جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF - M'SILA

MEMOIRE

Présenté à la Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques

Pour l'obtention du diplôme de master

Spécialité: Mathématiques

Option: Mathématiques Fondamentales et Appliquées

Par:

M^{elle} GHEFSI HAFSA

Intitulée:

QUELQUES ESTIMATIONS DE TYPE DE NIKOL'SKII

Soutenue publiquement le : 11/06/2015, devant le jury :

Douadi Drihem	MCA	Université de M'sila	Président
Madani Moussai	Prof	Université de M'sila	Encadreur
Bachir Gagui	MCB	Université de M'sila	Examinateur

Promotion 2014/2015

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur M. Moussai pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé. Je lui suis également reconnaissant pour la confiance qu'il ma accordée. Il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.

Je ne saurais oublier de remercier tous les mombres de jury, mes professeurs et toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Pour finir mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à ma famille et mes amis, en particulier ma mère et mes frères et ma soeur pour leur soutient tout au long de mes études.

Résumé

Les estimations de type de Nikol'skii jouent un rôle important dans les espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel(B-LT) comme la continuité de certains opérateurs lineáres sur B-LT.

Dans ce mémoire on va présenté l'inégalité de type Nikol'skii par deux formes continues et discrètes dans les espaces de Besov, par l'utilisation de certaines inégalités et fonctions.

Mots clés :L'espace de Besov, L'espace de Lizorkin-Triebel, Théorie de Littlewood-Paley, Fonction maximale, Estimation de base, Inégalité de Nikol'skii.

Abstract

Nikol'skii type estimates are important in the spaces of Besov and Lizorkin-Triebel (B-LT) as a continuation of some lineares operators on B-LT.

We will presente the Nikol'skii type inequality in two continuous and discrete forms in Besov spaces by using some inequalities and functions.

Keywords :Besov space, Lizorkin-Triebel space, Littlewood-Paley theory, maximale Function, basic estimation, Nikol'skii Inequality.

Table des matières

Notation

- $(e_1, ..., e_n)$ est la base canonique dans $\mathbb{R}^n$.
- $xy = x_1y_1 + ... + x_ny_n$ le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.
- Pour α et β deux multi indices, on dit que $\alpha \leq \beta$, si $\forall j \in \mathbb{N}^*$: $\alpha_j \leq \beta_j$.
- Si $x \in \mathbb{R}, [x]$ est la partie entière de x.
- $B(a, r)$ la boule de centre a et de rayon r.
- Pour $A \subset \mathbb{R}^n, |A|$ est la mesure de lebesgue.
- $\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 x_i}{\partial x_i^2}$ est le laplacien de f
- Pour $\alpha \in \mathbb{N}, |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_2$.
- $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$=$\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact dans $\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est le dual de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, l'ensemble des distributions sur $\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Schwartz des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^n$.
- Le dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des distributions tempérées.
- $\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}^+ \backslash \mathbb{N}$, est l'espace de Hölder.
- Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, sa transformation de Fourier est

$$\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} dx$$

et sa transform ee de Fourier inverse est

$$\mathcal{F}^{-1}f\left(\xi\right)=\left(2\pi\right)^{-1}\int_{\mathbb{R}^{n}}e^{ix\xi}dx.$$

- $f*g\left(x\right)=\int_{\mathbb{R}^{n}}f\left(x-y\right)g\left(y\right)dy$, est le produit de convolution des fonctions f et g.
- Pour $s\in\mathbb{R}$, $p\in\left]1,\infty\right[$, $H_{p}^{s}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ est l'espace de potentiel de Bessel des distributions $f\in\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ vérifiant
$$\left\Vert f\right\Vert_{H_{p}^{s}\left(\mathbb{R}^{n}\right)}:=\left\Vert \left(I-\Delta\right)^{\frac{s}{2}}f\right\Vert_{p}<\infty.$$
- Pour $m\in\mathbb{R}$ et $p\in\left]1,\infty\right[$, $W_{p}^{m}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ est l'espace de Sobolev des fonctions $f\in\mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ telle que
$$\left\Vert f\right\Vert_{W_{p}^{m}\left(\mathbb{R}^{n}\right)}:=\sum_{\left|\alpha\right|\leq m}\left\Vert f^{\left(\alpha\right)}\right\Vert_{p}<\infty.$$
- Le symbole $\hookrightarrow$ désigne l'inclusion avec continuité de l'injection canonique.
- p' l'exposant conjugué de $p\in\left[1,\infty\right]$, i.e $p':=\dfrac{p}{p-1}$.
- $\left\Vert f\right\Vert_{p}$ on désigne la norme dans $L^{P}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ l'espace des fonctions mésurables pour $p\in\left[1,\infty\right]$ défini par
$$\left\Vert f\right\Vert_{p}=\left(\int_{\mathbb{R}^{n}}\left|f\left(x\right)\right|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$
Avec $\left\Vert f\right\Vert_{\infty}=\sup_{x\in\mathbb{R}^{n}}ess\left|f\left(x\right)\right|.$
- $C,c,\ldots.$, des constantes positives, leurs valeurs peuvent dépendre de certains paramètres et certaines fonctions auxiliaires.
- Opérateur de défférence:

  -$\Delta_{h}f\left(x\right)=f\left(x+h\right)-f\left(x\right),\ \ x,h\in\mathbb{R}.$

  -$\Delta_{h}^{m}f\left(x\right)=\Delta_{h}^{m-1}\left(\Delta_{h}f\left(x\right)\right),\ \ m\in\mathbb{N}^{*}.$

  -$\Delta_{h}^{m}f\left(x\right)=\sum_{k=0}^{m}\binom{k}{m}\left(-1\right)^{k}f\left(x+\left(m-k\right)h\right).$
- $\mathcal{P}_{m}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ l'ensemble de tous les polynômes de degré inférieur à m.(en particulier $\mathcal{P}_{0}\left(\mathbb{R}^{n}\right)=\left\{0\right\}$ et $\mathcal{P}_{\infty}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ est l'ensemble de tous les polynômes).

- L'espace $\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n)$ la classe de Schwartz modulo les polynômes de degré infèrieur à m
- $\mathcal{S}'_m(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des distributions modulo les polynômes de degré infèrieur à m.

Introduction

Dans ce travail, nous allons étudier les inégalités de type Nikol'skii dans l'espace de Besov. Ce mémoire se compose en trois chapitres: quelques rappels sur la théorie de Littlewood-Paley , préparation sur les estimation de Nikoll'skiil dans espace de Besov et les inégalités de Nikol'skii sur l'espace de Besov sous deux formes discrète et continue.

Dans le première chapitre on donne quelque rappeles des notions essentielles qui seront utilisées dans la suite de cette mémoire comme la théorié de Littlewood-Paley et on définit la série de Littlewood-Paley, on donne quelques inégalities classiques nécessaires suivie par ces démonstrations.

L'object de deuxième chapitre, est réprisentation des estimatins des bases, et établi l'inégalité de Nikoll'skii.

Le troisième chapitre est consacré à l'inégalité de Nikol'skii discrète et continue. Avec pour objet l'étude des propositions principales et inégalités maximales.

Chapitre 1

La théorie de Littlewood-Paley

1.1 Introduction

La théorie de Littlewood-Paley des espaces fonctionnels, et plus particulièrement la théorie des espaces de Besov, joue un role essentiel tout au long de ce mémoire.

Nous rappellerons dans ce qui suit les résultats que nous utilisons dans le deuxieme et le troisième chapitre nous omettons certains preuves, et nous référons pour cela aux ouvrages de Bergh et Löfström [3], Runst et Sickel [9] et Triebel [10].

1.2 Serie de Littlewood-Paley

Sont φ une fonction paire dans $\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^n\right)$ définie par:

$$\varphi\left(\xi\right)=1 \text{ si } \left|\xi\right|\leq 1 \text{ et } \varphi\left(\xi\right)=0 \text{ si } \left|\xi\right|\geq \tfrac{3}{2}.$$

On pose la fanction $\phi\in\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$ tell que:

i) $\phi\left(\xi\right)=\varphi\left(\xi\right)-\varphi\left(2\xi\right), \forall\xi\in\mathbb{R}^n$.

ii) supp $\phi\subset\left\{\xi\in\mathbb{R}^n : \frac{1}{2}\leq\xi\leq\frac{3}{2}\right\}$ et $\phi\left(\xi\right)\geq 0$.

