

UNIVERSITÉ DE M'SILA
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Appliquées et Fondamentales

Par

Par:AZOUZ Ibtissam

THÈME

Etude sur la Décomposition Polaire
des Opérateurs

Dirigé par :

MOSTEFA NADIR

Promotion: 2012/2013

Remerciements

Louange à notre seigneur "**ALLAH**" qui nous a dotés de la merveilleuse faculté de raisonnement. Louange à notre créateur qui nous incités à acquérir le savoir. C'est à lui que nous adressons toute notre gratitude en premier lieu.

Je tiens à remercier mon promoteur Mr le professeur **Mostefa Nadir** pour la confiance qu'il m'a témoignée en me proposant ce sujet, ses encouragements et sa patience. Les discussions scientifiques qu'il a su générer, ses remarques et ses suggestions m'ont permis de finaliser ce modeste travail. Je souhaite lui transmettre ma reconnaissance et ma plus profonde gratitude.

Je remercie aussi tous les membres du Jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait, en acceptant de juger ce modeste travail.

Je ne peux pas clôturer mes remerciements sans se retourner vers les êtres qui me sont les plus chers ; ma famille qui ont eu un rôle essentiel et continu dans ma réussite.

Résumé

L'étude de la décomposition polaire des opérateurs a la même forme d'un nombre complexe, cette similaire étude se produit pour les opérateurs inversibles dans un espace de Hilbert, mais cette fois les facteurs sont un opérateur unitaire et un opérateur positif, cette factorisation explique l'analogie entre les opérateurs dans un espace de Hilbert et les nombres complexes.

Mots clés : opérateurs, Décomposition polaire, Opérateurs positifs.

Abstract

The study of the polar decomposition of the operators is the same form of the complex number, this similar study occurs for invertible operators on a Hilbert space ,but this time the factor are a unitary and a positive operator, this illustrates the analogy between operators on Hilbert space and the complex numbers.

Key words : Operators, Polar decomposition, Positive operators.

Notations générales

$A(H)$: l'ensemble des opérateurs auto-adjoints sur l'espace de Hilbert H .

H : Espace de Hilbert.

I : l'opérateur identité de E dans F .

$\ker(T) = \{x \in E, Tx = 0\}$

$\mathcal{L}_r(H)$: l'ensemble d'opérateurs réguliers sur H .

$O(E)$: est l'ensemble des automorphismes orthogonaux .

$Ran(T) = \{Tx, x \in E\}$

$S^+(E)$: l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs .

$S^{++}(E)$: l'ensemble des endomorphismes autoadjoints définis positifs .

$S^+(n)$: l'ensemble des matrices symétriques positives.

$S^{++}(n)$: l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

$SO(E) = \{u \in O(E), \det u = 1\}$.

$SO(n) = \{M \in O_n(\mathbb{R}), \det M = 1\}$.

$U(H)$: l'ensemble des opérateurs unitaires sur l'espace de Hilbert.

Table des matières

Introduction	1
1 Rappels et notions de base	2
1.1 Les espaces de Hilbert	2
1.1.1 Espace normé	2
1.1.2 Espace euclidien	2
1.2 Opérateurs linéaires continus	7
1.2.1 Continuité des opérateurs linéaires	8
1.2.2 Les opérateurs bornés	8
2 Opérateurs linéaires sur un espace de Hilbert	10
2.1 Opérateur adjoint	10
2.2 Opérateur auto-adjoint	14
2.3 Opérateur auto-adjoint positif	17
2.4 Inversibilité des opérateurs	22
2.5 Opérateurs unitaires	26
3 Sur la décomposition polaire d'un opérateur inversible	32
3.1 La décomposition polaire d'un opérateur inversible	32
3.2 La décomposition polaire des matrices	35
3.2.1 Décomposition polaire d'une matrice réelle	37
3.2.2 Décomposition polaire d'une matrice complexe	38
3.3 Application à la résolution des systèmes d'équations linéaires	38

Conclusion générale	40
Bibliographie	42

Introduction

Dans les mathématiques, particulièrement dans l'algèbre linéaire et l'analyse fonctionnelle, la décomposition polaire d'une matrice ou d'un opérateur linéaire est une factorisation analogue à la décomposition polaire d'un nombre complexe non nul, elle occupe une place particulière, puisque la résolution de plusieurs problèmes dans différents domaines de l'analyse fonctionnelle soutient cette décomposition et aussi c'est le titre de ce modeste travail .

Les travaux dans ce mémoire sont organisés en trois chapitres, le premier chapitre est titré par " **Rappels et notions de base** ", il contient des rappels sur les espaces de Hilbert avec ses propriétés élémentaires et des définitions et propriétés de base des opérateurs linéaires sur un espace normé.

Le second chapitre "**Opérateurs sur un espace de Hilbert**", dans ce chapitre nous étudions plusieurs classes d'opérateurs, nous commençons par la notion d'un opérateur adjoint, les opérateurs autoadjoints et autoadjoints positifs, les opérateurs inverses et les opérateurs unitaires, nous donnons des caractérisations et propriétés sur ces classes d'opérateurs.

Le troisième chapitre "**sur la décomposition polaire d'un opérateur inversible**", dans ce chapitre nous introduisons la notion de décomposition polaire d'un opérateur inversible et la décomposition polaire d'une matrice dans les deux cas réel (un produit d'une matrice orthogonal et d'une matrice symétrique définie positive) et complexe (un produit d'une matrice unitaire et d'une matrice hermitienne) ,le but de cette décomposition est d'appliquer dans la résolution des systèmes d'équations linéaires en utilisant la décomposition polaire et la factorisation de Cholesky.

Chapitre 1

Rappels et notions de base

Dans ce chapitre, nous introduisons l'espace de Hilbert avec ses propriétés élémentaires , nous caractérisons les normes qui sont déduits d'un produit scalaire , puis nous donnons les définitions et propriétés de base des opérateurs linéaires sur un espace normé . Tout long du chapitre nous travaillons sur un corps $\mathbb{k}$, qui sera soit $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Les espaces de Hilbert

1.1.1 Espace normé

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k}$, E est dit espace vectoriel normé s'il est muni d'une fonction $\|\cdot\|$ définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que $\forall x, y \in E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{k}$

$$\begin{aligned} \cdot \|x\| &= 0 \implies x = 0 \\ \cdot \|\lambda x\| &= |\lambda| \|x\| \\ \cdot \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

1.1.2 Espace euclidien

Définition 1.1.1 (*Produit scalaire*)

on appelle produit scalaire sur un espace vectoriel E (réel ou complexe), une fonction $\langle x, y \rangle$ définie sur $E \times E$ dans $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, possédant les propriétés suivantes

$$\begin{aligned}
& \cdot \langle x, y \rangle \geq 0 \\
& \cdot \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \\
& \cdot \langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle \\
& \cdot \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \\
& \cdot \langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0
\end{aligned}$$

Remarque 1.1.1 .

La définition du produit scalaire nous donne les relations suivantes

$$\begin{aligned}
& \cdot \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle . \\
& \cdot \langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle \quad .
\end{aligned}$$

Définition 1.1.2 .

un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est dit espace euclidien ou préhilbertien, on peut lui introduire une norme définie par

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Théorème 1.1.1 *L'inégalité de Cauchy-Schwartz (Cauchy-Bouniakovsky)*

Soit E un espace vectoriel et $x, y \in E$ on a

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| .$$

Remarque 1.1.2 .

