



UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Domaine : Mathématiques et Informatiques

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques Appliquées et Discrète

Par

Ould Toumi Hamida

Sujet

**Solution auto-similaire de l'équation
du Hele Shaw**

Dirigé par :

Pr : N .Ben Hamidouche.

Promotion: 2011/2012

Table des matières

Introduction	3
1 Généralité sur l'auto-similarité et le problème de Hele Shaw	5
1.1 L'auto similarité	5
1.1.1 Notion d'auto-similarité	6
1.1.2 La condition de similarité	8
1.2 Problème de Hele Shaw	12
1.2.1 Equation de Film Mince (Couche mince)	12
1.2.2 Equation de Hele Shaw	13
1.2.3 Les applications ou les inventions de Hele Shaw	13
2 Solution auto-similaire classique pour l'équation de Hele Shaw	14
2.1 La recherche de la condition d'invariance d'échelle	15
2.1.1 La règle de dérivation	15
2.1.2 Choix de l'échelle	16
2.2 Solution auto-similaire pour l'équation (H.S)	17
2.2.1 Type de source de solution	19
2.3 Résolution de l'équation différentielle	21
3 Solution auto-similaire pour l'équation de Hele Shaw dans le cas général	23
3.1 Théorème de similarité	24

3.2	Théorème (forme bilinéaire)	24
3.3	Solution auto-similaire généralisée pour l'équation (H.S)	26
3.3.1	Calcul de la dérivée	27
3.3.2	Similarité générale :	27
	conclusion	34

Les fondements de la méthode sont des outils standards pour l'étude de la symétrie dans la mécanique géométrique. Motivés par modèles de billards dimérés et de systèmes avec des ondes progressives, ces idées ont été récemment appliquées à des équations aux dérivées partielles (EDP) équivariantes. Une contribution importante a consisté à généraliser cette méthode à d'autres groupes de symétrie d'une façon naturelle. L'identification de l'invariant de groupe (Par ce qu'on appelle épinglage conditionnel) est également une composante importante de nombreuses méthodes numériques pour les systèmes à symétrie [17].

Nous allons voir au cours de ce mémoire des solutions auto-similaires classiques pour l'équation de Hele Shaw. Nous allons également étudier le genre de solution dans le cas général de l'auto similarité.

Ce mémoire est organisé en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on présente quelques notions sur l'auto similarité et la définition du problème de Hele Shaw, et on donne des exemples sur l'auto similarité classique pour des EDPs (l'équation de la transport à vitesse constante et l'équation de Burgers).

Le deuxième chapitre concerne une discussion de certains aspects de la solution auto-similaire classique pour l'équation de Hele Shaw, en calculant explicitement les aspects

Introduction

La méthode de similarité est une des méthodes standard pour obtenir des solutions exactes d'EDPs de nombre de variables indépendantes. L'EDP est réduite en faisant usage de combinaisons appropriées des variables d'origine indépendantes appelées "variables de similarité". Les variables de similarité peuvent être eux-mêmes identifiées en utilisant les propriétés d'invariance d'EDP lorsqu'ils sont soumis à des transformations finies ou infinies[18]. De telles solutions, introduites par Barenblatt [2] dans les années 1950, ont été utilisées par Tayachi et al [19] dans les années 1990 (recherche de solutions asymptotiquement auto-similaires); et utilisées dans un cas parabolique dégénéré pour le transport d'eau dans les milieux poreux par Lafitte et Le Potier [16].

Les fondements de la méthode sont des outils standards pour réduction de la symétrie dans la mécanique géométrique. Motivé par modèles de faible dimension de systèmes avec des ondes progressives, ces idées ont été récemment appliquée à des équations aux dérivées partielles (EDP) équivariants. Une contribution importante a consisté à généraliser cette méthode à d'autres groupes de symétrie d'une façon naturelle. L'affacturage hors de l'invariance de groupe (Par ce qu'on appelle épinglage conditions) est également une composante importante de nombreuses méthodes numériques pour les systèmes à symétrie[17].

