'est pas complèté.

Complété de Mc Neille de J.

Si S est une partie de J ,$\bar{S}$ désignera l'ensemble des minorants des majorants de S.

Soit $\zeta = \left\{S \subseteq J \quad / \quad S = \bar{\bar{S}}\right\}$ alors ζ est une chaîne fermée (C'est une sous chaîne de la chaîne des sections initiales de J, son plus petit élément est $\{0\}$; et son plus grand éléments est J),qui est apellé le complété de Mc Neille de J.

J se plonge dans ζ grâce à $\alpha \longrightarrow \{\bar{\alpha}\}$;

Au lieu de $\{\bar{\alpha}\}$ nous noterons donc $\bar{\alpha}$, en fait $\bar{\alpha}$ est l'ensemble des minorants de α.

Si n est une involution décroissante sur J il existe une unique involution décroissante m sur ζ qui prolonge n définie par :$m\bar{\alpha} = \overline{n\alpha}$, $mS = \bigcap\limits_{\alpha \in S} m\bar{\alpha}$, $\forall S \in \zeta$.

Nous aurons besoin de cette remarque.

Remarque 4.2.

Si $x, y \in L$ et $x \not\leqslant y$, il existe un ultra-filtre U de L tel que $x \in U$ et $y \notin U$.

Notons par ζ^X l'algèbre des parties floues de X à valeurs dans ζ, involutive de façon naturelle à partir de l'involution décroissante m de ζ.

Si $x \in L$ si $U \in X : f(x)(U) = \overline{\{\alpha \in J^0 \quad / \quad \varphi_\alpha(x) \in U\}}$.

Comme pour toute partie S de J on a $\overline{\overline{S}} = \overline{S}$

Il est claire que $f(x) \in \zeta^X$, si $x \in L$.

* f est injective:

Supposons que $x, y \in L$ et $f(x) = f(y)$. Alors, pour tout $U \in X : f(x)(U) = f(y)(U)$.

Supposons que pourtant $x \neq y$. D'après le principe de détermination de Moisil, il existe $\alpha_1 \in J^0$ tel que $\varphi_{\alpha_1}(x) \neq \varphi_{\alpha_1}(y)$.

On peut supposer par exemple que $\varphi_{\alpha_1}(x) \not\leqslant \varphi_{\alpha_1}(y)$. d'après (C).

$$\varphi_{\alpha_1}(x) \not\leqslant \bigwedge_{\gamma<\alpha_1} \Psi_{\alpha_1}(y).$$

Donc il existe $\gamma_0 < \alpha_1$ tel que $\varphi_{\alpha_1}(x) \not\leqslant \Psi_{\gamma_0}(y)$. D'après la remarque précédante il existe alors un ultra-filtre U_0 tel que $\varphi_{\alpha_1}(x) \in U_0$, $\Psi_{\gamma_0}(y) \notin U_0$.

Pour tout $t > \gamma_0$: $\varphi_t(y) \notin U_0$. (en effet ,s'il existait $t_1 > \gamma_0$ avec $\varphi_{t_1}(y) \in U_0$ on aurait d'après (C) :

$$\bigwedge_{r<t_1} \Psi_r(y) \in U_0$$

Donc $\Psi_r(y) \in U_0$ pour tout $r < t_1$, et en particulier $\Psi_{\gamma_0}(y) \in U_0$, ce qui n'est pas).

Alors : ou bien α_1n'a pas de prédécesseur ,donc il existe dans ce cas l tel que $\gamma_0 < l < \alpha_1$. d'après ce qui précède $\varphi_l(y) \notin U_0$ donc l majore l'ensemble $B = \{\beta \in J^0 \ / \ \varphi_\beta(y) \in U_0\}$. Mais

$$\alpha_1 \in \left\{\alpha \in J^0 \ / \ \varphi_\alpha(x) \in U_0\right\} \subset \overline{\{\alpha \in J^0 \ / \ \varphi_\alpha(x) \in U_0\}} = f(x)(U_0) = f(y)(U_0) = \bar{B} .$$

Donc α_1 minore les majorants de B donc $\alpha_1 \leq l < \alpha_1$, ce qui est absurde .

Ou bien α_1 a un prédécesseur α_1^-

Soit encore $B = \{\beta \in J^0 \ / \ \varphi_\beta(y) \in U_0\}$. Si on avait $\varphi_{\alpha_1}(y) \in U_0$, on aurait $\bigwedge_{\gamma<\alpha_1} \Psi_\gamma(y) \in U_0$ (d'après (C)). On aurait donc $\Psi_{\alpha_1^-}(y) \in U_0$, et a fortiori $\Psi_{\gamma_0}(y) \in U_0$.

Donc $\varphi_{\alpha_1}(y) \notin U_0$ et $\alpha_1 \notin B$, c'est qu'en fait α_1^- majore B. On aurait alors

$$\alpha_1 \in \{\alpha \in J^0 \ / \ \varphi_\alpha(x) \in U_0\} \subset \overline{\{\alpha \in J^0 \ / \ \varphi_\alpha(x) \in U_0\}} = f(x)(U_0) = f(y)(U_0) = \bar{B} .$$

Donc α_1 minore les majorants de B alors

$$\alpha_1 \leq \alpha_1^-, \text{ce qui est absurde.}$$

donc f est injective.

* $f(0)(U) = \overline{\{\alpha \in J^0 \ / \ \varphi_\alpha(0) \in U\}} = \{0\}$ =Plus petit élément de ξ donc

$$f(0) = \emptyset.$$

* $f(1)(U) = \overline{\{\alpha \in J^0 \ / \ \varphi_\alpha 1) \in U\}} = J$ =Plus grand élément de ξ donc

$$f(1) = J.$$

*$f(x \wedge y) = f(x) \cap f(y)$:

Soit $U \in X$

$$\begin{aligned} f(x \wedge y)(U) &= \overline{\{\alpha \in J^0 \ / \ \varphi_\alpha(x \wedge y) \in U\}} \\ &= \overline{\{\alpha \in J^0 \ / \ \varphi_\alpha(x) \wedge \varphi_\alpha(y) \in U\}} \\ &= \overline{\{\alpha \in J^0 \ / \ \varphi_\alpha(x) \in U\} \cap \{\alpha \in J^0 \ / \ \varphi_\alpha(y) \in U\}} \\ &= \overline{\{\alpha \in J^0 \ / \ \varphi_\alpha(x) \in U\}} \cap \overline{\{\alpha \in J^0 \ / \ \varphi_\alpha(y) \in U\}} \\ &= f(x)(U) \cap f(y)(U) \end{aligned}$$

donc

$$f(x \wedge y) = f(x) \cap f(y)$$

* $f(x \vee y) = f(x) \cup f(y)$:

Soit $U \in X$ avec les mêmes notations qu'à l'alinéa précédent, mais en utilisant cette fois le filtre U qui est un ultra-filtre.

On a:

$$\begin{aligned} f(x \vee y)(U) &= \overline{\{\alpha \in J^0 / \varphi_\alpha(x \vee y) \in U\}} \\ &= \overline{\{\alpha \in J^0 / \varphi_\alpha(x) \vee \varphi_\alpha(y) \in U\}} \\ &= \overline{\{\alpha \in J^0 / \varphi_\alpha(x) \in U\} \cup \{\alpha \in J^0 / \varphi_\alpha(y) \in U\}} \end{aligned}$$

$$= \overline{\{\alpha \in J^0/\varphi_\alpha(x) \in U\}} \cup \overline{\{\alpha \in J^0/\varphi_\alpha(y) \in U\}}$$

Alors

$$f(x \vee y) = f(x) \cup f(y)$$

$\star$ $f(\varphi_\alpha(x)) = N_\alpha f(x)$.

$$\begin{aligned} f\varphi_\beta(x)(U) &= \overline{\{\alpha \in J^0 \,/\, \varphi_\alpha(\varphi_\beta(x)) \in U\}} \\ &= \overline{\{\alpha \in J^0 \,/\, \varphi_\beta(x) \in U\}} \\ &= \begin{cases} \overline{J^0} = J \text{ si } \varphi_\alpha(x) \in U \\ \bar{\emptyset} = \{0\} \text{ si } \varphi_\alpha(x) \notin U. \end{cases} \end{aligned}$$

D'autre part:

$$N_\alpha f(x)(U) = \begin{cases} J \text{ si } U \in N_\alpha f(x). \\ \{0\} \text{ si non.} \end{cases}$$

Donc si $U \in N_\alpha f(x)$ alors

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} \subseteq f(x)(U) &\Leftrightarrow \forall \gamma < \alpha : \gamma \in \overline{\{\alpha \in J^0 \,/\, \varphi_\beta(x) \in U\}} \\ &\Leftrightarrow \overline{\{\alpha \in J^0 \,/\, \varphi_\beta(x) \in U\}} \end{aligned}$$

Soit $U \in X$ notons $a = f(Nx)(U) = \overline{A}$ où $A = \{\alpha \in J^0 \,/\, \varphi_\alpha(Nx) \in U\}$,

$b = (mf(x))(U) = \bigcap_{\varepsilon \in \bar{B}} \overline{n\varepsilon}$, où $B = \{\alpha \in J^0 \,/\, \varphi_\alpha(x) \in U\}$.