L'inégalité de Cauchy-Schwartz se réduit à une égalité si et seulement si, les deux vecteurs sont linéairement dépendants, c'est à dire $y = \lambda x$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

Définition 1.1.3 (*Orthogonalité*)

On dit que deux vecteurs x et y d'un espace euclidien E sont orthogonaux si leur produit scalaire $\langle x, y \rangle$ est nul, c'est à dire

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

Propriétés

· Si un vecteur x de E est orthogonal à chaque vecteur d'un ensemble F , on dit que x est orthogonal à l'ensemble F et on écrit

$$\langle x, z \rangle = 0 \quad \forall z \in F .$$

· Si les vecteurs de deux ensembles F_1 et F_2 sont orthogonaux deux à deux, on dit que ces ensembles sont orthogonaux et on écrit

$$\langle v, w \rangle = 0 \quad \forall v \in F_1 \text{ et } w \in F_2 .$$

Définition 1.1.4 (Orthogonal d'un ensemble)

L'orthogonal d'un ensemble non vide A de E est un sous-ensemble de E noté $A^\perp$, donnée par

$$A^\perp = \{x \in E, \forall y \in A, \text{ on a } \langle x, y \rangle = 0\} .$$

Remarque 1.1.3 .

L'ensemble orthogonal $A^\perp$ d'un ensemble non vide A de E est un sous-espace fermé de E .

Théorème 1.1.2 .

Un ensemble non vide A de E est dit dense si et seulement si $A^\perp = \{0\}$, de plus si A est un sous-espace fermé, alors E se décompose en somme directe

$$E = A \oplus A^\perp .$$

Théorème 1.1.3 (la projection orthogonale)

Soit H un espace de Hilbert, $A \subset H$ un ensemble non vide convexe et fermé et $x_0 \in H$. Alors existe un et seulement un $y_0 \in A$, tel que

$$\|x_0 - y_0\| = \inf_{y \in A} \{\|x_0 - y\|\} .$$

Corollaire 1.1.1 .

Soient H un espace de Hilbert et H_1 un sous-espace fermé de H .

Un élément $y_0 \in H_1$, satisfait à l'inégalité

$$\|x - y_0\| \leq \|x - y\| \quad \text{pour tout } y \in H_1.$$

si et seulement si $x - y_0 \perp H_1^\perp$.

Théorème 1.1.4 [10]

Soient H_1 un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert H , et soit $x \in H$. Alors il existe un et seulement un $y_0 \in H_1$, tel que, $x - y_0 \perp H_1$ et $\|x - y_0\| \leq \|x - y\|$ pour tout $y \in H_1$.

On appelle cet élément la projection orthogonale de x sur H_1 et l'on note

$$y_0 = P(x).$$

Théorème 1.1.5 [17]

Soient H un espace de Hilbert et H_1 un sous-espace fermé de H et P la projection orthogonale de H sur H_1 , alors, pour tout $x, y \in H$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

1) $P(\alpha x + \beta y) = \alpha P(x) + \beta P(y)$

2) $P \circ P = P^2 = P.$

3) $\|P(x)\| \leq \|x\|$

Définition 1.1.5 (*système complet (total)*)

Un système $\{\varphi_i\}$ est dit complet (ou total), si le plus petit sous-espace fermé qui le contient coïncide avec l'espace E tout entier. Autrement dit, l'espace E est engendré par le système $\{\varphi_i\}$, ou encore, l'espace des combinaisons linéaires finies des éléments de $\{\varphi_i\}$ est dense dans E . C'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \forall f \in E, \exists n \in \mathbb{N}, \left\| f - \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i \right\| < \varepsilon, \text{ avec } \alpha_i \in \mathbb{K}.$$

Définition 1.1.6 (*Base Hilbertienne*)

Un système orthogonal $\{\varphi_i\}$ est dit une base orthonormée s'il est un système complet, de plus si la norme de chaque élément est égale à l'unité, le système $\{\varphi_i\}$ est dit base orthonormée ou base Hilbertienne.

Théorème 1.1.6 (*Inégalité de Bessel*)

Soient E un espace Euclidien, $\{\varphi_n\}$ un système orthonormé d'éléments de E , alors pour tout vecteur f de E , on a la relation

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

Remarque 1.1.4 .

La somme des carrés des projections d'un vecteur f sur un système orthonormé est toujours inférieur ou égale au carré de la longueur de ce vecteur f .

Définition 1.1.7 (*Égalité de Parseval*)

Un système orthonormé $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ est dit fermé, si pour tout vecteur $f \in E$, on a l'égalité

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2 = \|f\|^2.$$

cette égalité est dite égalité de Parseval .

Remarque 1.1.5 .

Soit E un espace euclidien séparable alors, tout système $\{\varphi_n\}$ orthonormé fermé est complet et vice versa .

Définition 1.1.8 (*Espace de Hilbert*)

On appelle espace de Hilbert tout espace euclidien H complet au sens de la métrique associé à sa norme

$$\rho(f, g) = \|f - g\|.$$

on peut aussi dire un espace de Hilbert est un espace complet par rapport à la norme induite par un produit scalaire .

Théorème 1.1.7 (*Décomposition orthogonale*)

Si H_1 est un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert, alors tout $x \in H$ se décompose d'une manière unique ;

$$x = y + z \quad , \text{ où } y \in H_1 \text{ et } z \in H_1^\perp.$$

Théorème 1.1.8 (*de représentation de Riesz*) [9]

Soit F une forme linéaire continue sur un espace de Hilbert, alors il existe un unique vecteur $f \in H$ tel que pour tout $\varphi \in H$

$$F(\varphi) = \langle \varphi, f \rangle.$$

1.2 Opérateurs linéaires continus

Définition 1.2.1 (*la linéarité des opérateurs*)

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur T défini sur E dans F est dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in E, \text{ on a } T(\varphi_1 + \varphi_2) = T(\varphi_1) + T(\varphi_2) \quad (\text{condition additive})$$

$$\forall \varphi \in E, \lambda \in \mathbb{k} = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \text{ on a } T(\lambda\varphi) = \lambda T(\varphi) \quad (\text{condition homogène}).$$

1.2.1 Continuité des opérateurs linéaires

Définition 1.2.2 [15].

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire T défini sur un sous-ensemble $G \subset E$ dans F est dit continu au point x_0 de G si on a la propriété suivante .

Pour tout suite x_n de G converge vers x_0 , la suite $T(x_n) = T(x_0)$ c'est à dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = T(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = T(x_0) .$$

Remarque 1.2.1 .

L'opérateur linéaire T est dit continu sur G , s'il est continu en chaque point de l'ensemble G .

Théorème 1.2.1 .

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire T défini sur un sous-ensemble $G \subset E$ dans F est dit continu partout sur G , s'il est continu en point x_0 de G .

Exemple 1.2.1 .

Si H est de dimension finie n , tout application linéaire de H dans H est continu.

1.2.2 Les opérateurs bornés

Définition 1.2.3 .

Un opérateur linéaire T défini sur E dans F est dit borné s'il existe une constante positive $C > 0$, telle que

$$\|T(x)\|_F \leq C \|x\|_E , \forall x \in E. \tag{1.2.1}$$

Proposition 1.2.1 .

La plus petite constante C vérifiant la relation (1.2.1) est appelée norme de T notée $\|T\|$ donnée par

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|_F = \sup_{x \neq 0, \|x\| \leq 1} \|T(x)\|_F .$$

Théorème 1.2.2 [15]

Soient E et F deux espaces normés. L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ de tous les opérateurs linéaires continus sur E dans F est un sous-espace vectoriel de $L(E, F)$. L'ensemble de tous les opérateurs linéaires sur E dans F , de plus, $\mathcal{L}(E, F)$ muni de la norme $\|T\|$ est un sous-espace normé.

Théorème 1.2.3 [12]

Un opérateur linéaire T est continu, si et seulement si, il est borné .

