

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE
ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT
SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : EDPs et applications

Thème

*Estimations d'énergie pour l'équation des ondes avec amortissement
non-linéaire dans des intervalles variables en temps*

Présentée par :

Chebabehi Barkahoum

Soutenue le : 14/06/2022

Devant le jury composé de :

<i>M^r Abdelhak Mokhtari</i>	M.C.A, Université de M'sila	Président.
<i>M^r Abdelmouhcene Sengouga</i>	M.C.A, Université de M'sila	Encadreur.
<i>M^r Brahim Bougherara</i>	M.C.A, Université de M'sila	Examineur.

Année universitaire : 2021/2022

Remerciements

Mes remerciements vont tout premièrement, à Allah le tout puissant de m'avoir donné courage et patience durant toutes ces années d'études.

Je suis heureux d'exprimer au Dr. Abdelmouhcene Sengouga, ma gratitude pour la confiance qu'il m'a accordé. Je le remercie pour sa disponibilité et pour ses conseils très éclairés.

Aux membres de jury, nous vous remercions de l'honneur que vous nous avez fait en acceptant de siéger dans le jury de notre mémoire.

Je tiens à remercier mes amis Hadjer Khalfa, Manel Nadjji, Nesrine Baali et Manel Herzi, qui ont toujours été là pour moi. Leur soutien inconditionnel et leurs encouragements ont été d'une grande aide.

Enfin, je ne saurais jamais suffisamment remercier mon père et ma mère, que je porte toujours avec moi dans ma pensée. Sans leurs confiances immenses en moi, sans leurs aides, je n'aurais pas pu aller au bout de mes projets.

À toute personne ayant participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires	3
1.1 Espaces fonctionnels	3
1.1.1 Espace des fonctions continues et $L^p(\Omega)$	3
1.1.2 Fonctions à valeurs vectorielles en temps	3
1.1.3 Espaces de Sobolev	4
1.2 Quelques inégalités et formules utiles	5
1.2.1 Inégalité de Young	5
1.2.2 Inégalité de Hölder	6
1.2.3 Formule d'intégration de Leibniz	6
1.3 Modélisation de l'équation des ondes	7
1.3.1 Domaines cylindriques	7
1.3.2 Domaine non-cylindrique	9
1.3.3 Équation des ondes avec amortissement	10
2 Équation des ondes dans un domaine non-cylindrique	11
2.1 Position du Problème	11
2.2 Quelques estimations pour $E_1(t)$ et $E_2(t)$	14
2.3 Quelques estimations pour $E_3(t)$	21
2.4 Estimations d'énergie pour certains domaines simples	25
2.4.1 Domaine symétrique	25
2.4.2 Domaine avec longueur constant	26
2.4.3 Domaine à variation constant	27
3 Équation des ondes avec amortissement	30
3.1 Équation avec amortissement linéaire	30

3.1.1	Premier résultat de stabilité polynomiale	31
3.1.2	Résultats de stabilité exponentielle et polynomiale	35
3.2	Équation avec un amortissement non linéaire	43
	Conclusion	48
	Bibliographie	49

Introduction

Le problème de stabilité des équations aux dérivés partielles de type hyperbolique, qui modélise les vibrations des systèmes et structures mécaniques, fait l'objet de nombreux travaux. La stabilisation consiste à garantir la décroissance de l'énergie des solutions, qu'on note par $E(t)$, vers 0, i.e. :

$$E(t) \rightarrow 0, \text{ lorsque } t \rightarrow +\infty.$$

On pourra aussi s'intéresser au taux de décroissance de l'énergie. Par exemple, on peut avoir une décroissance très rapide comme l'exponentielle, i.e. :

$$E(t) \leq Ce^{-ht}, \quad \forall t > 0,$$

où C et h sont des constantes positives avec C qui dépende des données initiales.

Il existe d'autres types de stabilité qu'on rencontre généralement dans les problèmes non-linéaires. Dans ces cas, on essaye d'obtenir des taux de décroissance de l'énergie de façon polynomiale ou logarithmique, par exemple :

$$E(t) \leq \frac{C}{(1+t)^\alpha}, \quad \forall t > 0,$$

où C et α sont des constantes positives avec C qui dépende des données initiales.

Lorsque la taille où la forme de la structure mécanique évolue avec le temps, l'étude de stabilité est plus délicat. On prend comme problème modèle l'équation des ondes, avec un amortissement qui peut être non linéaire, dans des domaines non-cylindriques. Ce problème fait l'objet de nombreuses publications intéressantes. On peut citer, par exemple, le travail important de C. Bardos et G. Chen [1], où ils ont considéré l'équation d'onde

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \tag{*}$$

dans un ouvert Ω_t de \mathbb{R}^n dépendant du temps et satisfaisant la condition dite *time-like*, avec des conditions de Dirichlet sur la frontière de Ω_t . L'énergie (classique) de la solution dans ce cas est définie par

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} u_t^2 + u_x^2 dx.$$

Si le domaine est croissant, au sens d'inclusion, les auteurs de [1] ont prouvé que l'énergie est décroissante avec le taux polynomiale suivant :

$$E(t) \leq \frac{C}{t} E(0), \forall t \geq 0.$$

L'équation d'onde avec des termes d'amortissement de la formes

$$u_{tt} - u_{xx} + F(u_t) = 0 \quad (**)$$

où F est une fonction (linéaire ou non-linéaire) satisfaisant certain conditions a été considérée par exemple dans [1, 4, 8] et des taux de décroissance exponentielles et polynomiales ont été obtenues.

Dans ce travail on considère les équations (*) et (**) dans un domaine Ω_t de \mathbb{R} la forme

$$\Omega_t =]\alpha(t), \beta(t)[, \quad t \geq 0$$

où α et β sont des fonctions de classe C^1 . On appliquant les approches de [1, 4] bases sur la méthode de de multiplication (dite aussi méthode des intégrales d'énergie) on établie des estimations de décroissance de l'énergie en fonction de α, β et leurs dérivées.

Ce mémoire est organisée comme suite :

Chapitre 1. Dans ce chapitre on va donner quelques rappels et préliminaires d'analyse fonctionnelle qui seront utilisés dans notre travail. On abord aussi la modélisation des vibrations d'une corde élastique homogène à longueur variable qui donne, dans un cas simple, une équation d'ondes avec un terme d'amortissement dans un intervalle $]\alpha(t), \beta(t)[$.

Chapitre 2. Ce chapitre est consacré à l'étude de la stabilité de l'énergie de l'équation des ondes sans amortissement dans un intervalle dépendant du temps.

Chapitre 3. Le but de ce chapitre est d'étudier la stabilisation d'énergie de l'équation des ondes avec amortissement non linéaire. Plus précisément, on s'intéresse à l'étude du problème suivant :

$$u_{tt} - u_{xx} + 2\lambda_1 u_t + \lambda_2 |u_t|^r u_t = 0, \quad x \in \Omega_t, \quad t \in [0, T]$$

avec λ_1, λ_2 et r sont des constantes positives.

Une conclusion et une liste de références sont données à la fin de ce manuscrit.

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, on présente quelques notions fondamentales, espaces fonctionnels et des inégalités qui sera utilisées dans ce mémoire. Ensuite on modélise la propagation des ondes dans domaines cylindriques et non-cylindriques par les lois de Newton et Hooke.

1.1 Espaces fonctionnels

Dans la suite Ω est un ouvert de \mathbb{R} .

1.1.1 Espace des fonctions continues et $L^p(\Omega)$

$C(\Omega, \mathbb{k})$ est l'ensemble des fonctions continues définies sur Ω à valeurs dans \mathbb{k} .

$C^\infty(\Omega, \mathbb{k})$ est l'ensemble des fonctions $u : \Omega \rightarrow \mathbb{k}$ qui sont indéfiniment dérivables.

Pour $1 \leq p < +\infty$, on appelle $L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions suivante :

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |u|^p dx < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$u \mapsto \|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- Pour cette norme $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach.
- Pour $p = 2$, $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni de produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} uv dx.$$

1.1.2 Fonctions à valeurs vectorielles en temps

On introduit dans ce section les espaces des fonctions à valeurs vectorielles, qui dépendent d'une variable réelle t et à valeurs dans un espaces de Banach.

Définition 1.1 Soient X un espace de Banach et $T > 0$.

i) Pour $1 \leq p < +\infty$, on définit $L^p(0, T; X)$ comme l'espace des fonctions mesurables définies sur $[0, T]$ à valeurs dans X , avec

$$\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt < +\infty,$$

et on note

$$L^p(0, T; X) = \left\{ u : [0, T] \longrightarrow X \text{ mesurable telle que } \int_0^T \|u(t)\|_X^p dt < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$u \longmapsto \|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

ii) Pour $p = +\infty$, on définit $L^\infty(0, T; X)$ comme l'espace des fonctions sur $[0, T]$ à valeurs dans X , qui ont un sup essentiel bornée, et on note

$$L^\infty(0, T; X) = \{ u : [0, T] \longrightarrow X \text{ mesurable} \mid \exists C \geq 0, \|u(t)\|_X < C \text{ p.p. sur } [0, T] \},$$

muni de la norme

$$u \longmapsto \|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X = \inf \{ C \geq 0; \|u(t)\|_X \leq C \text{ p.p. sur } [0, T] \}.$$

$L^p(0, T; X)$ est un espace de Banach, pour $1 \leq p \leq +\infty$.

1.1.3 Espaces de Sobolev

1.1.3.1 Espaces $H^1(\Omega)$, $H^2(\Omega)$

On rappelle que l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est un sous-espace de $L^2(\Omega)$ définie par

$$\begin{aligned} H^1(\Omega) &= \{ u \in L^2(\Omega) \mid u' \in L^2(\Omega) \}, \\ H^2(\Omega) &= \{ u \in L^2(\Omega) \mid u'' \in L^2(\Omega) \}. \end{aligned}$$

On définit $H_0^1(\Omega)$ par

$$H_0^1(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{H^1(\Omega)},$$

la fermeture de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, et on peut démontrer que

$$H_0^1(\Omega) = \{ u \in H^1(\Omega) \mid u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}.$$

1.2 Quelques inégalités et formules utiles

1.2.1 Inégalité de Young

Supposons que $1 \leq p \leq \infty$, on désigne par p' l'exposant conjugué de p , i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Rappelons l'inégalité de Young

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}, \forall a \geq 0, \forall b \geq 0.$$

Exemple 1.1 Pour $p = p' = 2$, l'inégalité précédente s'écrit sous la forme

$$ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2.$$

Exemple 1.2 Pour $p = \frac{4}{3}$ et $p' = 4$ on obtient

$$ab \leq \frac{3}{4}a^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{4}b^4.$$

On peut généraliser l'inégalité de Young dans le sens suivant :

Lemme 1.1 Soit $\theta \in [0, 1]$ et $0 \leq r \leq \theta t$ alors on a :

$$2tr \leq \frac{2\theta}{1+\theta^2}(r^2 + t^2), \forall t \geq 0. \quad (1.1)$$

Démonstration. On définit la fonction suivante :

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \theta &\longmapsto f(\theta) = \frac{2\theta}{1+\theta^2}(r^2 + t^2) - 2tr. \end{aligned}$$

f est dérivable sur $[0, 1]$ alors

$$f'(\theta) = 2 \frac{1-\theta^2}{(1+\theta^2)^2} (r^2 + t^2), \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

et comme $r \leq \theta t$ on a : $f(0) = 0 - 2tr = 0 - 2(0)t^2 = 0$, alors

$$f'(\theta) \geq 0 \text{ et } f(0) = 0,$$

donc f est croissante et positive $\forall \theta \in [0, 1]$ et $f(\theta) \geq 0$. ■

1.2.2 Inégalité de Hölder

Soient $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^{p'}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors $uv \in L^1(\Omega)$, C'est-à-dire

$$\left| \int_{\Omega} u(x)v(x)dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |v(x)|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Pour $p = p' = 2$, on obtient l'inégalité de **Cauchy-Schwarz**, i.e., $u \in L^2(\Omega)$, $v \in L^2(\Omega)$, alors $uv \in L^1(\Omega)$, C'est-à-dire

$$\left| \int_{\Omega} u(x)v(x)dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

1.2.3 Formule d'intégration de Leibniz

Lemme 1.2 [9] Soit $f(x, t)$ continue avec $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ est bornée, i.e.

$$\exists M > 0, \text{ telle que } \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| < M, \forall x \in]\alpha(t), \beta(t)[, t > 0,$$

où

$$\alpha(t), \beta(t) \in C^1([0, T]).$$

Alors, on a

$$\frac{d}{dt} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t)dx = \beta'(t)f(\beta(t), t) - \alpha'(t)f(\alpha(t), t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)dx.$$

Démonstration. on pose $F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t)dx$, alors $\forall t \rightarrow t_0$ on a :

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{dF}{dt}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t)dx - \int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} f(x, t_0)dx}{t - t_0}, \end{aligned}$$

alors,

$$F'(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\int_{\alpha(t)}^{\alpha(t_0)} f(x, t)dx + \int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t)} f(x, t)dx - \int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} f(x, t_0)dx - \int_{\beta(t_0)}^{\beta(t)} f(x, t_0)dx}{t - t_0}.$$

D'après la valeur moyenne de f sur $[\alpha(t), \beta(t)]$, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t - t_0} \int_{\alpha(t)}^{\alpha(t_0)} f(x, t)dx &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\alpha(t_0) - \alpha(t)}{t - t_0} f(\alpha(t_0), t) \\ &= -\alpha'(t_0)f(\alpha(t_0), t_0), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t - t_0} \int_{\beta(t)}^{\beta(t_0)} f(x, t_0) dx &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\beta(t_0) - \beta(t)}{t - t_0} f(\beta(t_0), t) \\ &= -\beta'(t_0) f(\beta(t_0), t_0). \end{aligned}$$

De plus,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t - t_0} \int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t)} [f(x, t) - f(x, t_0)] dx = \lim_{t \rightarrow t_0} \int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t)} \frac{f(x, t) - f(x, t_0)}{t - t_0} dx.$$

Comme $\frac{\partial f}{\partial t}$ est bornée alors $\frac{f(x, t) - f(x, t_0)}{t - t_0}$ est bornée lorsque $t \rightarrow t_0$, et on peut passer à la limite sous le signe d'intégrale, donc on trouve

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t - t_0} \int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t)} [f(x, t) - f(x, t_0)] dx = \int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) dx.$$

Donc

$$\frac{d}{dt} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t) dx = \beta'(t) f(\beta(t), t) - \alpha'(t) f(\alpha(t), t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx.$$

■

1.3 Modélisation de l'équation des ondes

Dans cette section, on dérive le modèle mathématique qui décrit les vibrations d'une corde homogène. Cette équation apparaît naturellement dans beaucoup des problèmes physiques comme : ondes acoustiques, ondes électromagnétique, ondes sismiques,...

1.3.1 Domaines cylindriques

On considère une corde de longueur fixé, représentée par l'intervalle $[\alpha_0, \beta_0]$ avec $\alpha_0 < \beta_0$.

On fait les hypothèses suivantes :

- τ_0 est la tension initiale dans $[\alpha_0, \beta_0]$ et pour tout $x \in [\alpha_0, \beta_0]$, de la corde appartient à la courbe $\Gamma(t)$.
- S_0 est la longueur de la déformation de la courbe $\Gamma(t)$.
- Le poids de la corde est négligeable devant la tension $\vec{\tau}$.
- Les déplacements de la corde sont uniquement verticaux avec des amplitudes négligeables devant la longueur de la corde, i.e.,

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \ll 1. \quad (1.2)$$

On note par $\gamma_0 = \beta_0 - \alpha_0$ la longueur initiale de l'intervalle, $\tau - \tau_0$ la variation de la tension et par $\frac{S_0 - \gamma_0}{\gamma_0}$ la variation de la longueur de la déformation.