Montrons que $a = b$.

1) $a \subset b$:

Il suffit pour cela de montrer que, si $\varepsilon \in \bar{B}$: $\overline{A} \subset \overline{n\varepsilon}$, et pour cela que $A \subset \overline{n\varepsilon}$;

donc que si $\alpha \in A$, $\alpha \leq n\varepsilon$ ou $\varepsilon \leq n\alpha$.

Soit donc $\alpha \in A$: $\varphi_\alpha(Nx) \in U$, d'où $N\Psi_{n\alpha}(x) \in U$ et $\Psi_{n\alpha}(x) \notin U$; soit $\varepsilon \in \bar{B}$: ε minore donc les majorants de B.

Soit $\beta \in B$: Ou bien β n'a pas de prédécesseur:

D'après (C), $\varphi_\beta(x) = \bigwedge_{\gamma<\beta} \Psi_\gamma(x) \in U$, donc pour tout $\gamma < \beta$: $\Psi_\gamma(x) \in U$ et $\gamma \leq n\alpha$.

Donc

$$\beta = \bigvee_{\gamma<\beta} \gamma \leq n\alpha$$

Ou bien β a un prédécesseur β^- :

D'après (C), $\varphi_\beta(x) = \bigwedge_{\gamma<\beta} \Psi_\gamma(x) = \Psi_{\beta^-}(x) \in U$, de sorte que $\beta^- < n\alpha$ et $\beta \leq n\alpha$.

Donc $n\alpha$ est majorant de B et $\varepsilon \leq n\alpha$.

2) $b \subset a$:

Soit $\delta \in b$. Pour tout ε qui minore les majorants

$\{\alpha \in J^0 \ / \ \varphi_\alpha(x) \in U\}$; $\delta \leq n\alpha$.

Montrons qu'alors δ minore les majorants de A , c'est à dire que si s est tel que $[\varphi_\alpha(Nx) \in U \Rightarrow s \geq \alpha]$, on a alors $\delta \leq s$. Raisonnons par l'absurde.

Supposons qu'il existe s tel que : $\begin{cases} \varphi_\alpha(Nx) \Rightarrow s \geq \alpha \\ s < \delta \end{cases}$ c-à-d $\begin{cases} \Psi_{n\alpha}(x) \notin U \Rightarrow s \geq \alpha \\ s < \delta \end{cases}$

Ou bien δ n'a pas de prédécesseur:

Alors il existe λ tel que $s < \lambda < \delta$. Comme $\lambda < \delta$: $\delta \not\leq \lambda$, $\delta \not\leq nn\lambda$, $n\lambda \notin f(x)(U)$, donc il existe r tel que $\begin{cases} r \text{ majore } \{\alpha \in J^0 \ / \ \varphi_\alpha(x) \in U\} \\ n\lambda \not\leq r \end{cases}$

donc $r < n\lambda$, et $\varphi_{n\lambda}(x) \notin U$. Mais d'autre part : $s < \lambda$, $\lambda \not\leq s$. De sorte que $\Psi_{n\lambda}(x) \in U$ et a fortiori $\varphi_{n\lambda}(x) \in U$

Ou bien δ a un prédécesseur δ^- :

Alors $s \leq \delta^- < \delta$. Comme $\delta^- < \delta$, $\delta \not\leq nn\delta^-$ et $n\delta^- \in f(x)(U)$, donc il existe r tel que $\begin{cases} r \text{ majore } \{\alpha \in J^0 \ / \ \varphi_\alpha(x) \in U\} \\ n\delta^- \not\leq r \end{cases}$

Donc $r < n\delta^-$ et $\varphi_{n\delta^-}(x) \notin U$. C'est à dire $\varphi_{(n\delta)^+}(x) \notin U$, or d'après (C) $\varphi_{(n\delta)^+}(x) = \bigwedge_{\gamma<(n\delta)^+} \Psi_\gamma(x) = \Psi_{n\delta}(x)$, donc $\Psi_{n\delta}(x) \notin U$. Alors que: $s < \delta$, donc $\Psi_{n\delta}(x) \in U$.

Le problème de représentation réside toujours car dans le théorème de représentation qu'on vient de voir, les deux chaînes n'ont pas le même type d'ordre ($\bar{\theta} \geq \theta$) où θ et $\bar{\theta}$ sont respèctivement le type d'ordre de J et ζ.

Cas particulier.

Proposition 4.3

Si la chaîne J est complète alors elle est isomorphe à son complété de Mc Neille.

Preuve

$$\begin{aligned} i : \ J &\longrightarrow \zeta \\ \alpha &\longmapsto i(\alpha) = \bar{\alpha} \end{aligned}$$

i) Il est clair que i est un monomorphisme.

ii) i surjective?

Soit $y \in \zeta$, alors $y \subseteq J$, donc $\vee y = \alpha$ existe (car J est complète). Alors $\overline{\alpha} = i(\alpha) = y$.

Donc i est surjective.

D'ou i est un isomorphisme.

Conclusion

Si la chaîne J est complète, l'algèbre de *Moisil-Łukasiewicz* $\theta-$valente involutive monomorphe au structure floue involutive (X, ζ, m), au sens de *Rudeanu*, (i.e $\bar{\theta} = \theta$).

CHAPITRE III (Annexe).

Représentation Topologique

III.I. Représentation Des Treillis Distributifs.

Définition.I.1

Soit $(X, \leq)$ un ensemble ordonné,et soit E un sous ensemble de X.on dit que E est croissant si $\forall x \in E; x \leq y \Rightarrow y \in E$ (resp E décroissant si,$\forall x \in E; y \leq x \Rightarrow y \in E$).

Définition.I.2

Un espace ordonné est un triplet $(X, \tau, \leq)$ où X est un ensemble non vide,τ une topologie sur $X, \leq$ une relation d'ordre.

Définition.I.3

Soit$(X, \tau, \leq)$ un espace ordonné,on dit que $(X, \tau, \leq)$ est un espace totalement discontinu si: $\forall x, y \in X$ tel que $x \not\leq y$, il existe un τ-of croissant U et un τ of décroissant V tel que

$$x \in U, y \in V \text{ et } U \cap V = \emptyset.$$

Définition.I.4

Un espace ordonné $(X, \tau, \leq)$ est dit un espace de Priestley si

1) $(X, \tau, \leq)$ est compact.

2) $(X, \tau, \leq)$ est totalement discontinu.

Soit A un treillis distributif et fermé,et X l'ensemble des homomorphismes de A dans la chaîne $\{0.1\}$. On définit une relation sur X par:

$$f \leq g \Longleftrightarrow f(a) \leq g(a), \forall a \in A$$

On a X, muni de cette relation, est un ensemble ordonné, τ la topologie produit induite par celle de $\{0.1\}^A$.

On pose $T(A) = (X, \tau, \leq)$.

lemme.I.5

1) Si A est un treillis distributif alors $T(A) = (X, \tau, \leq)$ est un espace de Priestley.

2) Si $\gamma = (X, \tau, \leq)$ est un espace de Priestley alors $L(\gamma) = \{Y \ / \ Y \subseteq X$ et Y est un τ-of croissant est un treillis distributif et fermé.

L'espace $T(A)$ est appelé l'espace dual de A.

Preuve

i)X est compact ?

X est fermé dans la topologie induite par la topologie produit de $\{0.1\}^A$, qui est compact, donc X est compact.

ii)On démontre que $T(A)$ est totalement discontinu.

Soit $f, g \in X$ tel que $g \not\leq f$ donc il existe au moins un $a \in A$ tel que $f(a) = 0$ et $g(a) = 1$ l'ensemble $U = \{h \in X \ / \ h(a) = 1\}$ est un τ-of croissant contenant g et $X - U = \{h \in X \ / \ h(a) = 0\}$ est $\tau - of$ décroissant contenant f.

(on va voir après la démonstration de U et $X - U$ comme des $\tau - of$).

On a $U \cap (X \backslash U) = \emptyset$ alors $(X.\tau. \leq)$est un espace de Priestley.

ii)on remarque que $L(\gamma)$ est un ensemble ordonné par l'inclusion, l'union et l'intersection de deux of croissants est un of croissant , donc, $L(\gamma)$ qui est un treillis distributif, admet $\emptyset$ le plus petit élément et X le plus grand élément.

ThéorèmeI.6

(a) Soit A un treillis distributif, l'application $F_A : A \longrightarrow L(T(A))$ *définie par* $F_A(a) = \{f \in X / f(a) = 1\}$ *est un isomorphisme de treillis.*

(b) Si $\gamma = (X, \tau, \leq)$*est un espace de Priestley alors l'application* $G_\gamma : \gamma \to T(L(\gamma))$ *définie par*

$$G_\gamma(x)(Y) = \begin{cases} 1 \; si \; x \in Y \\ 0 si \; x \notin Y \end{cases}$$

pour tout $Y \in L(\gamma)$ *est un isomorphisme d'espaces de Priestley (c'est-à-dire une bijection continue et croissante).*

(c) Si $f : A_1 \longrightarrow A_2$ *est un homomorphisme de treillis alors l'application* $T(f) : T(A_2) \longrightarrow T(A_1)$ *définie par:* $T(f)(g) = gof$ *est un homomorphisme d'espace de Priestley (c'est-à-dire une application continue et croissante)*

(d) Si h: $\gamma_1 \longrightarrow \gamma_2$ *est un homomorphisme d'espace Priestley alors l'application* $L(h) : L(\gamma_2) \longrightarrow L(\gamma_1)$ *définie par:*

$$L(h)(y) = h^{-1}(y) \quad pour \; tout \; y \in L(\gamma_2).$$

est un homomorphisme de treillis.