Chapitre 2

Opérateurs linéaires sur un espace de Hilbert

Dans ce chapitre, nous étudions plusieurs classes d'opérateurs, nous commençons d'abord avec la notion d'adjoint, celles-ci sont à la base de ce chapitre et nous amènent aux opérateurs auto-adjoints. De plus, il est possible d'introduire les classes positifs et inverses, nous terminons ce chapitre par les classes unitaires.

2.1 Opérateur adjoint

on commence avec la notion d'adjoint, plusieurs des classes particulière d'opérateurs bornés seront définies à l'aide de cette notion.

Proposition 2.1.1 .

Soient E et F des espaces de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors il existe un unique

$T^* \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que, pour tout $x \in E$

On ait

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$$

on a de plus

$$\|T^*\| = \|T\| .$$

Démonstration. .

pour tout $y \in F$ l'application $x \rightarrow \langle T(x), y \rangle$ est linéaire et continue (de norme inférieure à $\|T\| \|y\|$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz). D'Après le théorème de représentation de Riesz, il existe donc un unique élément noté $T^*(y)$ tel que

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$$

On vérifie facilement que pour tous $y, z \in F$ et λ un scalaire, $T^*(y) + \lambda T^*(z)$ vérifie la propriété qui définit $T^*(y + \lambda z)$. Par unicité

$$T^*(y) + \lambda T^*(z) = T^*(y + \lambda z),$$

Ce qui prouve que T^* est linéaire .

Par définition de la norme opérateur ,

$$\|T^*\| = \sup_{\|y\| \leq 1} \|T^*(y)\|$$

corollaire d'Hahn-Banach, $\|T^*(y)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x, T^*(y) \rangle|$. De plus, comme $\langle x, T^*(y) \rangle = \langle T(x), y \rangle$,

on obtient

$$\|T^*\| = \sup_{\|y\| \leq 1, \|x\| \leq 1} |\langle T(x), y \rangle|$$

En appliquant de nouveau un corollaire d'Hahn-Banach et la définition de la norme opérateur de T on obtient

$$\sup_{\|y\| \leq 1, \|x\| \leq 1} |\langle T(x), y \rangle| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| = \|T\| ,$$

ce qui prouve que T^* est aussi continue. ■

Définition 2.1.1 .

Soient E et F des espaces de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. L'unique application linéaire $T^* \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que pour tous $x \in E$ et $y \in F$ on ait

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$$

est appelée *adjointe de T* .

Regroupons dans la proposition suivante quelque propriétés des adjoints.

Proposition 2.1.2 .

Soient E et F des espaces de Hilbert. L'application $T \mapsto T^*$ est antilinéaire et isométriques de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{L}(F, E)$. De plus, $(T^*)^* = T$

et $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

Enfin

$$(TS)^* = S^*T^*.$$

Preuve. .

Par définition du produit scalaire et de l'adjoint ,pour tous $x \in E, y \in F$,

$T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} \langle x, (T_1 + \lambda T_2)^*(y) \rangle &= \langle (T_1 + \lambda T_2)(x), y \rangle \\ &= \langle (T_1)(x), y \rangle + \lambda \langle (T_2)(x), y \rangle \\ &= \langle x, T_1^*(y) \rangle + \langle x, \bar{\lambda} T_2^*(y) \rangle \\ &= \langle x, (T_1^* + \bar{\lambda} T_2^*)(y) \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi $T \mapsto T^*$ est antilinéaire .Elle est isométrique d'après la proposition (2.1.1)

Montrons que $(T^*)^* = T$. Pour cela on montre que pour tous $x \in E, y \in F$, on a $\langle T(x), y \rangle = \langle (T^*)^*(x), y \rangle$. On a

$$\begin{aligned} \langle T(x), y \rangle &= \langle x, T^*(y) \rangle \\ &= \overline{\langle T^*(y), x \rangle} \\ &= \overline{\langle y, (T^*)^*(x) \rangle} \\ &= \langle (T^*)^*(x), y \rangle. \end{aligned}$$

Montrons que $\|T^*T\| = \|T\|^2$. Tout d'abord on rappelle que la norme opérateur est une norme d'algèbre et donc, en particulier

$\|T^*T\| \leq \|T^*\| \|T\| = \|T\|^2$. D'autre part, en utilisant une fois de plus un corollaire d'Hahn-Banach et la définition de la norme opérateur, on obtient

$$\begin{aligned}
 \|T^*T\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|T^*T(x)\| \\
 &= \sup_{\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1} |\langle T^*T(x), y \rangle| \\
 &\geq \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle T^*T(x), x \rangle| \\
 &= \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle T^*(x), T(x) \rangle| \\
 &= \|T\|^2.
 \end{aligned}$$

On a donc l'égalité $\|T^*T\| = \|T\|^2$. Enfin, pour vérifier que $(TS)^* = S^*T^*$, il suffit de montrer que pour tous $x \in E$ et $y \in F$, on a $\langle (TS)^*(x), y \rangle = \langle S^*T^*(x), y \rangle$. On a par définition de l'adjoint,

$$\begin{aligned}
 \langle (TS)^*(x), y \rangle &= \langle x, (TS)(y) \rangle \\
 &= \langle T^*(x), S(y) \rangle \\
 &= \langle S^*T^*(x), y \rangle.
 \end{aligned}$$

Comme ceci est vrai pour tous vecteurs x, y , on a l'égalité $(TS)^* = S^*T^*$. ■

Remarque 2.1.1 .

Pour tout $T \in \mathcal{L}(H)$, on a les relations

$$\ker(T)^\perp = \overline{\text{Ran}(T^*)} \quad \text{et} \quad \ker(T^*) = \text{Ran}(T)^\perp$$

Preuve. on a $y \in \text{Ran}(T^*)^\perp \iff (\langle y, T^*(x) \rangle = 0 \forall x \in H)$
 $\iff (\langle T(y), x \rangle = 0, \forall x \in H)$
 $\iff Ty = 0.$

la deuxième relation suit de la première en remarquant que $(T^*)^* = T$. ■

Exemple d'opérateurs et calcul de leur adjoint

Considérons l'espace de Hilbert $\mathbb{C}^n$ et $e_1, e_2, \dots, e_n$ une base orthonormale pour $\mathbb{C}^n$. Soit

$$x \in \mathbb{C}^n, x = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k .$$

et soit $A = (\alpha_{ij})$ une matrice d'ordre n sur $\mathbb{C}$.Alors l'application $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, donnée par

$$Tx = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{kj} \xi_j \right) e_k ,$$

est un opérateur linéaire continu .Nous avons

$$\begin{aligned} \langle T(x), y \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{kj} \xi_j e_k, \sum_{i=1}^n \eta_i e_i \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{kj} \xi_j \overline{\eta_k} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{\alpha_{kj}} \overline{\xi_j} \eta_k \\ &= \overline{\langle y, T(x) \rangle} \\ &= \overline{\langle T^*(y), x \rangle} \\ &= \langle x, T^*(y) \rangle . \end{aligned}$$

d'où

$$T^* y = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{\alpha_{kj}} \eta_k e_j ,$$

et la matrice correspondante à T^* dans cette base est $(\overline{A})^*$, i.e. la matrice complexe conjuguée et transposée de A .

2.2 Opérateur auto-adjoint

Définition 2.2.1 [9]

L'opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est dit auto-adjoint si $T^* = T$, i.e. T est auto-adjoint si et seulement si

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle .$$

pour tout $x, y \in H$.

Théorème 2.2.1 .

