UNIVERSITÉ DE M'SILA
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

**MEMOIRE DE FIN D'ETUDE**

Présenté pour l'obtention du diplôme de Licence

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Appliquées et Discrète

**Par: Mihoub Fouzia**

**Sujet:**

# Solution auto similaire pour une équation de réaction diffusion non linéaire

**Dirigé par: prof.Benhamidouche Nourdine**

**Promotion: 2012/2013**

# *Remerciements*

**E***n tout premier lieu, Je remercie le bon Dieu, tout puissant, de m'avoir donné la force pour survivre, ainsi qui l'audace pour dépasser toutes les difficultés.*

**J***e voudrais commencer par remercier à Monsieur le professeur* **N.Benhamidouche** *pour son encadrement au quotidien et avoir sourient ce travail et me guider ses conseils ont toujours été précieux et nos discussions importantes pour faire évoluer ce projet. Ses remarques sur le manuscrit ont été fondamentales pour le rendre plus clair et compréhensible .Merci également pour tous les moments en dehors du travail et qui furent toujours un plaisir.*

***U****n merci incommensurable à mes amis,leur amitié, leur gentillesse et leur soutien moral.*

**P***our terminer en beauté, enfin, je remercie ma famille. ils me soutiendront toujours. Ils sont très fiers de moi et ils me poussent à faire toujours mieux. Je peux vous dire que je n'ai pas l'intention de m'arrêter. J'essaierai d'évoluer toujours, j'exprime tout ma gratitude à ma famille pour m'avoir supporté tout au long de ma scolarité.*

*Si tu veux courir, cours un kilomètre*
*Si tu veux changer ta vie, cours un marathon.*
*Emile Zatopek.*

# Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude des Solutions auto similaires pour une équation de réaction diffusion non linéaire. Nous nous intéressons ici à étudier l'équation de porous media en une dimension d'espace, On y étudie cette équation avec la technique de l'auto similarité.

Dans le premier chapitre, on commence par étudier l'équation de porous media, en donnant le principe d'auto similarité, et les conditions d'invariance d'echelle (Similarité) de telle solution.

Dans le deuxième chapitre notre étude est basée sur ce quand on'appelle "Les solutions auto similaires classiques".

Finalement dans le troisième chapitre nous essayons de généraliser les résultats, on va présentant une forme plus générale des solutions classiques qui s'appellent «Solutions auto similaires générales»

**Mots-clefs** :

Équation porous media, Solution auto similaire, Solution classique, Solution générale.

# Table des matières

# Introduction

La théorie des équations linéaires a connu beaucoup de progrès, mais il a rapidement été observée que la plupart des équations de modélisation des phénomènes physiques sans excessive simplification ne sont pas linéaires. Cependant, les mathématiques ont des difficultés pour la construction théorique pour les versions non linéaires, il était impossible de faire le progrès significatif, jusqu'à ce que le 20ème siècle. Et ce constat s'applique à d'autres importantes équations aux dérivées partielles **(EDPs)** non linéaires, comme **l'équation porous media(PME)**.

Le grand développement de l'analyse fonctionnelle dans les décennies des années 1930 à 1960 a permis la construction de ces équations aux dérivées partielles non linéaires . Ce qui s'est passé en particulier dans le domaine des équations paraboliques. c'est cette classe des équations qui permettent de décrire des phénomènes de diffusion.

L'équation porous media est un exemple de ces équations, c'est une équation parabolique non linéaire qui touchent plusieurs domaines de la pratique, ce modèle a été proposé par **Juan Luis Vàzquez ([10], [11], [12]), G .I.Barenblatt [7], Josephus Hulshof [9], D.G. Aronson [3], L.A. Caffarelli [4], Kamin.S [13],** etc....

En général, l'EDPs n'admet pas des solutions exactes, surtout à conditions initiales. Mais quelquefois, pour quelques EDPs qui possèdent la caractérisation de la symétrie, on peut déterminer leurs solutions exactes avec quelques transformations, l'EDPs devient équation différentielle ordinaire (EDOs), dans ce cas les solutions sont appelées « solutions auto similaires ».

On peut classer les solutions auto similaire en plusieurs catégories.

Ce mémoire contient trois chapitres.

Dans le premier chapitre nous donnons les différentes définitions et les propriétés de l'équation porous media, en particulier, on donne les critères d'auto similarité présentant l'équation porous media et le principe d'auto similarité, on présente également les différentes catégories de solutions auto similaires.

Dans le deuxième chapitre on se consacre à l'étude des solutions auto similaires **(classiques)**, à partir de la recherche des conditions de similarité, on donne en particulier des solutions explicites appelées respectivement, **Barenblatt, Noyaux de Gauss, Polubarinova-Kochina, dipôle, solution explicite pour certain cas particulier.**

Finalement, dans le dernier chapitre, nous essayons de généraliser les résultats de chapitre 2, on cherche ainsi des solutions auto similaires de forme plus générales, on calcule les paramètres décrivant l'évolution en temps et le profil $\varphi$, puis, on discute quelques solutions selon les exposants de similarité, enfin, on donne un autre type des solutions auto similaires qui s'appellent auto similaires exponentielles avec une nouvelle condition de similarité.

# Chapitre 1

# L'équation porous media (équation des milieux poreux)

Les solutions auto similaires jouent un grand rôle dans les équations aux dérivées partielles d'évolution, elles permettent surtout de déterminer le comportement en temps des solutions au voisinage de l'infinie ou zéro.

Ce type de solutions sont considérés comme des solutions particulières, leurs formes dépend d'un profil appelé parfois anzas.

En général, ils existent plusieurs formes de solutions auto similaires.

Dans ce chapitre nous allons présenter premièrement l'équation appelée "**porous media équation**" (PME). Ensuite les principes de similarité.

L'équation du porous media est une équation parabolique non linéaire de la forme:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{t}} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(u^{\mathrm{m}}); & m \geq 1;\; x \in \mathbb{R};\; t \geq 0 \\ \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.1}$$

nous suggérons de trouver la solution de l'équation (1.1) sous forme "**auto-similaire**" suivante:

$$u(x,t) = \lambda^{\alpha} u(\lambda^{\beta} x, \lambda t) \tag{1}$$

pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+}$.

Le prinicipe de la recherche des solutions auto-similaires consiste à remplacer la forme (1) dans l'équation (1.1), ce qui permet de transformer l'équation aux dérivées partielles (1.1) en une équation différentielle ordinaire EDO non linéaire.

Pour admettre de telles solutions l'équation (1.1) doit vérifier les conditions dite de **"similarité"**.

## 1.1 L'invariance d'échelle et l'auto_similarité

### 1.1.1 Définition

*Soit* $P(x, t, u, u_x, .......) = 0$ *une équation aux dérivées partielle alors,* $P$ *admet une solution auto-similaire si seulement si elle est invariante (par échelle) sous l'action de dilatation c'est -à-dire si on fait le changement de variables suivant (voir[11], [10]):*

$$u^{'} = Ku;\ x' = Lx;\ t' = Tt \tag{1.2}$$

*et* $u(x, t)$*est une solution de l'équation* (1.1) *alors:*

$$u^{'}(x^{'}, t^{'}) = Ku\left(\frac{x^{'}}{L}, \frac{t^{'}}{T}\right) \tag{1.3}$$

*est une solution aussi de l'équation* (1.1).

### 1.1.2 Règle de dérivation (la condition de similarité)

On a l'équation $u_t = (u^m)_{xx}$ ; $x \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0$ ;si on remplace la formule (1.3) dans cette équation on obtient:

$$\frac{\partial u^{'}(x^{'}, t^{'})}{\partial t'} = \frac{\partial Ku(x, t)}{\partial Tt} = \frac{K}{T}\frac{\partial u(x, t)}{\partial t};\quad x = \frac{x'}{L};\ t = \frac{t'}{T}$$

Et:

$$\frac{\partial^2 u^{'^m}(x^{'}, t^{'})}{\partial x'^2} = \frac{\partial^2 K^m u^m(x, t)}{\partial L^2 x^2} = \frac{K^m}{L^2}\frac{\partial^2 u^{^m}(x, t)}{\partial x^2}$$

on peut donc conclure que:

$$\frac{K}{T}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{K^m}{L^2}\frac{\partial^2 u^m(x,t)}{\partial x^2}$$

d'où, (1.3) sera une solution de (1.1) ssi:

$$\frac{K}{L} = \frac{K^m}{L^2} \Longrightarrow KT^{-1} = K^m L^{-2} i, e;$$

$$\boldsymbol{K^{m-1} = L^2\ T^{-1}} \tag{1.4}$$

(1.4) est appelé la condition de similarité ou bien "**condition d'invariance d'échelle**" pour l'équation de porous media.

**Exemple sur la condition de similarité:**

On va présenter un exemple sur une équation fondamentale dans la théorie mathématique pour expliquer cette phase.

**Cas de l'équation de la chaleur:** dans ce cas $m = 1$, alors l'équation (1.1) devient:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ \\ u(x,0) = u_0(x). & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{CH}$$

Cette équation admet une solution auto similaire si elle vérifie la condition de similarité , on a la forme de la solution auto similaire suivante $u(x,t) = Ku\left(\dfrac{x'}{L}, \dfrac{t'}{T}\right)$, si l'on rempalce dans l'équation (CH) on trouve :

$$\frac{\partial Ku(x,t)}{\partial Tt} = \frac{\partial^2 Ku(x,t)}{\partial L^2 x^2}$$

ce qui implique:

$$\frac{K}{T}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{K}{L^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad , x = \frac{x'}{L}; t = \frac{t'}{T}$$

Pour l'équation (CH) admet des solutions auto similaire sous forme (1) il faut que

$$\frac{K}{T} = \frac{K}{L^2}$$

Donc la condition de similarité pour l'équation de la chaleur est:

$$L^2 = T \ \ / \ \ L \text{ et } T \text{ des paramètres}$$

## 1.2 Les solutions auto similaires

### 1.2.1 La forme des solutions auto similaires

Dans le cas général si on prend $m \neq 1 (m > 1)$, la condition d'invariance (1.4) devient:

$$K = L^{\frac{2}{m-1}} T^{\frac{-1}{m-1}} \Longrightarrow K = \left(\frac{L^2}{T}\right)^{\frac{1}{m-1}}$$

Par suite, la formule (1.3) devient comme suit:

$$u'(x',t') = \left(\frac{L^2}{T}\right)^{\frac{1}{m-1}} u(x,t)$$

Pour cette raison, on peut donner une formule plus génerale pour la formule (1.3):
On pose $u' = \tau u$ alors:

$$\tau u(x,t) = \left(\frac{L^2}{T}\right)^{\frac{1}{m-1}} u\left(\frac{x}{L}, \frac{t}{T}\right) \tag{1.5}$$

**Lemme 1.2.1** *[10]:*

*Si $u$ est une solution de l'équation de porous media, sous l'action de dilatation alors, $\tau u$ qui est donnée par la formule (1.5) est une solution de cette équation. La dilatation $\tau u$ est appelée la transformation d'échelle.*