Il vient alors la partition homogène de lunite suivante:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\phi\left(2^{-k}\xi\right)=1 \text{ pour } \xi\in\mathbb{R}^n\backslash\left\{0\right\}.$$

On a aussi

$$\phi_0(\xi)+\sum_{k\geq1}\phi\left(2^{-k}\xi\right)=1,\forall\xi\in\mathbb{R}^n.$$

On obtient la partion non homogène de l'unité suivante:

$$\varphi(\xi)+\sum_{k\geq1}\phi\left(2^{-k}\xi\right)=1,\forall\xi\in\mathbb{R}^n. \qquad (1.1.1)$$

Nous définissons les opérateurs

$$Q_j:\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n),\text{ par } Q_j=\phi\left(2^{-j}D\right),(j\geq1).$$

et

$$S_k:\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n),\text{ par } S_k=\varphi\left(2^{-k}D\right),(k\geq0).$$

Pour la partition de l'unité,on définit les opérateurs de convolutions.

$$\begin{cases}(Q_jf)(x)=\left(\mathcal{F}^{-1}\left(\phi\left(2^{-J}\bullet\right)\right)*f\right)(x)\,\forall\,(j\geq1).\\ (S_kf)(x)=\left(\mathcal{F}^{-1}\left(\varphi\left(2^{-k}\bullet\right)\right)*f\right)(x)\,\forall\,(k\geq0)\end{cases} \qquad (1.1.2)$$

ou bien

$$\begin{cases}\widehat{(Q_Jf)}(\xi)=\left(\phi\left(2^{-J}\xi\right)\widehat{f}\right)(\xi)\,\forall\,(j\geq1)\\ \widehat{(S_kf)}(\xi)=\left(\varphi\left(2^{-J}\xi\right)\widehat{\mathfrak{f}}\right)(\xi)\,\forall\,(k\geq1).\end{cases}$$

Avec la notation $Q_0=S_0$.

Ecrivons la rolation (1.1.1) au point $2^{-k}\xi$,alors

$$\varphi\left(2^{-k}\xi\right)+\sum_{j=k+1}\phi\left(2^{-j}\xi\right)=1,\forall\xi\in\mathbb{R}^n.$$

On multipliant par $\widehat{f}(\xi)$ .On obtient

$$\varphi\left(2^{-k}\xi\right)\widehat{f}(\xi)+\sum_{j=k+1}\phi\left(2^{-j}\xi\right)\widehat{f}(\xi)=\widehat{f}(\xi),\forall\xi\in\mathbb{R}^n$$

.

En appliquant la transformation de Fourier inverse on obtient

$$\mathcal{F}^{-1}\ \left(\varphi\left(2^{-k}.\right)\right)*f+\sum_{j=k+1}^{\infty}\mathcal{F}^{-1}\ \left(\phi\left(2^{-j}.\right)\right)*f=f.$$

Par la relation (1.1.2),on obtien encore

$$S_k f + \sum_{j=k+1}^{\infty} Q_j f = f, \quad (\forall k \in \mathbb{N}).$$

Pour $k = 0$, on trouve

$$f = S_0 f + \sum_{j=1}^{\infty} Q_j f,$$

Où f est une distribution tempérée de $\mathbb{R}^n$.

On a donc la définition suivante:

Définition 1.2.1 *Si $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ alors la série de Littlewood-Paley est donnée par la formule suivante*

$$f = S_0 f + \sum_{j=1}^{\infty} Q_j f. \tag{1.1.3}$$

Proposition 1.2.1 *La formule* (1.1.3) *impliques les formules suivantes:*

1. $f = \sum_{j=0}^{\infty} Q_j f.$

2. $S_k f = \sum_{j=0}^{k} Q_j f.$

Preuve.

1. Pour $k = 1$, on a
$$f = S_0 f + \sum_{j=1}^{\infty} Q_j f$$
par la notation $(Q_0 = S_0)$,on trouve
$$f = \sum_{j=0}^{\infty} Q_j f.$$

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a
$$f = S_k f + \sum_{j=k+1}^{\infty} Q_j f.$$

Par la fourmule 1, on obtient

$$f \ = \ \sum_{j=0}^{k} Q_j f + \sum_{j=k+1}^{\infty} Q_j f,$$

Alors

$$S_k f + \sum_{j=k+1}^{\infty} Q_j f = \sum_{j=0}^{k} Q_j f + \sum_{j=k+1}^{\infty} Q_j f,$$

i.e

$$S_k f = \sum_{j=0}^{k} Q_j f.$$

■

Proposition 1.2.2 *: $Q_j f = 0$ $(\forall j \in \mathbb{Z})$ si et selement si f est un polynôme.*