Si T est un opérateur auto-adjoint alors

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle T(x), x \rangle|.$$

Démonstration. .

on pose

$$\alpha_T = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle T(x), x \rangle|.$$

D'Après l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$|\langle T(x), x \rangle| \leq \|T(x)\| \|x\| \leq \|T\| \|x\|^2 \implies \alpha_T \leq \|T\| \quad (2.2.1)$$

Pour tout x , ($\|x\| \leq 1$), on a

$$|\langle T(x), x \rangle| \leq \alpha_T \implies \left| \left\langle T \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \right| \leq \alpha_T, x \neq 0 \implies |\langle T(x), x \rangle| \leq \alpha_T \|x\|^2 \quad (2.2.2)$$

En d'autre part , pour tout $x, y \in H$ on a

$$\begin{aligned} \langle T(x+y), x+y \rangle &= \langle Tx, x \rangle + \langle Tx, y \rangle + \overline{\langle Tx, y \rangle} + \langle Ty, y \rangle \\ &= \langle Tx, x \rangle + 2 \operatorname{Re} \langle Tx, y \rangle + \langle Ty, y \rangle \end{aligned}$$

De la même méthode on trouve

$$\langle T(x-y), x-y \rangle = \langle Tx, x \rangle - 2 \operatorname{Re} \langle Tx, y \rangle + \langle Ty, y \rangle$$

On a donc

$$4 \operatorname{Re} \langle Tx, y \rangle = \langle T(x+y), x+y \rangle - \langle T(x-y), x-y \rangle$$

D'Après (2.2.2) et la loi de parallélogramme on a :

$$\begin{aligned} 4 |\operatorname{Re} \langle Tx, y \rangle| &\leq |\langle T(x+y), x+y \rangle| + |\langle T(x-y), x-y \rangle| \\ &\leq \alpha_T (\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) \\ &\leq 2\alpha_T (\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{aligned}$$

et donc pour tout $x, y \in H$ on a

$$|\operatorname{Re} \langle Tx, x \rangle| \leq \frac{1}{2} \alpha_T (\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Si $y = \frac{\|x\|}{\|Tx\|} Tx$ / $Tx \neq 0$ on a

$$\|x\| = \|y\|$$

et

$$\operatorname{Re} \left\langle Tx, \frac{\|x\|}{\|Tx\|} Tx \right\rangle = \frac{\|x\|}{\|Tx\|} \langle Tx, Tx \rangle = \|Tx\| \leq \alpha_T (\|x\|) \quad (2.2.3)$$

D'après (2.2.1) et (2.2.3), on trouve $\|T\| = \alpha_T$. ■

Corollaire 2.2.1 .

Si $T \in A(H)$ alors :

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle T(x), x \rangle| \\ &= \sup_{\|x\|=1} |\langle T(x), x \rangle| \\ &= \max(|m_T|, |M_T|) \end{aligned}$$

telle que

$$m_T = \inf \{ \langle T(x), x \rangle, \|x\| = 1 \} \text{ et } M_T = \sup \{ \langle T(x), x \rangle, \|x\| = 1 \}$$

Propriétés : Si $T, G \in A(H)$, alors on a

1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a, $\alpha T + \beta G \in A(H)$.
2. Si $TG = GT$, alors $TG \in A(H)$.
3. $\forall x \in H$, $\langle T(x), x \rangle \in \mathbb{R}$.
4. $T \circ T^*, T^* \circ T \in A(H)$, pour tout $T \in A(H)$.
5. Si $T \in A(H)$ alors $T^n \in A(H)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. ($T^0 = I$)

2.3 Opérateur auto-adjoint positif

Définition 2.3.1 [10].

On dit qu'un opérateur T sur un Hilbert H est positif noté $T \geq 0$ si

$$\langle T(x), x \rangle \geq 0$$

pour tout $x \in H$.

Définition 2.3.2 [11]

Soient T_1, T_2 deux opérateurs positifs. On dit que T_1 est plus grand que T_2 et on écrit $T_1 \geq T_2$, si $T_1 - T_2 \geq 0$. on dit que $T \in A(H)$ est négatif noté par $T \leq 0$, si

$$-T \geq 0.$$

Remarque 2.3.1 .

Remarquons que l'ensemble des opérateurs positifs sur H forment un cône convexe, i.e. si T_1 et T_2 sont deux opérateurs positifs et $\alpha, \beta \geq 0$ alors

$$\alpha T_1 + \beta T_2 \geq 0.$$

Exemple 2.3.1 .

L'opérateur identité $I \in L(H)$ et l'opérateur nul $0 \in L(H)$ sont positifs.

Remarque 2.3.2 .

Pour tout opérateur linéaire $T \in \mathcal{L}(H)$ on a

$$T^* \circ T \geq 0$$

et

$$T \circ T^* \geq 0.$$

Preuve. .

Pour la preuve voir [10] ■

Théorème 2.3.1 .

Soit $T \in A(H)$. Soient $m_T = \inf \{ \langle T(x), x \rangle ; \|x\| = 1 \}$ et

$M_T = \sup \{ \langle T(x), x \rangle ; \|x\| = 1 \}$ alors

- a) Si $T \geq 0$, on a $m_T I \leq T \leq M_T I$.
- b) On a $T \geq 0$ si et seulement si $m_T \geq 0$.

Démonstration. .

- a) Nous avons pour tout $x \in H$,

$$\begin{aligned} \langle T(x), x \rangle &\leq \|T\| \|x\|^2 \\ &= \|T\| \langle x, x \rangle \\ &= M_T \langle Ix, x \rangle. \end{aligned}$$

et d'autre part, pour tout $x \in H \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} \langle T(x), x \rangle &= \|x\|^2 \left\langle T \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \\ &\geq \|x\|^2 m_T = m_T \langle Ix, x \rangle. \end{aligned}$$

- b) Si $T \geq 0$ alors évidemment $m_T \geq 0$.

Soit maintenant $m_T \geq 0$, alors pour tout $x \in H \setminus \{0\}$, on a

$$\left\langle T \left(\frac{x}{\|x\|} \right), \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \geq 0,$$

d'où $\langle T(x), x \rangle \geq 0$ et $T \geq 0$. ■

Remarque 2.3.3 .

la série entière en 0 de $\sqrt{1-z}$ est absolument convergente sur le disque $|z| \leq 1$.

Théorème 2.3.2 (la racine carrée positive d'un opérateur positif)

Tout opérateur positif T admet un unique opérateur positif S tel que $S^2 = T$. De plus, S commute avec tout opérateur qui commute avec T . On appelle S la racine carrée de T et on la note par

$$S = \sqrt{T}.$$

Démonstration.

Unicité:

soit $S_1, S_2 \geq 0$ tel que $S_1^2 = S_2^2 = T$ alors pour $i = 1, 2$

$$S_i T = S_i^3 = T S_i$$

Un calcul direct donne

$$0 = (S_1^2 - S_2^2)(S_1 - S_2) = \underbrace{(S_1 - S_2)S_1(S_1 - S_2)}_{(1) \geq 0} + \underbrace{(S_1 - S_2)S_2(S_1 - S_2)}_{(2) \geq 0}.$$

On en déduit alors que $(1) - (2) = (S_1 - S_2)^3 = 0$.

En particulier, on a

$$0 = \|(S_1 - S_2)^4\| = \|(S_1 - S_2)^2\|^2 = \|S_1 - S_2\|^4.$$

Existence :

Il suffit de la montrer pour $T \geq 0, \|T\| = 1$. Dans ce cas, on a

$$I - T \geq 0$$

et

$$\|I - T\| = \sup_{\|x\|=1} \langle x, (I - T)x \rangle \leq 1.$$

la série $S = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (I - T)^k$ est donc absolument convergente grâce à la remarque (2.3.3) avec

$$\sqrt{1 - z} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \text{ et } c_k \leq 0 \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*. \text{ On vérifie que}$$

$$S = I + \sum_{k=1}^{\infty} c_k (I - T)^k \geq I + \sum_{k=1}^{\infty} c_k I \geq 0$$

Enfin, on a

$$S^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k+k'=n} c_k c_{k'} \right) (I - T)^n$$

comme

$$\sum_{k+k'=n} c_k c_{k'} = 0 \text{ pour tout } n \geq 2, \text{ on en conclut que}$$

$$S^2 = T.$$

■

Définition 2.3.3 [14]

Pour tout $T \in \mathcal{L}(H)$, on note par

$$|T| = \sqrt{TT^*}.$$

Théorème 2.3.3 .