**Remarque 1.2.1** *:*

*En pratique, on peut utiliser un seul paramètre pour classifier la famille des solutions de l'équation (1.1) à des sous familles. L'idée là, si on pose une nouvelle relation entre les deux paramétre $K$ et $L$, alors on obtient la transformation (1.5) à un seul paramétre $T$ comme suit:*

Si on prend

$$K = L^{-\gamma} \quad avec \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

D'aprés la condition d'invariance d'échelle (1.4) on obtient:

$$L^{-\gamma(m-1)-2} \quad = \quad T^{-1} \Longleftrightarrow L = T^{\frac{1}{\gamma(m-1)+2}}$$

Si on pose $\beta = \dfrac{1}{\gamma(m-1)+2}$, alors

$$L = T^{\beta} \ ; \ \beta \in \mathbb{R}. \tag{**}$$

D'autre part, on a

$$K = T^{\frac{2\beta-1}{m-1}} = T^{\frac{-\gamma}{\gamma(m-1)+2}}$$

On pose $\alpha = \dfrac{\gamma}{\gamma(m-1)+2}$, alors:

$$K = T^{-\alpha}; \ \alpha \in \mathbb{R}. \tag{***}$$

Donc

$$K = T^{-\alpha} \text{ et } \ L = T^{\beta} \ \ ; \qquad \alpha, \ \beta \in \mathbb{R}. \tag{1.6}$$

En obtient les exposants $\alpha$ et $\beta$ comme suit:

$$\alpha(m,\gamma) = \frac{\gamma}{\gamma(m-1)+2} \ , \qquad \beta(m,\gamma) = \frac{1}{\gamma(m-1)+2} \tag{1.7}$$

D'aprés les formules (*), (***) on trouve $L^{-\gamma} = T^{-\alpha}$ et avec la formule (**) on trouve

$$L^{-\gamma} = L^{\frac{-\alpha}{\beta}}$$

donc

$$\gamma = \frac{\alpha}{\beta}; \qquad \alpha, \ \beta, \ \gamma \in \mathbb{R} \tag{1.8}$$

On peut donc conclure une relation entre $\alpha$ et $\beta$, on a

$$\beta = \frac{1}{\gamma(m-1)+2}$$

En prenant en compte la formule (1.8) on obtient

$$\beta\gamma(m-1) + 2\beta = 1$$

Ce qui implique

$$\alpha(m-1) + 2\beta = 1$$

D'aprés la formule (1.6), la transformation (1.5) devient:

$$\tau u(x,t) = T^{-\alpha} u\left(\frac{x}{T^{\beta}}, \frac{t}{T}\right)$$

Si on pose $\lambda = \dfrac{1}{T}$ alors, la solution devient:

$$u_\lambda(x,t) = (\tau_\lambda)u(x,t) = \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t) \tag{1.9}$$

(1.9) est appelée la solution auto similaire de l'équation (1.1) pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$, (voir[11], [10]).

### 1.2.2 Différentes solutions de type auto similaires

Il y a plusieurs formes des solutions auto similaires, on peut classer ces solutions comme suit:

1. **Solution auto similaire classique** :

   Appelée aussi solution de type 1, de la forme :

$$u(x,t) = t^{-\alpha}\varphi(xt^{-\beta})$$

où $\alpha$ et $\beta$ sont des constantes et $\varphi$ est le profil de la solution auto similaire (qu'on va voir dans le chapitre 2).

2. **Solution blow up** :

   Est également aussi "solution de type 2" c'est une solution qui explose en temps fini, s'écrit sous forme

$$u(x,t) = (t-T)^{-\alpha}\varphi\left(\frac{x}{(t-T)^\beta}\right) \qquad T > 0.$$

3. **Solution auto similaire générale:**

   C'est la solution de type 3 de forme:

$$u(x,t) = C(t)\varphi(xB(t))$$

où $C(t)$ et $B(t)$ sont des fonctions dépendantes de $t$, et $\varphi$ le profil (qu'on va voir dans le chapitre 3).

## 1.3 Existence de la solution auto similaire

On considère le problème de cauchy[1] suivant:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u^m}{\partial x^2} & x \in \mathbb{R}, t > 0, m > 1 \\ \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Si on pose la condition initiale :

$$u_0(x) = A(\sigma)\,|x|^{-\gamma} \qquad / \ \gamma = \frac{x}{|x|} \tag{1.10}$$

avec $A$ est une fonction de $S^{d-1}$[2], d'aprés [11], le problème de cauchy admet une solution unique non négative si seulement si $-2(m-1) < \gamma < 1$ .

Soit $u$ est une solution de (1.1), et d'aprés la transformation (1.3)

$$\tilde{u}(x,t) = Ku\left(\frac{x}{L}, \frac{t}{T}\right)$$

et si $K = L^{-\gamma}$(comme on vu dans la section précidente), la condition initiale devient:

$$\tilde{u}(x,0) = Ku(\frac{x}{L}) = KA\left|\frac{x}{L}\right|^{-\gamma} = u(x,0)$$

et par l'unicité des solutions de l'équation (1.1) on peut conclure $\tilde{u}(x,t) = u(x,t)$ (voir[1]) i,e.,

$$\tilde{u}(x,t) \;=\; u(x,t) = Ku\left(\frac{x}{L}, \frac{t}{T}\right)$$

(1) Augustin Louis, baron Cauchy, né à Paris le 21 août 1789 et mort à Sceaux (Hauts-de-Seine) le 23 mai 1857, est un mathématicien français, il a 800 parutions et sept ouvrages. On lui doit notamment en analyse l'introduction des fonctions holomorphes et des critères de convergence des suites et des séries entières.

(2) Une fonction de $S^{d-1}$c-à-d est une fonction de sphère avec $d$ la dimension

**Théorème 1.3.1** *(voir[10]):*

*Pour toute condition initiale de la forme (1.10) avec* $A \in S^{d-1}$ *et* $-2(m-1) < \gamma < 1$, *l'équation (1.1) admet une solution unique* $u(x,t)$ *qu'est une solution de type 1*

$$u(x,t) = t^{-\alpha}\varphi(xt^{-\beta})$$

*tel que* $\beta = \dfrac{\alpha}{\gamma}$ *et*

$$\frac{1}{\alpha} = (m-1) + \frac{2}{\gamma}$$

Dans le chapitre suivant, nous allons étudier les solutions de type auto similaires classiques pour notre équation (1.1).

# Chapitre 2

# Les solutions auto similaires classiques

Dans ce chapitre on cherche les solutions auto similaires de l'équation (1.1) sous forme classique (voir[11]), premièrement on cherche la condition pour que l'équation admet des solutions, puis, on présente des solutions explicites.

## 2.1 Définition

On a vu dans le chapitre 1 qu'une solution auto similaire peut s'écrire sous la forme suivante:

$$u_\lambda(x,t) = \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t)$$

Si $\lambda = \dfrac{1}{T}$, la solution devient:

$$u(x,t) = T^{-\alpha} u\left(\frac{x}{T^\beta}, \frac{t}{T}\right)$$

Et d'autre part si on pose $T = t$ alors :

$$\begin{aligned} u(x,t) &= t^{-\alpha} u\left(\frac{x}{t^\beta}, 1\right) \\ &= t^{-\alpha} \varphi\left(\frac{x}{t^\beta}\right). \end{aligned}$$

Alors on obtient:

$$u(x,t) = t^{-\alpha}\varphi(\xi) \quad avec \;\; \xi = \frac{x}{t^{\beta}} \tag{2.1}$$

(2.1) est la solution classique de l'équation (1.1) ou bien appelée solution de type 1, où $\alpha$, $\beta$ sont des constantes réelles, elles sont appelées les exposants, dans ce cas $\varphi(\xi) = u(\xi, 1)$ est le profil de la solution.

## 2.2 La condition de similatité

L'équation (1.1) admet des solutions sous la forme (2.1) si les exposants vérifient certaines conditions de similarité (voir[10], [14]), comme va déterminer

On remplace la solution (2.1) dans l'équation (1.1), et on calcule les dérivées partielles d'ordre 1 de $u$ comme suit:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= -\alpha t^{-\alpha-1}\varphi(xt^{-\beta}) + t^{-\alpha}\varphi^{'}(xt^{-\beta}).xt^{-\beta-1}(-\beta)\\ \\ &= -\alpha t^{-\alpha-1}\varphi(xt^{-\beta}) - \beta t^{-\alpha-1}\varphi^{'}(xt^{-\beta}).xt^{-\beta}\end{aligned}$$

Et les dérivées partielles d'ordre 2 de $u$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u^m}{\partial x^2}(x,t) &= t^{-m\alpha}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\varphi^m)(xt^{-\beta})\right)\\ \\ &= t^{-m\alpha-2\beta}(\varphi^m)^{''}(xt^{-\beta})\end{aligned}$$

L'équation (1.1) devient :

$$-\alpha t^{-\alpha-1}\varphi(xt^{-\beta}) - \beta t^{-\alpha-1}\varphi^{'}(xt^{-\beta}).xt^{-\beta} = t^{-m\alpha-2\beta}(\varphi^m)^{''}(xt^{-\beta})$$

Si en notant $\xi = xt^{-\beta}$ on obtient:

$$\alpha t^{-\alpha-1}\varphi(\xi) + \beta t^{-\alpha-1}\varphi^{'}(\xi).\xi + t^{-m\alpha-2\beta}(\varphi^m(\xi))_{\xi\xi} = 0.$$

Pour éliminer $t$ , on divise par $t^{-\alpha-1}$, on obtient:

$$\alpha\varphi(\xi) + \beta\varphi^{'}(\xi).\xi + t^{-\alpha(m-1)-2\beta+1}(\varphi^m(\xi))_{\xi\xi} = 0. \tag{2.2}$$

On suppose formellement que les variables sont indépendantes et on dérive par rapport à $t$ on obtient:

$$(-\alpha(m-1)-2\beta+1)t^{-\alpha(m-1)-2\beta}(\varphi^m(\xi))_{\xi\xi}=0.$$

Or

$$t^{-\alpha(m-1)-2\beta}(\varphi^m(\xi))_{\xi\xi}\neq 0$$

Donc:

$$\alpha(m-1)+2\beta=1 \tag{2.3}$$

La formule (2.3) est la relation entre $\alpha$ et $\beta$, appelée condition de similarité cette relation nous permet de réduire le nombre d'exposants inconnus.

En remplaçant (2.3) dans (2.2), on obtient l'équation différentielle ordinaire suivante:

$$(\varphi^m(\xi))_{\xi\xi}+\beta\xi.\varphi^{'}(\xi)+\alpha\varphi(\xi)=0. \tag{2.4}$$

(2.4) est une équation non linèaire n'est pas facile à résoudre.

## 2.3 Solutions explicites, cas particuliers

L'équation porous media admet un certain nombres de solutions explicites qui jouent un rôle important dans le déveleppement de la théorie mathématique du problème (voir[11], [7], [10], [2], [14]).

On veut chercher des solutions particulières de l'équation (1.1), de formes explicites, si on ajoute des conditions sur l'équation en dimension 1 d'espace.