D'après l'hypothèse (1.2) les composants de $\vec{\tau}$ sont :

$$\tau \cos \theta \quad \text{et} \quad \tau \sin \theta$$

avec θ l'angle de la direction du (Ox) du vecteur $\vec{\tau}$. Comme le déplacement verticale la composant horizontal $\tau \cos \theta$ est négligeable. Soit m la masse de la corde, par le deuxième loi de Newton, on a :

$$\frac{\partial}{\partial x} (\tau \sin \theta) = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (1.3)$$

avec $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ est l'accélération de la corde. Comme une conséquence de (1.2) on a :

$$\sin \theta \simeq \tan \theta \simeq \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Si la tension τ ne dépende pas de t , alors de (1.3) on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x} (\tau \sin \theta) = \tau \frac{\partial \sin \theta}{\partial x},$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial x} (\tau \sin \theta) = \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1.4)$$

On applique la loi de Hooke qui dit :

$$\tau - \tau_0 = k \frac{S_0 - \gamma_0}{\gamma_0}. \quad (1.5)$$

Où $k = \sigma E$, avec E est le module de Young du matériau de la corde et σ est l'aire de la coupe transversale de la corde.

Alors, la longueur de $\Gamma(t)$ est :

$$S_0 = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx.$$

On développe la racine au voisinage de 0, grâce à l'hypothèse (1.2), on trouve :

$$S_0 \simeq \int_{\alpha_0}^{\beta_0} dx + \frac{1}{2} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx,$$

comme $\gamma_0 = \beta_0 - \alpha_0$, alors

$$S_0 - \gamma_0 \simeq \frac{1}{2} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx,$$

donc (1.5), devient

$$\tau - \tau_0 = \frac{k}{2\gamma_0} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (1.6)$$

De (1.4) et (1.6) on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial x} (\tau \sin \theta) = \left(\tau_0 + \frac{k}{2\gamma_0} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1.7)$$

On substitue (1.7) dans (1.3), on obtient :

$$\left(\tau_0 + \frac{k}{2\gamma_0} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

alors

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\tau_0}{m} + \frac{k}{2\gamma_0 m} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (1.8)$$

Donc, (1.8) est l'équation d'une corde vibrante à extrémité fixe.

D'après (1.5), si on suppose que $k \ll 1$, alors $\tau \simeq \tau_0$ et l'équation (1.8) devient simplement l'équation d'onde classique :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\tau_0}{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

1.3.2 Domaine non-cylindrique

On considère une corde à longueur variable avec le temps $\gamma(t)$, dans $[\alpha(t), \beta(t)]$ telle que $\alpha(0) = \alpha_0$, $\beta(0) = \beta_0$ et $\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t)$. On note par $\hat{\tau}(t)$ la tension dans $[\alpha(t), \beta(t)]$. Même hypothèses de la section précédent, d'après la loi de Newton on a :

$$\frac{\partial}{\partial x} (\tau(t) \sin \theta) = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (1.9)$$

et par la loi de Hooke, la variation de la tension de $[\alpha_0, \beta_0]$ dans $[\alpha(t), \beta(t)]$ est :

$$\hat{\tau}(t) - \tau_0 = k \frac{\gamma(t) - \gamma_0}{\gamma_0}, \quad (1.10)$$

et la variation de la tension dans la courbe $\Gamma(t)$ est :

$$\tau(t) - \hat{\tau}(t) = k \frac{S(t) - \gamma(t)}{\gamma(t)}, \quad (1.11)$$

avec $S(t)$ est la longueur de la courbe $\Gamma(t)$. Alors on a :

$$S(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} dx,$$

de (1.2) et comme $\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t)$, alors

$$S(t) - \gamma(t) \simeq \frac{1}{2} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (1.12)$$

On substitue (1.12) dans (1.11) on obtient :

$$\tau(t) - \hat{\tau}(t) = \frac{k}{2\gamma(t)} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx,$$

de (1.10) on a :

$$\tau(t) = \tau_0 + k \frac{\gamma(t) - \gamma_0}{\gamma_0} + \frac{k}{2\gamma(t)} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx.$$

D'après (1.2), (1.9) devient :

$$\tau(t) \frac{\partial}{\partial x} \sin \theta = \tau(t) \frac{\partial}{\partial x} \tan \theta = \tau(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Finalement, on trouve

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\tau_0}{m} + \frac{k}{m} \frac{\gamma(t) - \gamma_0}{\gamma_0} + \frac{k}{2m\gamma(t)} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

1.3.3 Équation des ondes avec amortissement

Même hypothèses de la sous-section précédente, alors d'après la loi de Newton on a :

$$\frac{\partial}{\partial x} (\tau(t) \sin \theta) - F \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (1.13)$$

avec F est une fonction qui représentée un amortissement qui dépend de la vitesse $\frac{\partial u}{\partial t}$. En utilisant les argument du sous-section précédent on obtient devient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\tau_0}{m} + \frac{k}{m} \frac{\gamma(t) - \gamma_0}{\gamma_0} + \frac{k}{2m\gamma(t)} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0.$$

Si on suppose que $k \ll 1$, on retrouve aussi l'équation d'onde non linéaire

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\tau_0}{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0, \quad t > 0,$$

pour $x \in]\alpha(t), \beta(t)[$.

ÉQUATION DES ONDES DANS UN DOMAINE NON-CYLINDRIQUE

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'étude du mouvement d'une corde vibrante dont la longueur est variable avec le temps.

2.1 Position du Problème

On note

$$\Omega_t =]\alpha(t), \beta(t)[\quad \text{et} \quad \partial\Omega_t = \{\alpha(t), \beta(t)\},$$

comme dans la figure suivante :

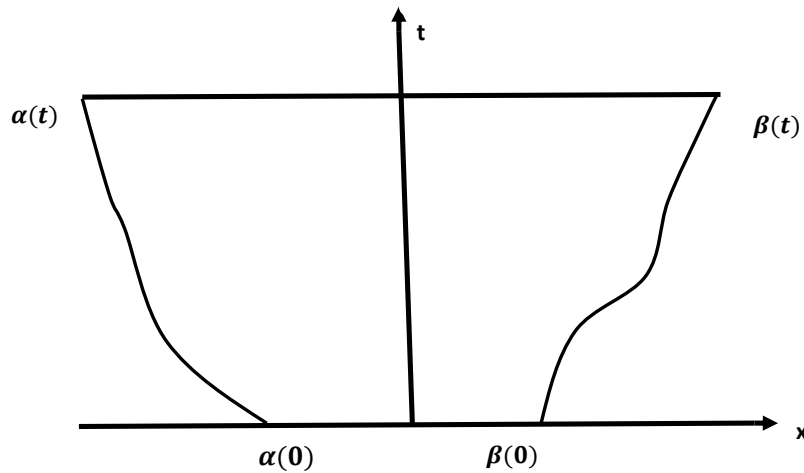


FIGURE 2.1 – Exemple d'un Domaine non-cylindrique.

avec ¹

$$\alpha, \beta \in C^1([0, +\infty[), \tag{2.1}$$

1. $\alpha, \beta \in C([0, +\infty[)$ et $\alpha', \beta' \in L^\infty(0, +\infty)$ suffit.

et on suppose que

$$|\alpha'(t)|, |\beta'(t)| < 1, \quad (2.2)$$

$$\alpha(t) < \beta(t) \text{ et } \exists t_0 \text{ telle que } |\beta(t)| < \theta t \text{ et } |\alpha(t)| < \theta t, \text{ pour } t > t_0 \quad (2.3)$$

où θ est une constante positive. Par le changement de variable

$$x \longmapsto x - \frac{\alpha(0) + \beta(0)}{2},$$

on peut toujours supposer

$$0 < \beta(0) = -\alpha(0). \quad (2.4)$$

Dans le domaine non-cylindrique

$$Q_T = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2; x \in \Omega_t, 0 < t < T\},$$

on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{dans } Q_T, \\ u(\alpha(t), t) = u(\beta(t), t) = 0 & \text{pour } 0 < t < T, \\ u(x, 0) = u^0 \text{ et } u_t(x, 0) = u^1 & \text{dans } \Omega_0 =]\alpha(0), \beta(0)[, \end{cases} \quad (\text{WE})$$

avec

$$u^0 \in H_0^1(\Omega_0) \cap H^2(\Omega_0) \text{ et } u^1 \in H_0^1(\Omega_0). \quad (2.5)$$

Sous les hypothèses (2.1), (2.2) et (2.5), il existe une solution unique u du problème (WE) qui satisfait

$$u \in C([0, T]; H_0^1(\Omega_t) \cap H^2(\Omega_t)) \text{ et } u_t \in C([0, T]; H_0^1(\Omega_t)).$$

Pour la démonstration voir [1].

Les fonctionnelles suivantes sont liées à la solution de (WE). La première est l'énergie (classique) :

$$E_1(t) = \frac{1}{2} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u_x^2(x, t) + u_t^2(x, t) dx, \quad \text{pour } t \geq 0,$$

et les fonctionnelles :

$$\begin{aligned} E_2(t) &= \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} t [u_x^2(x, t) + u_t^2(x, t)] + 2xu_x(x, t)u_t(x, t) dx, \\ E_3(t) &= \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} (x^2 + t^2) [u_x^2(x, t) + u_t^2(x, t)] + 4xtu_x(x, t)u_t(x, t) dx. \end{aligned}$$

Proposition 2.1 Si $\exists \theta_1 > 0$, $|\alpha'(t)|, |\beta'(t)| < \theta_1 < \theta < 1$, il existe un $T_0 > 0$ tel que

$$\theta t > \max\{|\alpha(t)|, |\beta(t)|\}, \text{ pour } t > T_0.$$

Démonstration. On a :

$$-\theta_1 < \alpha'(t).$$

Par intégration sur $[0, t]$, on obtient

$$-\theta_1 t \leq \alpha(t) - \alpha(0) \implies \alpha(t) \geq \alpha(0) - \theta_1 t.$$

Pour que $\alpha(t) \geq -\theta t$ il suffit de choisir $t \geq t_0$ telle que

$$\alpha(0) - \theta_1 t_0 \geq -\theta t_0 \geq -t_0 \implies t_0(\theta_1 - \theta) \leq \alpha(0),$$

et comme $\theta_1 - \theta < 0$ alors

$$t_0 \geq \frac{\alpha(0)}{\theta_1 - \theta} = \frac{-\alpha(0)}{\theta - \theta_1} = \frac{\beta(0)}{\theta - \theta_1}.$$

Donc pour $t = 0$, $\alpha(0) < 0$ et pour $t \geq t_0$,

$$\alpha(t) + \theta t \geq 0.$$

Comme $\alpha \in C([0, +\infty[)$, le théorème des valeurs intermédiaires implique que $\exists t_1$ telle que $\alpha(t_1) = -\theta t_1$ et par conséquent $\alpha(t) \geq -\theta t$ pour $t \geq t_1$.

D'autre part, de (2.3) on a :

$$\beta'(t) < \theta_1$$

et par intégration on obtient

$$\beta(t) - \beta(0) < \theta_1 t \implies \beta(t) < \beta(0) + \theta_1 t.$$

Pour $t \geq t_0$

$$\beta(0) + \theta_1 t_0 \leq \theta t_0 \implies t_0 > \frac{\beta(0)}{1 - \theta_1} \geq \frac{\beta(0)}{1 - \theta}, \theta_1 < \theta < 1.$$

De même on peut démontrer que $\exists t_2$ telle que $\beta(t) \leq \theta t$, pour $t \geq t_2$.

Finalement, il suffit de prendre $T_0 = \max\{t_1, t_2\}$ pour que

$$-\theta t \leq \alpha(t) \leq \beta(t) \leq \theta t, \quad t > T_0.$$

■

Lemme 2.1 Les fonctionnelles $E_1(t)$ et $E_3(t)$ sont positives pour $t \geq 0$ et $E_2(t) \geq 0$ si

$$t \geq T_0. \tag{2.6}$$

Démonstration. Pour $t \geq 0$, $E_1(t) \geq 0$ est évidente. Pour $E_2(t)$, on a sous la condition (2.6),

$$\alpha(t) < x < \beta(t) \implies |x| < \theta < t,$$

il vient

$$\begin{aligned} E_2(t) &\geq t \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u_x^2(x, t) + u_t^2(x, t) dx - 2t \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} |u_x(x, t)u_t(x, t)| dx \\ &\geq T_0 \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} (u_x(x, t) - u_t(x, t))^2 dx. \end{aligned}$$

D'où $E_2(t) \geq 0$ pour $t \geq T_0$.

Pour $E_3(t)$ on utilise l'inégalité suivante $ab \geq -\frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ alors $4xt \geq -2(x^2 + t^2)$, d'où

$$E_3(t) \geq \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} (x^2 + t^2) [u_x^2(x, t) + u_t^2(x, t) - 2u_x(x, t)u_t(x, t)] dx.$$

Donc pour $t > 0$

$$E_3(t) \geq \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} (x^2 + t^2) [u_x(x, t) - u_t(x, t)]^2 dx \geq 0.$$

■

2.2 Quelques estimations pour $E_1(t)$ et $E_2(t)$

Théorème 2.1 On suppose que (2.2) et (2.1) sont vérifiées. Soit u est une solution de (WE) dans Q_T pour $T > T_0$.

(i) Si $\beta(t)$ et $\alpha(t)$ sont linéaires, alors pour $t \in [T_0, T]$ on a :

$$E_2(T) = E_2(T_0).$$

(ii) Si $t\beta'(t) - \beta(t) \geq 0$ et $t\alpha'(t) - \alpha(t) \leq 0$, pour $t \in [T_0, T]$, alors :

$$E_2(T) \leq E_2(T_0),$$

et on a :

$$E_1(t) \leq \frac{T_0}{t} \left(\frac{1 + \theta}{1 - \theta} \right) E_1(T_0).$$

(iii) Si $t\beta'(t) - \beta(t) \leq 0$ et $t\alpha'(t) - \alpha(t) \geq 0$, pour $t \in [T_0, T]$, alors :

$$E_2(T) \geq E_2(T_0),$$

et $t \geq T_0 \geq 0$ on a :

$$E_1(t) \geq \frac{T_0}{t} \left(\frac{1 - \theta}{1 + \theta} \right) E_1(T_0).$$

Pour montrer ce théorème on a besoins des lemmes suivants :

Lemme 2.2 Soit $u(x, t)$ la solution de (WE) dans Q_T , alors on a pour $0 \leq t_0 \leq T$

$$E_1(T) - E_1(t_0) = -\frac{1}{2} \int_{t_0}^T \beta'(t) \left(1 - |\beta'(t)|^2\right) u_x^2(\beta(t), t) - \alpha'(t) \left(1 - |\alpha'(t)|^2\right) u_x^2(\alpha(t), t) dt. \quad (2.7)$$

Démonstration. On multiplie $u_{tt} - u_{xx} = 0$ par u_t et on intègre sur Ω_t ,

$$\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u_{tt}u_t - u_{xx}u_t dx = 0.$$

Comme

$$u_{tt}u_t = \frac{1}{2}(u_t^2)_t \text{ et } -u_{xx}u_t = -u_{xx}u_t - u_{xt}u_x + u_{xt}u_x = \frac{1}{2}(u_x^2)_t - (u_xu_t)_x,$$

alors :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} u_t^2(x, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} u_x^2(x, t) - (u_xu_t)_x dx \\ = \frac{1}{2} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} (u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t)) dx - \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} (u_xu_t)_x dx = 0. \end{aligned}$$

D'après la formule d'intégration de Leibniz :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} [u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t)] dx \\ = \frac{d}{dt} \underbrace{\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{1}{2} u_t^2(x, t) + \frac{1}{2} u_x^2(x, t) dx}_{E_1(t)} - \frac{\beta'(t)}{2} [u_t^2(\beta(t), t) + u_x^2(\beta(t), t)] \\ + \frac{\alpha'(t)}{2} [u_t^2(\alpha(t), t) + u_x^2(\alpha(t), t)]. \end{aligned}$$