(e) si de plus f *et* h *sont définis comme dans (c)et (d) alors les diagrammes suivants:*

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{f} & A_2 \\ F_{A1} \downarrow & & \downarrow F_{A2} \\ L(T(A_1)) & \xrightarrow[L(T(f))]{} & L(T(A_2)) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \gamma_1 & \xrightarrow{h} & \gamma_2 \\ G_{\gamma_1} \downarrow & & \downarrow G_{\gamma_2} \\ T(L(\gamma_1)) & \xrightarrow[T(L(h))]{} & T(L(\gamma_2)) \end{array}$$

sont commutatifs.

Preuve

i)

$$F_A : \ A \longrightarrow L(T(A))$$
$$a \longrightarrow F_A(a) = \{f \in X \ / \ f(a) = 1\}$$

a)

$$F_A(0) = \{f \in X \ / \ f(0) = 1\} = \emptyset$$

b)

$$\begin{aligned} F_A(a \vee b) &= \{f \in X \ / \ f(a \vee b) = 1\} \\ &= \{f \in X \ / \ f(a) \vee f(b) = 1\} = \{f \in X \ / \ f(a) = 1 \vee f(b) = 1\} \\ &= \{f \in X \ / \ f(a) = 1\} \cup \{f \in X \ / \ f\{b\} = 1\} \\ &= F_A(a) \cup F_A(b) \end{aligned}$$

donc F_A est un homomorphisme des treillis.

ii)

$$G_\gamma : \ \gamma \longrightarrow T(L(\gamma))$$
$$f \longrightarrow G_\gamma(f)$$

G_γ est un isomorphisme d'espace de Priestley, (est un homomorphisme de cet espace qui soit bijectif) nous avons le lemme suivant.

lemme I.7

$R = \{F_A(a) \ / \ a \in A\}$ engendre une topologie (sous base de topologie) sur X.

Preuve.

Il est facile de démontrer que R est stable par l'union et l'intersection finie.

$$\begin{cases} \varnothing = \{f \in X \ / \ f(0) = 1\} = F_A(0) \in R \\ X = \{f \in X \ / \ f(1) = 1\} = F_A(1) \in R \end{cases}$$

même chose de $S = \{X - F_A(a) \;/\; a \in A.\}$

pour démontre que

$$G_\gamma : \gamma \longrightarrow T(L(\gamma))$$
$$f \longrightarrow G_\gamma(f) \text{ est un isomomorphisme}$$

Il suffit de démontrer que G_γ est continue et croissante et G_X est une bijection.

soit Z un of croissante dans $T(L(\gamma))$

donc

$$\exists y \in L(\gamma) / z = F_{L(\gamma)}(y)$$

$y \in L(T(A))$ (i.e y est un of croissant dans $T(A)$)

$$\begin{aligned} G_\gamma^{-1}(z) &= G_\gamma^{-1}\left(F_{L(\gamma)}(y)\right) = \left\{f \in X \;/\; G_\gamma(f) \in F_{L(\gamma)}(y)\right\} \\ &= \{f \in X \;/\; G_\gamma(f)(y) = 1\} \\ &= \{f \in X \;/\; f \in y\} = X \cap y \\ &= y \text{ (un of croissant).} \end{aligned}$$

donc G_γ est continue.

On démontre la surjectivité.

Soit h un homomorphisme de $T(L(\gamma))$, et on cherche un $f \in X$ tel que $G_\gamma(f) = h$.

donc

$$\forall y \in L(\gamma), \quad G_\gamma(f)(y) = h(y)$$

on a

$$\begin{cases} h(y) = 1 \Leftrightarrow f \in y \\ h(y) = 0 \Leftrightarrow f \notin y \end{cases}$$

on pose:

$$
\begin{aligned}
H &= \{y \in L(\gamma) \diagup h(y) = 1\} \\
B &= \underset{y \in H}{\cap} y \\
H' &= \{z \in L(\gamma) \diagup h(z) = 0\} \\
C &= \underset{z \in H'}{\cup} z
\end{aligned}
$$

H et H' sont stables par la réunion et l'intersection finies.

on a: $B \backslash C \neq \emptyset$ car si $B \backslash C = \emptyset$ alors

$$
\begin{aligned}
(\underset{y \in H}{\cap} y) \backslash (\underset{z \in H'}{\cup} z) &= \emptyset = (\underset{y \in H}{\cap} y) \cap (\underset{z \in H'}{\cup} z)^C \\
&= (\underset{y \in H}{\cap} y) \cap (\underset{z \in H'}{\cap} Cz)
\end{aligned}
$$

donc

$$
(\underset{y \in H}{\cup} Cy) \cup (\underset{z \in H'}{\cup} z) = X.
$$

La compacité de X implique qu'il existe un nombre fini de $y_i \in H$, $i = 1.....n.$ et $z_j \in H', j = 1.....m.$ tel que

$$
\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} Cy_i\right) \cup (\overset{m}{\underset{j=1}{\cup}} z_j) = X \Rightarrow \left(\overset{n}{\underset{i=1}{\cap}} y_i\right) \cap (\overset{m}{\underset{j=1}{\cap}} Cz_j) = \phi
$$

donc

$$
\overset{n}{\underset{i=1}{\cap}} y_i \subset \overset{m}{\underset{j=1}{\cup}} z_j
$$

c .a . d $h(\overset{m}{\underset{j=1}{\cup}} z_j) = 1$, ce qui est absurde (car $h(\overset{m}{\underset{j=1}{\cup}} z_j) = \overset{m}{\underset{j=1}{\cup}} h(z_j) = 0$) donc $B \backslash C$ et non vide. Alors on prend $f \in B \backslash C$ qui vérifie $G\gamma(f) = h$.

donc $G\gamma(f)$ est surjective.

On démontre que $G\gamma$ est injective :

$$ker\ G\gamma = \{f \in \gamma \ / \ G\gamma(f) = \emptyset\}$$

$$\begin{aligned}
\text{Soit } f \in \ker G\gamma &\Leftrightarrow G\gamma(f) = \emptyset \\
&\Leftrightarrow G\gamma f(y) = 0 \qquad \forall y \in L(\gamma) \\
&\Leftrightarrow f \notin y \text{ pour tout } y \in L(\gamma) \\
&\Leftrightarrow f \in \bigcap_{y \in L(\gamma)} Cy = \{0\} \\
&\Leftrightarrow f = 0
\end{aligned}$$

donc $G\gamma$ est injective.

Il rèste a démontrer que $G\gamma$ est croissante, soit f et $g \in \gamma$ tel que $f \leq g$, et on démontre que $G\gamma(f) \leq G\gamma(g)$

Soit $y \in L(\gamma)$.

$$G\gamma(f)(y) = \begin{cases} 1 \text{ si } f \in y \\ 0 \text{ si } f \notin y \end{cases}$$

si $f \in y \Rightarrow g \in y$ et si $f \notin y \Rightarrow G\gamma(f)(y) = 0 \leq G\gamma(g)(y)$.

Donc ona toujours $G\gamma(f) \leq G\gamma(g)$.

iii) $f : A_1 \longrightarrow A_2$ est un homomorphisme de treillis et

$$\begin{aligned}
T(f) : \ & T(A_2) \longrightarrow T(A_1) \\
& g \longmapsto T(f)(g) = gof
\end{aligned}$$

est un homomorphisme d'espace de Priestley

Soit y un of de $T(A_1) \Rightarrow y = F_{A_1}(a)$ tel que $a \in A$

$$\begin{aligned}
T(f)^{-1}(F_{A_1}(a)) &= \{g \in T(A_2)/T(f)(g) \in F_{A_1}(a)\} \\
&= \{g \in T(A_2)/gof(a) = 1\} \\
&= \{g \in T(A_2)/g(f(a)) = 1\} \\
&= F_{A_2}(f(a))
\end{aligned}$$

donc $T(f)$ est continue.

$T(f)$ croissante ?

Soit g_1 et $g_2 \in T(A_2)$ tel que $g_1 \leq g_2$ et $a \in A_1$

$$\begin{aligned}(g_1 \circ f)(a) &= g_1(f(a)) \leq g_2(f(a)) \\ &\Rightarrow T(f)(g_1) \leq T(f)(g_2)\end{aligned}$$

donc $T(f)$ est croissante.

iv)$h : \gamma_1 \to \gamma_2$ homomorphisme d'espace de Priestley

$$\begin{aligned}L(h) : \ & L(\gamma_2) \longrightarrow L(\gamma_1) \\ & \varkappa \longmapsto L(h)(\varkappa) = h^{-1}(\varkappa)\end{aligned}$$

On démontre que $L(h)$ est un homomorphisme de treillis.