On commence tout d'abort par donner la solution dite de **Barenblatt.**

### 2.3.1 La solution de Barenblatt (ZKB)

C'est une solution fondamentale des autres solutions de l'équation **PME** et elle est obtenue en 1950 par **Z**el'dovich et **K**ompaneets et **B**arenblatt (voire[7], [5], [6], [2], [19])

**Définition 2.3.1** *(Solution de Barenbnlatt), (voir[2])*

*Soit $C > 0$ est une constante .et on choisit*

$$\alpha = \frac{1}{m+1}, \qquad \beta = \alpha$$

*la solution Barenblatt pour l'équation (1.1) est, $U_{C,m}(x,t) : (0,\infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définit par:*

$$U_{C,m}(x,t) = \frac{1}{t^{\alpha}} \left[ C - \frac{m-1}{2m} \alpha (x)^2 t^{-2\alpha} \right]^{\frac{1}{m-1}}.$$

**Détermination:**

Si on pose

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,t)dx = q \qquad \textit{pour } t > 0 \text{ ,q:constant}$$

On obtient:

$$\int_{\mathbb{R}} t^{-\alpha} \varphi(\xi) dx = q$$

On a:

$$\xi = x t^{-\beta} \Longrightarrow t^{\beta} d\xi = dx$$

Alors:

$$\int_{\mathbb{R}} t^{-\alpha} \varphi(\xi) dx = q \iff t^{-\alpha+\beta} \int_{\mathbb{R}} \varphi(\xi) d\xi = q$$

Ce qui implique que

$$-\alpha + \beta = 0 \iff \alpha = \beta$$

Dans ce cas, l'équation (2.4) devient:

$$(\varphi^m(\xi))_{\xi\xi} + \alpha.\xi(\varphi(\xi))_{\xi} + \alpha\varphi(\xi) = 0.$$

Ceci est équivalent à:

$$(\varphi^m)'' + \alpha(\xi.\varphi)' = 0$$

On intégre par rapport à $t$ on obtient:

$$(\varphi^m)' + \alpha(\xi.\varphi) = C$$

On a $C = 0$ (on $\varphi^{'}(0) = 0$) alors:

$$(\varphi^m)^{'} + \alpha(\xi.\varphi) = 0$$

Alors

$$m\varphi^{'}\varphi^{m-1} = -\alpha\xi.\varphi$$

Ce qui implique

$$\frac{d\varphi}{d\xi}\varphi^{m-1} = \frac{-\alpha}{m}\xi\varphi$$

Donc

$$\varphi^{m-2}d\varphi = \frac{-\alpha}{m}\xi d\xi$$

En intégrant les deux cotés :

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi^{m-2}d\varphi = \frac{-\alpha}{m}\int_{\mathbb{R}} \xi d\xi$$

Alors on obtient

$$\frac{1}{m-1}\varphi^{m-1} = \frac{-\alpha}{2m}\xi^2 + C$$

Finalement le profil $\varphi$ sera définit par l'expression:

$$\varphi(\xi) = \left[\frac{-\alpha(m-1)}{2m}\xi^2 + C\right]^{\frac{1}{m-1}}$$

Donc la soution $U$ s'écrit comme :

$$U_{m,c}(x,t) = t^{-\alpha}\left[C - \frac{\alpha(m-1)}{2m}\ (x)^2 t^{-2\alpha}\right]^{\frac{1}{m-1}}$$

$$U_{m,c}(x,t) = t^{-\alpha}(C + K(x)^2 t^{-2\alpha})^{\frac{1}{m-1}} \tag{2.5}$$

Avec

$$\alpha = \frac{1}{m+1}; \quad \beta = \alpha;\ K = \frac{-\alpha(m-1)}{2m} \tag{2.6}$$

$C > 0$ est une constante arbitraire, par suite, cette solution est appelée ***"Solution de Barenblatt",*** de l'équation porous media.

La solution de Barenblatt est existe pour $\forall t > 0$ telle que

$$U(x,t) = t^{-\alpha} \begin{cases} \left(C - \dfrac{m-1}{2m}\alpha\dfrac{|x|^2}{t^{2\alpha}}\right)^{\frac{1}{m-1}} & \text{si } \dfrac{|x|^2}{t^{2\alpha}} < C\dfrac{2m}{(m-1)\alpha} \\ 0 & \text{si } \dfrac{|x|^2}{t^{2\alpha}} > C\dfrac{2m}{(m-1)\alpha} \end{cases}$$

$U$ à support compact

Si $t \longrightarrow 0$ nous avons $U_{C,m}(x,t) \longrightarrow M\delta(x)$ telle que $M$ est une fonction de $C$ $(m)$ et $\delta$ la fonction de Dirac[(3)], la solution est appelée **Solution ZKB ou Solution Barenblatt** .

Si on pose $m = 2$ , $C = 5$, la figure 2.1 montre le graphe de cette solution :

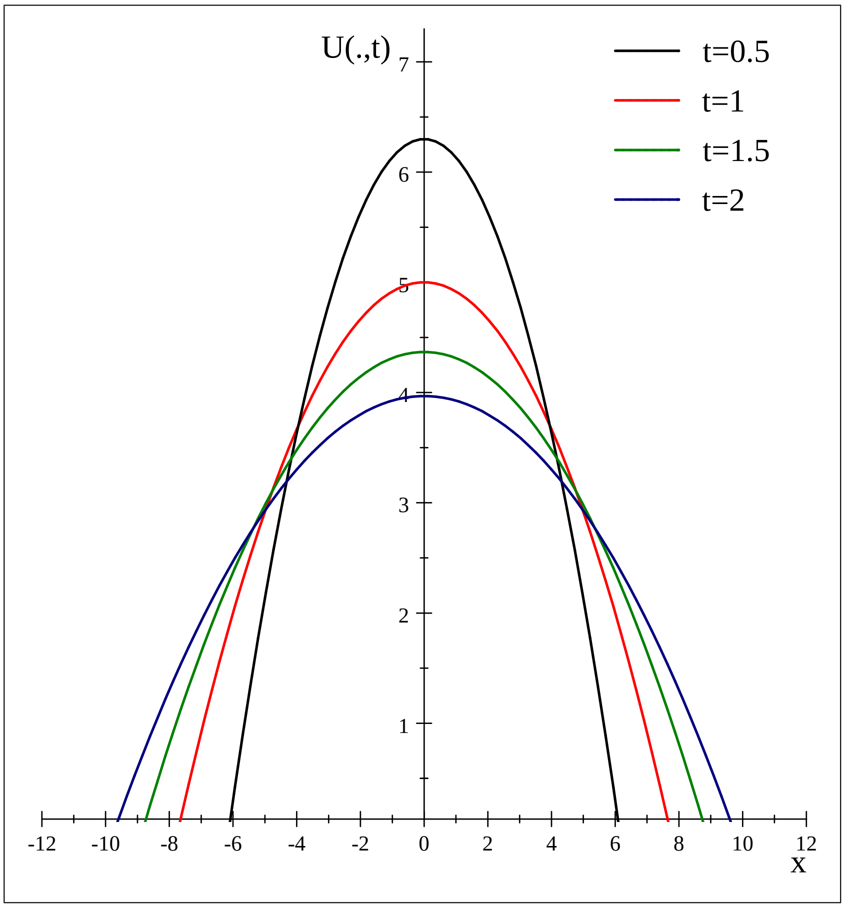



**Figure 2.1: Solution ZKB pour l'équation (1.1) pour $\alpha = \beta$ et $m > 1$**

(3) La distribution de Dirac où masse de Dirac, aussi appelée par abus de langage fonction $\delta$ de Dirac, introduite par Paul Dirac, peut être informellement considérée comme une fonction $\delta$ qui prend une «valeur» infinie en 0, et la valeur zéro partout ailleurs, et dont l'intégrale sur $\mathbb{R}$ est égale à 1.

### 2.3.2 Solution 'Noyaux de Gauss'

Cette solution est la deuxième solution explicite pour l'équation (1.1).

Si on prend $m = 1$ dans l'équation **PME,** on obtient l'équation de la chaleur, (voir[14], [11], [2]), alors l'équation (1.1)

devient:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (x,t) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}.$$

On a la relation

$$\alpha(m-1) + 2\beta = 1$$

Et comme $m = 1$ alors:

$$\beta = \frac{1}{2} \text{ et } \alpha = \frac{1}{2}$$

La solution auto similaire classique devient comme suit:

$$u(x,t) = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\varphi(xt^{\frac{-1}{2}})$$

pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$

Donc on conclure que l'équation différentielle ordinaire (2.4) devient comme suivante :

$$(\varphi(\xi))'' + \frac{1}{2}\xi(\varphi(\xi))' + \frac{1}{2}\varphi(\xi) = 0; \backslash\xi = x\sqrt{t}.$$

Or

$$(\varphi(\xi))'' + \frac{1}{2}(\xi\varphi(\xi))' = 0 \tag{2.7}$$

On peut résoudre cette équation facilement.

Si en intègre l'équation (2.7) une fois on obtient:

$$(\varphi(\xi))' = -\frac{1}{2}\xi\varphi(\xi) + c$$

Si $c = 0$ (pour $\varphi^{'}(0) = 0$) alors:

$$\begin{aligned} \varphi' &= -\frac{1}{2}\xi\varphi \\ &\Longleftrightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = -\frac{1}{2}\xi\varphi \\ &\Longleftrightarrow \frac{\partial\varphi}{\varphi} = -\frac{1}{2}\xi d\xi \end{aligned}$$

On intègre les deux cotés,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial\varphi}{\varphi} = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \xi d\xi$$

Ce qui donne,

$$\log\varphi(\xi) = -\frac{1}{4}\xi^2 + c$$

Donc le profil $\varphi$ est égale à:

$$\varphi(\xi) = Ce^{(-\frac{1}{4}\xi^2)}.$$

Pour une constante $C$, pour laquelle nous décidons qu'elle prenne la valeur $(4\pi)^{-\frac{1}{2}}$, c'est un choix particulier pour $u(x,t)$, et la solution devient

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}}e^{(\frac{-x^2}{4t})} \quad \backslash(x,t) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}$$

$u : \mathbb{R}\times(0,\infty) : u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}}e^{(\frac{-x^2}{4t})}$ , est appelée *"**Noyoux de Gauss**"*, est une solution classique de l'équation de la chaleur et son graphe est donné dans la figure 2.2 comme suit:

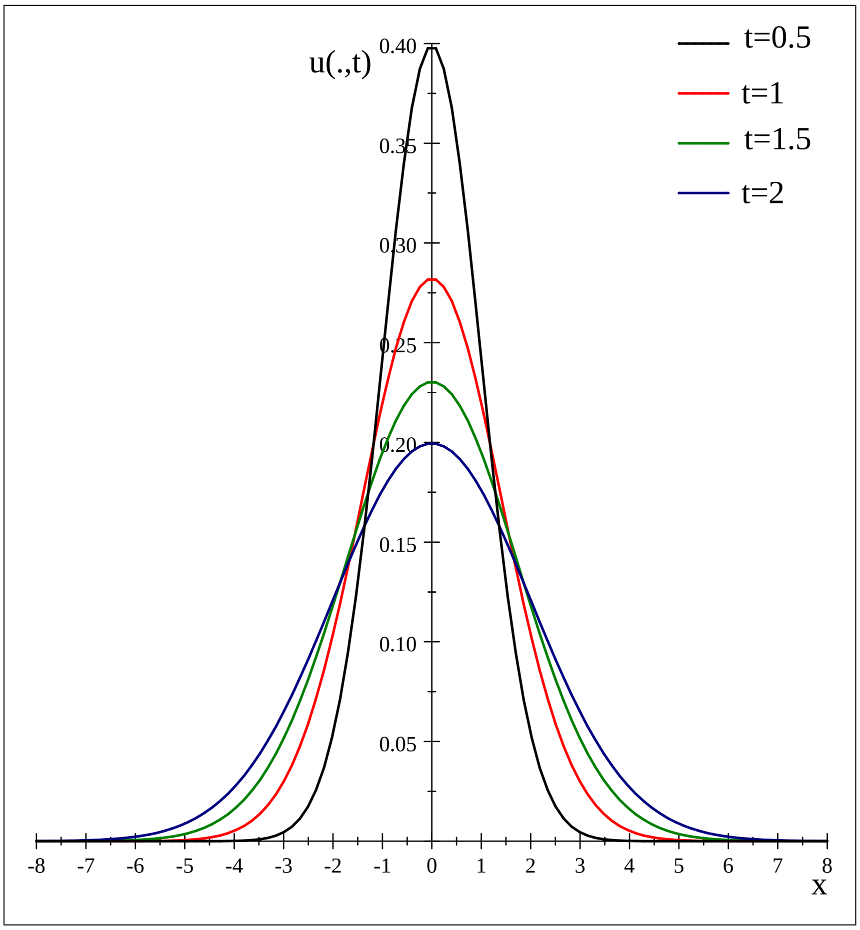



**Figure 2.2:Solution fondamentale de l'équation la chaleur pour** $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}, m = 1$

### 2.3.3 Solution de dipôle :

Pour d'autre valeurs de $\alpha$ et $\beta$ telle que

$$\alpha = \frac{1}{m}, \beta = \frac{1}{2m}$$

On peut trouver une solution auto similaire appelée *"**Solution de dipôle**"*, (voir[8], [9], [10]).

Si on pose $\alpha = \dfrac{1}{m}$ et $\beta = \dfrac{1}{2m}$, la forme de la solution classique (2.1) devient

$$u(x,t) = t^{\frac{-1}{m}} \varphi(\xi) \ / \ \xi = x t^{\frac{-1}{2m}}, \ m > 1$$

dans ce cas l'EDO (2.4) devient :

$$(\varphi^m)'' + \frac{1}{m}\varphi + \frac{1}{2m}\xi\varphi' = 0 \tag{2.8}$$

Le profil $\varphi_{dip}$ c'est la solution de cette équation est égale à:

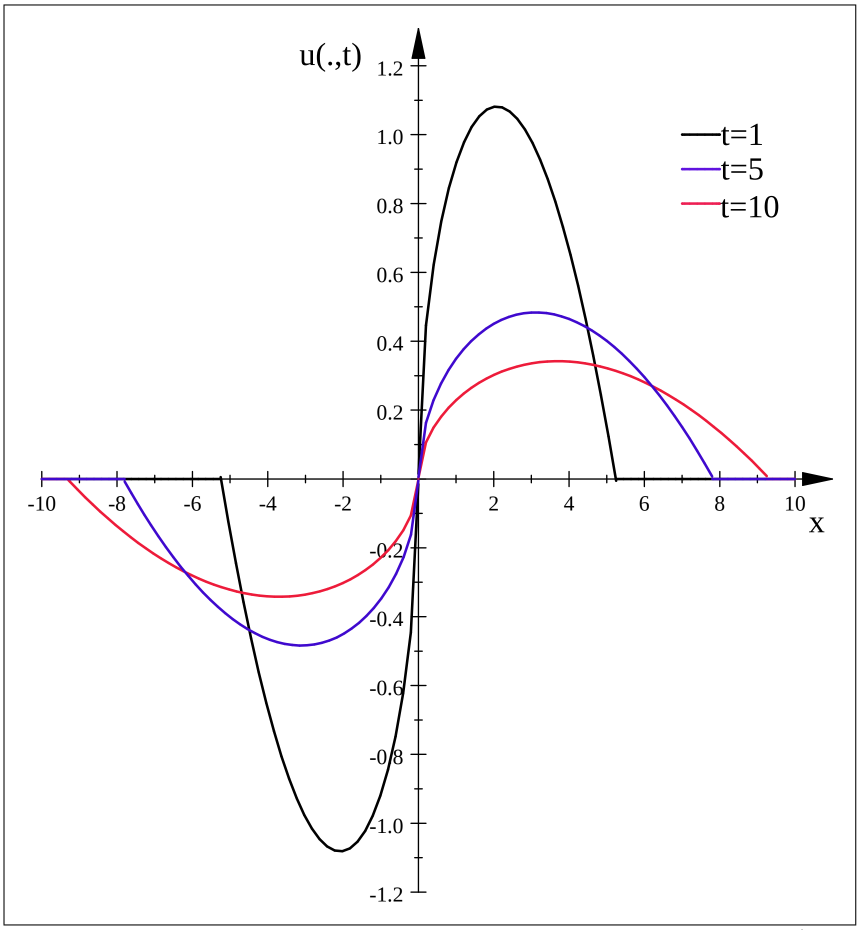
$$\varphi_{dip}(\xi) = |\xi|^{\frac{1}{m}} \, sign(\xi) \left( C - k \, |\xi|^{\frac{m-1}{m}} \right)^{\frac{1}{m-1}} \tag{2.9}$$

donc la solution de dipôle est:

$$u(x,t) = t^{\frac{-1}{m-1}} \, |x|^{\frac{1}{m}} \, sign(x) \left[ C t^{\frac{m-1}{2m^2}} - \frac{m-1}{2m(m+1)} \, |x|^{\frac{m+1}{m}} \right]^{\frac{1}{m-1}} \tag{2.10}$$

Cette solution à support compact, est représentée par Barenblatt et Zel'dovich en 1957

Et son graphe prend la forme suivante :




**Solution de dipôle pour l'équation (1.1) avec m=2,** $\alpha = \dfrac{1}{m}$, $\beta = \dfrac{1}{2m}$

### 2.3.4 Solution Polubarinova -kochina

La solution de ***"Polubarinova-Kochina"*** est une autre solution de l'équation (1.1) pour d'autre valeurs de $\alpha$ et $\beta$, (voir[10], [11]).

On a le problème suivant:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 h^m(x,t)}{\partial x^2} \\ \\ h(0,t) = H_0 > 0, \quad \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} h(x,t) = 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

Dans le cas où $H_0 > 0$, il existe une solution auto similaire sous forme $h(x,t) = t^{-\alpha}\varphi(\xi)$, $\xi = xt^{-\beta}$ ses conditions au bord est compatible avec cette forme si $\alpha = 0$ et $\beta = \dfrac{1}{2}$, cela revient à chercher des solutions sous la forme

$$h(x,t) = \varphi(\xi); \xi = xt^{\frac{-1}{2}}$$

C'est-à-dire à chercher $\varphi$ solution de l'EDO suivante:

$$(\varphi^m)'' + \frac{1}{2}\xi\varphi' = 0 \tag{2.12}$$

avec la condition initial $h(x,0) = 0$ pour $x > 0$ cette solution est représentée par **Polubarinova -kochina** en 1948 pour $0 < \xi < \infty$ ; $\varphi(0) = H_0$, $\varphi(\infty) = 0$ si $H_0 = 1$, l'EDO (2.12) est étudié numériquement, en s'appuyant sur les résultats némuriques présentés dans ([15], [16], [17], [18]).

Le garphe qui est dans la figure suivante montre la solution de Polubarinova-Kochina pour $m > 2$, [10]

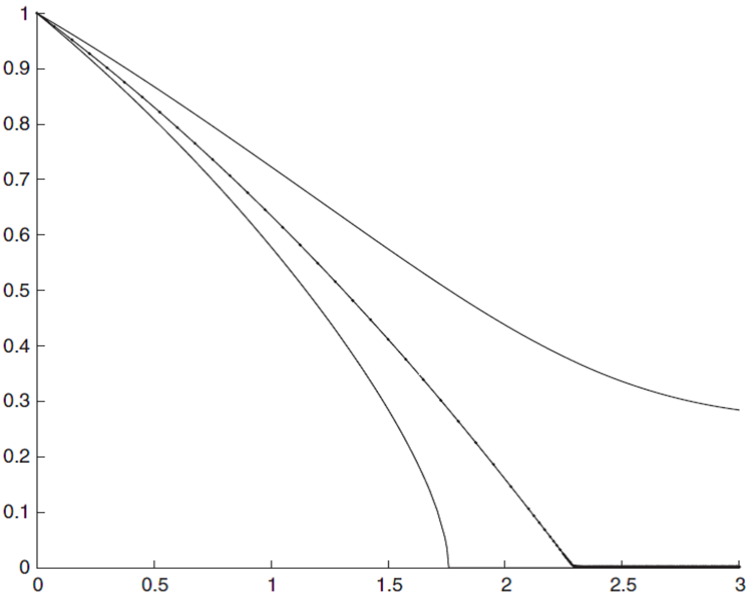



Figure 2.3.1 : **Solution de polubarinova-Kochina pour** $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{1}{2}$, **m>1**

**Remarque 2.3.1**

Si on prend $m = 1$, on obtient l'équation de la chaleur on peut résoudre cette équation avec les conditions précédentes, donc l'équation (2.12) devient

$$(\varphi)'' + \frac{1}{2}\xi\varphi' = 0$$

$$-\frac{1}{2}\xi = \frac{\varphi''(\xi)}{\varphi'(\xi)} \iff -\frac{1}{4}\eta^2 + c = \ln(\varphi')$$

aprés les calcules on trouve le profil $\varphi$ comme suite:

$$\varphi(\xi) = K \int_0^{+\infty} e^{-(\frac{\xi}{2})^2}\, d\xi \qquad /K : cons\tan te$$

Comme $\xi = xt^{\frac{-1}{2}}$, donc la solution est égale à:

$$u(x,t) = \frac{K}{\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} e^{-(\frac{x}{2\sqrt{t}})^2} dx$$

## 2.3.5 Solution explicite pour certain cas particulier

On peut trouver une solution explicite pour l'équation de porous media, si on prend autre valeurs de les exposant de similarité.