Par intégration sur $[t_0, T]$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T \frac{d}{dt} E_1(t) dt - \int_{t_0}^T \frac{\beta'(t)}{2} [u_t^2(\beta(t), t) + u_x^2(\beta(t), t)] dt \\ - \int_{t_0}^T \frac{\alpha'(t)}{2} [u_t^2(\alpha(t), t) + u_x^2(\alpha(t), t)] dt - \int_{t_0}^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} (u_xu_t)_x dx dt = 0, \end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned} [E_1(t)]_{t_0}^T - \int_{t_0}^T \frac{\beta'(t)}{2} [u_t^2(\beta(t), t) + u_x^2(\beta(t), t)] dt + \int_{t_0}^T \frac{\alpha'(t)}{2} [u_t^2(\alpha(t), t) + u_x^2(\alpha(t), t)] dt \\ + \int_{t_0}^T u_x(\alpha(t), t)u_t(\alpha(t), t) - u_x(\beta(t), t)u_t(\beta(t), t) dt = 0. \end{aligned}$$

D'après les conditions aux limite $u(\alpha(t), t) = u(\beta(t), t) = 0$, on a

$$\frac{d}{dt}u(\alpha(t), t) = \frac{d}{dt}u(\beta(t), t) = 0.$$

Ce qui implique que

$$u_x(\beta(t), t)\beta'(t) + u_t(\beta(t), t) = 0 \text{ et } u_t(\alpha(t), t) + \alpha'(t)u_x(\alpha(t), t) = 0,$$

alors :

$$u_t(\beta(t), t) = -\beta'(t)u_x(\beta(t), t) \quad \text{et} \quad u_t(\alpha(t), t) = -\alpha'(t)u_x(\alpha(t), t). \quad (2.8)$$

D'où

$$\begin{aligned} E_1(T) - E_1(t_0) \\ - \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \beta'(t) \left(|\beta'(t)|^2 + 1 \right) u_x^2(\beta(t), t) - \alpha'(t) \left(|\alpha'(t)|^2 + 1 \right) u_x^2(\alpha(t), t) dt \\ + \int_{t_0}^T (\beta'(t)u_x^2(\beta(t), t) dt - \int_{t_0}^T \alpha'(t)u_x^2(\alpha(t), t) dt = 0. \end{aligned}$$

Finalement on obtient

$$\begin{aligned} E_1(T) - E_1(t_0) = \\ - \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \beta'(t) \left(1 - |\beta'(t)|^2 \right) u_x^2(\beta(t), t) - \alpha'(t) \left(1 - |\alpha'(t)|^2 \right) u_x^2(\alpha(t), t) dt. \end{aligned}$$

■

Remarque 2.1 Du lemme 2.2, pour $t_0 = 0$, on déduit

$$\begin{aligned} E_1(T) - E_1(0) = \\ - \frac{1}{2} \int_0^T \beta'(t) \left(1 - |\beta'(t)|^2 \right) u_x^2(\beta(t), t) - \alpha'(t) \left(1 - |\alpha'(t)|^2 \right) u_x^2(\alpha(t), t) dt. \quad (2.9) \end{aligned}$$

Théorème 2.2 Soit $u(x, t)$ est une solution de (WE) dans Q_T .

- i) Si $\alpha'(t) \leq 0$ et $\beta'(t) \geq 0$ alors $E_1(t)$ est décroissante $\forall t, 0 \leq t \leq T$.
- ii) Si $\alpha'(t) \geq 0$ et $\beta'(t) \leq 0$ alors $E_1(t)$ est croissante $\forall t, 0 \leq t \leq T$.

Démonstration. Par l'équation (2.9) et la condition (2.2) on a :

- i) Si $\alpha'(t) \leq 0$ et $\beta'(t) \geq 0$ alors

$$E_1(T) - E_1(0) \leq 0, \quad \forall t, 0 \leq t \leq T,$$

i.e. $E_1(t)$ est décroissante.

ii) Si $\alpha'(t) \geq 0$ et $\beta'(t) \leq 0$ alors

$$E_1(T) - E_1(0) \geq 0, \quad \forall t, 0 \leq t \leq T,$$

i.e. $E_1(t)$ est croissante. ■

Lemme 2.3 Soit $u(x, t)$ est une solution de (WE) dans Q_T , alors pour $t \in [t_0, T]$ on a :

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^T \beta(t) \left(1 - |\beta'(t)|^2\right) u_x^2(\beta(t), t) - \alpha(t) \left(1 - |\alpha'(t)|^2\right) u_x^2(\alpha(t), t) dt \\ &= 2 \int_{t_0}^T E_1(t) dt + 2 \int_{\alpha(T)}^{\beta(T)} x u_t(x, T) u_x(x, T) dx - 2 \int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} x u_t(x, t_0) u_x(x, t_0) dx. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Démonstration. On multiplie $u_{tt} - u_{xx} = 0$ par $2xu_x$ et on intègre sur Q_T :

$$\int_{t_0}^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} 2x u_{tt} u_x - 2x u_{xx} u_x \, dx dt = 0.$$

Comme

$$x u_{tt} u_x = (x u_t u_x)_t - \frac{1}{2} (x u_t^2)_x + \frac{1}{2} u_t^2 \quad \text{et} \quad x u_{xx} u_x = \frac{1}{2} u_x^2 - \frac{1}{2} (x u_x^2)_x,$$

alors pour $t \in [t_0, T]$

$$\int_{t_0}^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} (2x u_t u_x) dx dt - \frac{\partial}{\partial x} (x u_x^2 + x u_t^2) dx dt + \int_{t_0}^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u_x^2 + u_t^2 dx dt = 0. \quad (2.11)$$

D'après la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} (2x u_t u_x) dx &= \frac{d}{dt} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} 2x u_t u_x dx - 2\beta'(t) [\beta(t) u_x(\beta(t), t) u_t(\beta(t), t)] \\ &\quad + 2\alpha'(t) [\alpha(t) u_t(\alpha(t), t) u_x(\alpha(t), t)] \end{aligned}$$

et d'après les identités (2.8) on a :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} (2x u_t u_x) dx dt &= 2 \int_{\alpha(T)}^{\beta(T)} x u_t(x, T) u_x(x, T) dx \\ &\quad - 2 \int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} x u_t(x, t_0) u_x(x, t_0) dx + 2 \int_{t_0}^T \left[|\beta'(t)|^2 \beta(t) u_x^2(\beta(t), t) - |\alpha'(t)|^2 \alpha(t) u_x^2(\alpha(t), t) \right] dt \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial x} (x u_x^2 + x u_t^2) dx dt \\ = \int_{t_0}^T \beta(t) \left(1 + |\beta'(t)|^2\right) u_x^2(\beta(t), t) - \alpha(t) \left(1 + |\alpha'(t)|^2\right) u_x^2(\alpha(t), t) dt. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} & 2 \int_{\alpha(T)}^{\beta(T)} x u_t(x, T) u_x(x, T) dx - 2 \int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} x u_t(x, t_0) u_x(x, t_0) dx \\ & \quad + 2 \int_{t_0}^T \left| \beta'(t) \right|^2 \beta(t) u_x^2(\beta(t), t) - \left| \alpha'(t) \right|^2 \alpha(t) u_x^2(\alpha(t), t) dt \\ & \quad - \int_{t_0}^T \beta(t) (1 + \left| \beta'(t) \right|^2) u_x^2(\beta(t), t) - \alpha(t) (1 + \left| \alpha'(t) \right|^2) dt + 2 \int_{t_0}^T E_1(t) dt = 0. \end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^T \beta(t) \left(1 - \left| \beta'(t) \right|^2 \right) u_x^2(\beta(t), t) - \alpha(t) \left(1 - \left| \alpha'(t) \right|^2 \right) u_x^2(\alpha(t), t) dt \\ & \quad = 2 \int_{t_0}^T E_1(t) dt + 2 \int_{\alpha(T)}^{\beta(T)} x u_t(x, T) u_x(x, T) dx - 2 \int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} x u_t(x, t_0) u_x(x, t_0) dx. \end{aligned}$$

■

Lemme 2.4 Pour $T \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} 2 \int_{t_0}^T E_1(t) dt - 2 [T E_1(T) - t_0 E_1(t_0)] &= \int_{t_0}^T t \beta'(t) \left(1 - \left| \beta'(t) \right|^2 \right) u_x^2(\beta(t), t) dt \\ & \quad - \int_{t_0}^T t \alpha'(t) \left(1 - \left| \alpha'(t) \right|^2 \right) u_x^2(\alpha(t), t) dt. \quad (2.12) \end{aligned}$$

Démonstration. On multiplie $u_{tt} - u_{xx} = 0$ par $2tu_t$ et on intègre sur Q_T :

$$\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} 2tu_{tt}u_t - 2tu_{xx}u_t dx = 0.$$

On a :

$$2tu_{tt}u_t = (tu_t^2)_t - u_t^2 \text{ et } 2tu_{xx}u_t = -(tu_x^2)_t + (2tu_tu_x)_x + u_x^2,$$

alors

$$\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} (tu_x^2 + tu_t^2) dx - \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial x} (2tu_tu_x) dx - \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u_x^2 + u_t^2 dx = 0.$$

D'après la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} (tu_x^2 + tu_t^2) dx &= \frac{d}{dt} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} (tu_x^2 + tu_t^2) dx \\ & \quad - \beta'(t) [tu_x^2(\beta(t), t) + tu_t^2(\beta(t), t)] + \alpha'(t) [tu_x^2(\alpha(t), t) + tu_t^2(\alpha(t), t)]. \end{aligned}$$

D'après (2.8) on a par intégration sur $[t_0, T]$,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} (tu_x^2 + tu_t^2) dx dt &= [2tE_1(t)]_{t_0}^T \\ & \quad - \int_{t_0}^T t \beta'(t) \left(1 + \left| \beta'(t) \right|^2 \right) u_x^2(\beta(t), t) - t \alpha'(t) \left(1 + \left| \alpha'(t) \right|^2 \right) u_x^2(\alpha(t), t) dt. \quad (2.13) \end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\int_{t_0}^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial x} (2tu_t u_x) dx dt = 2 \int_{t_0}^T t\alpha'(t)u_x^2(\alpha(t), t) - t\beta'(t)u_x^2(\beta(t), t) dt. \quad (2.14)$$

De (2.13) et (2.14), on obtient

$$\begin{aligned} 2TE_1(T) - 2t_0E_1(t_0) - 2 \int_{t_0}^T t\alpha'(t)u_x^2(\alpha(t), t) - t\beta'(t)u_x^2(\beta(t), t) dt \\ - \int_{t_0}^T t\beta'(t) \left(1 + |\beta'(t)|^2\right) u_x^2(\beta(t), t) - t\alpha'(t) \left(1 + |\alpha'(t)|^2\right) u_x^2(\alpha(t), t) dt \\ - 2 \int_{t_0}^T E_1(t) dt = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} 2 \int_{t_0}^T E_1(t) dt - 2 [TE_1(T) - t_0E_1(t_0)] \\ = \int_{t_0}^T t\beta'(t) \left(1 - |\beta'(t)|^2\right) u_x^2(\beta(t), t) dt - \int_{t_0}^T t\alpha'(t) \left(1 - |\alpha'(t)|^2\right) u_x^2(\alpha(t), t) dt. \end{aligned}$$

■

Remarque 2.2 Les inégalités (2.7), (2.10) et (2.12) restent valables pour $t_0 = 0$.

Maintenant, on peut démontrer le théorème 2.1.

Démonstration du Théorème 2.1.

(i) D'après l'égalité (2.12) :

$$\begin{aligned} 2 \int_{t_0}^T E_1(t) dt = 2 [TE_1(T) - t_0E_1(t_0)] \\ + \int_{t_0}^T t\beta'(t) \left(1 - |\beta'(t)|^2\right) u_x^2(\beta(t), t) - t\alpha'(t) \left(1 - |\alpha'(t)|^2\right) u_x^2(\alpha(t), t) dt \quad (2.15) \end{aligned}$$

et on substituant (2.15) dans (2.10) on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T [\beta(t) - t\beta'(t)] \left(1 - |\beta'(t)|^2\right) u_x^2(\beta(t), t) dt \\ - \int_{t_0}^T [\alpha(t) - t\alpha'(t)] \left(1 - |\alpha'(t)|^2\right) u_x^2(\alpha(t), t) dt \\ = 2 [TE_1(T) - t_0E_1(t_0)] + 2 \int_{\alpha(T)}^{\beta(T)} xu_t(x, T)u_x(x, T) dx \\ - 2 \int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} xu_t(x, t_0)u_x(x, t_0) dx. \quad (2.16) \end{aligned}$$

D'après la définition de $E_2(t)$, on a $\forall T_0 \leq t \leq T$

$$E_2(T) - E_2(T_0) + \int_{T_0}^T [t\beta'(t) - \beta(t)] \left(1 - |\beta'(t)|^2\right) u_x^2(\beta(t), t) dt - \int_{T_0}^T [t\alpha'(t) - \alpha(t)] \left(1 - |\alpha'(t)|^2\right) u_x^2(\alpha(t), t) dt = 0. \quad (2.17)$$

Si $\beta(t)$ et $\alpha(t)$ sont linéaires sur pour $t \in [T_0, T]$, alors

$$\beta(t) - t\beta'(t) = t\alpha'(t) - \alpha(t) = 0,$$

et on déduit que :

$$E_2(t) = E_2(T_0), T_0 \leq t \leq T.$$

(ii) D'après (2.17) et $t\beta'(t) - \beta(t) \geq 0$ et $t\alpha'(t) - \alpha(t) \leq 0$, alors :

pour $T_0 \leq t \leq T$, on a

$$E_2(t) - E_2(T_0) = \int_{T_0}^t [\beta(s) - s\beta'(s)] (1 - |\beta'(s)|^2) u_x^2(\beta(s), s) ds - \int_{T_0}^t [\alpha(s) - s\alpha'(s)] (1 - |\alpha'(s)|^2) u_x^2(\alpha(s), s) ds \leq 0$$

donc $E_2(t) \leq E_2(T_0)$ alors $E_2(t)$ est décroissante pour $t \in [T_0, T]$.

Et d'autre part, on a par la condition

$$\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} (t - \max\{|\alpha(t)|, |\beta(t)|\}) [u_x^2(x, t) + u_t^2(x, t)] dx \leq E_2(t) \leq \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} (t + \max\{|\alpha(t)|, |\beta(t)|\}) [u_x^2(x, t) + u_t^2(x, t)] dx, \quad (2.18)$$

i.e.,

$$2(t - \max\{|\alpha(t)|, |\beta(t)|\}) E_1(t) \leq E_2(t) \leq 2(t + \max\{|\alpha(t)|, |\beta(t)|\}) E_1(t).$$

D'après (2.3), on a

$$\max\{|\alpha(t)|, |\beta(t)|\} \leq \theta t,$$

pour $t \geq T_0$ alors on obtient

$$T_0 + \max\{|\alpha(T_0)|, |\beta(T_0)|\} \leq T_0(1 + \theta) \quad (2.19)$$

$$t - \max\{|\alpha(t)|, |\beta(t)|\} \geq t(1 - \theta), t \geq T_0 \quad (2.20)$$

ce qui implique

$$2t(1 - \theta) E_1(t) \leq E_2(t) \leq E_2(T_0) \leq 2T_0(1 + \theta) E_1(T_0).$$

D'où

$$E_1(t) \leq \frac{T_0}{t} \left(\frac{1+\theta}{1-\theta} \right) E_1(T_0), \text{ pour } T_0 < t < T.$$

(iii) D'après (2.17) et $t\beta'(t) - \beta(t) \leq 0$ et $t\alpha'(t) - \alpha(t) \geq 0$, pour $0 < T_0 < t$ on obtient :

$$E_2(t) \geq E_2(T_0),$$

alors $E_2(t)$ est croissante pour $T_0 < t < T$.