1)

$$L(h)(\emptyset) = h^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

2)Soit y et $z \in L(\gamma_2)$

$$\begin{aligned}L(h)(y \cup z) &= h^{-1}(y \cup z) \\ &= h^{-1}(y) \cup h^{-1}(z) \\ &= L(h)(y) \cup L(h)(z)\end{aligned}$$

donc $L(h)$ est un homomorphisme de treillis.

V)Supposons que f et h sont comme dans (iii) et (iv) on démontre que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \overset{f}{\longrightarrow} & A_2 \\ F_{A1}\downarrow & & \downarrow F_{A2} \quad \text{est commutatif.} \\ L(T(A_1)) & \underset{L(T)(f)}{\longrightarrow} & L(T(A_2)) \end{array}$$

Soit $a \in A_1$

$$\begin{aligned} (L(T(f) \circ F_{A1})(a) &= L(T(f)(F_{A1}(a)) \\ &= T^{-1}(f)(F_{A1}(a)) \\ &= \{g \in T(A_2)/T(f)(F_{A1}(a)\} \\ &= \{g \in T(A_2)/gof \in F_{A1}(a)\} \\ &= \{g \in T(A_2)/g(f)(a)) = 1\} \\ &= F_{A2}(f(a)) \\ &= (F_{A2}of)(a). \text{ ceci pour tout } a \in A \end{aligned}$$

Donc le diagramme précédent est commutatif.

On démontre que le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} \gamma_1 & \overset{L(h)}{\longrightarrow} & \gamma_2 \\ G\gamma_1\downarrow & & \downarrow G\gamma_2 \quad \text{est commutatif.} \\ T(L(\gamma_1)) & \underset{T(L(h))}{\longrightarrow} & T(L(\gamma_2)) \end{array}$$

Soit $f \in \gamma_1$

$$\begin{aligned} T(L(h)oG\gamma_1(f) &= T(L(h))(G\gamma_2)(f) \\ &= G\gamma_1(f)oL(h) \end{aligned}$$

On a

$$G\gamma_1(f)oL(h)(y) = G\gamma_1(f)(h^{-1}(y) = \begin{cases} 1 \text{ si } f \in h^{-1}(y) \\ 0 \text{ si } f \notin h^{-1}(y) \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 1 \text{ si } h(f) \in y \\ 0 \text{ si } h(f) \notin y \end{cases}$$
$$= G\gamma_2(h(f)) = (G\gamma_2 oh)(f)$$

Donc le diagramme est commutatif.

Remarques I.8

i) Si le treillis A est complet alors $R = \{F_A(a) \nearrow a \in A\}$est une topologie sur γ

ii)Il est facile de voir que, les ensembles suivants sont des topologies sur γ

1)la topologie engendrée par R

2)la topologie engendrée par ζ

3)la topologie engendrée par $R \cup \zeta$

4)$L = \{y \subset \gamma / y \text{ croissante}\}$, $S = \{y \subset \gamma / y \text{ décroissante}\}$

III.2.Représentation d'algèbre de Moisil-Łukasiewicz θ-valente.

Soit $(A, J, (\varphi_\alpha)_{\alpha \in J_0})$ une algèbre de Moisil-Łukasiewicz θ-valente et $T(A)$ l'espace de Priestley associé au treillis distributif A.

Pour tout $\alpha \in J^0, \varphi_\alpha : A \longrightarrow A$ est l'endomorphisme de treillis A.

Soit $\phi_\alpha : T(A) \longrightarrow T(A)$ défini par $\phi_\alpha = T(\varphi_\alpha)$.

ϕ_α vérifie les conditions du lemme suivant.

Lemme 2.1

La famille des applications $(\phi_\alpha / \alpha \in J^0)$ satisfait les conditions suivantes :

i)ϕ_α est un homomorphisme d'espace de Priestley (i.e application continue et croissante);

ii) $\phi_\alpha \circ \phi_\beta = \phi_\alpha$ *pour tout* $\alpha.\beta \in J^0$;

iii)Si $\alpha \leqslant \beta$ *alors* $\phi_\alpha^{-1}(y) \supseteq \phi_\beta^{-1}(y)$ *pour tout* $y \in L(T(A))$;

iv)Si $y \in L(T(A))$ *alors* $\phi_\alpha^{-1}(y)$ *et* $T(A)\backslash\phi_\alpha^{-1}(y)$ *sont dans* $L(T(A))$;

v)Si $y, z \in L(T(A))$ *et pour tout* $\alpha \in J^0$ $\phi_\alpha^{-1}(y) = \phi_\alpha^{-1}(z) \Rightarrow y = z$.

Preuve

i)φ_α est un homomorphisme de treillis A, donc (d'après la 3^{eme} condition du théorème .III.1.6) $T(\varphi_\alpha) = \phi_\alpha$ est un homomorphisme d'espace de Priestley.

ii)

$$\begin{aligned} \phi_\alpha : \quad & T(A) \longrightarrow T(A) \\ & f \longmapsto \phi_\alpha(f) = T(\varphi_\alpha)) = f \circ \varphi_\alpha \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \phi_\alpha \circ \phi_\beta(f) = (T(\varphi_\alpha) \circ T(\varphi_\beta))(f) &= T(\varphi_\alpha)(T(\varphi_\beta)(f)) \\ &= T(\varphi_\alpha)(f \circ \varphi_\beta) \\ &= (f \circ \varphi_\beta) \circ \varphi_\alpha = f \circ (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha) = f \circ \varphi_\alpha \end{aligned}$$

Car

$$(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha) = \varphi_\alpha \text{ pour tout } \beta,\alpha \in J^0$$

Donc

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta(f) = f \circ \varphi_\alpha = T(\varphi_\alpha)(f) = \varphi_\alpha(f)$$

Alors:

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta = \phi_\alpha \text{ pour tout } \alpha, \beta \in J^0$$

iii)Soit $\alpha, \beta \in J^0$, tel que $\alpha \leqslant \beta$, alors $\phi_\beta \leqslant \phi_\alpha$

soit $y \in L(T(A))$ et $f \in \phi_\beta^{-1}(y)$

$$\Rightarrow \phi_\beta(f) \in y$$
$$\Rightarrow f \circ \phi_\beta \in y$$
$$\Rightarrow f \circ \phi_\alpha \in y \ (car f \circ \varphi_\beta \leqslant f \circ \varphi_\alpha \text{ et } y \text{ croissant})$$
$$\Rightarrow \phi_\alpha(f) \in y$$
$$\Rightarrow f \in (\phi_\alpha^{-1}(y))$$
$$\Rightarrow \phi^{-1}(y) \subseteq \phi_\alpha^{-1}(y)$$

iv)Soit $y \in L(T(A))$ et $\alpha \in J^0$ on démontre que $\phi_\alpha^{-1}(y)$ et $T(A)\backslash\phi_\alpha^{-1}(y)$ appartiennent à$(T(A))$

Soit $y \in L(T(A)) \Rightarrow \exists\, a \in A$ tel que $y = F_A(a)$.

$$\begin{aligned}
\phi_\alpha^{-1}(y) &= \{f \in T(A)/\phi_\alpha(f) \in y\} \\
&= \{f \in T(A)/(f \circ \varphi_\alpha) \in F_A(a)\} \\
&= \{f \in T(A)/(f \circ \varphi_\alpha) \in F_A(a)\} \\
&= \{F_A(\varphi_\alpha(a)), \varphi_\alpha(a) \in A.
\end{aligned}$$

Donc $\phi_\alpha^{-1}(y)$est un ensemble croissant et τof i.e $\phi_\alpha^{-1}(y) \in L(T(A))$. Même chose pour $T(A)\backslash\phi_\alpha^{-1}(y)$

$$\begin{aligned}
T(A)\backslash\phi_\alpha^{-1}(y) &= \{f \in T(A)/f \notin \phi_\alpha^{-1}(y)\} \\
&= \{f \in T(A)/\phi_\alpha(f) \notin y\} \\
&= \{f \in T(A)/(f \circ \varphi_\alpha)(a) = 0\} \\
&= \{f \in T(A)/(f \circ \bar{\varphi}_\alpha)(a) = 1\} \\
&= F_A(\bar{\varphi}_\alpha(a)) \text{ croissant est } \tau of
\end{aligned}$$

Soientt $y, z \in L(T(A))$ donc $\exists\ a \in A$ et $b \in A$, avec $y = F_A(a)$, $z = F_A(b)$

Alors

$$\phi_\alpha^{-1}(y) = \phi_\alpha^{-1}(F_A(a) = F_A(\varphi_\alpha)(a)) = \phi_\alpha^{-1}(z) = F_A(\varphi_\alpha)(b))$$

Donc

$$\varphi_\alpha(a) = \varphi_\alpha(b) \text{ pour tout} \alpha \in J^0$$

alors

$$a = b \text{ (car } (A, J, (\varphi_\alpha)_{\alpha \in J^0}) \text{ est une } a.M - \pounds.\theta.v)$$

donc

$$F_A(a) = F_A(b) \Rightarrow y = z$$

Définition 2.2

Un espace de Priestley $(X, \tau, \leqslant)$ sera dit espace de £ukasiewicz $\theta-$ valent ordonné (e.l.θ) Si la famille des applications $(\phi_\alpha . X \to X)_{\alpha \in J^0}$ vérifie les conditions suivantes:

i) pour tout $\alpha \in J^0, \phi_\alpha$ est un homomorphisme d'espace de Priestley;

ii) $\phi_\alpha \circ \phi_\beta = \phi_\alpha$ pour tout $\alpha, \beta \in J^0$.