1.3 Inégalités principales

1.3.1 Inégalité de l'nterpolation de Riesz-Thorin

Proposition 1.3.1 *Soient (X, μ) et (Y, υ) deux espaces mesurés et $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq +\infty$, avec $p_0 \neq p_1$ et $q_0 \neq q_1$. On suppose que T est une opérateur linéaire définie de (X, μ) dans (Y, υ) tel que :*

$$\|T(f)\|_{q_0} \leq C_0 \|f\|_{p_0}, \qquad (C_0 > 0); \quad \forall f \in X.$$

$$\|T(f)\|_{q_1} \leq C_0 \|f\|_{p_1}, \qquad (C_1 > 0); \quad \forall f \in X.$$

Alors pour $0 < \theta < 1,$ et

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

On a

$$\|T(f)\|_q \leq C_0^{1-\theta} C_1^{\theta} \|f\|_p, \forall f \in X.$$

1.3.2 Inégalité de Hölder

Proposition 1.3.2 *Soient* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *et* $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ *avec* $1 \leq p, q, r \leq +\infty$,*alors* $f.g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ *avec* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ *et de plus*

$$\|f.g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

Preuve. Pour démantrer cette proposition on voir $[9], [10]$. ■

1.3.3 Inégalité de Minskovski

Proposition 1.3.3 *Pour tout* $1 \leq p, q \leq +\infty$ *, et* X *un élément dans* $\ell^p(\ell^q)$ *, alors*

$$\|X\|_{\ell^q(\ell^p)} \leq \quad \|X\|_{\ell^p(\ell^q)} \ .$$

1.3.4 Inégalité de Young

Théorème 1.3.1 *Soient* p, q *et* $r \in [1, \infty]$ *tel que*

$$1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Alors pour toute $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *et* $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ *,on a*

$$f * g \in L^r(\mathbb{R}^n).$$

et

$$\|f * g\| \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

.

Preuve. On fixe $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ et on considère l'opérateur

$$Tf = f * g.$$

Alors on a

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, g(x - y)\, dy.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient d'une part

$$|Tf(x)| \leq \|f\|_{q'} \|g\|_q .$$

D'autre part l'inégalité de Hölder ,on a

$$\begin{aligned}
\|Tf(x)\|_q &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \, |g(x-y)| \, dy \right)^q dx \right)^{\frac{1}{q}} ; \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^q \, |g(x-y)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} dy ;\text{(par l'inégalité de Minskovski)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \, dy \, \|g\|_q \\
&= \|f\|_1 \|g\|_q .
\end{aligned}$$

Donc

$$\|Tf(x)\|_q \leq \|f\|_1 \|g\|_q .$$

Alors on applique le théorème de l'interpolation de Riesz-Thorin, on a

$$T : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n) .$$

$$L^{q'}(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n) \ .$$

Il vient

$$T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^r(\mathbb{R}^n) ,$$

avec pour $\theta \in]0, 1[$ on a

$$\begin{cases} \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{q'} \implies \frac{1}{p} = 1 - \theta \left(1 - \frac{1}{q'} \right), \\ \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{\infty} \implies \frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{\theta}{q}, \end{cases}$$

et on a

$$\begin{cases} \frac{1}{p} = 1 - \frac{\theta}{q} \implies -\frac{\theta}{q} = \frac{1}{p} - 1, \\ \frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{\theta}{q} \implies \frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - 1, \end{cases}$$

Alors

$$\frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{q} + \frac{1}{p} \ .$$

Donc on obtient le résultat. ■

Proposition 1.3.4 *Les familles d'opérateurs* $\{Q_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *et* $\{S_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *sont bornées dans* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *pour tout* $1 \leq p \leq +\infty$.