De (2.16),(2.20) et (2.19) on obtient :

$$2T_0(1-\theta)E_1(T_0) \leq E_2(T_0) \leq E_2(t) \leq 2t(1+\theta)E_1(t),$$

d'où

$$E_1(t) \geq \frac{T_0}{t} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta} \right) E_1(T_0), \text{ pour } T_0 < t < T.$$

■

2.3 Quelques estimations pour $E_3(t)$

Théorème 2.3 *Sous les hypothèses (2.1) et (2.2). Soit u est une solution de (WE) dans Q_T .*

(i) *Si pour certains T_1 , $0 < T_0 \leq T_1 \leq T$ telle que*

$$\beta'(t) [\beta^2(t) + t^2] - 2t\beta(t) = \alpha'(t) [\alpha^2(t) + t^2] - 2t\alpha(t) = 0,$$

alors on a $E_3(T) = E_3(0)$.

(ii) *Si pour certains T_1 , $0 < T_0 \leq T_1 \leq T$ telle que*

$$\beta'(t) [\beta^2(t) + t^2] - 2t\beta(t) \geq 0 \text{ et } \alpha'(t) [\alpha^2(t) + t^2] - 2t\alpha(t) \leq 0, \quad (2.21)$$

alors $E_3(t)$ est croissante, et on a :

$$E_1(t) \geq \frac{1}{1+\theta^2} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta} \right)^2 \frac{T_1^2}{t^2} E_1(T_1), \text{ pour } t \geq T_1.$$

Démonstration. (i) On multiplie $u_{tt} - u_{xx} = 0$ par $2(x^2 + t^2)u_t + 4xtu_x$ et on intègre sur Q_T ,

$$\int_{T_1}^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} 2(x^2 + t^2)u_{tt}u_t - 2(x^2 + t^2)u_{xx}u_t + 4xtu_{tt}u_x - 4xtu_{xx}u_x dx dt = 0,$$

alors

$$\underbrace{\int_{T_1}^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} [4xtu_t u_x + (x^2 + t^2)(u_x^2 + u_t^2)] dx dt}_{I_1} - 2 \underbrace{\int_{T_1}^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial x} [(x^2 + t^2)u_t u_x + xt(u_x^2 + u_t^2)] dx dt}_{I_2} = 0.$$

On utilise la formule de Leibniz, on trouve :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{T_1}^T \frac{d}{dt} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} 4xtu_t u_x + (x^2 + t^2)(u_x^2 + u_t^2) dx dt \\ &\quad - \int_{T_1}^T \beta'(t) [4\beta(t)tu_t(\beta(t), t)u_x(\beta(t), t) + [\beta^2(t) + t^2] [u_x^2(\beta(t), t) + u_t^2(\beta(t), t)]] dt \\ &\quad + \int_{T_1}^T \alpha'(t) [4\alpha(t)tu_t(\alpha(t), t)u_x(\alpha(t), t) + [\alpha^2(t) + t^2] [u_x^2(\alpha(t), t) + u_t^2(\alpha(t), t)]] dt. \end{aligned}$$

Daprès la condition (2.8) et la définition de $E_3(t)$, donc

$$\begin{aligned} I_1 &= E_3(T) - E_3(T_1) \\ &\quad + \int_{T_1}^T \left(4t\beta(t) |\beta'(t)|^2 - \beta'(t) ([\beta(t)]^2 + t^2) \left(|\beta'(t)|^2 + 1 \right) \right) u_x^2(\beta(t), t) dt \\ &\quad + \int_{T_1}^T \left(\alpha'(t) ([\alpha(t)]^2 + t^2) \left(|\alpha'(t)|^2 + 1 \right) - 4t\alpha(t) |\alpha'(t)|^2 \right) u_x^2(\alpha(t), t) dt \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{T_1}^T [(x^2 + t^2)u_t u_x + xt(u_x^2 + u_t^2)]_{\alpha(t)}^{\beta(t)} dt \\ &= \int_{T_1}^T [\beta^2(t) + t^2] u_t(\beta(t), t)u_x(\beta(t), t) + t\beta(t) [u_x^2(\beta(t), t) + u_t^2(\beta(t), t)]] dt \\ &\quad - \int_{T_1}^T [\alpha^2(t) + t^2] u_t(\alpha(t), t)u_x(\alpha(t), t) + t\alpha(t) [u_x^2(\alpha(t), t) + u_t^2(\alpha(t), t)]] dt. \end{aligned}$$

Après quelques simplifications, on trouve

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{T_1}^T \left[-\beta'(t) [\beta^2(t) + t^2] + t\beta(t) \left(|\beta'(t)|^2 + 1 \right) \right] u_x^2(\beta(t), t) dt \\ &\quad + \int_{T_1}^T \left[\alpha'(t) [\alpha^2(t) + t^2] - t\alpha(t) \left(|\alpha'(t)|^2 + 1 \right) \right] u_x^2(\alpha(t), t) dt. \end{aligned}$$

Alors, $\forall t, 0 \leq t \leq T, I_1 - 2I_2 = 0$ implique que

$$\begin{aligned} E_3(T) - E_3(T_1) &= \int_{T_1}^T \left(\beta'(t) [\beta^2(t) + t^2] - 2t\beta(t) \right) \left(1 - |\beta'(t)|^2 \right) u_x^2(\beta(t), t) dt \\ &\quad + \int_{T_1}^T \left(2t\alpha(t) - \alpha'(t) [\alpha^2(t) + t^2] \right) \left(1 - |\alpha'(t)|^2 \right) u_x^2(\alpha(t), t) dt. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Donc d'après la condition

$$\beta'(t) ([\beta(t)]^2 + t^2) - 2t\beta(t) = 2t\alpha(t) - \alpha'(t) ([\alpha(t)]^2 + t^2) = 0,$$

alors on a :

$$E_3(T) = E_3(T_1), \text{ pour } t \in [T_1, T].$$

(ii) D'après (2.22) et la condition

$$\beta'(t) [\beta^2(t) + t^2] - 2t\beta(t) \geq 0 \text{ et } \alpha'(t) [\alpha^2(t) + t^2] - 2t\alpha(t) \leq 0,$$

pour $0 < T_0 \leq T_1 \leq T$, on a

$$\begin{aligned} E_3(T) - E_3(T_1) &= \int_{T_1}^T \left(\beta'(t) [\beta^2(t) + t^2] - 2t\beta(t) \right) \left(1 - |\beta'(t)|^2 \right) u_x^2(\beta(t), t) dt \\ &\quad - \int_{T_1}^T \left(\alpha'(t) [\alpha^2(t) + t^2] - 2t\alpha(t) \right) \left(1 - |\alpha'(t)|^2 \right) u_x^2(\alpha(t), t) dt \geq 0. \end{aligned}$$

Donc $E_3(T) \geq E_3(T_1)$ et $E_3(t)$ est croissante pour $T \geq T_1$.

D'autre part, à partir la définition de $E_3(t)$ on a :

$$E_3(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} (x^2 + t^2) [u_x^2(x, t) + u_t^2(x, t)] + 4xtu_x(x, t)u_t(x, t) dx$$

et d'après l'inégalité de Young on a :

$$-2tx(u_x^2(x, t) + u_t^2(x, t)) \leq 4xtu_x(x, t)u_t(x, t) \leq 2xt(u_x^2(x, t) + u_t^2(x, t)).$$

Du lemme 1.1, on obtient

$$\begin{aligned} -\frac{2\theta}{1+\theta^2}(x^2 + t^2)(u_x^2(x, t) + u_t^2(x, t)) &\leq 4xtu_x(x, t)u_t(x, t) \\ &\leq \frac{2\theta}{1+\theta^2}(x^2 + t^2)(u_x^2(x, t) + u_t^2(x, t)). \end{aligned}$$

Alors, $\forall t, T \geq t \geq T_1 \geq 0$ on a :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} (x^2 + t^2) [u_x^2(x, t) + u_t^2(x, t)] - \frac{2\theta}{1+\theta^2}(x^2 + t^2) [u_x^2(x, t) + u_t^2(x, t)] dx &\leq E_3(t) \\ &\leq \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} (x^2 + t^2) [u_x^2(x, t) + u_t^2(x, t)] + \frac{2\theta}{1+\theta^2}(x^2 + t^2) [u_x^2(x, t) + u_t^2(x, t)] dx, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2\theta}{1 + \theta^2}\right) \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} (x^2 + t^2) [u_x^2(x, t) + u_t^2(x, t)] dx &\leq E_3(t) \\ &\leq \left(1 + \frac{2\theta}{1 + \theta^2}\right) \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} (x^2 + t^2) [u_x^2(x, t) + u_t^2(x, t)] dx. \end{aligned}$$

Alors, $\forall t \geq T_1 \geq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{(1 - \theta)^2}{1 + \theta^2} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} (x^2 + t^2) [u_x^2(x, t) + u_t^2(x, t)] dx &\leq E_3(t) \\ &\leq \frac{(1 + \theta)^2}{1 + \theta^2} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} (x^2 + t^2) [u_x^2(x, t) + u_t^2(x, t)] dx. \end{aligned}$$

Rappelons que $E_3(t)$ est croissante, on obtient $\forall t, 0 \leq T_1 \leq t \leq T$

$$\begin{aligned} \frac{(1 - \theta)^2}{1 + \theta^2} \int_{\alpha(T_1)}^{\beta(T_1)} (x^2 + T_1^2) [u_x^2(x, T_1) + u_t^2(x, T_1)] dx &\leq E_3(T_1) \leq E_3(t) \\ &\leq \frac{(1 + \theta)^2}{1 + \theta^2} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} (x^2 + t^2) [u_x^2(x, t) + u_t^2(x, t)] dx, \quad (2.23) \end{aligned}$$

et comme x^2 est positive alors :

$$\begin{aligned} \frac{(1 - \theta)^2}{1 + \theta^2} \int_{\alpha(T_1)}^{\beta(T_1)} T_1^2 [u_x^2(x, T_1) + u_t^2(x, T_1)] dx &\leq \\ &\frac{(1 + \theta)^2}{1 + \theta^2} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} (x^2 + t^2) [u_x^2(x, t) + u_t^2(x, t)] dx, \end{aligned}$$

et comme

$$|x| \leq \theta t \implies x^2 + t^2 \leq (1 + \theta^2)t^2,$$

on a,

$$\begin{aligned} \frac{(1 - \theta)^2}{1 + \theta^2} \int_{\alpha(T_1)}^{\beta(T_1)} T_1^2 [u_x^2(x, T_1) + u_t^2(x, T_1)] dx &\leq \\ &\leq \frac{(1 + \theta)^2}{1 + \theta^2} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} (1 + \theta^2)t^2 [u_x^2(x, t) + u_t^2(x, t)] dx. \quad (2.24) \end{aligned}$$

D'où

$$2 \frac{(1 - \theta)^2}{1 + \theta^2} T_1^2 E_1(T_1) \leq 2t^2 (1 + \theta^2)^2 E_1(t).$$

Finalement, $\forall 0 \leq T_1 \leq t$ on obtient :

$$E_1(t) \geq \frac{1}{1 + \theta^2} \left(\frac{1 - \theta}{1 + \theta}\right)^2 \frac{T_1^2}{t^2} E_1(T_1).$$

■

Remarque 2.3 Si $\beta'(t) > 0$ et $\alpha'(t) < 0$, (2.21) est satisfait pour que

$$t\beta'(t) - \beta(t) \leq 0 \text{ et } t\alpha'(t) - \alpha(t) \geq 0.$$

En effet, de (2.3) on a

$$\begin{aligned} \beta'(t) [\beta^2(t) + t^2] - 2t\beta(t) &\leq \beta'(t) [\theta^2 + 1] t^2 - 2t\beta(t) \\ &\leq 2t^2\beta'(t) - 2t\beta(t) \\ &= 2t \left(t\beta'(t) - \beta(t) \right) \leq 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \alpha'(t) [\alpha^2(t) + t^2] - 2t\alpha(t) &\geq \alpha'(t) [\theta^2 + 1] t^2 - 2t\alpha(t) \\ &\geq 2t^2\alpha'(t) - 2t\alpha(t) \\ &= 2t \left(t\alpha'(t) - \alpha(t) \right) \geq 0. \end{aligned}$$

2.4 Estimations d'énergie pour certains domaines simples

On étudie les cas suivants :

2.4.1 Domaine symétrique

On suppose que :

$$\alpha(t) = -\beta(t) \implies \Omega_t =]-\beta(t), \beta(t)[\text{ et } |\alpha'(t)| = |\beta'(t)| < 1$$

et soit $u(x, t)$ une solution de (WE) dans Q_T alors on a :

Lemme 2.5 Pour $T \geq 0$

$$E_1(T) - E_1(0) = -\frac{1}{2} \int_0^T \beta'(t) \left(1 - |\beta'(t)|^2 \right) \left(u_x^2(\beta(t), t) + u_x^2(-\beta(t), t) \right) dt.$$

On déduit le théorème suivant :

Théorème 2.4 Soit $u(x, t)$ est une solution de (WE) dans Q_T , alors :

- i) Si $\beta'(t) \geq 0$ alors $E_1(t)$ est décroissante $\forall T \geq t \geq 0$.
- ii) Si $\beta'(t) \leq 0$ alors $E_1(t)$ est croissante $\forall T \geq t \geq 0$.

Théorème 2.5 Soit u est une solution de (WE) dans Q_T . $\forall T \geq T_0$ on a :

(i) Si $\beta(t)$ est linéaire, $\forall t > 0$. Alors on a :

$$E_2(T) = E_2(0).$$

(ii) Si $\beta(t) - t\beta'(t) \leq 0$, $\forall t > 0$. Alors : $E_2(t)$ est décroissante pour $t \in [T_0, T]$ et

$$E_1(t) \leq \frac{T_0}{t} \left(\frac{1+\theta}{1-\theta} \right) E_1(T_0).$$

(iii) Si $\beta(t) - t\beta'(t) \geq 0$, $\forall t > 0$. Alors : $E_2(t)$ est croissante pour $t \in [T_0, T]$ et

$$E_1(t) \geq \frac{T_0}{t} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta} \right) E_1(T_0).$$

Démonstration. Pour la démonstration on applique l'inégalité (2.17), dans ce cas s'écrit comme suivant :

$$E_2(T) - E_2(t_0) + \int_{t_0}^T \left[t\beta'(t) - \beta(t) \right] \left(1 - |\beta'(t)|^2 \right) \left[u_x^2(\beta(t), t) + u_x^2(-\beta(t), t) \right] dt = 0.$$

■

2.4.2 Domaine avec longueur constant

On a $\Omega_t =]\beta(t) - L, \beta(t)[$ c'est-à-dire,

$$\alpha(t) = \beta(t) - L \implies |\alpha'(t)| = |\beta'(t)| < 1,$$

avec L est la longueur de la corde. Alors

$$Q_T = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2; x \in \Omega_t, t > 0\}.$$

Théorème 2.6 Soit u est une solution de (WE) dans Q_T , $t \geq T_0$.