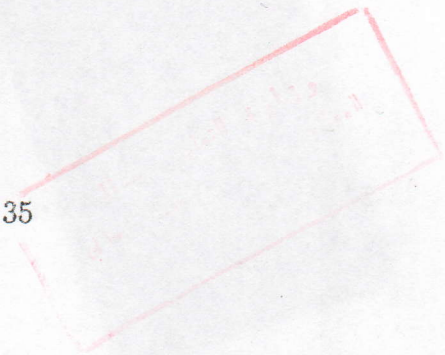
iii) si $\alpha, \beta \in J^0, \alpha \leq \beta$ alors $\phi_\beta^{-1}(y) \subseteq \phi_\alpha^{-1}(y)$. pour tout $y \in L(\gamma)$;

iv) pour tout $\alpha \in J^0$, et $y \in L(\gamma), \phi_\alpha^{-1}(y)$ et $T(A) \backslash \phi_\alpha^{-1}(y)$ sont croissantes;

v) si $\phi_\alpha^{-1}(y) = \phi_\alpha^{-1}(z)$ pour tout $\alpha \in J_0$, où y et $z \in L(\gamma)$, alors $y = z$.

Définition 2.3

Si $\gamma = (X, \tau, \leq (\phi_\alpha)_{\alpha \in J^0})$ et $\gamma = (X', \tau', \leq, \{\phi'_\alpha\}_{\alpha \in J^0})$ sont deux espaces de £ukasiewicz-$\theta-$valent ordonnés. Alors on dit que l'homomorphisme d'espace de Priestley $f : X \to X'$ est une $\theta-$application, si pour tout $\alpha \in J^0$, le diagramme suivant:



$$\begin{array}{ccc} X & \overset{f}{\longrightarrow} & X' \\ \phi_\alpha \downarrow & & \downarrow \phi'_\alpha \\ X & \underset{f}{\longrightarrow} & X' \end{array} \qquad \textit{est commutatif.}$$

Proposition 2.4

a) Si $(A, J, (\varphi_\alpha)_{\alpha \in J^o})$ est une algèbre de Moisil-Łukasiewicz $\theta-$ valente alors l'espace de Priestley $T(A)$ muni de la famille $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in J^o}$ est un espace de Łukasiewicz $\theta-$valent ordonné $(e, \mathcal{L}, o)$

b) Si $f : A \longrightarrow A'$ est un homomorphisme d'algèbres de Łukasiewicz, alors $T(f) : T(A') \longrightarrow T(A)$ (donnée dans le théorème.III.1.6) est une $\theta-$application.

Preuve

a) C'est un résultat direct du lemme III.2.1.

b) Soit $f : A \longrightarrow A'$ un homomorphisme d'algèbres de Moisil-Łukasiewicz θ valente, donc $T(f) : T(A') \longrightarrow T(A)$ est un homomorphisme d'espace de Priestley

Il reste à montrer que le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} T(A') & \overset{T(f)}{\longrightarrow} & T(A) \\ \phi'_\alpha \downarrow & & \downarrow \phi_\alpha \\ T(A') & \underset{T(f)}{\longrightarrow} & T(A) \end{array}$$

$T(f)o\phi'_\alpha = \phi_\alpha oT(f)$?

Soit $g \in T(A')$

$$\begin{aligned}
(T(f)o\phi'_\alpha)(g) &= T(f)(\phi'_\alpha(g)) \\
&= T(f)(T(\varphi'_\alpha)(g)) \\
&= T(f)(go\varphi'_\alpha) \\
&= (go\varphi'_\alpha)of = go(\varphi'_\alpha of) \\
&= go(fo\varphi)(\text{car } f \text{ est un homomorphisme d'algèbres de Moisil-Łukasiewicz.} \\
&= \phi_\alpha(gof) = \phi_\alpha(T(f)(g)) \\
&= (\phi_\alpha oT(f))(g)
\end{aligned}$$

Donc

$$T(f)o\phi'_\alpha = \phi_\alpha oT(f)$$

Alors le diagramme est commutatif. Donc $T(f)$ est une θ-- application.

Proposition 2.5

a) Si $\gamma = (X, \tau, \leq (\phi_\alpha)_{\alpha \in J_0})$ est un espace de Łukasiewicz-θ-valent ordonné alors le treillis $L(\gamma)$ associé à l'espace de Priestley $(X, \leq, \tau)$ avec la famille $(\varphi_\alpha, \bar{\varphi}_\alpha / \alpha \in J^0)$ définie par

$$\varphi_\alpha(x) = \phi_\alpha^{-1}(x), \bar{\varphi}_\alpha(x) = X \setminus \left\{\phi_\alpha^{-1}(x)\right\} \text{ pour tout } \alpha \in J^0$$

est une algèbre de Moisil-Łukasiewicz θ-valente.

b) Si $\gamma = (X, \tau, \leqslant, (\phi_\alpha)_{\alpha \in J^0})$ et $\gamma' = (X', \tau', \leq', (\phi'_\alpha)_{\alpha \in J^0})$ sont deux espaces de Łukas θ- valents ordonnés et $f : \gamma \longrightarrow \gamma'$ une θ-application, alors. $L(f) : L(\gamma') \longrightarrow L(\gamma)$ (donnée dans le théorème III.1.6) est un homomorphisme d'algèbre de Moisil-Łukasiewicz θ-- valente.

Preuve

a)

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha, \varphi'_\alpha \quad & L(\gamma) \longrightarrow L(\gamma') \\ & y \longrightarrow \varphi_\alpha(y) \quad = \phi^{-1}(y) \\ & y \longrightarrow \varphi'_\alpha(y) \quad = X \backslash \phi^{-1}(y) \end{aligned}$$

donc d' après les conditions dans la définition III.2.2. φ_α,φ'_α est bien définie.

i)On démontre que $\varphi_\alpha$et φ'_α sont des homomorphismes.

Soient y et $z \in L(T(A))$.

$$\varphi_\alpha(y \cup z) = \phi^{-1}(y \cup z) = \phi_\alpha^{-1}(y) \cup \phi_\alpha^{-1}(z) = \varphi_\alpha(y) \cup \varphi_\alpha(z).$$

$$\varphi_\alpha(y \cap z) = \phi_\alpha^{-1}(y \cap z) = \phi_\alpha^{-1}(y) \cap \phi_\alpha^{-1}(z) = \varphi_\alpha(y) \cap \varphi_\alpha(z).$$

$$\varphi_\alpha(\emptyset) = \phi_\alpha^{-1}(\emptyset) = \emptyset \ , \ \varphi_\alpha(X) = \phi_\alpha^{-1}(X) = X.$$

Même chose pour φ'_α

donc $\varphi_\alpha$et φ'_α sont des homomorphismes du treillis.

alors $(\varphi_\alpha \ \varphi'_\alpha)_{\alpha \in J^0}$ est une famille d'endomorphismes de $L(\gamma)$ conservant $\emptyset$ et X.

Si $\alpha \leq \beta$ alors :

$$\phi_\alpha^{-1}(Y) \supseteq \phi_\beta^{-1}(y) \ , \forall y \in L(\gamma)$$

donc

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(y) \quad & \supseteq \quad \varphi_\beta(y) \\ & \Rightarrow \quad \varphi_\beta \leq \varphi_\alpha \end{aligned}$$

$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta \stackrel{?}{=} \varphi_\beta$

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta(y) &= \varphi_\alpha(\phi_\beta^{-1}(y)) = \phi_\alpha^{-1}(\phi_\beta^{-1}(y)) \\ &= (\phi_\beta \circ \phi_\alpha)^{-1}(y) \\ &= \phi_\beta^{-1}(y) = \varphi_\beta(y)\end{aligned}$$

Donc

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta = \varphi_\beta.$$

Si

$$\varphi_\alpha(y) = \varphi_\alpha(z) \stackrel{?}{\Longrightarrow} y = z$$

$\varphi_\alpha(Y) = \varphi_\alpha(Z) \Longrightarrow \phi_\alpha^{-1}(Y) = \phi_\alpha^{-1}(Z)$ pour tout $\alpha \in J^0 \Longrightarrow y = z$ pour tout $\alpha \in J^0$.
Même chose pour φ'_α pour tout $\alpha \in J^0$, pour tout $y \in L(\gamma)$ et pour tout $\alpha \in J^0$, $\varphi_\alpha(y)$ est chrysippien $\exists\ \varphi'_\alpha(y)$ tel que

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha(y) \cup \varphi'_\alpha(y) &= \phi_\alpha^{-1}(y) \cup (X/\phi_\alpha^{-1}(y)) = X \\ \varphi_\alpha(y) \cap \varphi'_\alpha(y) &= \phi_\alpha^{-1}(y) \cap (X/\phi_\alpha^{-1}(y)) = \emptyset\end{aligned}$$

Même chose pour φ'_α.
Donc $(L(\gamma), (\varphi_\alpha, \varphi'_\alpha)_{\alpha \in J^0}, J)$ est un algèbre de *Moisil-Łukasiewicz* θ -valent.
b) soit $f : X \longrightarrow X'$ est une $\theta-$ application $L(f) : L(\gamma') \longrightarrow L(\gamma)$.est un homomorphisme d'algèbres de *Moisil-Łukasiewicz* θ valente.
$L(f)$ est un homomorphisme de treillis.
Il reste à démontrer que $\varphi_\alpha \circ L(f) = L(f) \circ \varphi'_\alpha$

$$\begin{array}{ccc} L(\gamma') & \xrightarrow{L(f)} & L(\gamma) \\ \varphi'_\alpha \downarrow & & \downarrow \varphi_\alpha \\ L(\gamma') & \xrightarrow{L(f)} & L(\gamma) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha \circ L(f)(y) &= \varphi_\alpha(L(f)(\eta) = \varphi_\alpha(f^{-1}(y) = \phi_\alpha^{-1}(f(y) \\ &= (f \circ \phi_\alpha)^{-1}(y) = (\phi'_\alpha \circ f)^{-1}(y) \\ &= f^{-1}(\phi_\alpha^{-1}(y) \\ &= f^{-1}(\varphi'_\alpha(y) = (L(f) \circ \varphi'_\alpha)(y) \end{aligned}$$

donc $L(f)$ est un homomorphisme d'algèbre de Moisil-Łukasiewicz $\theta-$ valente.

