UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Domaine : Mathématiques et Informatiques

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques Appliquées et Discrète

Par

Ould Toumi Hamida

Sujet

Solution auto-similaire de l'équation du Hele Shaw

Dirigé par :

Pr : N .Ben Hamidouche.

Promotion: 2011/2012

Table des matières

Introduction

La méthode de similarité est une des méthodes standard pour obtenir des solutions exactes d'EDPs de nombre de variables indépendantes. l'EDP est réduite en faisant usage de combinaisons appropriées des variables d'origine indépendants appelées "variables de similarité". Les variables de similarité peuvent être eux-mêmes identifiés en utilisant les propriétés d'invariance d'EDP lorsqu'ils sont soumis à des transformations finies ou infinies[18]. De telles solutions, introduites par Barenblatt [2] dans les années 1950, ont été utilisées par Tayachi et al [19] dans les années 1990 (recherche de solutions asymptotiquement auto-similaires), et utilisées dans un cas parabolique dégénéré pour le transport d'eau dans les milieux poreux par Lafitte et Le Potier [16].

Les fondements de la méthode sont des outils standards pour réduction de la symétrie dans la mécanique géométrique. Motivé par modèles de faible dimension de systèmes avec des ondes progressives, ces idées ont été récemment appliquée à des équations aux dérivées partielles (EDP) équivariants. Une contribution importante a consisté à généraliser cette méthode à d'autres groupes de symétrie d'une façon naturelle. L'affacturage hors de l'invariance de groupe (Par ce qu'on appelle épinglage conditions) est également une composante importante de nombreuses méthodes numériques pour les systèmes à symétrie[17].

Nous allons voir au cours de ce mémoire des solutions auto-similaires classiques pour l'équation de Hele Shaw. Nous allons également étudier ce genre de solution dans le cas général de l'auto similarité.

Ce mémoire est organisé en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on présente quelques notions sur l'auto similarité et la définition du problème de Hele Shaw, et on donne des exemples sur l'auto-similarité classique pour des EDPs (l'équation de la transport à vitèsse constante et l'équation de Burgers).

Le deuxième chapitre concerne une discution de certains aspects de la solution auto-similaire classique pour l'équation de Hele Shaw, en calculant explicetement les exposant de similatité et le profil lié à la solution du problème.

Le dernier chapitre est consacré à la recherche de solutions auto-similaires généralisées pour l'équation de Hele Shaw.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié la solution auto-similaires de l'équation du Hele Shaw, dans sa version classique c'ést-à-dire la similarité classique, ensuite on a essayé de généraliser à des formes d'auto similarité plus générales. L'équation de Hele Shaw consistitue un cas particulier de l'équation du film mince, qui a plusiuers applications en physique. Nous avons donné explicitement les exposants de similarité et calculer explicitement les profils liés à la solution du problème dans le cas classique. Nous avons également étudier l'auto similarité dans le cas général où nous avons déterminé tous les paramètres du problème ainsi que les profils corresponadants.

Bibliographie

[1] R. Almgren, *Singularity formation in Hele Shaw bubbles Phys, Fluids 8 344–352, 1996.*

[2] G.I. Barenblatt. *On self-similar motions of compressible fluid in a porous medium (enrusse) Prikladnàya Matematika i-Mekhanika (Applied Mathematics and Mechanics (PMM)), 16(6), p. 679-698, 1952.*

[3] N. Ben hamidouche, *Analyse asymptotique et numérique pour EDP, Cour de Master S3, Université de M'sila, 2011-2012.*

[4] M. Benhamou. *GROUPE DE RENORMALISATION APPLIQUE AUX EQUATIONS DE REACTION-DIFFUSION.*, Laboratoire de Physique des Polymères et Phénomènes Critiques.

[5] F. Bernis, *1995 Viscous flows, fourth order nonlinear degenerate parabolice quations and singular elliptic problems Free boundary problems : theory and applications (Pitman Research Notes in Mathematics 323) ed J I Diaz et al (Harlow : Longman) pp 40–56, 1995.*

[6] A. L. Bertozzi. *The mathematics of moving contact lines in thin liquid films Notices Amer, Math.Soc, 45 689–697, 1998.*

[7] A. L. BertozziAL. M. P. Brenner. T. F. Dupont and L. P. Kadanoff. *Singularities and similarities in interface flows Trends and Perspectives in Applied Mathematics (Applied Mathematical Sciences 100) ed L Sirovich (Berlin : Springer-Verlag) pp155–208, 1994.*

[8] P. Constantin. T. F. Dupont. R. E. Goldstein. L. P. Kadanoff. M. J. Shelley and Su-Min Zhou. *Droplet breakup in a model of the Hele Shaw cell Phys, Rev, E 47 4169–4181, 1993.*

[9] T. F. Dupont. R. E. Goldstein. L. P. Kadanoff and Su-Min Zhou. *Finite-time singularity for mation in Hele Shaw systems Phys, Rev, E 47 4182–4196, 1993.*

[10] P. Ferreira, S. Mas-Gallic, *Equations aux Dérivées Partielles, Thèse, 11 décembre 2001.*

[11] R. E. Goldstein. A. I. Pesci and M. J. Shelley. *Instabilities and singularities in Hele Shaw flow Phys, Fluids 10 2701–2723, 1998.*

[12] J. Helshof. *,Some Aspects of The Thin Film Equation.*Faculty of Sciences,Mathematics and Computer Science division,Free University Amsterdam,De Boelelaan 10811081 HV Amsterdam, The Netherlands E-mail address : jhulshof@cs.vu.nl.

[13] N. Igbida, *Analyse de Quelques Problèmes Elliptlemeniques et Paraboliques non Linéaires Dégénérés : Existence, Unicité, Limites Singulières et Comportement Asymptotique, Thèse, Université de Picardie Jules Verne, 9 Décembre 2005.*

[14] T. G. Myers. *Thin films with high surface tension SIAM Rev, 40 441–462, 1998.*

[15] A. I. Pesci. R E Goldstein and M J Shelley. *Domain of convergence of perturbative solutions for Hele Shaw flow near interface collapse Phys, Fluids 11 2809–2811, 1999.*

[16] A. Rodr guez et J. L. V asquez. *Maximal Solutions of Singular Diffusion Equations with General Initial Data Nonlinear Di usion Equations and their Equilibrium States, ed. Birkhauser, 3, p. 471-484, 1992.*

[17] C. W Rowle , I. G. Kevrekidis , J. E. Marsden§ and K. Lust, *Reduction and reconstruction for self-similar dynamical systems , Departement Computerwetenschappen, K.U.Leuven, Celestijnenlaan 200A, B-3001 Heverlee, BELGIUM [2003].*

[18] P.L.SACHDEV. *Self-similarity and Beyond* Boca Raton Landon New York Washington, D.C (113).

[19] S. TAYACHI, PH. SOUPLET ET F. WEISSLER. *Exact self-similar blow-up of solutions of a semilinear parabolic équation with a nonlinear gradient term Indiana Univ. Math. J., 45, p. 655-682, 1996.*

[20] A. VASILEV, *Hele-Shaw Flows : Historical Overview, Thèse, University of Bergen, july 2007, Canada.*