Si $0 \leq \beta(t) - t\beta'(t) \leq L$ alors $E_2(t)$ est croissante, et

$$E_1(t) \geq \frac{T_0 - \max\{|\beta(T_0) - L|, |\beta(T_0)|\}}{t + \max\{|\beta(t) - L|, |\beta(t)|\}} E_1(T_0), \quad \forall t \geq T_0.$$

Si $\beta(t) \geq 0$ pour $T_0 \leq t \leq T$ on a :

$$E_1(t) \geq \frac{T_0}{t} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta} \right) E_1(T_0).$$

Démonstration. Si on substitue $\alpha(t) = \beta(t) - L$ dans (2.17) on obtient,

$$\begin{aligned} & E_2(T) - E_2(T_0) \\ &= \int_{T_0}^T \left(1 - |\beta'(t)|^2\right) \left[[\beta(t) - t\beta'(t)] u_x^2(\beta(t), t) - [\beta(t) - L - t\beta'(t)] u_x^2(\beta(t) - L, t) \right] dt. \end{aligned}$$

Sous la condition $0 \leq \beta(t) - t\beta'(t) \leq L$ alors, pour $T_0 \leq t \leq T$ on a

$$E_2(T) \geq E_2(T_0),$$

d'où $E_2(t)$ est croissante $\forall T \geq t \geq T_0$. On obtient :

$$\begin{aligned} 2(T_0 - \max\{|\beta(T_0) - L|, |\beta(T_0)|\})E_1(T_0) &\leq E_2(T_0) \\ &\leq E_2(t) \leq 2(t + \max\{|\beta(t) - L|, |\beta(t)|\})E_1(t). \end{aligned}$$

Donc

$$E_1(t) \geq \frac{T_0 - \max\{|\beta(T_0) - L|, |\beta(T_0)|\}}{t + \max\{|\beta(t) - L|, |\beta(t)|\}} E_1(T_0), \quad \forall t \geq T_0.$$

D'autre part, de (2.20), (2.19), et si $\beta(t) \geq 0$ on a :

$$2T_0(1 - \theta)E_1(T_0) \leq E_2(T_0) \leq E_2(t) \leq 2t(1 + \theta)E_1(t).$$

Ceci implique que

$$E_1(t) \geq \frac{T_0}{t} \left(\frac{1 + \theta}{1 - \theta} \right) E_1(T_0).$$

■

2.4.3 Domaine à variation constant

Soit

$$Q_T = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2; x \in \Omega_t, 0 \leq t \leq T\},$$

et

$$\sum_T = \bigcup_{0 \leq t \leq T} \{\alpha(t), \beta(t)\} \times \{t\}.$$

On suppose que $\beta(0) = -\alpha(0) = L > 0$, telle que

$$\Omega_t = \begin{cases}]-L, L[, & 0 \leq t \leq T_0, \\]-L - \theta(t - T_0), L + \theta(t - T_0)[, & t \geq T_0, \quad 0 < \theta < 1. \end{cases}$$

Soit \vec{v} est le vecteur unitaire normale à la frontière latérale \sum_T , et $\vec{\tau}$ le vecteur tangentiel sur \sum_T . Les composantes de \vec{v} sont (v_x, v_t) , et les composantes de $\vec{\tau}$ sont

$$(\alpha'(t), 1) = (-\theta, 1) \quad \text{et} \quad (\beta'(t), 1) = (\theta, 1),$$

sur le coté gauche et droit respectivement. Alors on a $\vec{v} \cdot \vec{\tau} = 0$, d'où

$$-\theta(-|v_x|) + 1 \cdot v_t = 0 \quad \text{et} \quad \theta|v_x| + 1 \cdot v_t = 0,$$

sur le coté gauche et droit respectivement. Comme $|v| = 1$, on a le système

$$\begin{cases} \theta|v_x| + v_t = 0, \\ v_x^2 + v_t^2 = 1, \end{cases}$$

donc

$$|v_x| = \frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}} \quad \text{et} \quad v_t = \frac{-\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}.$$

En revenant au théorème 2.1 et 2.3, on a les cas suivantes

i) Si $T_0 = \frac{L}{\theta}$, alors

$$\Omega_t = \begin{cases}]-L, L[, & 0 \leq t \leq T_0, \\]-\theta t, \theta t[, & \text{pour } t \geq T_0, \end{cases}$$

$\alpha(t)$ et $\beta(t)$ sont linéaires, alors $E_2(t)$ est conservé. Pour $E_1(t)$ on a

$$\frac{C_1}{t} E_1(T_0) \leq E_1(t) \leq \frac{C_2}{t} E_1(T_0),$$

avec $C_1 = T_0 \frac{1-\theta}{1+\theta}$ et $C_2 = T_0 \frac{1+\theta}{1-\theta}$. Comme (2.21) est vérifiée dans ce cas, alors $E_3(t)$ est croissante et par (2.23)

$$E_3(t) \geq 2 \frac{(1-\theta)^2}{1+\theta^2} t^2 E_1(t) \geq C_3 t E_1(T_0),$$

où $C_3 = 2C_1 \frac{(1-\theta)^2}{1+\theta^2}$.

ii) Si $T_0 > \frac{L}{\theta}$, alors $L < \theta T_0$ et comme

$$-L - \theta(t - T_0) < x < L + \theta(t - T_0),$$

alors

$$-L + \theta T_0 - \theta t < x < L - \theta T_0 + \theta t,$$

et comme $|x| < \theta t$, et on a

$$\begin{cases} t\alpha'(t) - \alpha(t) = -\theta t - [-L - \theta(t - T_0)] = L - \theta T_0 < 0, \\ t\beta'(t) - \beta(t) = \theta t - [L + \theta(t - T_0)] = -L + \theta T_0 > 0, \end{cases}$$

donc les conditions $t\alpha'(t) - \alpha(t) < 0$ et $t\beta'(t) - \beta(t) > 0$ sont vérifiées pour $t \geq T_0$. Ainsi, $E_2(t)$ est décroissante pour $t \geq T_0$, et on a

$$E_1(t) \leq \frac{C_2}{t} E_1(T_0).$$

III) Si $T_0 < \frac{L}{\theta}$ alors $L > \theta T_0$ et on a

$$\begin{cases} t\alpha'(t) - \alpha(t) = -\theta t - [-L - \theta(t - T_0)] = L - \theta T_0 > 0, \\ t\beta'(t) - \beta(t) = \theta t - [L + \theta(t - T_0)] = -L + \theta T_0 < 0, \end{cases}$$

d'où $t\alpha'(t) - \alpha(t) > 0$ et $t\beta'(t) - \beta(t) < 0$. Par conséquent, $E_2(t)$ est croissante pour $t \geq T_0$, et on a

$$E_1(t) \geq \frac{C_1}{t} E_1(T_0).$$

De plus, la condition (2.21) est vérifiée (voire le remarque 2.2) et on déduit que $E_3(t)$ est croissante, et par (2.23)

$$E_3(t) \geq 2 \frac{(1 - \theta)^2}{1 + \theta^2} t^2 E_1(t) \geq C_3 t E_1(T_0).$$

ÉQUATION DES ONDES AVEC AMORTISSEMENT

Dans ce chapitre on étudie la stabilisation de l'équation des ondes avec le terme d'amortissement, c'est-à-dire la vitesse de mouvement est retardé par une force d'amortissement à la vitesse de la corde, on obtient l'équation des ondes avec termes d'amortissement suivante :

$$u_{tt} - u_{xx} + F(u_t) = 0, \text{ dans } Q_T.$$

3.1 Équation avec amortissement linéaire

Dans cette section on suppose que $F(u_t) = 2\lambda_1 u_t$, où $\lambda_1 > 0$ est une constante (de forttement). On considère le problème suivante :

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + 2\lambda_1 u_t = 0 & \text{dans } Q_T, \\ u(\alpha(t), t) = u(\beta(t), t) = 0 & \text{pour } 0 < t < T, \\ u(x, 0) = u_0 \text{ et } u_t(x, 0) = u_1 & \text{dans } \Omega_0 =]\alpha(0), \beta(0)[. \end{cases} \quad (\text{DWE})$$

avec

$$u^0 \in H_0^1(\Omega_0) \cap H^2(\Omega_0) \text{ et } u^1 \in H_0^1(\Omega_0) \quad (3.1)$$

et

$$\alpha, \beta \in C^1([0, +\infty[), \quad (3.2)$$

On utilisant la méthode de la pénalisation (voire [5, 8]) le résultat suivant sous les hypothèses (2.2), (3.1), (3.2), et on peut démontrer le problème (DWE) admet une solution unique u qui satisfait

$$u \in L^\infty([0, T]; H_0^1(\Omega_t) \cap H^2(\Omega_t)) \text{ et } u_t \in L^\infty([0, T]; H_0^1(\Omega_t)).$$

3.1.1 Premier résultat de stabilité polynomiale

Théorème 3.1 *On suppose que (2.2) est vérifié. Soit u une solution de (DWE) dans Q_T .*

Si $\beta'(t) \geq 0$ et $\alpha'(t) \leq 0$, alors $E_1(t)$ est décroissant pour $\lambda_1 > 0$.

Soit $0 < \varepsilon < 1$, et on choisi $\lambda_1 = k = \frac{1}{2\varepsilon}$, alors

$$E_1(T) \leq \left(\frac{\max \left\{ 1 + \varepsilon, 1 + \frac{\gamma^2(0)}{2\varepsilon^2} \right\}}{1 - \varepsilon + kT} \right) E_1(0).$$

Démonstration. On multiplie $u_{tt} - u_{xx} + 2\lambda_1 u_t = 0$ par u_t et on intègre sur Ω_t ,

$$\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u_{tt}u_t - u_{xx}u_t + 2\lambda_1 u_t^2 dx = 0.$$

Comme

$$u_{tt}u_t = \frac{1}{2}(u_t^2)_t \text{ et } -u_{xx}u_t = \frac{1}{2}(u_x^2)_t - (u_x u_t)_x,$$

alors :

$$\frac{1}{2} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} [u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t)] dx + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} 2\lambda_1 u_t^2 - \frac{\partial}{\partial x} (u_x u_t) dx = 0. \quad (3.3)$$

D'après la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} [u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t)] dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t) dx - \frac{\beta'(t)}{2} [u_t^2(\beta(t), t) + u_x^2(\beta(t), t)] \\ & \quad + \frac{\alpha'(t)}{2} [u_t^2(\alpha(t), t) + u_x^2(\alpha(t), t)]. \end{aligned}$$

Par intégration sur $[0, T]$, et de la définition de $E_1(t)$ on a :

$$\begin{aligned} E_1(T) - E_1(0) - \int_0^T \frac{\beta'(t)}{2} [u_t^2(\beta(t), t) + u_x^2(\beta(t), t)] dt \\ + \int_0^T \frac{\alpha'(t)}{2} [u_t^2(\alpha(t), t) + u_x^2(\alpha(t), t)] dt + \int_0^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} 2\lambda_1 u_t^2(x, t) dx dt \\ + \int_0^T u_x(\alpha(t), t)u_t(\alpha(t), t) - u_x(\beta(t), t)u_t(\beta(t), t) dt = 0. \end{aligned}$$

D'après la condition (2.8) et $u(\alpha(t), t) = u(\beta(t), t) = 0$ on a :

$$\begin{aligned} E_1(T) - E_1(0) - \frac{1}{2} \int_0^T \beta'(t) \left(|\beta'(t)|^2 + 1 \right) u_x^2(\beta(t), t) - \alpha'(t) \left(|\alpha'(t)|^2 + 1 \right) u_x^2(\alpha(t), t) dt \\ + \int_0^T \beta'(t) u_x^2(\beta(t), t) - \alpha'(t) u_x^2(\alpha(t), t) dt + \int_0^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} 2\lambda_1 u_t^2(x, t) dx dt = 0. \end{aligned}$$

De la condition initiale de (DWE), on obtient

$$\begin{aligned} E_1(T) &= E_1(0) - 2\lambda_1 \int_0^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u_t^2(x, t) dx dt \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^T \beta'(t) \left(1 - |\beta'(t)|^2\right) u_x^2(\beta(t), t) - \alpha'(t) \left(1 - |\alpha'(t)|^2\right) u_x^2(\alpha(t), t) dt \end{aligned}$$

où l'intégrale de $u_t^2(x, t)$ est positive. De plus, on a la condition $\alpha'(t) \leq 0$ et $\beta'(t) \geq 0$, $\forall 0 \leq t \leq T$, alors

$$E_1(T) \leq E_1(0).$$

Donc $E_1(T)$ est décroissante pour $0 \leq t \leq T$.

Maintenant, on utilise ku comme une fonction teste, on obtient

$$k \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u_{tt}u - u_{xx}u + 2\lambda_1 u_t u dx = 0.$$

Comme

$$u_{tt}u = (u_t u)_t - u_t^2, \quad u_{xx}u = (u_x u)_x - u_x^2 \quad \text{et} \quad 2\lambda_1 u_t u = (\lambda_1 u^2)_t,$$

alors

$$k \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} [u_t(x, t)u(x, t) + \lambda_1 u^2(x, t)] - \frac{\partial}{\partial x} [u_x(x, t)u(x, t)] + u_x^2(x, t) - u_t^2(x, t) dx = 0. \quad (3.4)$$

Par addition de (3.3) et (3.4) on obtient

$$\begin{aligned} &\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} [u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t)] + k u_t(x, t)u(x, t) + k \lambda_1 u^2(x, t) \right] dx \\ &\quad + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} (2\lambda_1 - k) u_t^2(x, t) + k u_x^2(x, t) dx \\ &\quad - \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial x} [u_x(x, t)u(x, t) + u_x(x, t)u_t(x, t)] dx = 0. \end{aligned}$$

Par la formule de Leibniz on a :

$$\begin{aligned} &\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} [u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t)] + k u_t(x, t)u(x, t) + k \lambda_1 u^2(x, t) \right] dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left[\frac{1}{2} [u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t)] + k u_t(x, t)u(x, t) + k \lambda_1 u^2(x, t) \right] dx \\ &\quad - \beta'(t) \left[\frac{1}{2} [u_t^2(\beta(t), t) + u_x^2(\beta(t), t)] + k u_t(\beta(t), t)u(\beta(t), t) + k \lambda_1 u^2(\beta(t), t) \right] \\ &\quad + \alpha'(t) \left[\frac{1}{2} [u_t^2(\alpha(t), t) + u_x^2(\alpha(t), t)] + k u_t(\alpha(t), t)u(\alpha(t), t) + k \lambda_1 u^2(\alpha(t), t) \right]. \end{aligned}$$

Par intégration sur $[0, T]$, et comme $u(\alpha(t), t) = u(\beta(t), t) = 0$ on a

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha(T)}^{\beta(T)} \frac{1}{2} [u_t^2(x, T) + u_x^2(x, T)] + ku_t(x, T)u(x, T) + k\lambda_1 u^2(x, T) dx \\ &= \int_{\alpha(0)}^{\beta(0)} \frac{1}{2} [u_t^2(x, 0) + u_x^2(x, 0)] + ku_t(x, 0)u(x, 0) + k\lambda_1 u^2(x, 0) dx \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_0^T \beta'(t) [u_t^2(\beta(t), t) + u_x^2(\beta(t), t)] dt \\ & \quad - \frac{1}{2} \int_0^T \alpha'(t) [u_t^2(\alpha(t), t) + u_x^2(\alpha(t), t)] dt. \end{aligned}$$

D'après la condition (2.8) on a :

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha(T)}^{\beta(T)} \frac{1}{2} [u_t^2(x, T) + u_x^2(x, T)] + ku_t(x, T)u(x, T) + k\lambda_1 u^2(x, T) dx \\ &= \int_{\alpha(0)}^{\beta(0)} \frac{1}{2} [u_t^2(x, 0) + u_x^2(x, 0)] + ku_t(x, 0)u(x, 0) + k\lambda_1 u^2(x, 0) dx \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_0^T \beta'(t) \left(|\beta'(t)|^2 + 1 \right) u_x^2(\beta(t), t) - \alpha'(t) \left(|\alpha'(t)|^2 + 1 \right) u_x^2(\alpha(t), t) dt. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha(T)}^{\beta(T)} \frac{1}{2} [u_t^2(x, T) + u_x^2(x, T)] + ku_t(x, T)u(x, T) + k\lambda_1 u^2(x, T) dx \\ &= \int_{\alpha(0)}^{\beta(0)} \frac{1}{2} [u_t^2(x, 0) + u_x^2(x, 0)] + ku_t(x, 0)u(x, 0) + k\lambda_1 u^2(x, 0) dx \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_0^T \alpha'(t) \left(1 - |\alpha'(t)|^2 \right) u_x^2(\alpha(t), t) - \beta'(t) \left(1 - |\beta'(t)|^2 \right) u_x^2(\beta(t), t) dt \\ & \quad - \int_0^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} (2\lambda_1 - k) u_t^2(x, t) + ku_x^2(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

Et comme $\alpha'(t) \leq 0$ et $\beta'(t) \geq 0$, $\forall 0 \leq t \leq T$ donc