Si  on prend

$$\beta = 0 \text{ et } \alpha > 0$$

La solution (2.1) s'écrit sous la forme

$$u(x,t) = t^{-\alpha}\varphi(x)$$

Et l'équation (2.4) devient

$$(\varphi^m)'' + \alpha\varphi = 0 \tag{2.13}$$

On peut résoudre cette équation différentielle ordinaire comme suit:

Si on pose $\varphi^m = g$ dans (2.13) et on intégre on obtient

$$(g\prime)^2 = \frac{-2\alpha m}{m+1} g^{\frac{m+1}{m}} \qquad ((2.13)')$$

qui s'écrit comme

$$g\prime = \left[\frac{-2\alpha m}{m+1} g^{\frac{m+1}{m}}\right]^{\frac{1}{2}} \quad ; \; K = \frac{-2\alpha m}{m+1},$$

Or

$$\frac{dg}{dx} = K^{\frac{1}{2}} g^{\frac{m+1}{2m}}$$

$$\Longleftrightarrow \; g^{\frac{-(m+1)}{2m}} dg = K^{\frac{1}{2}} dx$$

Si en intégre, on obtient

$$\frac{2m}{m-1} g^{\frac{m-1}{2m}} = K^{\frac{1}{2}} x + c$$

On a $c = 0$ (on $g(0) = 0$) alors:

$$g = \left[\frac{m-1}{2m} K^{\frac{1}{2}} x\right]^{\frac{2m}{m-1}} / K = \frac{-2\alpha m}{m+1}$$

Ce qui implique

$$g = \left[\frac{-\alpha(m-1)^2}{2m(m+1)} x^2\right]^{\frac{m}{m-1}}$$

Alors

$$\varphi(x) = \left[\frac{-\alpha(m-1)^2}{2m(m+1)} x^2\right]^{\frac{1}{m-1}}$$

Finalement la solution est égale à:

$$u(x,t) = t^{-\alpha}\left[\left|\frac{-\alpha(m-1)^2}{2m(m+1)}x^2\right|\right]^{\frac{1}{m-1}}$$

Est une solution non négative pour toute $m > 1$

Et son graphe pour $m = 2$ est donné dans La figure 2.3 suivante:

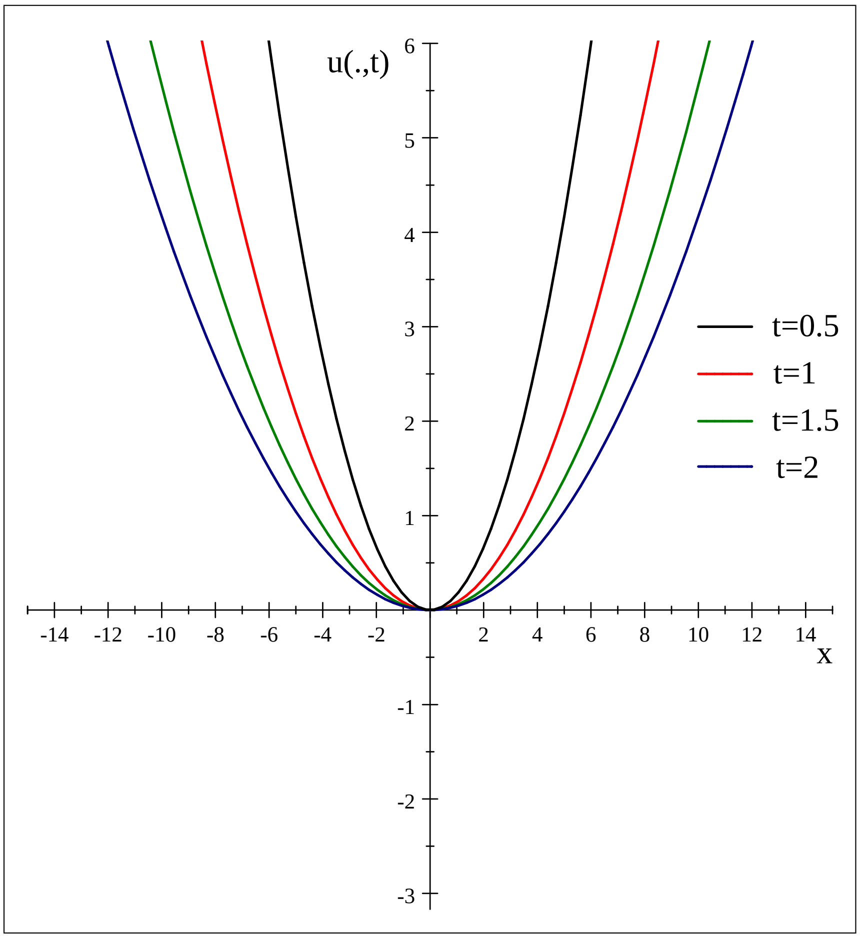



**Figure 2.3: Solution explicite pour** $\beta = 0$ et $\alpha > 0$, m>1

## 2.4 La comparaison entre la solution ZKB et Noyaux de Gauss

Dans la section 2 nous avons vu des solutions particulières de l'équation **PME, la solution Barenblatt (pour $\mathbf{m > 1}$) et Noyaux de Gauss (pour $\mathbf{m = 1}$)**, maintenant on va chercher est-ce -qu'il y a des relations entre les deux (voir[2], [10], [11])?

$Mu(x,t)$ est une solution de l'équation de la chaleur avec $M > 0$ à condition initiale.

**La relation entre les deux solutions:**

On a la solution de Barenblatt suivante:

$$U_{m,C}(x,t) = \frac{1}{t^{\alpha}}\left[C - \frac{m-1}{2m}\alpha\left|x\right|^{2}t^{-2\alpha}\right]^{\frac{1}{m-1}}$$

**Lemme 2.4.1** *[2]:*

Soit $C > 0$ et $\gamma = \dfrac{1}{m-1} + \dfrac{1}{2}$, il existe une constante $a(m)$ tel que :

$$\left\|U_{m,C}(.,t)\right\|_{1} = a(m)C^{\gamma}$$

Telle que la norme

$$\left\|U_{m,C}(.,t)\right\|_{1} \;=\; \int_{\mathbb{R}}\left|U_{m,C}(.,t)\right|dx$$

est indépendent de $t > 0$, (la preuve est dans[2]), si on pose $M = \left\|U_{m,C}(.,t)\right\|_{1}$, est appelée la mass totale, (voir([2]) alors:

$$M \;=\; a(m)C^{\gamma}, \quad a(m) : \text{est constante}$$

Donc la solution de Barenblatt devient :

$$\begin{aligned} U_{m,M}(x,t) \;&=\; \frac{1}{t^{\alpha}}\left[\left(\frac{M}{a(m)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} - \frac{m-1}{2m}\alpha\left|x\right|^{2}t^{-2\alpha}\right]^{\frac{1}{m-1}} \\ &=\; \frac{1}{t^{\alpha}}\left[\left(\frac{M}{a(m)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left(1 - \left(\frac{a(m)}{M}\right)^{\frac{1}{\gamma}}K\left|x\right|^{2}t^{-2\alpha}\right)\right]^{\frac{1}{m-1}} \end{aligned}$$

avec $K = \dfrac{m-1}{2m}\alpha$, ceci est équivalent à:

$$U_{m,M}(x,t) = \frac{1}{t^{\alpha}}\left(\frac{M}{a(m)}\right)^{\frac{1}{\gamma(m-1)}}\left[1-\left(\frac{a(m)}{M}\right)^{\frac{1}{\gamma}} K\,|x|^{2}\,t^{-2\alpha}\right]^{\frac{1}{m-1}}. \tag{2.14}$$

d'autre part, on peut déterminer la constante $a(m)$ explicitement (voir[2], [7]), on obtient:

$$a(m) = \pi^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m-1}{2m}\beta\right)^{\frac{-1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{m}{m-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{m-1}+\frac{1}{2}\right)};$$

Les constantes $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ dépendent de $m$ , qui sont données par:

$$\alpha = \frac{1}{(m-1)+2};\beta = \alpha;\gamma = \frac{2+(m-1)}{2(m-1)}.$$

Où la fonction $\Gamma$ est appelée la fonction de gamma[(4)] (voir[1]), qui s'écrit comme:

$$\Gamma(x) = \int_{0}^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

on utilise *la formule de Stirling* alors, la fonction gamma devient:

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}e^{-x}x^{x-\frac{1}{2}}\left[1+\frac{1}{12}x^{-1}+O(x^{-2})\right]$$

Or

$$\Gamma(x) = (2\pi)^{\frac{1}{2}}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}e^{\mu(x)}. \tag{2.15}$$

avec la fonction $\mu(x)$ qui satisfie $0 \leqslant \mu(x) \leqslant \dfrac{1}{12(x)}$; (voir[1], [2]).

(4) Pour tout nombre complexe $z$ tel que $Re(z) > 0$, on définit la fonction suivante, appelée fonction gamma, et notée par la lettre grecque $\Gamma$ (gamma majuscule): $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$.

**Théorème 2.4.1** ***(la relation entre la solution ZKB et Nayaux de Gauss) [2]:***

*Soit* $M > 0$, *on a* $\lim_{m\to 1} U(x,t) = Mu(x,t)$. *pour tout* $(x,t) \in \mathbb{R}\times(0,\infty)$.

Pour démontrer ce *théorème* on utilise *le Lemme* suivante:

**Lemme 2.4.2** *[2]:*

pour $x$, $y > 0$ la limite :

$$\lim_{m\to\infty} x^y \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+y)} = 1 \tag{2.16}$$

**Preuve.** (lemme)

D'après la formule (2.15) on a :

$$\begin{aligned}
x^y \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+y)} &= x^y \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} e^{\mu(x)}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} (x+y)^{x+y-\frac{1}{2}} e^{-x-y} e^{\mu(x+y)}} \\
&= \frac{x^{x+y-\frac{1}{2}}}{(x+y)^{x+y-\frac{1}{2}}} e^{y+\mu(y)-\mu(x+y)} \\
&= \left(\frac{x}{x+y}\right)^{x+y} \left(\frac{x}{x+y}\right)^{\frac{1-}{2}} e^{y+\mu(y)-\mu(x+y)}
\end{aligned}$$

Donc

$$x^y \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+y)} = \left(1-\frac{y}{x+y}\right)^{x+y} \left(\frac{x}{x+y}\right)^{\frac{1-}{2}} e^{y+\mu(y)-\mu(x+y)}$$

D'autr part on a

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(1-\frac{y}{x+y}\right)^{x+y} = e^{-y} \quad \text{et} \quad \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x}{x+y}\right)^{\frac{-1}{2}} = 1$$

Donc

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow\infty} x^y \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+y)} &= \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(1-\frac{y}{x+y}\right)^{x+y} \left(\frac{x}{x+y}\right)^{\frac{1-}{2}} e^{y+\mu(y)-\mu(x+y)} \\
&= e^y e^{-y} = 1.
\end{aligned}$$

Ce qui fallait démontrer ■

Maintenant on peut démontrer le théorème précédent :

**Preuve.** On calcule la limite de la solution de Barenblatt

$$U_{m,M}(x,t) = \frac{1}{t^{\alpha}}\left(\frac{M}{a(m)}\right)^{\frac{1}{\gamma(m-1)}}\left[1-\left(\frac{a(m)}{M}\right)^{\frac{1}{\gamma}} K\left|x\right|^{2} t^{-2\alpha}\right]^{\frac{1}{m-1}}$$

Si $m \to 1$, premièrement on observe $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et $\beta = \dfrac{1}{2}$ qui converge vers **la solution de Gauss** .