Lemme 2.6

a) Pour toute algèbre de Moisil-Łukasiewicz θ -valent, l'isomorphisme de treillis distributifs,

$$F_A : A \longrightarrow L(T(A))$$

est un isomorphisme des algèbres de Łukas.θ -valent.

b)pour éspace ordonné de Moisil-Łukasiewicz θ -valente $\gamma = (X, \tau, \leqslant, \{\phi_\alpha\}_{\alpha \in J^0})$ l'isomorphisme d'espace de Priestley,

$$G\gamma : \gamma \longrightarrow L(T(\gamma)$$

est un isomorphisme d'espace ordonné de Łukasiewicz θ-valent.

Preuve

a)On démontre que les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{F_A}{\longrightarrow} & T(A) \\ \varphi_\alpha \downarrow & & \downarrow L(T(\varphi_\alpha)) = \varphi'_\alpha \\ T(A') & \underset{F_A}{\longrightarrow} & T(A) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \gamma & \overset{G_\gamma}{\longrightarrow} & T(L(\gamma)) \\ \phi_\alpha \downarrow & & \downarrow L(T(\phi_\alpha)) = \phi'_\alpha \\ \gamma & \underset{G_\gamma}{\longrightarrow} & T(L(\gamma)) \end{array}$$

sont commutatifs.

$$\begin{aligned} (\varphi'_\alpha \circ F_A)(a) &= \varphi'_\alpha(F_A(a) = \phi_\alpha^{-1}(F_A(a) \\ &= \phi_\alpha^{-1}\{f \in T(A)/f(a) = 1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (F_A \circ \varphi_\alpha)(a)) &= F_A(\varphi_\alpha(a)) = \{f \in T(A)/f(\varphi_\alpha(a)) = 1\} \\ &= \phi_\alpha^{-1}\{f \in T(A)/f(a)) = 1\} \Leftrightarrow \phi_\alpha(f)(a) = 1 \Leftrightarrow (f \circ \varphi_\alpha) = 1 \\ &\Leftrightarrow f(\varphi_\alpha(a)) = 1 \Leftrightarrow f \in (F_A \circ \varphi_\alpha)(a). \end{aligned}$$

d'ou

$$\varphi'_\alpha \circ F_A = F_A \circ \varphi_\alpha$$

$(G\gamma \circ \phi_\alpha)(x) : L(\gamma) \longrightarrow \{0.1\}$

$$(G\gamma \circ \phi_\alpha)(x)(y) = G\gamma(\phi_\alpha(x)(y) = \begin{cases} 1 \text{ si} & \phi_\alpha(x) \in y. \\ 0 \text{ si} & \phi_\alpha(x) \notin y. \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
(\phi'_\alpha \circ G\gamma)(x)(y) &= \phi'_\alpha(G\gamma(x))(y) \\
&= (G\gamma(x) \circ \varphi_\alpha)(y) \\
&= (G\gamma(x)(\phi_\alpha^{-1}(y) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \phi_\alpha^{-1}(y)) \\ 0 \text{ si } x \notin \phi_\alpha^{-1}(y)) \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 \text{ si } \phi_\alpha(x) \in y \\ 0 \text{ si } \phi_\alpha(x) \notin y \end{cases} \quad \text{donc les deux diagrammes sont commutatifs}
\end{aligned}
$$

III.3. Représentation d'algèbres de Moisil-Łukasiewicz θ-valentes involutives.

Définition 3.1

Un espace de Łukasiewicz-$\theta-$valent ordonné $\gamma = (X, \tau, \leq, (\phi_\alpha)_{\alpha \in J^0})$ est dit involutif $(e.Ł.o.i)$ s'il existe

a) une involution décroissante $n : J \longrightarrow J$.

b) une application continue $N : X \longrightarrow X$, telle que:

i) $NNx = x$, pour tout $x \in X$;

ii) Si $x \leq y \Rightarrow Ny \leq Nx$.

c) une famille d'applications $(h_\alpha)_{\alpha \in J^1}$ telle que;

i) $h_\alpha \leq \phi_\alpha$, pour tout $\alpha \in J^{01}$;

ii) $h_\alpha = N\phi_{n\alpha}N$, pour tout $\alpha \in J^{01}$.

Ainsi, pour tout $\alpha \in J^1$, h_α est une application continue et croissante.

Définition 3.2

Si $\gamma = (X, \tau. \leq, (\phi_\alpha)_{\alpha \in J_0}, (h_\alpha)_{\alpha \in J^1}, n, N)$ et $\gamma' = (X', \tau'. \leq', (\phi'_\alpha)_{\alpha \in J_0}, (h'_\alpha)_{\alpha \in J^1}, n, N')$ sont deux espaces de Łukasiewicz $\theta-$ valents ordonnés involutifs $(e.l.o.i)$ une $\theta-$ application

$f : X \longrightarrow X'$ sera dite une $N\theta-$ application si pour tout $x \in X$, $f(Nx) = N'f(x)$.
(On peut démontrer que pour toute $N\theta-$ application on a $f(h_\alpha(x)) = h'_\alpha(f(x)), \alpha \in J^1$).

Proposition 3.1

(a) Si A est une algèbre de Moisil-Łukasiewicz $\theta-$valente involutive, alors l'espace de Priestley $T(A)$ muni des familles $(\phi_\alpha)_{\alpha\in J^0}, (h_\alpha)_{\alpha\in J^1}$ données par $\phi_\alpha = T(\varphi_\alpha), h_\alpha = T(\Psi_\alpha)$, et de l'application définie par $T(N)\phi = N\phi N$ est un (e.l.o.i.)

(b) Si $f : A \longrightarrow A'$ est un homomorphisme d'algèbre de Moisil-Łukasiewicz θ-valente involutive alors $T(f) : T(A') \longrightarrow T(A)$ est une $N\theta$- application.

Preuve

(a) On sait d'après la proposition (2.4.(a)) que $T(a)$ avec la famille est un espace de Łukasiewicz $\theta-$ valent ordonné, montrons qu'il est involutif (i.e. que $T(N)$ est une involution décroissante et que la famille $(h_\alpha)_{\alpha\in J^1}$ vérifie la condition (C) dans la définition (III.3.1)

(i)$T(N)T(N)\phi = T(N)N\phi N = NN\phi NN = \phi$, donc $T(N)$ est une involution.
On note par ailleurs que $T(N)$ est bien définie, c'est-à-dire que $T(N)\phi \in T(A)$.

$T(N)\phi(x \vee y) = N\phi N(x \vee y) = N\phi(Nx \wedge Ny) = N\phi Nx \vee N\phi Ny = T(N)\phi(x) \vee T(N)\phi(y)$
Analoguement $T(N)\phi(x \wedge y) = T(N)\phi(x) \wedge T(N)\phi(y)$.

(ii)Si $\phi_1, \phi_2 \in T(A)$ tel que $\phi_1 \leq \phi_2$ alors $\phi_1(Nx) \leq \phi_2(Nx)$ pour tout $x \in A$ donc $N\phi_2(Nx) \leq N\phi_1(Nx) \Longrightarrow T(N)\phi_2 \leq T(N)\phi_1$ donc $T(N)$ est bien décroissante.
Notons de plus que $T(N)$ est continue, car pour $Y \in L(T(A))$ on a $Y = F_A(a), a \in A$,

$$\begin{aligned} T(N)^{-1}(Y) &= \{\phi \in T(A) \ / \ T(N)(\phi) \in Y = F_A(a)\} \\ &= \{\phi \in T(A) \ / \ T(N)(\phi)(a) = 1\} \\ &= \{\phi \in T(A) \ / \ N\phi(Na) = 1\} \\ &= \{\phi \in T(A) \ / \ \phi(Na) = 0\} \\ &= \{\phi \in T(A) \ / \ \phi \notin F_A(Na)\} \end{aligned}$$

$T(A) - F_A(Na)$ qui est un $\tau - of$ décroissant, donc $T(N)$ est bien continue.