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha(T)}^{\beta(T)} \frac{1}{2} [u_t^2(x, T) + u_x^2(x, T)] + ku_t(x, T)u(x, T) + k\lambda_1 u^2(x, T) dx \\ & \quad + \int_0^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} (2\lambda_1 - k) u_t^2(x, t) + ku_x^2(x, t) dx dt \\ & \leq \int_{\alpha(0)}^{\beta(0)} \frac{1}{2} [u_t^2(x, 0) + u_x^2(x, 0)] + ku_t(x, 0)u(x, 0) + k\lambda_1 u^2(x, 0) dx. \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall \varepsilon > 0$, nous avons, d'après l'inégalité de Young

$$-\frac{\varepsilon}{2} u_t^2 - \frac{1}{2\varepsilon} u^2 \leq u_t u = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}} u_t u \leq \frac{\varepsilon}{2} u_t^2 + \frac{1}{2\varepsilon} u^2,$$

alors

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{1}{2} \left[(1 - \varepsilon) u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t) \right] + k \left(\lambda_1 - \frac{1}{2\varepsilon} \right) u^2(x, t) dx \\ & \leq \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{1}{2} \left[u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t) \right] + k u_t(x, t) u(x, t) + k \lambda_1 u^2(x, t) dx \\ & \leq \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{1}{2} \left[(1 + \varepsilon) u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t) \right] + k \left(\lambda_1 + \frac{1}{2\varepsilon} \right) u^2(x, t) dx. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} (2\lambda_1 - k) u_t^2(x, t) + k u_x^2(x, t) dx dt \\ & \quad + \int_{\alpha(T)}^{\beta(T)} \frac{1}{2} \left[(1 - \varepsilon) u_t^2(x, T) + u_x^2(x, T) \right] + k \left(\lambda_1 - \frac{1}{2\varepsilon} \right) u^2(x, T) dx \\ & \leq \int_{\alpha(0)}^{\beta(0)} \frac{1}{2} \left[(1 + \varepsilon) u_t^2(x, 0) + u_x^2(x, 0) \right] + k \left(\lambda_1 + \frac{1}{2\varepsilon} \right) u^2(x, 0) dx. \end{aligned}$$

En choisissant $k = \lambda_1 = \frac{1}{2\varepsilon}$, alors on a :

$$\begin{aligned} & \int_0^T k \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t) dx dt + \frac{1}{2} \int_{\alpha(T)}^{\beta(T)} (1 - \varepsilon) u_t^2(x, T) + u_x^2(x, T) dx \\ & \leq \frac{1}{2} \int_{\alpha(0)}^{\beta(0)} (1 + \varepsilon) u_t^2(x, 0) + u_x^2(x, 0) + \frac{1}{2\varepsilon^2} u^2(x, 0) dx. \end{aligned}$$

D'autre part, $\forall x \in]\alpha(t), \beta(t)[$ on a :

$$u(x, t) = u(\alpha(t), t) + \int_{\alpha(t)}^x u_x(x, t) dx = \int_{\alpha(t)}^x u_x(x, t) dx.$$

Par la condition de Dirichlet, et l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$u(x, t) \leq \left(\int_{\alpha(t)}^x dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\alpha(t)}^x u_x^2(x, t) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Alors, $\forall x \leq \beta(t)$ on obtient

$$u(x, t) \leq [\beta(t) - \alpha(t)]^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u_x^2(x, t) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Puisque $\beta(t) - \alpha(t) = \gamma(t)$, alors

$$u^2(x, t) \leq \gamma(t) \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u_x^2(x, t) dx \quad (3.5)$$

et pour $t = 0$, on a

$$u^2(x, 0) \leq \gamma(0) \int_{\alpha(0)}^{\beta(0)} u_x^2(x, 0) dx.$$

Donc,

$$\begin{aligned} 2k \int_0^T E_1(t) dt + \frac{1}{2} \int_{\alpha(T)}^{\beta(T)} (1 - \varepsilon) u_t^2(x, T) + u_x^2(x, T) dx \\ \leq \frac{1}{2} \int_{\alpha(0)}^{\beta(0)} (1 + \varepsilon) u_t^2(x, 0) + \left(1 + \frac{\gamma^2(0)}{2\varepsilon^2}\right) u_x^2(x, 0) dx \end{aligned}$$

pour $t \in [0, T]$. On a aussi

$$2kTE_1(T) \leq 2k \int_0^T E_1(t) dt,$$

donc

$$\begin{aligned} 2kTE_1(T) + \frac{\min\{1 - \varepsilon, 1\}}{2} \int_{\alpha(T)}^{\beta(T)} u_t^2(x, T) + u_x^2(x, T) dx \\ \leq \frac{\max\left\{1 + \varepsilon, 1 + \frac{\gamma^2(0)}{2\varepsilon^2}\right\}}{2} \int_{\alpha(0)}^{\beta(0)} u_t^2(x, 0) + u_x^2(x, 0) dx. \end{aligned}$$

Ceci implique que, $\forall \varepsilon > 0$

$$(kT + 1 - \varepsilon) E_1(T) \leq \max\left\{1 + \varepsilon, 1 + \frac{\gamma^2(0)}{2\varepsilon^2}\right\} E_1(0).$$

D'où

$$E_1(T) \leq \left(\frac{\max\left\{1 + \varepsilon, 1 + \frac{\gamma^2(0)}{2\varepsilon^2}\right\}}{1 - \varepsilon + kT} \right) E_1(0).$$

■

3.1.2 Résultats de stabilité exponentielle et polynomiale

Dans cette section, nous donnons quelques lemmes qui seront un support à la démonstration de notre résultat sur la décroissance exponentielle de l'énergie quand t tend vers l'infini. Ensuite, nous tournons vers le théorème qui nous donne ce résultat.

Soit φ une fonction telle que

$$\varphi(t) \geq 0 \text{ et } \varphi \in C^1([0, +\infty[). \quad (3.6)$$

Lemme 3.1 Soit $u(x, t)$ est une solution de (**DWE**) dans Q_T , alors pour $0 \leq t \leq T$ on a :

$$\begin{aligned} \varphi(T)E_1(T) - \varphi(0)E_1(0) - \int_0^T \beta'(t) \frac{\varphi(t)}{2} \left(|\beta'(t)|^2 + 1 \right) u_x^2(\beta(t), t) dt \\ + \int_0^T \alpha'(t) \frac{\varphi(t)}{2} \left(|\alpha'(t)|^2 + 1 \right) u_x^2(\alpha(t), t) + \varphi(t) \left[\beta'(t) u_x^2(\beta(t), t) - \alpha'(t) u_x^2(\alpha(t), t) \right] dt \\ - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \varphi'(t) (u_x^2 + u_t^2) dx + \lambda_1 \varphi(t) u_t^2(x, t) dx dt = 0. \end{aligned}$$

Démonstration. On multiplie $u_{tt} - u_{xx} + 2\lambda_1 u_t = 0$ par $\varphi(t)u_t$ et on intègre sur Ω_T ,

$$\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \varphi(t)u_{tt}u_t - \varphi(t)u_{xx}u_t + 2\lambda_1\varphi(t)u_tu_t dx = 0.$$

Comme

$$\begin{aligned} \varphi(t)u_{tt}u_t &= \left(\frac{\varphi(t)}{2} [u_x^2 + u_t^2] \right)_t - \frac{1}{2}\varphi'(t) [u_x^2 + u_t^2] - \varphi(t)u_{xt}u_x, \\ \varphi(t)u_{xx}u_t &= [\varphi(t)u_tu_x]_x - \varphi(t)u_{xt}u_x, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varphi(t)}{2} [u_x^2 + u_t^2] \right) dx - \varphi(t) \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial x} (u_tu_x) dx \\ - \frac{1}{2} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \varphi'(t) [u_x^2 + u_t^2] dx + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} 2\lambda_1\varphi(t)u_t^2 dx = 0. \quad (3.7) \end{aligned}$$

D'après Leibniz on a pour le premier intégrale de (3.7) :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varphi(t)}{2} [u_x^2 + u_t^2] \right) dx &= \frac{d}{dt} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\varphi(t)}{2} [u_x^2 + u_t^2] dx \\ &\quad - \beta'(t) \frac{\varphi(t)}{2} [u_x^2(\beta(t), t) + u_t^2(\beta(t), t)] \\ &\quad + \alpha'(t) \frac{\varphi(t)}{2} [u_t^2(\alpha(t), t) + u_x^2(\alpha(t), t)]. \end{aligned}$$

Par intégration sur $[0, T]$,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varphi(t)}{2} [u_x^2 + u_t^2] \right) dx dt &= \frac{\varphi(T)}{2} \int_{\alpha(T)}^{\beta(T)} u_x^2(x, T) + u_t^2(x, T) dx \\ &\quad - \frac{\varphi(0)}{2} \int_{\alpha(0)}^{\beta(0)} u_x^2(x, 0) + u_t^2(x, 0) dx - \int_0^T \beta'(t) \frac{\varphi(t)}{2} [u_x^2(\beta(t), t) + u_t^2(\beta(t), t)] dt \\ &\quad + \int_0^T \alpha'(t) \frac{\varphi(t)}{2} [u_t^2(\alpha(t), t) + u_x^2(\alpha(t), t)] dt. \end{aligned}$$

Grâce à (2.8) et les conditions initiales, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varphi(t)}{2} [u_x^2 + u_t^2] \right) dx dt &= \frac{\varphi(T)}{2} \int_{\alpha(T)}^{\beta(T)} u_x^2(x, T) + u_t^2(x, T) dx \\ &\quad - \frac{\varphi(0)}{2} \int_{\alpha(0)}^{\beta(0)} (u_0)_x^2 + u_1^2 dx - \int_0^T \beta'(t) \frac{\varphi(t)}{2} \left(|\beta'(t)|^2 + 1 \right) u_x^2(\beta(t), t) dt \\ &\quad + \int_0^T \alpha'(t) \frac{\varphi(t)}{2} \left(|\alpha'(t)|^2 + 1 \right) u_x^2(\alpha(t), t) dt. \end{aligned}$$

Pour le deuxième intégrale de (3.7)

$$\int_0^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial x} (\varphi(t) u_t u_x) dx dt = \int_0^T \varphi(t) [u_x(\beta(t), t) u_t(\beta(t), t) - u_x(\alpha(t), t) u_t(\alpha(t), t)] dt$$

et de (2.8) on a :

$$\int_0^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial x} (\varphi(t) u_t u_x) dx dt = \int_0^T \varphi(t) [\alpha'(t) u_x^2(\alpha(t), t) - \beta'(t) u_x^2(\beta(t), t)] dt$$

D'après la définition de E_1 on a

$$\begin{aligned} \varphi(T) E_1(T) - \varphi(0) E_1(0) - \int_0^T \beta'(t) \frac{\varphi(t)}{2} \left(|\beta'(t)|^2 + 1 \right) u_x^2(\beta(t), t) dt \\ + \int_0^T \alpha'(t) \frac{\varphi(t)}{2} \left(|\alpha'(t)|^2 + 1 \right) u_x^2(\alpha(t), t) + \varphi(t) [\beta'(t) u_x^2(\beta(t), t) - \alpha'(t) u_x^2(\alpha(t), t)] dt \\ - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \varphi'(t) (u_x^2 + u_t^2) dx dt + 2 \int_0^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \lambda_1 \varphi(t) u_t^2(x, t) dx dt = 0. \end{aligned}$$

■

Lemme 3.2 Soit $u(x, t)$ est une solution de (DWE) dans Q_T , $\forall 0 \leq t \leq T$ et $\forall k > 0$ alors :

$$\begin{aligned} k\varphi(T) \int_{\alpha(T)}^{\beta(T)} u_t(x, T) u(x, T) + \lambda_1 u^2(x, T) dx - k\varphi(0) \int_{\alpha(0)}^{\beta(0)} u_1 u_0 + \lambda_1 u_0^2 dx \\ + k \int_0^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \varphi(t) [u_x^2(x, t) - u_t^2(x, t)] dx dt - k \int_0^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \varphi'(t) u_t(x, t) u(x, t) dx dt = 0. \end{aligned}$$

Démonstration. on multiplie $u_{tt} - u_{xx} + 2\lambda_1 u_t = 0$ par $k\varphi(t)u$ et on intègre sur Ω_T ,

$$\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \varphi(t) k u u_{tt} - \varphi(t) k u u_{xx} + 2\lambda_1 \varphi(t) k u u_t dx = 0.$$

Comme

$$\begin{aligned} \varphi u_{tt} u &= (\varphi u_t u)_t - \varphi u_t^2 - \varphi'(t) u_t u, \\ \varphi u_{xx} u &= (\varphi u_x u)_x - \varphi u_x^2, \\ 2\lambda_1 \varphi u_t u &= (\lambda_1 \varphi u^2)_t - \lambda_1 \varphi'(t) u^2, \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned} k \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} [\varphi(t) u_t(x, t) u(x, t) + \lambda_1 \varphi(t) u^2(x, t)] dx \\ - k \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial x} [\varphi(t) u_x(x, t) u(x, t)] dx + k \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \varphi(t) [u_x^2(x, t) - u_t^2(x, t)] dx \\ - k \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \varphi'(t) u_t(x, t) u(x, t) dx = 0. \quad (3.8) \end{aligned}$$

On applique la formule de Leibniz, on obtient :

$$\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} [\varphi(t) u_t(x, t) u(x, t) + \lambda_1 \varphi(t) u^2(x, t)] dx = \frac{d}{dt} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \varphi(t) [u_t(x, t) u(x, t) + \lambda_1 u^2(x, t)] dx + \varphi(t) \left(\alpha'(t) [u_t(\alpha(t), t) u(\alpha(t), t) + \lambda_1 u^2(\alpha(t), t)] - \beta'(t) [u_t(\beta(t), t) u(\beta(t), t) + \lambda_1 u^2(\beta(t), t)] \right).$$

Donc par intégration sur $[0, T]$, on a

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} [\varphi(t) (u_t(x, t) u(x, t) + \lambda_1 u^2(x, t))] dx dt \\ &= \varphi(T) \int_{\alpha(T)}^{\beta(T)} u_t(x, T) u(x, T) + \lambda_1 u^2(x, T) dx - \varphi(0) \int_{\alpha(0)}^{\beta(0)} u_t(x, 0) u(x, 0) + \lambda_1 u^2(x, 0) dx \\ & \quad - \int_0^T \beta'(t) \varphi(t) [u_t(\beta(t), t) u(\beta(t), t) + \lambda_1 u^2(\beta(t), t)] dt \\ & \quad + \int_0^T \alpha'(t) \varphi(t) [u_t(\alpha(t), t) u(\alpha(t), t) + \lambda_1 u^2(\alpha(t), t)] dt. \end{aligned}$$

D'après (2.8) et comme $u(\beta(t), t) = u(\alpha(t), t) = 0$ alors :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} [\varphi(t) (u_t(x, t) u(x, t) + \lambda_1 u^2(x, t))] dx dt \\ &= \varphi(T) \int_{\alpha(T)}^{\beta(T)} u_t(x, T) u(x, T) + \lambda_1 u^2(x, T) dx - \varphi(0) \int_{\alpha(0)}^{\beta(0)} u_1 u_0 + \lambda_1 u_0^2 dx. \end{aligned}$$

Pour le deuxième intégrale de (3.8), et d'après les conditions initiales, on a :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \varphi(t) \frac{\partial}{\partial x} [u_x(x, t) u(x, t)] dx dt \\ &= \int_0^T \varphi(t) [u_x(\beta(t), t) u(\beta(t), t) - u_x(\alpha(t), t) u(\alpha(t), t)] dt = 0. \end{aligned}$$