Si $T_1, T_2 \geq 0$ et $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$, alors

$$T_1 \circ T_2 \geq 0$$

Preuve. .

Pour la preuve voir [10] ■

Théorème 2.3.4 (inégalité de Cauchy-Schwartz généralisée)

Soit $T \in A(H)$ et $T \geq 0$, alors, pour tout $x, y \in H$ on a

$$|\langle Tx, y \rangle| \leq \langle Tx, x \rangle^{\frac{1}{2}} \langle Ty, y \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve. .

Pour la preuve voir [10] ■

Remarque 2.3.4 .

Soient $T_1, T_2 \in A(H)$, $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$ et $T_2 \geq 0$, alors

$$T_1^2 \circ T_2 \geq 0.$$

Preuve. .

En effet

$$T_1^2 \circ T_2 = T_1 \circ (T_1 \circ T_2) = T_2 \circ T_1^2 \text{ et de}$$

$T_1^2, T_2 \in A(H)$, on a

$$T_1^2 \circ T_2 \in A(H).$$

parce que $T_2 \geq 0$, pour tout $x \in H$, on a

$$\begin{aligned} \langle T_1^2 \circ T_2(x), x \rangle &= \langle T_1 \circ T_2(x), T_1 x \rangle \\ &= \langle T_2(T_1 x), T_1 x \rangle \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Donc $T_1^2 \circ T_2 \geq 0$. ■

Remarque 2.3.5 .

Si $T \geq 0$ et $I - T \geq 0$, alors

$$I \geq T - T^2 \geq 0.$$

Preuve. .

Pour la preuve voir [10] ■

Théorème 2.3.5 [10]

Soit H un espace de Hilbert et $T \in A(H)$ un opérateur positif. Alors on a pour tout $x \in H$.

$$\|Tx\|^2 \leq \|T\| \langle Tx, x \rangle .$$

Théorème 2.3.6 [10]

Soit $\{T_n, T_n \geq 0; n \in \mathbb{N}\}$ une suite d'opérateurs monotone décroissante sur un espace de Hilbert H , c'est à dire, nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_n \in A(H), T_n \geq 0 \text{ et } T_{n+1} \leq T_n$$

Alors il existe $T \geq 0$, tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n x = Tx \quad \text{pour tout } x \in H.$$

Théorème 2.3.7 [10]

Soient $T, S \in A(H)$ et $TS = ST$, alors $T \geq 0$ et $S \geq 0$ implique que

$$TS \geq 0.$$

2.4 Inversibilité des opérateurs

Définition 2.4.1 [8].

On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est inversible dans $\mathcal{L}(H)$ s'il existe un opérateur $T^{-1} \in A(H)$ tel que

$$T T^{-1} = I = T^{-1} T.$$

Définition 2.4.2 [8].

Si T est inversible, l'opérateur T^{-1} est unique et est appelé *inverse de T* .

Remarque 2.4.1 .

On a alors la relation caractéristique suivante

$$g = Tf \implies f = T^{-1}g$$

De plus, il vient

$$\|T^{-1}\|^{-1} = \inf_{\|f\|=1} \|Tf\|,$$

Car

$$\|T^{-1}\| = \sup_{g \neq 0} \frac{\|T^{-1}g\|}{\|g\|} = \sup_{f \neq 0} \frac{\|f\|}{\|Tf\|} = \sup_{\|f\|=1} \frac{1}{\|Tf\|} = \frac{1}{\inf_{\|f\|=1} \|Tf\|}.$$

Quelques propriétés immédiates des opérateurs inverses

★ I est inversible et

$$I^{-1} = I.$$

★ Si T est inversible, il en est de même de T^{-1} et on a

$$(T^{-1})^{-1} = T.$$

★ Si T est inversible, λT est inversible pour tout $\lambda \neq 0$ et on a

$$(\lambda T)^{-1} = \lambda^{-1} T^{-1}.$$

★ Si S et T sont inversibles, ST est inversible et on a

$$(ST)^{-1} = T^{-1} S^{-1}.$$

★ T est inversible si et seulement si T^* est inversible, on a alors

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*.$$

Conditions d'inversibilité d'un opérateur

Pour tout $T \in \mathcal{L}(H)$ les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) T est inversible dans $\mathcal{L}(H)$
- (ii) T^* est injectif et il existe $C \geq 0$ tel que

$$\|f\| \leq C \|Tf\|, \forall f \in H$$

- (iii) $R(T)$ est dense dans H et il existe $C \geq 0$ tel que

$$\|f\| \leq C \|Tf\|, \forall f \in H$$

- (iv) T est bijectif

Démonstration. .

$(i) \implies (ii)$

Soit $g \in H$ tel que $T^*g = 0$. Alors

$$\|g\|^2 = \langle g, g \rangle = \langle TT^{-1}g, g \rangle = \langle T^{-1}g, T^*g \rangle = 0.$$

donc $g = 0$ et T^* est injectif.

D'autre part T^{-1} étant continu, il vient

$$\|f\| = \|T^{-1}Tf\| \leq \|T^{-1}\| \|Tf\|, \forall f \in H$$

$(ii) \implies (iii)$

Prouvons que $R(T)$ est dense dans H .

Comme

$$\langle Tf, g \rangle = 0, \forall f \in H \implies \langle f, T^*g \rangle = 0, \forall f \in H \implies T^*g = 0 \implies g = 0.$$

C'est immédiat.

$(iii) \implies (iv)$

La majoration montre que

$$Tf = 0 \implies f = 0,$$

donc T est *injectif*.

Pour démontrer que $R(T) = H$ (autrement dit que T est surjectif), il suffit d'établir que $R(T)$ est fermé dans H .

Soit (g_m) une suite de $R(T)$ qui converge vers $g \in H$.

Pour tout m , il existe $f_m \in H$ tel que $g_m = Tf_m$.

la suite (f_m) est de Cauchy car, vu l'hypothèse

$$\|f_p - f_q\| \leq C \|T(f_p - f_q)\| = C \|g_p - g_q\|.$$

la dernière expression tendant vers 0 quand m tend vers l'infini.

Cette suite converge donc vers un élément $f \in H$.

Il en résulte que

$$g = \lim_{m \rightarrow \infty} g_m = \lim_{m \rightarrow \infty} Tf_m = Tf.$$

Par suite, g appartient à $R(T)$ et $R(T)$ est fermé .

$$[(iv) \implies (i)]$$

Comme T est *injectif* et $R(T) = H$, pour chaque élément $g \in H$. il existe un unique élément $f \in H$ tel que

$$g = Tf$$

Posons $T^{-1}g = f$.

Nous définissons ainsi un opérateur T^{-1} sur H tel que

$$TT^{-1} = T^{-1}T = I.$$

Montrons que T^{-1} est continu.

Vu le théorème du graphe fermé (voir [8]), il suffit de prouver qu'il est à graphe fermé.

Or ,

$$\left(\begin{matrix} g_m \rightarrow g \\ T^{-1}g_m \rightarrow f \end{matrix} \right\} \implies \left\{ \begin{matrix} g_m \rightarrow g \\ g_m = TT^{-1}g_m \rightarrow Tf \end{matrix} \right\} \implies g = Tf. \implies f = T^{-1}g.$$

d'où la conclusion . ■

★ Voici deux applications intéressantes du résultat précédent .

a) Pour tout $T \in \mathcal{L}(H)$, l'opérateur $[I + T^*T]$ est inversible dans $\mathcal{L}(H)$.