Preuve. Soit la relation

$$Q_j f = \mathcal{F}^{-1}\ \left(\phi\left(2^{-j}.\right)\right) * f \quad .$$

Par l'inégalite de Young on obtient

$$\begin{aligned}\|Q_j f\|_p &= \|\mathcal{F}^{-1}\ (\phi\,(2^{-j}.)) * f\ \ \|_p \\ &\leq \ \ \|\mathcal{F}^{-1}\ (\phi\,(2^{-j}.))\|_1 \|f\ \ \|_p.\end{aligned}$$

Et on a

$$\mathcal{F}^{-1}\ \left(\phi\left(2^{-k}.\right)\right) = 2^{jn}\left(\mathcal{F}^{-1}\ \phi\right)\left(2^{-j}.\right).$$

Comme $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, sa transformée de fourier inverse appartient à $\mathcal{S}$ et donc à L_1 i.e

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}^{-1}\ (\phi\,(2^{-j}.))\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} |2^{jn}\,(\mathcal{F}^{-1}\ \phi)\,(2^{-j}.)|\,dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |(\mathcal{F}^{-1}\ \phi)\,(y)|\,dy \\ &\leq \|\mathcal{F}^{-1}\ \phi\|_1\end{aligned}$$

Donc

$$\|Q_j f\|_p \leq C\,(\phi)\,\|f\ \ \|_p\,.$$

Et le même avec $\|S_j f\|_p$. ■

1.3.5 Inégalité de Bernstein

Théorème 1.3.2 *Soient* $1 \leq p \leq q \leq \infty$, *et* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *.Il existe* $C = (\alpha, p, q, n)\ > 0$ *, tel que pour tout* $A > 0$, *pour tout* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *, vérifiant supp* $\widehat{f\ \ } \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq A\}$ *,on a*

$$\left\|f^{(\alpha)}\right\|_q \leq C A^{|\alpha|+n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\,\|f\|_p \quad .$$

Preuve. Soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\psi = 1$ pour $|\xi| \leq 1$, $A > 0$.

On pose $\psi_A(\xi) = \psi(\xi/A)$, on a :

$$\widehat{f} = \psi_A \widehat{f}$$

et

$$f^{(\alpha)} = \left(\mathcal{F}^{-1}\ \psi_A\right)^{(\alpha)} * f\ .$$

Par l'inégalité de Young, on obtient

$$\left\| f^{(\alpha)} \right\|_q \leq \left\| \left(\mathcal{F}^{-1}\ \psi_A\right)^{(\alpha)} \right\|_r \left\| f \right\|_p,$$

avec

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{p} = \frac{1}{q} + 1.$$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$\left(\mathcal{F}^{-1}\ \psi_A\right)^{(\alpha)}(x) = A^n \left(\mathcal{F}^{-1}\ \psi\right)^{(\alpha)}(Ax).$$

Il vient

$$\left\| \left(\mathcal{F}^{-1}\ \psi_A\right)^{(\alpha)} \right\|_r = A^{n+|\alpha|-\frac{n}{r}} \left\| \left(\mathcal{F}^{-1}\ \psi\right)^{(\alpha)} \right\|_r,$$

alors

$$\left\| f^{(\alpha)} \right\|_q \leq C A^{|\alpha|+n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \left\| f \right\|_p.$$

■

Proposition 1.3.5 *Soient* $1 \leq p \leq q \leq \infty$ *on a :*

i) $\left\| Q_j f \right\|_q \leq C 2^{jn\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \left\| Q_j f \right\|_p.$

ii) $\left\| S_j f \right\|_q \leq C 2^{jn\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \left\| S_j f \right\|_p.$

Preuve. Pour démontrons la proposition ci-dessus nous appliquons l'inégalité de Bernstien. ■

1.4 Définition et quelques propriétés des espaces de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$

Nous allons rappeler la définition de l'espace de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, ainsi que certianes propriétés, comme la coincidance avec d'autres espaces ..., où toutes les démonstrations se trouvent dans les livres de H.Tribel [10], peetre [6] ; on pourra aussi voir le livre de T.Runst et W.sickel [9].

Définition 1.4.1 *soit $s \in \mathbb{R}$ et $p, q \in]0, \infty]$ .L'espace de Besov noté $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, est l'esemble des $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que $S_0 f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ et pour $k \geq 1$,*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(2^{skq} \|Q_k f\|_p^q \right) \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

On définit la norme de Besov par

$$\|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \|S_0 f\|_p + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(2^{skq} \|Q_k f\|_p^q \right) \right)^{\frac{1}{q}}.$$

On écrit aussi:

$$\|f\|_{B^s_{p,q}} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{k \geq 0} 2^{qsk} \|Q_k f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty \ \text{pour } 1 \leq q < +\infty \\ \sup\limits_{k \geq 0} 2^{sk} \|Q_k f\|_p < +\infty \ \text{pour } q = +\infty \end{cases}$$

Les propositions suivantes présentent des normes equivalentes dans $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ .Pour la preuve, voir par exemple [10], [11].