Donc $\forall k > 0$,

$$\begin{aligned} & k\varphi(T) \int_{\alpha(T)}^{\beta(T)} u_t(x, T) u(x, T) + \lambda_1 u^2(x, T) dx - k\varphi(0) \int_{\alpha(0)}^{\beta(0)} u_1 u_0 + \lambda_1 u_0^2 dx \\ & + k \int_0^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \varphi(t) [u_x^2(x, t) - u_t^2(x, t)] dx dt - k \int_0^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \varphi'(t) u_t(x, t) u(x, t) dx dt = 0. \end{aligned}$$

■

Théorème 3.2 *Sous les hypothèses (2.2), (3.1) et (3.2). Supposons que $\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t)$ est bornée i.e.*

$$\exists M > 0 \text{ telle que } \gamma(t) < M.$$

Alors, pour toute fonction $\varphi(t) \in C^1([0, +\infty[)$, telle que

$$\varphi(0) > 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq \varphi'(t) \leq h\varphi(t)$$

pour certains constante positive h et $\forall t \geq 0$. Et la solution de (DWE) satisfait :

$$E_1(T) \leq \left(\frac{1+k}{1-k} \right) \frac{\varphi(0)}{\varphi(T)} E_1(0). \quad (3.9)$$

Démonstration du Théorème 3.2. Par addition de (3.7) et (3.8) on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi(t) \left[\frac{1}{2} [u_x^2 + u_t^2] + ku_t u + \lambda_1 k u^2 \right] \right) dx - \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial x} (\varphi(t) u_x [u_t + u]) dx \\ - \frac{\varphi'(t)}{2} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u_x^2 + u_t^2 + 2ku_t u dx + \varphi(t) \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} (2\lambda_1 - k) u_t^2 + u_x^2 dx = 0. \end{aligned}$$

D'après la formule de Leibniz et les conditions initiales on a :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi(t) \left[\frac{1}{2} [u_x^2 + u_t^2] + ku_t u + k\lambda_1 u^2 \right] \right) dx \\ = \frac{d}{dt} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \varphi(t) \left[\frac{1}{2} [u_x^2 + u_t^2] + ku_t u + k\lambda_1 u^2 \right] dx \\ + \alpha'(t) \varphi(t) \left[\frac{1}{2} [u_x^2(\alpha(t), t) + u_t^2(\alpha(t), t)] + ku_t(\alpha(t), t)u(\alpha(t), t) + k\lambda_1 u^2(\alpha(t), t) \right] \\ - \beta'(t) \varphi(t) \left[\frac{1}{2} [u_x^2(\beta(t), t) + u_t^2(\beta(t), t)] + ku_t(\beta(t), t)u(\beta(t), t) + k\lambda_1 u^2(\beta(t), t) \right] \end{aligned}$$

et comme $u(\beta(t), t) = u(\alpha(t), t) = 0$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi(t) \left[\frac{1}{2} [u_x^2 + u_t^2] + ku_t u + k\lambda_1 u^2 \right] \right) dx \\ = \frac{d}{dt} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \varphi(t) \left[\frac{1}{2} [u_x^2 + u_t^2] + ku_t u + k\lambda_1 u^2 \right] dx \\ + \frac{\alpha'(t)}{2} \varphi(t) [u_x^2(\alpha(t), t) + u_t^2(\alpha(t), t)] - \frac{\beta'(t)}{2} \varphi(t) [u_x^2(\beta(t), t) + u_t^2(\beta(t), t)]. \end{aligned}$$

Par intégration sur $[0, T]$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi(x, t) \left[\frac{1}{2} [u_x^2 + u_t^2] + ku_t u + k\lambda_1 u^2 \right] \right) dx dt \\ = \varphi(T) \int_{\alpha(T)}^{\beta(T)} \frac{1}{2} [u_x^2(x, T) + u_t^2(x, T)] + ku_t(x, T)u(x, T) + k\lambda_1 u^2(x, T) dx \\ - \varphi(0) \int_{\alpha(0)}^{\beta(0)} \frac{1}{2} [u_x^2(x, 0) + u_t^2(x, 0)] + ku_t(x, 0)u(x, 0) + k\lambda_1 u^2(x, 0) dx \\ + \int_0^T \frac{\alpha'(t)}{2} \varphi(t) [u_x^2(\alpha(t), t) + u_t^2(\alpha(t), t)] - \frac{\beta'(t)}{2} \varphi(t) [u_x^2(\beta(t), t) + u_t^2(\beta(t), t)] dt. \end{aligned}$$

D'après (2.8) et comme $u(x, 0) = u_0$, $u_t(x, 0) = u_1$ on a

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi(x, t) \left[\frac{1}{2} [u_x^2 + u_t^2] + ku_t u + k\lambda_1 u^2 \right] \right) dx dt \\ &= \int_0^T \frac{\alpha'(t)}{2} \varphi(t) \left(|\alpha'(t)|^2 + 1 \right) u_x^2(\alpha(t), t) dt - \int_0^T \frac{\beta'(t)}{2} \varphi(t) \left(|\beta'(t)|^2 + 1 \right) u_x^2(\beta(t), t) dt \\ & \quad \varphi(T) \int_{\alpha(T)}^{\beta(T)} \frac{1}{2} [u_x^2(x, T) + u_t^2(x, T)] + ku_t(x, T)u(x, T) + k\lambda_1 u^2(x, T) dx \\ & \quad - \varphi(0) \int_{\alpha(0)}^{\beta(0)} \frac{1}{2} [(u_0)_x^2 + u_1^2] + ku_1 u_0 + k\lambda_1 u_0^2 dx. \end{aligned}$$

D'autre part, pour $0 \leq t \leq T$ on a

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial x} (\varphi(t) u_x [u_t + u]) dx dt &= \int_0^T \varphi(t) u_x(\beta(t), t) [u_t(\beta(t), t) + u(\beta(t), t)] dt \\ & \quad - \int_0^T \varphi(t) u_x(\alpha(t), t) [u_t(\alpha(t), t) + u(\alpha(t), t)] dt. \end{aligned}$$

De (2.8) et les conditions initiales on obtient

$$\int_0^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial x} (\varphi(t) u_x [u_t + u]) dx dt = - \int_0^T \varphi(t) \beta'(t) u_x^2(\beta(t), t) dt + \int_0^T \varphi(t) \alpha'(t) u_x^2(\alpha(t), t) dt.$$

Donc

$$\begin{aligned} & \varphi(T) \int_{\alpha(T)}^{\beta(T)} \frac{1}{2} [u_x^2(x, T) + u_t^2(x, T)] + ku_t(x, T)u(x, T) + k\lambda_1 u^2(x, T) dx \\ & + \int_0^T \frac{\beta'(t)}{2} \varphi(t) \left(1 - |\beta'(t)|^2 \right) u_x^2(\beta(t), t) dt - \int_0^T \frac{\alpha'(t)}{2} \varphi(t) \left(1 - |\alpha'(t)|^2 \right) u_x^2(\alpha(t), t) dt \\ & - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \varphi'(t) [u_x^2 + u_t^2 + 2ku_t u] dx dt + \int_0^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \varphi(t) [(2\lambda_1 - k) u_t^2 + u_x^2] dx dt \\ & - \varphi(0) \int_{\alpha(0)}^{\beta(0)} \frac{1}{2} [(u_0)_x^2 + u_1^2] + ku_1 u_0 + k\lambda_1 u_0^2 dx = 0. \quad (3.10) \end{aligned}$$

Rappelons que $\forall t \geq 0$ on a $0 \leq \varphi'(t) \leq h\varphi(t)$ pour $h \geq 0$ on obtient,

$$-\frac{h}{2} \int_0^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \varphi(t) [u_x^2 + u_t^2] dx dt \leq -\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \varphi'(t) [u_x^2 + u_t^2] dx dt. \quad (3.11)$$

On utilisant l'inégalité de Young pour tout $k > 0$

$$-\frac{k}{2} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u_t^2 + u^2 dx \leq \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} ku_t u dx \leq \frac{k}{2} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u_t^2 + u^2 dx. \quad (3.12)$$

Donc, si on suppose que $\beta'(t) \geq 0$ et $\alpha'(t) \leq 0$, alors (3.10) devient

$$\begin{aligned} \varphi(T) \int_{\alpha(T)}^{\beta(T)} \frac{1}{2} [u_x^2(x, T) + u_t^2(x, T)] + ku_t(x, T)u(x, T) + k\lambda_1 u^2(x, T) dx \\ - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \varphi'(t) [u_x^2 + u_t^2 + 2ku_t u] dx dt + \int_0^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \varphi(t) [(2\lambda_1 - k) u_t^2 + u_x^2] dx dt \\ \leq \varphi(0) \int_{\alpha(0)}^{\beta(0)} \frac{1}{2} [u_x^2(x, 0) + u_t^2] + ku_1 u_0 + k\lambda_1 u_0^2 dx. \end{aligned} \quad (3.13)$$

On remplace (3.11) et (3.12) dans (3.13), on obtient

$$\begin{aligned} \varphi(T) \int_{\alpha(T)}^{\beta(T)} \frac{1}{2} [u_x^2(x, T) + u_t^2(x, T)] - \frac{k}{2} [u_t^2(x, T) + u^2(x, T)] + k\lambda_1 u^2(x, T) dx \\ - \frac{h}{2} \int_0^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \varphi(t) [u_x^2 + u_t^2 + k(u_t^2 + u^2)] dx dt + \int_0^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \varphi(t) [(2\lambda_1 - k) u_t^2 + u_x^2] dx dt \\ \leq \varphi(0) \int_{\alpha(0)}^{\beta(0)} \frac{1}{2} [u_x^2(x, 0) + u_t^2(x, 0)] + \frac{k}{2} [u_t^2(x, 0) + u^2(x, 0)] + k\lambda_1 u^2(x, 0) dx. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(T)}{2} \int_{\alpha(T)}^{\beta(T)} (1 - k)u_t^2(x, T) + u_x^2(x, T) + [2k\lambda_1 - k] u^2(x, T) dx \\ + \int_0^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} (1 - \frac{h}{2})\varphi(t)u_x^2 - \frac{hk}{2}\varphi(t)u^2 + \left[2\lambda_1 - k - \frac{h}{2}(1 + k)\right] \varphi(t)u_t^2 dx dt \\ \leq \frac{\varphi(0)}{2} \int_{\alpha(0)}^{\beta(0)} (1 + k)u_t^2(x, 0) + u_x^2(x, 0) + [2k\lambda_1 + k] u^2(x, 0) dx. \end{aligned} \quad (3.14)$$

De l'inégalité (3.5) pour k et h sont positive, alors :

$$\begin{aligned} -\frac{hk}{2} \int_0^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \varphi(t)u^2 dx dt &\geq -\frac{hk}{2} \int_0^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \varphi(t) \left(\gamma(t) \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u_x^2(x, t) dx \right) dx dt \\ &\geq -\frac{hk}{2} \int_0^T \varphi(t)\gamma^2(t) \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u_x^2(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

Donc, après un calcul simple et pour h et k suffisamment petits, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(T)}{2} \int_{\alpha(T)}^{\beta(T)} (1 - k)u_t^2(x, T) + u_x^2(x, T) dx \\ + \int_0^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{1}{2} [2 - h - hk\gamma^2(t)] \varphi(t)u_x^2 + \left[2\lambda_1 - k - \frac{h}{2}(1 + k)\right] \varphi(t)u_t^2 dx dt \\ \leq \frac{\varphi(0)}{2} \int_{\alpha(0)}^{\beta(0)} (1 + k)u_t^2(x, 0) + u_x^2(x, 0) dx. \end{aligned}$$

Comme $\gamma(t)$ est bornée, on peut toujours choisir h et k pour que $(2 - h) - hk\gamma^2(t) \geq 0$ et $2\lambda_1 - k - \frac{h}{2}(1 + k) \geq 0$ alors on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(T)}{2} \min \{1 - k, 1\} \int_{\alpha(T)}^{\beta(T)} u_t^2(x, T) + u_x^2(x, T) dx \\ \leq \frac{\varphi(0)}{2} \max \{1 + k, 1\} \int_{\alpha(0)}^{\beta(0)} u_t^2(x, 0) + u_x^2(x, 0) dx. \end{aligned}$$

De la définition de E_1 et puisque $\min \{1 - k, 1\} = 1 - k$ et $\max \{1 + k, 1\} = 1 + k$, alors :

$$(1 - k) \varphi(T) E_1(T) \leq (1 + k) \varphi(0) E_1(0).$$

Finalement, on trouve :

$$E_1(T) \leq \left(\frac{1 + k}{1 - k} \right) \frac{\varphi(0)}{\varphi(T)} E_1(0).$$

■

Exemple 3.1

1. Si on prend $\varphi(t) = e^{ht}$, pour h suffisamment petit. Cette fonction vérifie la condition suivant :

$$\varphi(0) = e^{h0} = 1 > 0 \text{ et } 0 \leq \varphi'(t) = he^{ht} = h\varphi(t), \forall t > 0$$

Donc de (3.9) on trouve :

$$E_1(T) \leq \left(\frac{1 + k}{1 - k} \right) e^{-hT} E_1(0),$$

donc

$$E_1(T) \leq C E_1(0) e^{-hT}, \forall 0 < t < T$$

avec $C = \left(\frac{1+k}{1-k} \right)$. D'où $E_1(t)$ est décroissance exponentielle.

2. Si on prend $\varphi(t) = (1 + t)^h$, $h > 0$ alors $\varphi'(t) = h(1 + t)^{h-1}$ donc

$$\varphi'(t) = h(1 + t)^{h-1} \leq h(1 + t)^{h-1} (1 + t) \leq h\varphi(t).$$

Par conséquence

$$E_1(T) \leq \left(\frac{1 + k}{1 - k} \right) \frac{1}{(1 + t)^h} E_1(0), \forall h > 0, 0 < k < 1.$$

3.2 Équation avec un amortissement non linéaire

Dans cette section on considère une équation des ondes avec termes non linéaire

$$F(u_t) = 2\lambda_1 u_t + \lambda_2 |u_t|^r u_t,$$

où $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ et $r > 0$ sont des constantes. Alors on a le problème suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + 2\lambda_1 u_t + \lambda_2 |u_t|^r u_t = 0 & \text{dans } Q_T, \\ u(\alpha(t), t) = u(\beta(t), t) = 0 & \text{pour } 0 < t < T, \\ u(x, 0) = u^0 \text{ et } u_t(x, 0) = u^1 & \text{dans } \Omega_0 =]\alpha(0), \beta(0)[\end{cases} \quad (\text{NWE})$$

avec

$$u^0 \in H_0^1(\Omega_0) \cap H^2(\Omega_0), \text{ et } u^1 \in H_0^1(\Omega_0). \quad (\text{H1})$$

On suppose aussi que

$$\alpha, \beta \in C^1([0, +\infty[). \quad (\text{H2})$$

On utilisant la méthode de la pénalisation (voire [5, 8, 3]) et sous les hypothèses (H1), (H2) et (2.2), on peut démontrer le problème (NWE) admet une solution unique u qui satisfait

$$u \in L^\infty([0, T]; H_0^1(\Omega_t) \cap H^2(\Omega_t)) \text{ et } u_t \in L^\infty([0, T]; H^1(\Omega_t)).$$

Rappelons que si $\Omega_t \subset \mathbb{R}$, on a

$$H^1(\Omega_t) \subset C(\Omega_t) \subset L^p(\Omega_t), \forall p \geq 1.$$

On va démontrer le théorème suivant.