Notons d'abord que nous avons successivement

$$\|f\|^2 \leq \|f\|^2 + \|Tf\|^2 = \langle [I + T^*T] f, f \rangle \leq \|[I + T^*T] f\| \|f\|, \forall f \in H.$$

Ce qui entraîne

$$\|f\| \leq \|[I + T^*T] f\|, \forall f \in H.$$

Comme $[I + T^*T]^* = [I + T^*T]$, cette majoration montre, en outre, que $[I + T^*T]^*$ est injectif .

Il est en résulte bien que $[I + T^*T]$ est inversible dans $\mathcal{L}(H)$.

b) Pour tout $T \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\|T\| < 1$, l'opérateur $[I - T]$ est inversible dans $\mathcal{L}(H)$.

Nous avons successivement

$$(1 - \|T\|) \|f\|^2 \leq \|f\|^2 - |\langle Tf, f \rangle| \leq |\langle [I - T] f, f \rangle|, \forall f \in H.$$

Il en découle que

$$[I - T]^* f = 0 \implies \langle f, [I - T]^* f \rangle = 0 \implies \langle [I - T] f, f \rangle = 0 \implies f = 0.$$

donc que $[I - T]^*$ est injectif.

De plus, les majorations

$$(1 - \|T\|) \|f\|^2 \leq |\langle [I - T] f, f \rangle| \leq \|[I - T] f\| \|f\|, \forall f \in H.$$

entraînent

$$\|f\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|} \|[I - T] f\|, \forall f \in H.$$

Ces deux propriétés assurent l'inversibilité de $[I - T]$ dans $\mathcal{L}(H)$.

2.5 Opérateurs unitaires

Définition 2.5.1 [10]

Soit H un espace de Hilbert. Une application $T : H \rightarrow H$ est *unitaire* si

- i) $T H = H$, i.e. T est surjective.
- ii) $\langle T(x), y \rangle = \langle x, y \rangle$, pour tout $x, y \in H$, i.e. T préserve le produit scalaire.

Théorème 2.5.1.

Soit T une application unitaire. Alors $T \in L(H)$ et

$$\|T\| = 1.$$

Démonstration.

Montrons d'abord que T est linéaire. En effet, pour tout $x_1, x_2, y \in H$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, nous avons

$$\begin{aligned} \langle T(\alpha x_1 + \beta x_2) - \alpha T x_1 - \beta T x_2, T y \rangle &= \langle T(\alpha x_1 + \beta x_2), T y \rangle - \alpha \langle T x_1, T y \rangle - \beta \langle T x_2, T y \rangle \\ &= \langle \alpha x_1 + \beta x_2, y \rangle - \alpha \langle x_1, y \rangle - \beta \langle x_2, y \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

donc $T(\alpha x_1 + \beta x_2) - \alpha T x_1 - \beta T x_2$ est orthogonal sur tout H .

c'est à dire, il est le vecteur 0 et donc $T \in L(H)$.

De la définition (2.5.1. (ii)), pour $x = y$, on obtient

$$\|Tx\| = \|x\|$$

pour tout $x \in H$, i.e. T est continu, $T \in L(H)$ et de plus $\|T\| = 1$. ■

Ainsi une application unitaire peut être aussi appelée opérateur *unitaire*.

Exemple 2.5.1 .

Considérons $H = \mathbb{R}^2$ et T la rotation autour de l'origine avec un angle φ donné par

$$T = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

alors $T \in U(H)$.

Théorème 2.5.2 .

Soient $T_1, T_2 \in \mathcal{L}_r(H)$, alors $T_1 \circ T_2 \in \mathcal{L}_r(H)$ et $\lambda T_1 \in \mathcal{L}_r(H)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

Théorème 2.5.3 .

Un opérateur unitaire T est régulier. De plus

$$T^{-1} \in U(H).$$

Preuve. .

pour tout $x \in H$ on a

$$Tx = 0 \implies 0 = \|Tx\| = \|x\| = 0 \implies x = 0,$$

donc l'opérateur T est inversible et $T^{-1} \in \mathcal{L}(H)$.

On a d'après (définition 2.5.1 (i)) que $T^{-1}H = H$, i.e. T^{-1} est surjectif. il reste de montrer que T^{-1} satisfait (définition 2.5.1(ii))

En effet, pour tout $x, y \in H$,

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= \langle T(T^{-1}x), T(T^{-1}y) \rangle \\ &= \langle T^{-1}x, T^{-1}y \rangle.\end{aligned}$$

■

Donnons maintenant une caractérisation des opérateurs unitaires.

Théorème 2.5.4 [10]

Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur unitaire si et seulement si

$$T^{-1} = T^*.$$

Démonstration. .

Soit $T \in U(H)$. D'Après (le théorème 2.5.3), $T^{-1} \in U(H)$ et nous avons ,
pour tout $x, y \in H$,

$$\langle x, T^*y \rangle = \langle Tx, y \rangle = \langle Tx, (T \circ T^{-1})y \rangle = \langle x, T^{-1}y \rangle.$$

et donc

$$T^* = T^{-1}.$$

Réciproquement, si $T^{-1} = T^*$, T^{-1} est défini sur H et donc $TH = H$ et

$$\begin{aligned}\langle Tx, Ty \rangle &= \langle x, (T^* \circ T)y \rangle \\ &= \langle x, (T^{-1} \circ T)y \rangle \\ &= \langle x, y \rangle.\end{aligned}$$

pour tout $x, y \in H$ montre que $T \in U(H)$. ■

Remarque 2.5.1 [10].

Puisque pour $T \in U(H)$ on a $T \circ T^* = T^* \circ T = I$, nous avons que $T^* \in U(H)$ et T est normal.

Rappel [10]

Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur normal si

$$TT^* = T^*T.$$

Remarque 2.5.2 [10].

Un opérateur unitaire $T \in U(H)$ est auto-adjoint si et seulement si

$$T^2 = I.$$

Définition 2.5.2 .

Un opérateur $T \in L(H)$ est *isométrique* si pour tout $x, y \in H$,

$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle.$$

i.e. T préserve le produit scalaire et donc la métrique. C'est la raison pour laquelle on appelle T *isométrie*.

Remarque 2.5.3 .

Un opérateur unitaire est *isométrique* mais il y a des opérateurs isométriques qui ne sont pas unitaires.

Exemple 2.5.2 .

L'opérateur de déplacement $T_s \in L(E)$ défini par

$$T_s(x) = T_s((\xi_1, \xi_2, \dots)) = (0, \xi_1, \xi_2, \dots), \text{ sur } \ell_2 \text{ est } \textit{isométrique} \text{ mais pas unitaire.}$$

Théorème 2.5.5 .

Pour un opérateur *isométrique*, nous avons évidemment

$$\|Tx\| = \|x\|, \text{ pour tout } x \in H.$$

et donc $\|T\| = 1$

Cette condition caractérise les opérateurs isométriques .

Théorème 2.5.6 .

Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est *isométrique* si et seulement si, pour tout $x \in H$,

$$\|Tx\| = \|x\| \quad (2.5.1)$$

Démonstration. .

Supposons que T satisfait la formule (2.5.1), alors pour tout $x, y \in H$, on a

$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i \|x + iy\|^2 - i \|x - iy\|^2)$ (l'identité de polarisation pour un Hilbert complexe)

et donc

$$\begin{aligned} \langle Tx, Ty \rangle &= \frac{1}{4} (\|Tx + Ty\|^2 - \|Tx - Ty\|^2 + i \|Tx + T(iy)\|^2 - i \|Tx - T(iy)\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i \|x + iy\|^2 - i \|x - iy\|^2) = \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

■

Définition 2.5.3 .

Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est une isométrie partielle si $\|Tx\| = \|x\|$ pour tout $x \in \text{Ker}(T)^\perp$.

Remarque 2.5.4 .

Remarquons que l'image d'une isométrie partielle $T \in \mathcal{L}(H)$ est un fermé dans H .

Proposition 2.5.1 .

Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est une isométrie partielle si et seulement si T^*T est une projection orthogonale .

Démonstration. .

Supposons que T est une isométrie partielle. On a alors $(T^*T)^* = T^*T$ et $(TT^*)^* = TT^*$.

Il reste donc à prouver que $(T^*T)^2 = T^*T$ et $(TT^*)^2 = TT^*$.

Comme $H = \text{Ker}(T)^\perp \oplus \text{Ker}(T)$, on a pour tout $x \in H$,

$$T^*Tx = T^*Tx_1 \in \text{Ker}(T)^\perp,$$

où $x_1 \in \text{Ker}(T)^\perp$ vérifiant $x - x_1 \in \text{Ker}(T)$. Il résulte de

$$\|Tx_1\| = \|x_1\|$$

que $\langle TT^*x_1, x_1 \rangle = \langle x_1, x_1 \rangle$, puis l'identité de polarisation que $T^*T x_1 = x_1$.

On a donc

$$(T^*T)^2x = T^*Tx.$$

Montrons la réciproque. Comme T^*T est une projection orthogonale, on a

$$\|T^*Tx\|^2 = \langle T^*Tx, x \rangle = \|Tx\|^2.$$

On en déduit alors que $\text{Ker}(T^*T) = \text{Ker}(T)$ et donc T^*T est une projection orthogonale sur $\text{Ker}(T)^\perp$.

D'où pour tout $x \in \text{Ker}(T)^\perp$

$$\|Tx\|^2 = \langle T^*Tx, x \rangle = \|x\|^2.$$

■

Proposition 2.5.2 .

T est une isométrie partielle si et seulement si T^* l'est aussi .

Preuve. .

Il suffit de montrer que si T est une isométrie partielle alors TT^* est une projection orthogonale.

En effet, pour tout $x \in H$, on a $T^*x \in \overline{\text{Ran}(T^*)} = \text{Ker}(T)^\perp$.

En utilisant la proposition précédente, on a donc

$$(TT^*)^2x = T(T^*T)T^*x = TT^*x.$$

■

Chapitre 3

Sur la décomposition polaire d'un opérateur inversible

Dans ce chapitre, Nous introduisons la notion de la décomposition polaire d'un opérateur inversible comme un produit de deux opérateurs l'un est unitaire et l'autre est positif, et comme la matrice est un cas particulier d'un opérateur en dimension finie, nous donnons la décomposition polaire des matrices dans les deux cas, le cas réel une matrice se décompose en produit de deux matrices l'une est orthogonale et l'autre est symétrique définie positive et cas complexe l'une est unitaire et l'autre est hermitienne. Après nous appliquons notre décomposition dans la résolution des systèmes d'équations linéaires en utilisant la décomposition polaire et la factorisation de Cholesky.

3.1 La décomposition polaire d'un opérateur inversible

Théorème 3.1.1 [5].

Soient H un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ et $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur inversible, alors

$$T = US$$

tel que U est unitaire et S positif.

Preuve. .

T est un opérateur inversible, alors T^* et T^*T sont aussi inversibles. Et comme T^*T est un opérateur positif, alors d'après le théorème (la racine carrée d'un opérateur positif) il existe un seul opérateur positif et inversible S , tel que

$$S = \sqrt{T^*T}$$

Si on pose $U = TS^{-1}$ nous avons

$$\begin{aligned} UU^* &= (TS^{-1})(TS^{-1})^* \\ &= TS^{-1}(S^{-1})^*T^* \\ &= TS^{-1}S^{-1}T^* \\ &= T(T^*T)^{-1}T^* \\ &= TT^{-1}(T^*)^{-1}T^* \\ &= I I \\ &= I. \end{aligned}$$

Donc est un opérateur unitaire . ■

Théorème 3.1.2 [5].

Soient H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur inversible. La décomposition

$$T = US$$

tel que U est unitaire et S positif s'appelle la décomposition polaire.

Rappel

Un nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ appartient au spectre de T noté par $\sigma(T)$, si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus R(T)$.

Théorème 3.1.3 .

Soit S un opérateur positif et inversible, alors on peut écrire S sous la forme suivante

$$S = e^{\log S}.$$

Démonstration. .

Parceque S est un opérateur positif et inversible, alors on a

$$\sigma(S) \subset]0, \infty[.$$

donc on peut définir la fonction $h : \sigma(S) \rightarrow \mathbb{R}$, donné par $h(\lambda) = \log \lambda \in C(\sigma(S))$ pour tout $\lambda \in \sigma(S)$.

on obtient

$$S = e^{\log S}.$$

■

Remarque 3.1.1 .

$\log S \in \mathcal{L}(H)$. En effet $\log \lambda \in C(\sigma(T)) = \overline{q_n(\sigma(T))}$, donc on a $\exists q_n \in q(\sigma(S))$ tel que $q_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \log S$.

Théorème 3.1.4 .

Soit $U \in U(H)$, alors on peut écrire U sous la forme suivante

$$U = e^{\log U}$$

Démonstration. .

Puisque $\sigma(U) \subset \{\lambda; |\lambda| = 1\}$, alors $0 \notin \sigma(U)$, donc on peut définir a fonction

$h : \sigma(U) \rightarrow \mathbb{R}$, donnée par

$$h(\lambda) = \log \lambda \in C(\sigma(U)) \text{ pour tout } \lambda \in \sigma(U).$$

et donc

$$U = e^{\log U}.$$

■

Remarque 3.1.2 .

$\log U \in \mathcal{L}(H)$. En effet $0 \notin \sigma(U)$ donc $\lambda \in C(\sigma(U))$.

Théorème 3.1.5 .

Soient H un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ et $T \in \mathcal{L}(H)$,un opérateur inversible ,alors

$$T = e^{w_1} e^{w_2}.$$

telle que $w_1 = \log U$ et $w_2 = \log S$.

3.2 La décomposition polaire des matrices

Définition 3.2.1 .

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est dite hermitienne si elle égale à la conjuguée de sa transposée, c'est à dire, si elle satisfait l'égalité

$$A = \overline{A}^t.$$

Définition 3.2.2 .

Une matrice carrée est dite orthogonale si

$$A^t A = A A^t = I.$$

Exemple 3.2.1 .

Un exemple de la matrice orthogonal est l'exemple (2.5.1).

Définition 3.2.3 .

En algèbre linéaire une matrice A à coefficients complexes est dite unitaire si elle vérifie les égalités suivantes

$$A A^* = A^* A = I.$$

avec A^* est la matrice adjointe et I est la matrice identité.

Remarque 3.2.1 .

les matrices unitaires sont inversibles .

les matrices unitaires à coefficients réels sont les matrices orthogonales.

Lemme 3.2.1 .

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $u \in S^{++}(E)$ donc $\exists! v \in S^{++}(E)$ tel que $v^2 = u$, de plus v est un polynôme en u .

Démonstration. .

Existence :

On a $u \in S(E)$ donc il existe une base orthonormée B dans laquelle la matrice de u soit diagonale .

Posons $U = [u]_B = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

On a $u \in S^{++}(E)$ donc $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \lambda_i > 0$

Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$V = [v]_B = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ donc $V^2 = U$ d'où $v^2 = u$.

On a V est symétrique dans la base orthonormée B donc $u \in S(E)$ et puisque

$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \sqrt{\lambda_i} > 0$ donc $u \in S^{++}(E)$.