Nous allons voir au cours de ce mémoire des solutions auto-similaires classiques pour l'équation de Hele Shaw. Nous allons également étudier ce genre de solution dans le cas général de l'auto similarité.

Ce mémoire est organisé en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on présente quelques notions sur l'auto similarité et la définition du problème de Hele Shaw, et on donne des exemples sur l'auto-similarité classique pour des EDPs (l'équation de la transport à vitesse constante et l'équation de Burgers).

Le deuxième chapitre concerne une discussion de certains aspects de la solution auto-similaire classique pour l'équation de Hele Shaw, en calculant explicitement les exposant

de similitude et le profil lié à la solution du problème.

Le dernier chapitre est consacré à la recherche de solutions auto-similaires généralisées pour l'équation de Hele Shaw.

Chapitre 1

Généralité sur l'auto-similarité et le problème de Hele Shaw

Dans ce chapitre nous allons présenter quelques notions sur l'auto-similarité et la définition du problème de Hele Shaw.

1.1 L'auto-similarité

On appelle une solution auto-similaire une fonction qui est invariante par un changement d'échelle en temps. Ce type de fonctions est très important en physique car elles modélisent des phénomènes qui sont indépendants de l'échelle de mesure[1].

La méthode de recherche de solutions auto-similaires consiste à proposer une certaine forme à la solution recherchée, et de ce fait à transformer l'équation aux dérivées partielles en une équation différentielle ordinaire.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié la solution auto-similaires de l'équation du Hele Shaw, dans sa version classique c'est-à-dire la similarité classique, ensuite on a essayé de généraliser à des formes d'auto similarité plus générales. L'équation de Hele Shaw constitue un cas particulier de l'équation du film mince, qui a plusieurs applications en physique. Nous avons donné explicitement les exposants de similarité et calculer explicitement les profils liés à la solution du problème dans le cas classique. Nous avons également étudié l'auto similarité dans le cas général où nous avons déterminé tous les paramètres du problème ainsi que les profils correspondants.

- [1] N. BAKHSHALIYEV, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics (PMM)*, 1975, p. 579-595, 1952.
- [2] N. BEN HAMDOUCHE, *Recherches asymptotiques et numériques pour EDP*, *Carte de Master 53*, Université de M'ila, 2011-2012.
- [3] M. BESHAMOU, *GROUPE DE RENOUVELISATION APPLIQUE AUX EQUATIONS DE REACTION DIFFUSION*, *Laboratoire de Physique des Polymères et Chimie des Organiques*.
- [4] F. BERTH, *1995 Lecture Notes, fourth order nonlinear degenerate parabolic equations and singular elliptic problems Free boundary problems : theory and applications (Pitman Research Notes in Mathematics 362) ed J I Diaz et al (Harlow : Longman) pp 40-56, 1995.*
- [5] A. L. BERTOZZI, *The mathematics of moving contact lines in thin liquid films* *Notices Amer. Math. Soc.*, 43 639-651, 1994.
- [6] A. L. BERTOZZI, M. P. BRANER, T. F. DEPONT AND L. P. KADANOFF, *Singularities and similarities in interface flows Trends and Perspectives in Applied Mathematics (Applied Mathematical Sciences 100) ed L. Sirovich (Berlin : Springer-Verlag) pp155-205, 1994.*