Montrons que la famille $(h_\alpha)_{\alpha\in J^1}$ vérifie la condition (c) de la définition (3.1).

(i) $h_\alpha \leq \phi_\alpha$pour tout $\alpha \in J^{01}$, pour cela, soit $g \in T(A)$, $h_\alpha(g) = T(\Psi_\alpha)(g) = g \circ \Psi\alpha \leq g \circ \varphi_\alpha = T(\varphi_\alpha)(g) = \phi_\alpha(g)$;

d'où

$$h_\alpha(g) \leq \phi_\alpha(g)$$

pour tout $g \in T(A)$.

Soit $h_\alpha \leq \phi_\alpha$

(ii) $h_\alpha = T(N)\phi_{n\alpha}T(N)$,pour tout $\alpha \in J^{01}$;

Soit $g \in T(A)$, on a

$$\begin{aligned}
(T(N)\phi_{n\alpha}T(N))(g) &= T(N)(\phi_{n\alpha}(NgN)) \\
&= T(N)(T(\varphi_{n\alpha}(NgN)) \\
&= T(N)(NgN\varphi_\alpha) \\
&= NNgN\varphi_{n\alpha}N \\
&= g\Psi_\alpha \\
&= T(\Psi_\alpha) \\
&= h_\alpha.
\end{aligned}$$

(b) On sait que d'après la proposition (2.5.(b)) que $T(f)$ est une θ-application, il suffit donc de démontrer que le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc}
T(A') & \overset{T(f)}{\longrightarrow} & T(A) \\
T(N') \downarrow & & \downarrow T(N) \\
T(A') & \underset{T(f)}{\longrightarrow} & T(A)
\end{array}$$

est commutatif.

En effet $T(f)(T(N')(g)) = T(N')(g) \circ f = N'gN'f = N'gfN$.

$T(N)T(f) = T(N)(g \circ f) = NgfN = N'gfN$ (car pour tout $a \in A', g(f(Na)) \in \{0,1\}$ et $N'/\{0,1\} = N/\{0,1\}$.

Donc le diagramme précédent est commutatif et $T(f)$ est bien une $N\theta$-application.

Proposition 3.2

(a) Si $\gamma = (X, \tau, \leq, (\phi_\alpha)_{\alpha \in J^0}, (h_\alpha)_{\alpha \in J^1}, n, N)$ *est un espace de Łukasiewicz* $\theta-$ *valent ordonné involutif alors le treillis* $L(\gamma)$ *associé avec l'espace de Priestley* $(X, \tau, \leq)$ *et muni des familles d'applications* $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in J^0}, (\Psi_\alpha)_{\alpha \in J^1}$ *,données par:* $\varphi_\alpha(y) = \phi_\alpha^{-1}(y), \Psi_\alpha(y) = h_\alpha^{-1}(y)$, *est une algèbre de Moisil-Łukasiewicz* θ*-valente involutive.*

(b) Si $\gamma = (X, \tau, \leq, (\phi_\alpha)_{\alpha \in J^0}, (h_\alpha)_{\alpha \in J^1}, n, N)$ *et* $\gamma' = (X', \tau', \leq', (\phi'_\alpha)_{\alpha \in J^0}, (h'_\alpha)_{\alpha \in J^1}, n, N')$ *sont deux espaces de Łukasiewicz* $\theta-$ *valents ordonnées involutifs et* $f : X \longrightarrow X'$ *une* $N\theta-$ *application alors l'application* $L(f) : L(X') \longrightarrow L(X)$ *,(donnée dans le théorème (III.1.6.(d)) est un homomorphisme d'algèbre de Moisil-Łukasiewicz* $\theta-$ *valente involutive avec* $L(N) = CN$ *(où* C *est le complément).*

Preuve

(a) On sait que $L(\gamma)$ associé avec la famille $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in J^0}$ est une algèbre de Moisil-Łukasiewicz θ-valente (proposition 2.5), il reste à montrer qu'elle est involutive ,c'est-à-dire que $L(N)$ est une involution décroissante sur $L(\gamma)$,que $\Psi_\alpha \leq \varphi_\alpha$ pour tout $\alpha \in J^{01}$, et $\Psi_\alpha = L(N)\varphi_{n\alpha}L(N)$.

Soit $Y \in L(\gamma)$, $L(N)(Y) = C(NY) \in L(\gamma)$, donc $L(N)$ est bien définie.

. $(L(N)L(N))(Y) = L(N)(CNY) = CNCNY = Y$. ?

Soit

$$\begin{aligned} f \in CNCNY &\Leftrightarrow f \notin NCNY \\ &\Leftrightarrow Nf \notin CNY \\ &\Leftrightarrow Nf \in NY \Leftrightarrow f \in Y \end{aligned}$$

donc $L(N)$ est une involution.

Montrons qu'elle est décroissante.

Soit $Y_1 \subseteq Y_2 \Rightarrow L(N)Y_2 \subseteq L(N)Y_1$?

Soit

$$\begin{aligned} f \in L(N)Y_2 \quad &\Rightarrow f \in CNY_2 \Rightarrow f \notin NY_2 \Rightarrow Nf \notin Y_2 \\ &\Rightarrow Nf \notin Y_1 \text{ (puisque } Y_1 \subseteq Y_2) \\ &\Rightarrow f \notin NY_1 \Rightarrow f \in CNY_1 \Rightarrow f \in L(N)Y_1. \end{aligned}$$

Donc $L(N)$ est une involution décroissante.

Montrons que (i) $\Psi_\alpha \leq \varphi_\alpha$, pour tout $Y \in L(\gamma)$ supposons que $\Psi_\alpha(Y) \subset \varphi_\alpha(Y)$, c'est-à-dire que $h_\alpha^{-1}(Y) \subset \phi_\alpha^{-1}(Y)$, soit $g \in h_\alpha^{-1}(Y) \Rightarrow h_\alpha(g) \in Y \Leftrightarrow \phi_\alpha(g) \in Y$ (puisque Y est croissant et $h_\alpha \leq \phi_\alpha$) $\Rightarrow g \in \phi_\alpha^{-1}(Y)$ donc $h_\alpha^{-1}(Y) \subset \phi_\alpha^{-1}(Y)$.

(ii) $\Psi_\alpha = L(N)\varphi_{n\alpha}L(N)$,soit $h_\alpha^{-1}(Y) = (L(N)\phi_{n\alpha}^{-1}L(N))(Y)$, pour tout $Y \in L(\gamma)$;

Soit

$$\begin{aligned} g \in (L(N)\phi_{n\alpha}^{-1}L(N))(Y) \quad &\Leftrightarrow \quad g \notin N\phi_{n\alpha}^{-1}C(NY) \quad &&\Leftrightarrow \quad Ng \notin \phi_{n\alpha}^{-1}(C(NY)) \\ &\Leftrightarrow \quad \phi_{n\alpha}(Ng) \notin C(NY) \quad &&\Leftrightarrow \quad \phi_{n\alpha}(Ng) \in NY \\ &\Leftrightarrow \quad N\phi_{n\alpha}(Ng) \in Y \quad &&\Leftrightarrow \quad h_\alpha(g) \in Y \\ & && \Leftrightarrow \quad g \in h_\alpha^{-1}(Y). \end{aligned}$$

(b) On sait que $L(f) : L(\gamma') \longrightarrow L(\gamma)$ (proposition 2.5.(b)) est un homomorphisme d'algèbre de Moisil-Łukasiewicz $\theta-$ valente. Il reste à montrer que le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} L(\gamma') & \overset{L(f)}{\longrightarrow} & L(\gamma) \\ L(N') \downarrow & & \downarrow L(N) \\ L(\gamma') & \underset{L(f)}{\longrightarrow} & L(\gamma) \end{array}$$

est commutatif.

On a $(L(N)L(f))(Y) = (L(f)L(N'))(Y) \Leftrightarrow CNf^{-1}(Y) = f^{-1}(CN'Y)$.

Soit

$$\begin{aligned} g \in CNf^{-1}(Y) &\Leftrightarrow g \in Nf^{-1}(Y) \\ &\Leftrightarrow Ng \in f^{-1}(Y) \\ &\Leftrightarrow f(Ng) \notin Y \\ &\Leftrightarrow N'f(g) \notin Y \\ &\Leftrightarrow f(g) \notin N'Y \\ &\Leftrightarrow f(g) \in C(N'Y) \\ &\Leftrightarrow g \in f^{-1}(C(N'Y)) \end{aligned}$$

D'où

$$L(N) \circ L(f) = L(f) \circ L(N).$$

Proposition 3.3

(a) Pour toute algèbre de Moisil-Łukasiewicz $\theta-$ valente involutive l'isomorphisme de treillis (donné par le théorème III.1.6), $F_A : A \longrightarrow L(T(A))$, est un isomorphisme d'algèbre de Moisil-Łukasiewicz θ-valente involutive.

(b) Pour tout espace de Łukasiewicz $\theta-$ valent ordonné involutif

$\gamma = (X, \tau, \leq, (\phi_\alpha)_{\alpha \in J^0}, (h_\alpha)_{\alpha \in J^1}, n, N)$.