Soit P le polynôme d'interpolation de Lagrange tel que $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, P(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$ donc $P(u) = v$.

v est alors un polynôme en u .

Unicité :

Soit $w \in S^{++}(E)$ tel que $w^2 = u$ et on pose $W = [w]_B$ donc $W^2 = U$.

On a $wu = w^3 = uw$ donc $UW = WU$, or U est diagonale donc W est diagonale.

Posons $W = \text{diag}\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$. On a $W^2 = U$ donc $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \mu_i^2 = \lambda_i$.

on a $w \in S^{++}(E)$ donc $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \mu_i > 0$. On déduit que $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \mu_i = \sqrt{\lambda_i}$ d'où $W = V$ et par suite $w = v$. ■

Remarque 3.2.2 .

Soient B une base orthonormale de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose $M = \text{mat}(u, B)$.

1. $u \in O(E)$ si et seulement si $M \in O_n(\mathbb{R})$.
2. $u \in SO(E)$ si et seulement si $M \in SO_n(\mathbb{R})$.
3. $A \in O_n(\mathbb{R}) \iff \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \quad \|AX\| = X$.

Théorème 3.2.1 (décomposition polaire)

Soit $u \in GL(E)$. Alors $\exists! o \in O(E)$, $\exists! s \in S^{++}(E)$, $u = os$.

Démonstration. .

Existence :

On a $u^*u \in S^{++}(E)$ donc il existe $s \in S^{++}(E)$ tel que $u^*u = s^2$.

Posons $o = us^{-1}$. On a $o^*o = (us^{-1})^*(us^{-1}) = (s^*)^{-1}u^*u s^{-1} = s^{-1}s^2s^{-1} = id_E$.

car $s^* = s$. On déduit que $u \in O(E)$.

On a $u = os$ avec $o \in O(E)$ et $s \in S^{++}(E)$.

Unicité :

Soient $r \in O(E)$ et $t \in S^{++}(E)$ tels que $u = rt$ donc $u^*u = t^*r^*rt = t^2 = s^2$.

D'après le lemme précédent, $t = s$ et par suite $r = ut^{-1} = us^{-1} = o$. ■

3.2.1 Décomposition polaire d'une matrice réelle

Théorème 3.2.2 .

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors $\exists! O \in O(n)$, $\exists! S \in S^{++}(n)$,

$$A = OS.$$

Définition 3.2.4 .

Soient les applications suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) \mapsto OS \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) \mapsto SO. \end{array} \right.$$

Donc toute matrice réelle inversible se décompose de façon unique en produit d'une matrice orthogonale et d'une matrice symétrique définie positive.

3.2.2 Décomposition polaire d'une matrice complexe

Définition 3.2.5 .

Soient les applications suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_n(\mathbb{C}) \times H_n^{++}(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C}) \\ (O, S) \mapsto OS \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} U_n(\mathbb{C}) \times H_n^{++}(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C}) \\ (O, S) \mapsto SO. \end{array} \right.$$

Donc toute matrice complexe inversible se décompose de façon unique en produit d'une matrice unitaire et d'une matrice hermitienne définie positive.

Exemple 3.2.2 .

La dimension $n=1$

Il est important de bien comprendre ce qui se passe lorsque E est de dimension 1 .

Supposons donc que E est une droite vectorielle euclidienne, et soit v un endomorphisme de E . C'est nécessairement la multiplication par un réel λ , et la matrice de v dans n'importe quelle base est alors égale à $[\lambda]$. C'est en particulier le cas dans chacune des deux bases orthonormées de E (qui correspondent aux deux vecteurs unitaires). On en déduit que v est automatiquement symétrique, qu'il est inversible si et seulement si $\lambda \neq 0$ et que c'est une isométrie si et seulement si $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.

Si v est l'endomorphisme positif donné par la multiplication par un certain $\lambda \geq 0$, sa racine carrée est simplement la multiplication par $\sqrt{\lambda}$.

Soit maintenant v un endomorphisme inversible de E , c'est à dire, la multiplication par un scalaire non nul λ . Le théorème de la décomposition polaire signifie dans ce cadre que λ peut s'écrire d'une unique manière comme un produit de la forme mu , où $u \in \{-1, 1\}$ et où $m > 0$; bien évidemment, cette écriture n'est autre que celle fournie par l'égalité $\lambda = \text{sign}(\lambda) \cdot |\lambda|$; la formule $m = \sqrt{v^*v}$ vue plus haut correspond ici à l'identité classique $|\lambda| = \sqrt{\lambda^2}$.

3.3 Application à la résolution des systèmes d'équations linéaires

Soit l'équation $AX = B$ avec $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{R}^n$ et l'inconnu $X \in \mathbb{R}^p$.

On A est inversible donc soit $A = OS$ sa décomposition polaire .

L'équation $AX = B$ se transforme en $OSX = B$.

Or O est orthogonal donc $O^{-1} = O^t$ d'où $SX = O^t B$. On pose $O^t B = D$.

* cette nouvelle équation $SX = D$ se résout comme suit

1. On a $S \in S^{++}(n)$ donc soit $S = T^t T$ sa factorisation de Cholesky (pour la factorisation de Cholesky voir [6]) .
2. l'équation $SX = D$ se transforme en $T^t T X = D$.
3. On commence par résoudre $T^t Y = D$ par la descente de Gauss et puis on résout l'équation $T X = Y$ par la remontée de Gauss (voir [6]).

Conclusion générale

Nous concluons que chaque opérateur linéaire et inversible T défini sur un espace de Hilbert H dans lui-même admet une décomposition sous la forme

$$T = US.$$

telle que U et S sont des opérateurs linéaires continus sur H .

Le but de ce travail est de résoudre un système d'équations linéaires en utilisant la décomposition polaire d'une matrice .

Bibliographie

- [1] **Guillaume AUBRUN**, *Théorie des opérateurs*, M1 mathématique. université de la réunion.
- [2] **George BACHMAN** and Lawrence NARICI, *Functional analysis*, Brooklyn. New York, 1972.
- [3] **B.Blackadar**, *Operator algebras*, university of Nevada USA, 2006.
- [4] **E . Brian Davis**, *linear operator and their spectra*, Cambridge .
- [5] **Lokenath. DEBNATH, Pitor. MIKUSUNSKI**, *introduction to Hilbert spaces with applications*, university of central Florida orlando, USA.
- [6] **Derek. J. S Robinson**, *A course in linear algebra with applications*, university of Illenois. USA, 2006.
- [7] **Bruce k.DRIVER**, *Analysis tools with applications*, New York, 2003.
- [8] **J. ETIENNE. P. Tossing**, *Analyse fonctionnelle appliquée*, université de Lieg, 1998.
- [9] **G. M. L. Gladwell, L. P. Lebdev, I. I.Vorovich**, *Functional analysis*, USA, 2004.
- [10] **W. Hengartner, M. Lambert, C. Reisther**, *Introduction à l'analyse fonctionnelle*, université de Québec, 1981.
- [11] **S. G. Krein**, *Functional analysis*, USA, 1972.
- [12] **Frédéric LAROCHE**, *Analyse de Hilbert*, 2005.

- [13] **Reinhold MEISE**, *Introduction to functional analysis*, New York, 1995.
- [14] **Vitali MILMAN**, *An introduction to functional analysis*, London, 1999.
- [15] **M.NADIR**, *Cours d'analyse fonctionnelle*, université de M'sila, 2011/2012.
- [16] **Walter RUDIN**, *Functional analysis*, USA, 1973.
- [17] **Dietman VOGT**, *Introduction to functional analysis*, Oxford, 2004.
- [18] **Kôsaku YOSIDA**, *Functional analysis*, New York, 1980.