Théorème 3.3 *Soit $u(x, t)$ est un solution de (NWE). Supposons que $\beta'(t) \geq 0$, $\alpha'(t) \leq 0$ et $\gamma(t)$ est bornée c'est-à-dire : $\exists M > 0$ telle que $\gamma(t) < M$, alors il existe des constantes positive ξ, ξ', η, η' , tel que $\forall t \in [0, T]$*

$$E_1(T) \leq e^{-\eta T} E_1(0) + \xi e^{-\eta T} \left(\int_0^T e^{\eta t} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} |u_t|^{2r+2} dx dt \right),$$

et

$$E_1(T) \leq e^{-\eta' T} E_1(0) + \xi' e^{-\eta' T} \left(\int_0^T e^{\eta' t} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} |u|^{r+2} dx dt \right).$$

Démonstration. On multiplie $u_{tt} - u_{xx} + 2\lambda_1 u_t + \lambda_2 |u_t|^r u_t = 0$ par $u_t + ku$ et on intègre sur Ω_t ,

$$\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u_{tt} (u_t + ku) - u_{xx} (u_t + ku) + 2\lambda_1 u_t (u_t + ku) + \lambda_2 |u_t|^r u_t (u_t + ku) dx = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} u_{tt} (u_t + ku) &= \left(\frac{1}{2} (u_t^2 + u_x^2) + ku_t u \right)_t - ku_t^2 - u_{tx} u_x \text{ et } 2k\lambda_1 u_t u = (k\lambda_1 u^2)_t \\ u_{xx} (u_t + ku) &= (u_t u_x + ku_x u)_x - ku_x^2 - u_{tx} u_x, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} (u_t^2 + u_x^2) + ku_t u + k\lambda_1 u^2 \right) dx - \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial x} (u_t u_x + ku_x u) dx \\ + k \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u_x^2 - u_t^2 dx + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} 2\lambda_1 u_t^2 + \lambda_2 |u_t|^{r+2} + k\lambda_2 |u_t|^r u_t u dx = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

On utilise la formule de Leibniz pour le premier terme dans (3.15) on trouve,

$$\begin{aligned} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} (u_t^2 + u_x^2) + ku_t u + k\lambda_1 u^2 \right) dx \\ = \frac{d}{dt} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{1}{2} [u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t)] + ku_t(x, t)u(x, t) + k\lambda_1 u^2(x, t) dx \\ - \beta'(t) \left(\frac{1}{2} [u_t^2(\beta(t), t) + u_x^2(\beta(t), t)] + ku_t(\beta(t), t)u(\beta(t), t) + k\lambda_1 u^2(\beta(t), t) \right) \\ + \alpha'(t) \left(\frac{1}{2} [u_t^2(\alpha(t), t) + u_x^2(\alpha(t), t)] + ku_t(\alpha(t), t)u(\alpha(t), t) + k\lambda_1 u^2(\alpha(t), t) \right). \end{aligned}$$

D'après (2.8) on obtient,

$$\begin{aligned} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left(\frac{1}{2} (u_t^2 + u_x^2) + ku_t u + k\lambda_1 u^2 \right)_t dx \\ = \frac{d}{dt} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{1}{2} [u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t)] + ku_t(x, t)u(x, t) + k\lambda_1 u^2(x, t) dx \\ - \frac{1}{2} \left[\beta'(t) \left(1 + |\beta'(t)|^2 \right) u_x^2(\beta(t), t) - \alpha'(t) \left(1 + |\alpha'(t)|^2 \right) u_x^2(\alpha(t), t) \right]. \end{aligned}$$

Intégrant le deuxième terme dans (3.15) et utilisant les conditions aux limites

$$u(\beta(t), t) = u(\alpha(t), t) = 0,$$

et (2.8), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} (u_t u_x + ku_x u)_x dx &= [u_t(x, t)u_x(x, t) + ku_x(x, t)u(x, t)]_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \\ &= \alpha'(t)u_x^2(\alpha(t), t) - \beta'(t)u_x^2(\beta(t), t). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{1}{2} [u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t)] + ku_t(x, t)u(x, t) + k\lambda_1 u^2(x, t) dx \\ + \frac{1}{2} [\beta'(t) (1 - |\beta'(t)|^2) u_x^2(\beta(t), t) - \alpha'(t) (1 - |\alpha'(t)|^2) u_x^2(\alpha(t), t)] \\ + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} ku_x^2 - ku_t^2 dx + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} 2\lambda_1 u_t^2 + \lambda_2 |u_t|^{r+2} + k\lambda_2 |u_t|^r u_t u dx = 0. \end{aligned}$$

Si on suppose $\beta'(t) \geq 0$ et $\alpha'(t) \leq 0$, alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{1}{2} [u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t)] + ku_t(x, t)u(x, t) + k\lambda_1 u^2(x, t) dx \\ + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} ku_x^2 + (2\lambda_1 - k) u_t^2 + \lambda_2 |u_t|^{r+2} + k\lambda_2 |u_t|^r u_t u dx dt \leq 0. \quad (3.16) \end{aligned}$$

Pour la simplification on écrit (3.16) comme

$$\frac{d}{dt} P + Q \leq 0.$$

On a

$$ku_t(x, t)u(x, t) \geq -\frac{k}{2} (u_t^2(x, t) + u^2(x, t))$$

Alors, d'après l'inégalité (3.5), (3.12) on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} (1 - k) u_t^2(x, t) + [1 - k\gamma^2(t)] u_x^2(x, t) dx \leq P(t) \\ \leq \frac{1}{2} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} (1 + k) u_t^2(x, t) + [1 + k(2\lambda_1 + 1)\gamma^2(t)] u_x^2(x, t) dx. \end{aligned}$$

Comme $\gamma(t)$ est bornée et qu'on peut choisir k suffisamment petit pour que

$$1 - k\gamma^2(t) \geq 1 - kM^2 \geq 0,$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \min \{1 - k, 1 - kM^2\} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t) dx \leq P(t) \\ \leq \frac{1}{2} \max \{1 + k, 1 + k(2\lambda_1 + 1)M^2\} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t) dx. \end{aligned}$$

De plus de la définition de l'énergie $E_1(t)$ on a

$$K_1 E_1(t) \leq P(t) \leq K_2 E_1(t), \quad (3.17)$$

où $K_1 = \min \{1 - k, 1 - kM^2\}$ et $K_2 = \max \{1 + k, 1 + k(2\lambda_1 + 1)M^2\}$.

D'autre part, on utilise l'inégalité de Young, pour $\epsilon > 0$, $\forall t \in [0, T]$

$$\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} k\lambda_2 |u_t|^r u_t u dx \leq \frac{k\lambda_2}{\epsilon^2} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} |u_t|^{2r+2} dx + \frac{\epsilon k\lambda_2}{2} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u^2 dx.$$

De plus, par (3.5) et comme $\gamma(t)$ est bornée, alors on a

$$\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} k\lambda_2 |u_t|^r u_t u dx \leq \frac{k\lambda_2}{\epsilon^2} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} |u_t|^{2r+2} dx + \frac{\epsilon M^2 k\lambda_2}{2} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u_x^2 dx,$$

donc

$$Q(t) \geq \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} k \left(1 - \frac{\epsilon M^2 \lambda_2}{2}\right) u_x^2 + (2\lambda_1 - k) u_t^2 + \lambda_2 |u_t|^{r+2} - \frac{k\lambda_2}{2\epsilon} |u_t|^{2r+2} dx.$$

On choisit que $0 < k < 2\lambda_1$ et ϵ suffisamment petit pour que $\frac{\epsilon M^2 \lambda_2}{2} < 1$, on obtient

$$Q(t) \geq \min \left\{ k - \frac{\epsilon M^2 k\lambda_2}{2}, 2\lambda_1 - k \right\} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u_x^2 + u_t^2 dx - \frac{k\lambda_2}{2\epsilon} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} |u_t|^{2r+2} dx,$$

i.e.,

$$Q(t) \geq 2\delta E_1(t) - \frac{k\lambda_2}{2\epsilon} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} |u_t|^{2r+2} dx \quad (3.18)$$

où $\delta = \min \left\{ k - \frac{\epsilon M^2 k\lambda_2}{2}, 2\lambda_1 - k \right\}$.

D'après (3.16) et les inégalités (3.17), (3.18), on trouve

$$K_1 \frac{dE_1(t)}{dt} + 2\delta E_1(t) - \frac{k\lambda_2}{2\epsilon} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} |u_t|^{2r+2} dx \leq \frac{d}{dt} P(t) + Q(t) \leq 0,$$

d'où

$$\frac{dE_1(t)}{dt} + \frac{2\delta}{K_1} E_1(t) \leq \frac{k\lambda_2}{2\epsilon K_1} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} |u_t|^{2r+2} dx.$$

On multiplie cette inégalité par $e^{\frac{2\delta}{K_1}t}$ on obtient

$$e^{\frac{2\delta}{K_1}t} \frac{dE_1(t)}{dt} + \frac{2\delta}{K_1} e^{\frac{2\delta}{K_1}t} E_1(t) \leq \frac{k\lambda_2}{2\epsilon K_1} e^{\frac{2\delta}{K_1}t} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} |u_t|^{2r+2} dx,$$

i.e.,

$$\frac{d}{dt} \left(e^{\frac{2\delta}{K_1}t} E_1(t) \right) \leq \frac{k\lambda_2}{2\epsilon K_1} e^{\frac{2\delta}{K_1}t} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} |u_t|^{2r+2} dx.$$

Intégrons sur $[0, T]$, il vient

$$E_1(T) \leq e^{-\eta T} E_1(0) + \xi e^{-\eta T} \left(\int_0^T e^{\eta t} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} |u_t|^{2r+2} dx dt \right)$$

où $\eta = \frac{2\delta}{K_1}$ et $\xi = \frac{k\lambda_2}{2\epsilon K_1}$.

De même manière, on applique l'inégalité de Young avec $p = \frac{r+2}{r+1}$ et $p' = r+2$, on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} k\lambda_2 |u_t|^r u_t u dx &\leq \frac{r+1}{r+2} k\lambda_2 \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} (|u_t|^r u_t)^{\frac{r+2}{r+1}} dx + \frac{k\lambda_2}{r+2} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} |u|^{r+2} dx \\ &\leq \frac{r+1}{r+2} k\lambda_2 \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} |u_t|^{r+2} dx + \frac{k\lambda_2}{r+2} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} |u|^{r+2} dx, \end{aligned}$$

alors

$$Q(t) \geq \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} k u_x^2 + (2\lambda_1 - k) u_t^2 + \lambda_2 \left(1 - \frac{r+1}{r+2} k\right) |u_t|^{r+2} - \frac{k\lambda_2}{4} |u|^{r+2} dx,$$

Si on pose $0 < k < 2\lambda_1$ et $k < \frac{r+2}{r+1}$, on obtient

$$Q(t) \geq \min\{k, 2\lambda_1 - k\} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u_x^2 + u_t^2 dx - \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{k\lambda_2}{4} |u|^{r+2} dx.$$

Ceci implique que

$$Q(t) \geq 2\delta' E_1(t) - \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{k\lambda_2}{4} |u|^{r+2} dx,$$

avec $\delta' = \min\{k, 2\lambda_1 - k\}$.

Donc (3.16) devient

$$K_1 \frac{dE_1(t)}{dt} + 2\delta' E_1(t) - \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{k\lambda_2}{4} |u|^{r+2} dx \leq \frac{d}{dt} P(t) + Q(t) \leq 0$$

et il vient

$$\frac{dE_1(t)}{dt} \leq -\frac{2\delta'}{K_1} E_1(t) + \frac{k\lambda_2}{4K_1} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} |u|^{r+2} dx.$$

Après multiplication par $e^{\frac{2\delta'}{K_1} t}$ et intégration sur $[0, T]$, on déduit que

$$E_1(T) \leq e^{-\eta' T} E_1(0) + \xi' e^{-\eta' T} \left(\int_0^T e^{\eta' t} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} |u|^{r+2} dx dt \right),$$

où $\xi' = \frac{k\lambda_2}{4K_1}$ et $\eta' = \frac{2\delta'}{K_1}$. ■

Conclusion

Le travail exposé dans ce mémoire concerne l'étude du comportement asymptotique des solutions de l'équation des ondes dans un intervalle dépendant du temps.

Au début, on a considéré le problème suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{pour } x \in \Omega_t =]\alpha(t), \beta(t)[\text{ et } t > 0, \\ u(\alpha(t), t) = u(\beta(t), t) = 0 & \text{pour } t > 0, \\ u(x, 0) = u^0 \text{ et } u_t(x, 0) = u^1 & \text{dans } \Omega_0 =]\alpha(0), \beta(0)[, \end{cases}$$

et en utilisant la technique des multiplicateurs (voir [1]), nous avons établi la stabilité polynomiale dans l'espace d'énergie $H_0^1(\Omega_t)$ dans le chapitre 2. Plus précisément, à l'absence d'amortissements, l'énergie est décroissante lorsque le domaine est time-like et croissant.

Dans le dernier chapitre, en se basant sur les techniques de Kozhanov et Lar'kin [4] et Chen [2], on a établie des décroissance exponentielles et polynomiales de l'énergie pour l'équation des ondes avec amortissement non linéaire si on suppose de plus que la longueur de l'intervalle reste bornée.

Notre étude ouvre la voie sur plusieurs questions, notamment :

- Le cas d'un amortissement appliqué sur une extrémité de l'intervalle.
- Le cas où la variation de la tensions de la corde n'est pas négligée (Voir la sous-section 1.3.2), i.e. le cas où le modèle est donné par

$$u_{tt} - \left(a(t) + b(t) \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u_x^2 dx \right) u_{xx} + F(u_t) = 0.$$

avec a et b des fonctions données.

Bibliographie

- [1] C. BARDOS, G. CHEN. **1981**. *Control and stabilization for the wave equation. III : Domain with moving boundary*. SIAM J. Control Optim.,19 :123-138.
- [2] G. CHEN. **1979**. *Controle and stabilisation for the wave equation in a bounded domain*.SIAM J. Control Optim.,17 :66-81.
- [3] J. FERREIRA ET N.A. LAR'KIN **1996**. *Global solvability of a mixed problem for a nonlinear hyperbolic-parabolic equation in noncylindrical domains*.Portugaliae Mathematica. Vol. 53 Fasc.
- [4] A. I. KOZHANOV, N. A. LAR'KIN. **2001**. *On Solvability of boundary-value problems for the wave eqution with a nonlinear dissipation in noncylindrical domains*.Siberian Mathematical Journal.42 :1062-1081.
- [5] J. L. LIONS. **1969**. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non-linéaires*.Dunod. Paris.
- [6] J. L. LIONS ET E. MAGENES. **1968**. *Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications*. Vol. 1. Dunod, Paris.
- [7] L. A. MEDEIROS, J. LIMACO, ET S. B. MENEZES. **2002**. *Vibrantions of Elastic Strings : Mathematical Aspects, Part One*.Journal of computational analysis and applications, Vol. 4, No. 2.
- [8] M. NAKAO ET T. NARAZAKI. **1978**. *Existence and decay of solution of some nonlinear wave equation in noncylindrical domains*.Maths. Rep, XI-2.
- [9] N. PISKOUNOV. *Calcul différentiel et intégral*. Tome I .Edition Mir Moscou.
- [10] H. SUN, H. LI, L. LU. **2015**. *Exact controllability for a string equation in domains with moving boundary in one dimension*.Electronic Journal of Differential Equation. 98 :1-7.

المخلص:

في هذا العمل ، ندرس السلوك المقارب في الزمن لاهتزازات خيط ذي أطراف متحركة مع الزمن وخاضعة لتخميد خطي أو غير خطي. باستخدام طريقة تكاملات الطاقة ، نبين أن طاقة الخيط تتناقص بمرور الزمن.

الكلمات المفتاحية: معادلة الموجة ، المجالات غير الأسطوانية، طريقة المضاعف ، التخميد.

Abstract

In this work, we study the asymptotic behavior in time of a vibrating string with moving boundaries and subject to linear and nonlinear dampings. Using the multiplier method (energy integrals), we show that the energy of the string decays in time.

Keywords : Wave equation, non-cylindrical domains , multiplier method, damping.

Résumé

Dans ce travail, nous étudions le comportement asymptotique en temps d'une corde vibrante aux limites variable ne temps et soumise à des amortissements linéaires et non linéaires. En utilisant la méthode des multiplicateurs (intégrales d'énergie), nous montrons que l'énergie de la corde décroît dans le temps.

Mots clés : Équation des ondes, Domaines non-cylindrique, méthode de multiplicateurs, amortissement.