- **Le premier terme de l'expression (2.14)** :

Si $m$ tend vers 1 on a :

$$\lim_{m\to 1} a(m) = \lim_{m\to 1} \pi^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{\frac{-1}{2}}\left(\frac{m}{m-1}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{m}{m-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{m-1}+\frac{1}{2}\right)}$$

Et comme : $\lim\limits_{m\to 1}\dfrac{m}{m-1} = \infty$, on utilise la formule (2.16), et si on pose $x = \dfrac{m}{m-1}; y = \dfrac{1}{2}$, on obtient dans ce cas :

$$\lim_{m\to 1} a(m) = \lim_{m\to 1} \pi^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{\frac{-1}{2}} x^{y}\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+y)}$$

Car

$$\lim_{m\to 1}\frac{\Gamma\left(\frac{m}{m-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{m-1}+\frac{1}{2}\right)} = \lim_{x\to\infty} x^{y}\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+y)} = 1$$

Donc

$$\lim_{m\to 1} a(m) = (4\pi)^{\frac{1}{2}} > 0$$

Et

$$\lim_{m\to 1}\frac{1}{\gamma(m-1)} = \lim_{m\to 1}\frac{1}{1+\frac{1}{2}(m-1)} = 1$$

Alors

$$\lim_{m\to 1}\frac{1}{t^{\alpha}}\left(\frac{M}{a(m)}\right)^{\frac{1}{\gamma(m-1)}} = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{M}{(4\pi)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

Cela implique que

$$\lim_{m\to 1} \frac{1}{t^\alpha}\left(\frac{M}{a(m)}\right)^{\frac{1}{\gamma(m-1)}} = \frac{M}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}} \tag{2.17}$$

- **Le deuxième terme de la formule** (2.14) **devient:**

$$\lim_{m\to 1}\left[1-\frac{1}{\frac{1}{m-1}}\left(\left(\frac{a(m)}{M}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\frac{1}{2m}\beta\frac{x^2}{t^{2\beta}}\right)\right] \tag{2.18}$$

On a $\beta \to \frac{1}{2}$ si $m \to 1$ et $\lim_{m\to 1}\frac{1}{\gamma} = 0$ car, $\lim_{m\to 1}\frac{1}{\gamma} = \lim_{m\to 1}\frac{2(m-1)}{2+(m-1)} = 0$, donc

$$\begin{aligned}\lim_{m\to 1}\left((\frac{a(m)}{M})^{\frac{1}{\gamma}}\frac{1}{2m}\beta\frac{x^2}{t^{2\beta}}\right) &= 1.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\frac{x^2}{t}\\ &= \frac{x^2}{4t}\end{aligned}$$

D'autre part, en prenant en compte le fait que $\lim_{m\to 1}(1-\frac{x}{y})^y = e^{-x}$, (2.18) devient:

$$\lim_{m\to 1}\left(1-\frac{\frac{x^2}{4t}}{\frac{1}{m-1}}\right)^{\frac{1}{m-1}} = e^{\frac{-x^2}{4t}} \tag{2.19}$$

On peut conclure donc, la limite de la formule (2.14), en prenant en compte les formule (2.17), (2.19) on obtient:

$$\begin{aligned}\lim_{m\to 1} U_{m,M}(x,t) &= \frac{M}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}}e^{\frac{-x^2}{4t}}\\ &= Mu(x,t),\end{aligned}$$

Ce qui fallait démontrer.

■

Dans le chapitre suivant nous allons présenter des solution auto similaire de forme plus générale.

# Chapitre 3

# Les solutions auto similaires générales

Dans ce chapitre nous esseyons de généraliser la forme des solutions auto similaires obtenus dans le chapitre précédent, on va présenter une forme de solutions auto similaires plus générales.

## 3.1 Définition

On va étudier maintenant une autre forme de solutions de l'équation (1.1), sous forme plus générale :

$$u(x,t) = C(t)\varphi(x.B(t)). \tag{3.1}$$

Où $C(t)$ et $B(t)$ sont des fonctions qu'on pourra déterminer, et $\varphi$ est une fonction d'une variable, et qui est solution d'une équation différentielle ordinaire.

Ce type de solutions représente la forme générale des solutions de type classique (2.1). Le problème devient ici à chercher le profil $\varphi$ et les paramètres $C(t)$ et $B(t)$.

## 3.2 Détermination des paramètres $C(t)$ et $B(t)$

### 3.2.1 Le principe

Pour trouver la solution $u(x,t)$ sous la forme générale (3.1) de l'équation (1.1), il faut tout d'abord déterminer $C(t)$ et $B(t)$ comme suit:

On pose

$$u(x,t) = C(t)\varphi(\xi)$$

Avec

$$\xi = xB(t)$$

On calcule les dérivées:

- Par rapport à $t$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(C(t)\varphi(\xi)) \\
&= C'(t)\varphi(\xi) + C(t).\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right) \\
&= C'(t)\varphi(\xi) + C(t)B'(t)x.\varphi'(\xi)).
\end{aligned}$$

- Par rapport à $x$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u^m}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(C^m(t)\varphi^m(\xi)) \\
&= C^m(t)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi^m(\xi)\right) = C^m(t)\left(B(t)\frac{\partial(\varphi^m)'}{\partial x}\right) \\
&= C^m(t)\left(B(t).\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial(\varphi^m)'}{\partial \xi}\right) = C^m(t)B^2(t)(\varphi^m)''
\end{aligned}$$

Comme $u$ est une solution de l'équation (1.1) alors l'équation différentielle ordinaire pour $\varphi$ s'écrit comme:

$$C'(t)\varphi(\xi) + C(t)B'(t)x.\varphi'(\xi) = C^m(t)B^2(t)(\varphi^m(\xi))''$$

On a $x = \xi B^{-1}(t)$ alors l'EDO précédente devient:

$$-C'(t)\varphi(\xi) - C(t)B'(t)B^{-1}(t)\xi\varphi'(\xi) + C^m(t)B^2(t)(\varphi^m(\xi))'' = 0$$

Ce qui est équivalent à:

$$\frac{-C'(t)}{C^m(t)B^2(t)}\varphi(\xi) - \frac{C(t)B'(t)}{C^m(t)B^3(t)}\xi\varphi'(\xi) + (\varphi^m(\xi))'' = 0 \tag{3.2}$$

On suppose que, $C(t) \neq 0$ et $B(t) \neq 0$, la forme (3.2) est une forme bilinéaire, donc on utilise *le théorème de séparation des variables* suivant pour résoudre l'équation (3.2) et calculer les fonctions $C(t)$ et $B(t)$.

### 3.2.2 Théorème(Séparation des variables)

*Soit la forme bilinéaire suivante:*

$$f_1(x)g_1(t) + f_2(x)g_2(t) + .... + f_n(x)g_n(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)g_i(t) = 0 \tag{3.3}$$

*alors il existe (n-1) solutions et des constantes* $A_i \quad /i = 2, .., n$ *tel que*

$$\begin{cases} f_1(x) = \sum_{i=2}^{n} A_i f_i(x) = A_2 f_2 + ........ + A_n f_n \\ \\ g_k(t) = -A_k g_1(t) \qquad k = 2, .........., n \end{cases}$$

**Preuve.** (Par récurrence)

Pour $n = 2$:

$$f_1(x).g_1(t) + f_2(x).g_2(t) = 0$$

Supposons que la relation (3.3) est vrai pour $n = 2$.

On suppose que (3.3) est vrai pour $n - 1$ et démontre qu'elle est vrai pour $n$.

Si on divise (3.3) par $f_n g_n$ on obtient:

$$\frac{f_1}{f_n}(x)\frac{g_1}{g_n}(t)+\frac{f_2}{f_n}(x)\frac{g_2}{g_n}(t)+...........+\frac{f_{n-1}}{f_n}(x)\frac{g_{n-1}}{g_n}(t)+1=0$$

On dérive par rapport à $x$

$$\left(\frac{f_1}{f_n}(x)\right)'\frac{g_1}{g_n}(t)+\left(\frac{f_2}{f_n}(x)\right)'\frac{g_2}{g_n}(t)+.............+\left(\frac{f_{n-1}}{f_n}(x)\right)'\frac{g_{n-1}}{g_n}(t)=0$$

On a une forme bilinéaire de $n-1$ terme (est vrai pour $n-1$) donc on peut appliquer le théorème

$$\begin{cases} \left(\dfrac{f_1}{f_n}(x)\right)' = \displaystyle\sum_{i=2}^{n-1} A_i\left(\dfrac{f_i}{f_n}(x)\right) & (*) \\ \\ \dfrac{g_k}{g_n} = -A_k\dfrac{g_1}{g_n} \quad k=2,...,n-1 & (**) \end{cases}$$

En intégre $(*)$ par apport $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{f_1}{f_n} &= \sum_{i=2}^{n-1} A_i\frac{f_i}{f_n} + A_n \\ &\Rightarrow\ f_1=\sum_{i=2}^{n-1}A_if_i + A_nf_n \\ &\Rightarrow\ f_1=\sum_{i=2}^{n}A_if_i \end{aligned}$$

$(**)$ devient

$$g_k=-A_kg_1 \qquad \text{pour } k=2,...,n-1$$

Donc le problème reste sur $g_k(t)=-A_kg_1(t)$, $k=n$,

$$g_n=-A_ng_1(t)\ \ ?$$

On a la forme bilinéaire :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} f_i(x)g_i(t) &= f_1g_1+f_2g_2+.....+f_{n-1}g_{n-1}+f_ng_n=0 \qquad et\ f_1=\sum_{i=2}^{n}A_if_i \\ &\Rightarrow\ \left[\sum_{i=2}^{n}A_if_i(x)\right]g_1+f_2g_2+.....+f_{n-1}g_{n-1}+f_ng_n=0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [A_2f_2g_1 + ..... + A_{n-1}f_{n-1}g_1 + A_nf_ng_1] - A_2f_2g_1 - ...... - A_{n-1}f_{n-1}g_1 + f_ng_n = 0.$$

En obtient

$$\begin{aligned} A_nf_ng_1 &= -f_ng_n \\ &\Rightarrow g_n = -A_ng_1 \end{aligned}$$

D'où le théorème est démontré

■

**Théorème 2 :**

*L'équation*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_x u \tag{E}$$

*admet une solution auto similaire généralisée de type (3.1), si elle est une forme bilinéaire de la forme* (3.3)

**Preuve.** Si on remplace la solution (3.1) dans l'équation ($E$) on obtient:

$$C'\varphi + C(t)B'(t)x\varphi' = A_x(C(t)\varphi(\xi))$$

Donc $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ est une forme bilinéaire. Si $A_xu$ l'est aussi alors, $\dfrac{\partial u}{\partial t} - A_xu = 0$ est une forme bilinéaire donc elle admet une solution de forme *(3.1)*

ce qui fallait démontrer. ■

Il est tout à fait claire que (3.2) est une forme bilinéaire, donc d'après *le théorème 2* , l'équation (1.1) admet une solution auto similaire sous la forme *(3.1).*