L'isomorphisme d'espace de Priestley (donné par le théorème III.1.6.(b)), par

$G_\gamma : \gamma \longrightarrow T(L(\gamma))$, *est un isomorphisme d'espace de Łukasiewicz θ-valent ordonné involutif.*

Preuve

(a) D'après le lemme 2.6. (a), F_A est un isomorphisme d'algèbre de *Moisil-Łukasiewicz* $\theta-$ valente. Il reste donc à montrer que le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{F_A}{\longrightarrow} & L(T(A)) \\ N \downarrow & & \downarrow L(T(N)) \\ T(A') & \underset{F_A}{\longrightarrow} & L(T(A)) \end{array}$$

est commutatif.

On a $(L(T(N)))(F_A)(a) = CT(N)(F_A(a)) = CNF_A(Na)$.

D'où

$$\begin{aligned} f \in L(T(N))(F_A)(a) &\Leftrightarrow f \in C(NF_A(Na)) \\ &\Leftrightarrow f \notin NF_A(Na) \\ &\Leftrightarrow Nf \notin F_A(Na)) \\ &\Leftrightarrow Nf(Na) = 0 \\ &\Leftrightarrow f(Na) = 1 \\ &\Leftrightarrow f \in F_A(Na). \end{aligned}$$

D'ou

$$L(T(N))(F_A)(a) = F_A(Na).$$

(b) D'après (le lemme 2.6 (b)), G_γ est un isomorphisme d'espace de £ukasiewicz θ-valent ordonné. Il reste donc à montrer qu'il est une $N\theta-$ application, (i.e. que le diagramme suivant):

$$\begin{array}{ccc} \gamma & \overset{G_\gamma}{\longrightarrow} & T(L(\gamma)) \\ N \downarrow & & \downarrow TL(N)) \\ \gamma & \underset{G_\gamma}{\longrightarrow} & T(L(\gamma)) \end{array}$$

est commutatif.

$T(L(N))G_\gamma(X)(Y) = L(N)G_\gamma(X)(L(N)(Y))$?

$$G_\gamma(X)(L(N)(Y) = G_\gamma(X)(CNY) = \begin{cases} 0 & \text{si } X \notin CNY. \\ 1 & \text{si } X \in CNY. \end{cases};$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } X \in NY. \\ 1 & \text{si } X \notin NY. \end{cases};$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } NX \in Y. \\ 1 & \text{si } NX \notin Y. \end{cases};$$

$$= \begin{cases} L(N)(0) & \text{si } NX \in Y. \\ L(N)(1) & \text{si } NX \notin Y. \end{cases};$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } NX \in Y. \\ 0 & \text{si } NX \notin Y. \end{cases} = G_\gamma(NX)(Y)$$

D'où $T(L(N)G_\gamma(X)) = G_\gamma(NX)$, C'est-à-dire que le diagramme précédent est commutatif.

Conclusion.

Dans ce travail nous avons proposé la représentation de certaines algèbres de *Moisil-Łukasiewicz* notamment le cas où la chaîne de départ est complète, ainsi qu'une démonstration de la condition de continuité (condition nécessaire et suffisante pour le plongement d'une algèbre de *Moisil-Łukasiewicz* $\theta-$valente involutive dans une algèbre de parties floues $\overline{\theta}-$valente avec $\overline{\theta} \geq \theta$).

Nous signalons par ailleurs que le problème de représentation a été connu sous le nom de (représentation des algèbres de *Łukasiewicz)*, et qui a été abordé par plusieurs chercheurs [0], [1], [4], [9], [10], [12], [13], [14]

L'idée de ce travail fait suite à deux articles (*J.Coulon* et *J.L. Coulon)* [9], (*Rudeanu)* [14].

Le premier [9]. Nous a proposé la question ouverte (nécessité de la condition de continuité CH II. 3).

Le second a fait introduire une nouvelle notion pour le plongement de l'algèbre de *Moisil-Łukasiewicz* $\theta-$valente involutive dans une structure floue involutive qui exige l'égalité entre les deux types d'ordres, (i.e $\overline{\theta} = \theta$) aux quells nous avons donné une réponse dans le cas où la chaîne de départ est complète. (Résultat également original).

Il est à signaler que le problème de représentation des algèbres de *Moisil-Łukasiewicz* au sens de (*Rudeanu)* demeure encore ouvert.

Références.

[0] A. Amroune **Représentation des algèbres de £ukasiewicz θ-valentes involutives par des structures floues** .BUSEFAL *(institut de recherche en informatique de Toulouse)43(1990) 5.11.*

[1] A. Amroune **Représentation des algèbres de £ukasiewicz θ-valentes involutives** *Thèse de doctorat Université de Claude Bernard Lyon I. Mars 1991.*

[2] A. Bruzllanne **La théorie des ensembles** *Paris 1969.*

[3] A. Filpiou **Representation of £ukasiewicz algebras by means of ordered Stone spaces.** *Discrete Mathematics 30 (1980) 111-116.*

[4] D. Ponasse Algèbres floues et algèbres de £ukasiewicz . *Revus Romaine de mathématique pures et appl .23(1978).103-110.*

[5] G. Birkkhoff **Lattice Theory.** *American Mathematical Society, Rhode Island, 1967.*

[6] Gr.C.Moisil **Ensemble flous et Logique à plusieurs valeurs.** *Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal, Mai 1973.*

[7] GR. C. Moisil **£ukasiewician algebras,** *Preprint, competing Center Univ of bucharest.1968 reprinted in /6[.pp.311-324.*

[8] H. Priestley **Representation of Distributive Lattices by means of ordered Stone spaces.** *Bull.London Math Soc. 2 (1970) 186-190.*

[9] J.Coulon et J .L.coulon **Un nouveau résultat concernant la représentation d'une algèbre de £ukasiewicz involutive dans l'algèbre des parties floues d'une structures floues involutive** .*Revus Romaine de Mathématiques pures et appl.38(1993),319-326* .

[10] J.Coulon et J .L. coulon **A-propos de la représentation des algèbres de £ukasiewicz et des algèbres booléennes floues.** *Revus Romaine de mathématique pures et appl. 5(1989). 403-412.*

[11] L. Zadeh **Fuzzy sets , Information and control** *8(1965), pp.338-353.*

[12] M. de Glas **Representation of Łukasiewicz many valued algebras.** *Journal of Mathematical Analysis and applications 114 (1986) 315-327.*

[13] M. de Glas **Representation of Łukasiewicz many valued algebras The Atomic case,Fuzzy sets and Systems.** *Journal of Mathematical Analysis and applications 14 (1984) 403-412.*

[14] S. Rudeanu **On Łukasiewicz-Moisil Algebras of Fuzzy sets.** *Studia Logica 52. 95 111, 1993.*

[15] V. Boicescu, A. Filipiou , G. Georgescu and S. Rudeanu **Łukasiewicz Moisil algebras** . *North holland, Elsevier , Amesterdam,*

New York 1991.

Centre Universitaire Med Boudiaf M'sila, Dép. de Maths. BP 166 Ichbilia 28003 M'sila Algérie. Fax: (213) 555 09 07 / 555 18 36.

ملخص الرسالة باللغة العربية

العنوان: جبور موايزيل- ليكازيفيتش

(les algèbres de *Moisil-Łukasiewicz*)

تتناول هذه الأطروحة موضوع هام جدا في المنطق المتعدد القيم لـ(يان ليكازيفيتش (*Łukasiewicz*)) تحت عنوان جبور موايزيل- ليكازيفيتش بحيث نتناول في الفصل الأول مفاهيم عامة حول نظرية المجموعات وعلاقات الترتيب وأنماط الترتيب للمجموعات المرتبة ، كذلك مفهوم الشبكات والشبكات المغلقة(أي التي تملك عنصر أصغر وعنصر أكبر) والتوزيعية بمعنى التي يكون فيها الوصل توزيعي على الفصل أو العكس .

أما في الفصل الثاني الذي هو أكثر أهمية من سابقه نظرا للمفاهيم والنتائج التي يحملها حول هذا الموضوع . حيث نتناول فيه نظرية التمثيلات الجبرية لجبر موايزيل-ليكازيفيتش بجبر غامض(Algèbre floue) بمفهوم(لطفي أكبر زادة) .

وركزنا في دراستنا في إقامة تمثيل بحيث تكون فيه سلسلة (chaine) جبر موايزيل-ليكازيفيتش J من نفس نمط ترتيب سلسلة الجبر الغامض بمفهوم زادة? .

في هذا الفصل كذلك قمنا ببرهنة لزوم شرط الاستمرار في جبر ليكازيفيتش مع النفي (negation) بعدما فرضنا أن تمثيله بجبر غامض موجود .

هذا الشرط الأخير الذي كان عبارة عن مشكل مطروح من طرف الباحثين الفرنسيين (J.L.Coulon et J.Coulon) في بحث تحت عنوان :

Un nouveau résultat concernant la représentation d'une algèbre de Łukasiewicz involutive dans l'algèbre des parties d'une structure floues involutive .Revus Romaine de Mathématique pures et appl. 38 (1993).

وأخيرا أنهينا هذه الأطروحة بفصل ثالث يحمل التمثيلات التبولوجية لجبر ليكازيفيتش مع النفي وملخص لأهم ما جاء في هذه الرسالة .