Bibliographie

- [1] R. ALMGREN, *Singularity formation in Hele Shaw bubbles* *Phys, Fluids* 8 344-352, 1996.
- [2] G.I. BARENBLATT. *On self-similar motions of compressible fluid in a porous medium (enrusse) Prikladnaya Matematika i Mekhanika (Applied Mathematics and Mechanics (PMM)), 16(6), p. 679-698, 1952.*
- [3] N. BEN HAMIDOUCHE, *Analyse asymptotique et numérique pour EDP, Cour de Master S3, Université de M'sila, 2011-2012.*
- [4] M. BENHAMOU. *GROUPE DE RENORMALISATION APPLIQUE AUX EQUATIONS DE REACTION-DIFFUSION.*, Laboratoire de Physique des Polymères et Phénomènes Critiques.
- [5] F. BERNIS, *1995 Viscous flows, fourth order nonlinear degenerate parabolic equations and singular elliptic problems Free boundary problems : theory and applications (Pitman Research Notes in Mathematics 323) ed J I Diaz et al (Harlow : Longman) pp 40-56, 1995.*
- [6] A. L. BERTOZZI. *The mathematics of moving contact lines in thin liquid films Notices Amer, Math.Soc, 45 689-697, 1998.*
- [7] A. L. BERTOZZI, A. L. M. P. BRENNER. T. F. DUPONT AND L. P. KADANOFF. *Singularities and similarities in interface flows Trends and Perspectives in Applied Mathematics (Applied Mathematical Sciences 100) ed L Sirovich (Berlin : Springer-Verlag) pp155-208, 1994.*

- [8] P. CONSTANTIN. T. F. DUPONT. R. E. GOLDSTEIN. L. P. KADANOFF. M. J. SHELLEY AND SU-MIN ZHOU. *Droplet breakup in a model of the Hele Shaw cell Phys, Rev, E 47 4169-4181, 1993.*
- [9] T. F. DUPONT. R. E. GOLDSTEIN. L. P. KADANOFF AND SU-MIN ZHOU. *Finite-time singularity for mation in Hele Shaw systems Phys, Rev, E 47 4182-4196, 1993.*
- [10] P. FERREIRA, S. MAS-GALLIC, *Equations aux Dérivées Partielles, Thèse, 11 décembre 2001.*
- [11] R. E. GOLDSTEIN. A. I. PESCI AND M. J. SHELLEY. *Instabilities and singularities in Hele Shaw flow Phys, Fluids 10 2701-2723, 1998.*
- [12] J. HELSHOF. *,Some Aspects of The Thin Film Equation.* Faculty of Sciences, Mathematics and Computer Science division, Free University Amsterdam, De Boelelaan 10811081 HV Amsterdam, The Netherlands E-mail address : jhulshof@cs.vu.nl.
- [13] N. IGBIDA, *Analyse de Quelques Problèmes Elliptiques et Paraboliques non Linéaires Dégénérés : Existence, Unicité, Limites Singulières et Comportement Asymptotique, Thèse, Université de Picardie Jules Verne, 9 Décembre 2005.*
- [14] T. G. MYERS. *Thin films with high surface tension SIAM Rev, 40 441-462, 1998.*
- [15] A. I. PESCI. R. E. GOLDSTEIN AND M. J. SHELLEY. *Domain of convergence of perturbative solutions for Hele Shaw flow near interface collapse Phys, Fluids 11 2809-2811, 1999.*
- [16] A. RODRIGUEZ ET J. L. VASQUEZ. *Maximal Solutions of Singular Diffusion Equations with General Initial Data Nonlinear Diffusion Equations and their Equilibrium States, ed. Birkhauser, 3, p. 471-484, 1992.*
- [17] C. W. ROWLE , I. G. KEVREKIDIS , J. E. MARSDEN§ AND K. LUST, *Reduction and reconstruction for self-similar dynamical systems , Departement Computerwetenschappen, K.U.Leuven, Celestijnenlaan 200A, B-3001 Heverlee, BELGIUM [2003].*

- [18] P.L.SACHDEV. *Self-similarity and Beyond* Boca Raton Landon New York Washington, D.C (113).
- [19] S. TAYACHI, PH. SOUPLET ET F. WEISSLER. *Exact self-similar blow-up of solutions of a semilinear parabolic equation with a nonlinear gradient term* *Indiana Univ. Math. J.*, 45, p. 655-682, 1996.
- [20] A. VASILEV, *Hele-Shaw Flows : Historical Overview*, Thèse, University of Bergen, july 2007, Canada.