On peut remarquer que pour $n = 3$ la forme bilinéaire (3.3) peut s'écrire sous la forme : ce qui conduit avec (3.2) à:

$$\begin{cases} f_1(\xi) = (\varphi^m)'' \\ f_2(\xi) = \varphi(\xi) \\ f_3(\xi) = \xi\varphi' \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} g_1(t) = 1 \\ \\ g_2(t) = -\dfrac{C'}{C^mB^2} \\ \\ g_3(t) = -\dfrac{C(t)B'}{C^mB^3} \end{cases}$$

D'après le théorème de séparation des variables précédent, il existe des constantes $A_i$ $i = 1, .., 3$ tel que

$$\begin{cases} f_1(x) = \sum_{i=2}^{3} A_i f_i(x) \\ g_k(t) = -A_k g_1(t), \quad k = 2, 3 \end{cases}$$

Donc on obtient l'équation différentielle suivante:

$$(\varphi^m)'' - A_2\varphi(\xi) - A_3\xi\varphi' = 0 \ . \tag{3.4}$$

Et le système :

$$\begin{cases} \dfrac{C'}{C^m B^2} = A_2 \\ \\ \dfrac{C(t)B'}{C^m B^3} = A_3 \end{cases} \qquad A_2,\ A_3\ \text{: sont des cons tan tes} \tag{3.5}$$

### 3.2.3 Calcul des fonctions $C(t)$ et $B(t)$

Nous allons maintenant calculer les constantes $C(t)$ et $B(t)$ :

On a la formule

$$\begin{cases} \dfrac{C'}{C^m B^2} = A_2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1) \\ \\ \dfrac{C(t)B'}{C^m B^3} = A_3 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

D'aprés (1) on obtient

$$C^m(t) = \frac{C'(t)}{B^2(t)A_2}. \tag{1'}$$

Et de (2) on a

$$C^m(t) = \frac{C(t)B'(t)}{A_3 B^3(t)} \tag{2'}$$

On observe que $(1)' = (2)'$ alors:

$$\frac{C'(t)}{B^2(t)A_2} = \frac{C(t)B'(t)}{A_3B^3(t)}$$

ce qui implique

$$A_3B^3(t)C'(t) = B^2(t)A_2C(t)B'(t)$$

donc

$$\ell\frac{C'(t)}{C(t)} = \frac{B'(t)}{B(t)} \;\; ; \;\; \ell = \frac{A_3}{A_2}$$

En intègre les deux cotés par rapport à $t$ :

$$\ell\int_0^\infty \frac{C'(t)}{C(t)}dt = \int_0^\infty \frac{B'(t)}{B(t)}dt$$

Alors

$$\ell\log(C(t)) \;=\; \log(B(t)) \Longleftrightarrow \log(C(t))^\ell = \log(B(t))$$

Dans ce cas le paramètre $C(t)$ s'écrit sous la forme

$$C(t) = K(B(t))^{\frac{1}{\ell}} \; ; \; \frac{1}{\ell} = \frac{A_2}{A_3}; K \neq 0 \qquad (*)$$

**Calcul de $B(t)$** :

On remplace $(*)$ dans $(2')$ on obtient:

$$A_3K(B(t))^{\frac{(m-1)}{\ell}} = \frac{B'(t)}{B^3(t)}$$

Alors

$$A_3 = \frac{B'(t)}{B^{3+\frac{(m-1)}{\ell}}(t)} = B^{-3-\frac{(m-1)}{\ell}}(t).B'(t) \; ; \ell = \frac{A_3}{A_2}$$

Donc

$$A_3 = B^{-3-\frac{(m-1)}{\ell}}(t).\frac{dB}{dt}$$

D'où

$$A_3 dt = B^{-3-\frac{(m-1)}{\ell}}(t) dB$$

Si on intègre on trouve:

$$\int_0^{\infty} A_3 dt = \int_0^{\infty} B^{-3-\frac{(m-1)}{\ell}}(t) dB$$

Alors

$$B^{-(2+\frac{m-1}{\ell})}(t) = -(2+\frac{m-1}{\ell})(A_3 t + K_0); \ell = \frac{A_3}{A_2}; K_0 \in \mathbb{R}$$

Donc on trouve $B(t)$ comme suit:

$$B(t) = \left[-\left(2+\frac{A_2(m-1)}{A_3}\right)(A_3 t + K_0)\right]^{\frac{-A_3}{2A_3+A_2(m-1)}}$$

On peut donc écrire :

$$B(t) = (bt+a)^{-\beta}; b,\ a,\ \beta \in \mathbb{R} \tag{3.6}$$

Avec:

$$b = A_3\left(-2-\frac{A_2(m-1)}{A_3}\right) = (-2A_3 - A_2(m-1))$$

$$a = K_0(-2-\frac{A_2(m-1)}{A_3}) \qquad ; \qquad \beta = \frac{A_3}{2A_3 + A_2(m-1)}$$

**Calcul de $C(t)$** :

On peut conclure que $C(t)$ d'aprés les formules $(*)$ *et* (3.6) est égale à:

$$C(t) \quad = \quad K(B(t))^{\frac{1}{\ell}} = K\left(B^{\frac{A_2}{A_3}}(t)\right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad C(t) = (bt+a)^{\frac{-\beta A_2}{A_3}} = (bt+a)^{\frac{-A_2A_3}{2A_3^2+A_2A_3}}$$

Donc

$$C(t) \quad = \quad (bt+a)^{-\alpha};\ \alpha = \frac{A_2A_3}{2A_3^2 + A_2A_3(m-1)}$$

Finalement on a:

$$C(t) = (bt+a)^{-\alpha} \quad ; \qquad B(t) = (bt+a)^{-\beta} \tag{3.7}$$

Avec

$$b = (-2A_3 - A_2(m-1)) \quad ; \qquad a = K_0\left(-2 - \frac{A_2(m-1)}{A_3}\right) \tag{3.8}$$

Et

$$\alpha = \frac{A_2 A_3}{2A_3^2 + A_2 A_3(m-1)} \quad ; \qquad \beta = \frac{A_3}{2A_3 + A_2(m-1)} \tag{3.9}$$

**Remarque 3.2.1** *:Si les fonctions $C(t)$ et $B(t)$ prennent les valeurs ci dessus, on trouve la condition de similarité $\alpha(m-1)+2\beta = 1$ avec les paramètres $A_2$, $A_3$ dont les valeurs sont égales à :*

$$A_2 = -\alpha b \;; A_3 = -\beta b.$$

**Vérification:**

On a vu dans la section 1 que

$$C'(t)\varphi(\xi) + C(t)B'(t)x.\varphi'(\xi) = C^m(t)B^2(t)(\varphi^m(\xi))''$$

En prenant en compte la formule (3.7), on conclut

$$-\alpha b(bt+a)^{-\alpha-1}\varphi - \beta b.x(bt+a)^{-\alpha-\beta-1}\varphi' = (bt+a)^{-m\alpha-2\beta}(\varphi^m)''$$

avec $\xi = x(bt+a)^{-\beta}$ alors:

$$-\alpha b(bt+a)^{-\alpha-1}\varphi - \beta b(bt+a)^{-\alpha-1}\xi\varphi' = (bt+a)^{-m\alpha-2\beta}(\varphi^m)''$$

On divise par $(bt+a)^{-\alpha-1}$ on obtient:

$$-\alpha b\varphi - \beta b\xi\varphi' = (bt+a)^{(m-1)\alpha-2\beta+1}(\varphi^m)'' \tag{3.10}$$

Alors, on obtient la même condition du Chapitre 2 (2.3), dans ce cas la formule (3.10) devient

$$-\alpha b\varphi - \beta b\xi\varphi' = (\varphi^m)''$$

D'aprés la formule (3.4), et si on pose $\lambda = -A_2$ et $\mu = -A_3$, on peut conclure que

$$\lambda = \alpha b \ ; \ \mu = \beta b. \tag{3.11}$$

Alors l'équation différentielle ordinaire (3.4) devient:

$$(\varphi^m)'' + \lambda\varphi(\xi) + \mu\xi\varphi' = 0 \tag{3.12}$$

En prenant en compte le fait que la formule (3.11), on conclut:

$$\frac{1}{b}(\varphi^m)'' + \alpha\varphi + \beta\xi\varphi' = 0 \tag{3.13}$$

On récupère par cette méthode l'auto similarité de type 1.

## 3.3 Discution de quelques solutions selon les exposants de similarité

L'équation porous media admet un certain nombre de solutions explicites pour certain cas particulier, on va discuter ces solutions selon les paramètres ■ et $\mu$ de (3.11) :

### 3.3.1 Solutions stationnaires

Les solutions simples qui ne changent pas par rapport au temps sont appelées ***"Solutions stationnaires"***, ([10]) qui vérifient la condition $u_t = 0$ et donc $u$ dépend seulement de $x$.

Dans ce cas si

$$\alpha = 0 \text{ et } \beta = 0$$

alors

$$\lambda = \alpha b = 0 \text{ et } \mu = \beta b = 0$$

La solution de l'équation (1.1) s'écrit sous la forme

$$u = u(x)$$

D'autre part, comme on a $\alpha = 0$ et $\beta = 0$, alors les paramètres $C(t)$ et $B(t)$ prennent la valeur 1, pour cette raison, on peut donc conclure que la solution (3.1) s'écrit sous forme

$$u(x) = \varphi(x)$$

Et l'EDO (3.12) devient:

$$(\varphi^m)''(x) = 0$$

Si en intégre deux fois par apport $x$ on obtient:

$$\varphi(x) = (Ax + B)^{\frac{1}{m}} \quad /m > 0$$

Donc la solution est:

$$u(x) = (Ax + B)^{\frac{1}{m}} \ ; \ A \neq 0$$

Si $\varphi \geqslant 0$, les solutions sont constantes appelées ***"Solution triviale".***

### 3.3.2 Solution Polubarinova-kochina

Si $\lambda = 0$ et $\mu \neq 0$, et en prenant en compte le fait que $\lambda = -A_2$ et $\mu = -A_3$, et d'après (3.9) on trouve:

$$\alpha = 0 \text{ et } \beta = \frac{1}{2}$$

D'où, l'équation (3.12) devient:

$$(\varphi^m)'' + \frac{b}{2}\xi\varphi' = 0 \quad \text{avec } b = -2A_3$$

Cela implique que

$$(\varphi^m)'' = A_3\xi\varphi'$$

On peut remarquer que pour $b = 1$ donc $A_3 = -\dfrac{1}{2}$ on retrouve l'équation (2.12) dont la solution est dite de ***"Polubarinova-Kochina"*** présentée dans la section 2 du chapitre2.

### 3.3.3 Solution de Barenblatt

Si on prend $\lambda = \mu$, d'aprés (3.11) on obtient $\alpha = \beta$ et l'équation (3.12) devient:

$$(\varphi^m)'' + \lambda(\xi\varphi)' = 0$$

Dont le profil $\varphi$ est égale à:

$$\varphi(\xi) = \left(K - \frac{\lambda(m-1)}{2m}\xi^2\right)^{\frac{1}{m-1}}$$

Donc la solution (3.1) de l'équation (1.1) s'écrit sous la forme:

$$u(x,t) = C(t)\left[K - \frac{\lambda(m-1)}{2m}x^2B^2(t)\right]^{\frac{1}{m-1}}$$

Ceci est équivalent à:

$$u(x,t) = (bt+a)^{-\alpha}\left[K - \frac{\lambda(m-1)}{2m}x^2(bt+a)^{-2\alpha}\right]^{\frac{1}{m-1}}$$

C'est la solution de Barenblatt du chapitre 2

## 3.4 Autre méthode pour déterminer les fonctions $C(t)$ et $B(t)$

Dans cette section on présentera une autre méthode pour inspecter la solution générale du système (3.5), (voir[1])

$$\begin{cases} \dfrac{C'}{C^mB^2} = A_2 = -\lambda \\ \\ \dfrac{C(t)B'}{C^mB^3} = A_3 = -\mu \end{cases}$$

On établira tout d'abord un lien entre $C(t)$ et $B(t)$ :
on pose

$$X = C^{1-m}(t), Y = \frac{1}{B^2(t)} \tag{3.14}$$

si on dérive on obtient:

$$X' = (1-m)C'C^{-m}$$

et comme $C'(t) = -\lambda C^m(t)B^2(t)$ alors

$$\begin{aligned} X' &= (1-m) - \lambda C^m(t)B^2(t)C^{-m}(t) \\ &= \lambda(m-1)B^2(t) \end{aligned}$$

donc

$$X' = \lambda(m-1)Y^{-1} \tag{3.15}$$

d'autre part

$$Y' = \frac{-2B'B(t)}{B^4(t)} \quad et \quad B'(t) = -\mu C^{m-1}(t)B^3(t)$$

alors:

$$Y' = \frac{-2(-\mu C^{m-1}B^3(t))}{B^4(t)} = 2\mu C^{m-1}$$

$$Y' = 2\mu C^{m-1} \tag{3.16}$$

on observe que

$$\begin{aligned} \lambda(m-1)XX'' &= \lambda(m-1)C^{1-m}(t)(2\lambda(m-1)BB'(t)) \\ &= 2\lambda^2(m-1)^2C^{1-m}\left(\frac{-Y'B^4}{2}\right) \\ &= 2\lambda^2(m-1)^2C^{1-m}\left(\frac{-2\mu C^{m-1}B^4}{2}\right) \\ &= -2\lambda^2\mu(m-1)^2B^4(t) \\ &= -2\mu(X')^2 \end{aligned}$$

donc

$$\lambda(m-1)XX'' = -2\mu(X')^2 \tag{3.17}$$

on pose $a = \dfrac{-2\mu}{\lambda(m-1)}$ si $\lambda \neq 0$ alors, (3.17) implique:

$$\begin{aligned} XX'' &= a(X')^2 \\ &\iff \frac{XX''}{X'} = aX' \\ &\iff \frac{X''}{X'} = a\frac{X'}{X} \end{aligned}$$

d'après l'intégration on trouve:

$$\begin{aligned} \int \frac{X''}{X'}dt &= a\int \frac{X'}{X}dt \\ &\iff \log(X') = a\log(X) + c \end{aligned}$$

ce qui implique:

$$X' = cX^a \quad \backslash \;\; a = \frac{-2\mu}{\lambda(m-1)} \tag{3.18}$$

dont $c$ est une constante arbitraire, par suite si $a = 1$ on peut déterminer l'expression de $C(t)$, $B(t)$, et leur forme est donnée comme suit

## 3.5 Auto- similairité exponentielle:

La forme (3.18) pour $a = 1$ est donnée par:

$$\begin{aligned} X' &= cX \iff \frac{X'}{X} = c \\ &\iff \log(X(t)) = ct \\ &\iff X(t) = Ke^{ct} \end{aligned}$$

Donc et d'après (3.17) on a

$$\begin{aligned} X &= C^{m-1} \\ C(t) &= X^{\frac{1}{1-m}} = Ke^{\frac{ct}{1-m}} \\ &= Ke^{-\frac{ct}{m-1}} \backslash \quad K \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Et d'après (3.16) on trouve

$$\begin{aligned} X' &= \lambda(m-1)Y^{-1} = \lambda(m-1)B^2(t) \\ &\Longleftrightarrow \; B(t) = \left(\frac{X'}{\lambda(m-1)}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{cK}{\lambda(m-1)}e^{\frac{ct}{2}} \quad \backslash c, K \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$B(t) = B_0 e^{\frac{ct}{2}} \backslash \;\; B_0 = \frac{cK}{\lambda(m-1)}$$

On peut écrire les fonctions $C(t)$ et $B(t)$ comme suit:

$$C(t) = C_0 e^{-2\sigma t} \qquad ; \qquad B(t) = B_0 e^{(m-1)\sigma t}$$

Telle que

$$\sigma = \frac{c}{2(m-1)}; \; C_0, \; B_0 \in \mathbb{R}$$

alors on peut définir l'auto- similarité de type 3 appelé ***"Solution auto- similaire exponentielle"*** **(**voir[10]**)**, qui s'écrit sous la forme suivante:

$$u(x,t) = e^{-\alpha t}\varphi(xe^{-\beta t}) \tag{3.19}$$

avec

$$\alpha = 2\sigma; \beta = -\sigma(m-1).$$

Cette solution auto-similaire de type 3 existe pour $-\infty < t < \infty$.

Dans ce cas la relation entre $\alpha$ et $\beta$ est donnée par :

$$(m-1)\alpha + 2\beta = 0$$

En effet si on remplace la forme (3.19) dans l'équation (1.1), on trouve :

$$C'(t)\varphi(\xi) + C(t)B'(t)x.\varphi'(\xi) = C^m(t)B^2(t)(\varphi^m(\xi))''$$

Alors

$$-\alpha e^{-\alpha t}\varphi - \beta e^{-\alpha t}e^{-\beta t}x\varphi' = e^{-m\alpha t-2\beta t}(\varphi^m)'' \quad /\xi = e^{-\beta t}x$$

cela implique que

$$-\alpha e^{-\alpha t}\varphi - \beta e^{-\alpha t}\xi\varphi' = e^{-m\alpha t-2\beta t}(\varphi^m)''$$

on divise par $e^{-\alpha t}$ on obtient:

$$-\alpha\varphi - \beta\xi\varphi' = e^{(-\alpha(m-1)-2\beta)t}(\varphi^m)''$$

on dérive formellement par apport à $t$, on trouve:

$$0 - 0 = (-(m-1)\alpha - 2\beta)e^{(-(m-1)\alpha-2\beta)t}(\varphi^m)''$$

D'où finalement on a la relation :

$$(m-1)\alpha + 2\beta = 0 \tag{3.20}$$

(3.20) est la condition de similarité pour l'équation (1.1) admet une solution exponentielle.

L'équation diférentielle correspondante déterminent le profile s'écrit:

$$(\varphi^m)'' - \frac{2\beta}{m-1}\varphi + \beta\xi\varphi' = 0$$

# Conclusion

Dans ce mémoire nous avons étudié, l'existence des solutions de l'équation de porous media, nous avons cherché ces solutions de type auto similaire classique et de forme auto similaire générale, on arrive à trouver plusieurs solutions particulières selon les exposants de similarité ($\alpha$ et $\beta$), telle que les solutions : **de Barenblatt, Noyaux de Gauss, de Polubarinova-Kochina, du dipôle, solution explicite de forme (variable séparable), et solution auto similaire exponentielle.**

Il est clair qu'il existe d'autres solutions qui dépendent des critères de l'auto similarité qui sont encore inconnue, et qui des problèmes ouverts.

# Bibliographie


[1] Andrie-D.Polyanin, Valentin F, Zaitsev, Exact Solution For ordinary Differential Equations 'Second Edition', A *CRC Press Company,Boca London New York Washington* ,D.C 2002, 766-767

[2] Bachelor-Arbeit, Barenblatt's solution to the porous medium equation, *Moritz Egert 25.* October 2010, 16-20.

[3] D.G. Aronson (1986). The Porous Medium Equation. Nonlinear Diffusion Problems (Montecatini Terme, 1985), pp. 1–46, Lecture Notes in Math.Vol. 1224, Springer, Berlin.

[4] D.G. Aronson, L.A. Caffarelli, and J.L. V´azquez (1985). Interfaces with acorner point in one-dimensional porous medium flow. Commun. Pure Appl. Math., 38(4), 375–404.

[5] G.I Barenblatt , Scaling self-similaritty and intermediate asyptotics, *Cambridge Univ.Ppress, Combridge*, 1996.

[6] G.I Barenblatt, On some unsteady motios of a liquid or a gas in a porous medium, *Prikl.Mat.Mekh.***16**(1952) 67-78(in Russian)

[7] G .I Barenblatt ,On self -similar motoins of compressible fluids in porous media *Prik-Mat.Mekh.***16**(1952) 679-698(in Russian).

[8] G .I Barenblatt . &Y.B Zel'dovich, On dipole-Solutions inproblems of nonstationary filtration of gas under polytropic regime *Prikl-Mat.Mekh.***21**(1957),718-720.

[9] Josephus Hulshof and J.L.Vàzquez, The Dipole Solution For the porous medium equation in sevral space Dimensions, *IMA Prepint Series#842* August 1991, 5-8.

[10] Juan Luis Vàzquez .The Porous Medium Equation-Mathematical Theory.*Oxford University Press, Oxford* 2007.

[11] J.L.Vàzquez, Asymptotic behaviour for the porous medium equation posed in the whole space, *Birkhäuser Verlag, Basel*, 2002, 11-12.

[12] J. L. V´azquez, Smoothing and Decay Estimates for Nonlinear Diffusion Equations. Equations of Porous Medium Type, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications 33, *Oxford University Press, Oxford*, (2006).6

[13] Kamin.S & J.L. V´azquez, Asymptotic behaviour of solutions of the porous medium equation with changing sign, *Siam jour.Math Anal*, **22**(1991)

[14] Pedro Ferreira et Sylvie Mas Gallic, Équation aux Dérivées Partielles, 11 décembre 2001, 20-21..

[15] Polubarinova-Cochin P.B. Theory of Groundwater Motion. *Nauka, Moscow,* 1977,664 p.

[16] Polubarinova-Cochin P.B. Applied Mathematics and Mechanics. 55, 2 (1991),222-227.

[17] Polubarinova-Cochin P.B. Mathematics and Mechanics. *Nauka, Novosibirsk*, 1983,166-177.

[18] P.Ya. Polubarinova-Kochina (1948). On a nonlinear differential equation encountered in the theory of infiltration. *Dokl. Akad. Nauk SSSR,* **63**(6), 623–627.

[19] Zel'doviche, Ya, B and Kompaneets A..S, Towards theory of heat conduction with thermal conductivity deprnding on the temperature.*Izd.Akad.Nauk SSSR.Moscow*, 1950, 61-72.