Proposition 1.4.1 *Soient 'ℓ un entier, $0 < s < \ell$, $q, p \in [1, \infty]$. Alors l''espace $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des distributions tempérées f vérifiant*

$$\|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_p + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |h|^{-sq} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \Delta_h^\ell f(x) \right|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} \frac{dh}{|h|^n} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Preuve. Voir [9, p. 41]. ■

Pour la définition de Δ_h^ℓvoir la notation.

1.4.1 Plongements dans $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$

Nous rappelons quelques inclusions et égalités au sens des normes entre les espaces de Besov. La plupart sont démontrées dans [6], [10].

Proposition 1.4.2 *:*

1. $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *est un Banach. si* $s \in \mathbb{R}$ *et* $1 \leq p, q \leq \infty$

2. $B^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$ *si* $s \in \mathbb{R}^+ \backslash \mathbb{N}$.

3. $B^s_{2,2}(\mathbb{R}^n) = H^s$ *espace de Sobolev.*

4. $B^s_{p,2}(\mathbb{R}^n) = H^s_p$ *espace de Bessel.*

5. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *pour* $s \in \mathbb{R}$ *et* $0 < p, q \leq \infty$.

Proposition 1.4.3 *:*

i) *Soient* $s > \frac{n}{p} - \frac{n}{r}, 1 \leq p, q \leq \infty$ *ou* $s = \frac{n}{p} - \frac{n}{r}$ *et* $q \leq r$*,alors*

$$B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_r(\mathbb{R}^n)$$

ii) *Soient* $s > \frac{n}{p}, 1 \leq p \leq \infty$ *ou* $q = 1$ *et* $s = \frac{n}{p}$*, alors*

$$B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_\infty(\mathbb{R}^n).$$

iii) *Soient* $s = 0,\ 1 \leq p \leq \infty$*, alors si* $q = 1$.

$$B^0_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_p(\mathbb{R}^n),$$

et si $q = 1$.

$$L_p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^0_{p,q}(\mathbb{R}^n).$$

iv) *Soient* $s = 0$ *,alors*

$$B^0_{1,1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_1(\mathbb{R}^n).$$

v) *Soient* $1 < q_1 \leq q_2 \leq \infty$ *,*$1 < p \leq \infty$ *et* $s \in \mathbb{R}$ *on a*

$$B^s_{p,q_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^s_{p,q_2}.$$

vi) *Soient* $p_0 < p$ *et* $s - \frac{n}{p_0} = \alpha - \frac{n}{p}$ *alors*

$$B^s_{p_0,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^\alpha_{p,q}.$$

vii) *Pour tout entier* $m > s$ *on a*

$$W^m_p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n).$$

Théorème 1.4.1 *soient* $1 \le p_1 \le p_2 \le \infty$ *et* $1 \le q_1 \le q_2 \le \infty$*, alors pour tout* $s \in \mathbb{R}$ *on a*

$$B^s_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^{s-n\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right)}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^n).$$

Preuve.

Pour la preuve ce résultat nous appliquons l'inégalite de Bernstein on trouve

$$\|S_0 f\|_{p2} \le c\,\|f\|_{p_1},$$

et

$$\|Q_j f\|_{p_2} \le c2^{jn\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right)}\|Q_j f\|_{p_1}$$

.

Pour $s \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\|Q_j f\|_{p_2} \le c2^{jn\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right)-s}2^{js}\|Q_j f\|_{p_1}.$$

D'où il suffit de passer à la norme de ℓ_q (et comme $q_1 \le q_2$ alors $\ell_{q_1}(\mathbb{N}) \hookrightarrow \ell_{q_2}(\mathbb{N})$) donc on obtient le prolongement. ■

Proposition 1.4.4 *:*

i) *Soient* $s \in \mathbb{R}$ *et* $1 \le q_0 \le q_1 \le \infty$ *, alors*

$$B^s_{p,q_0}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^s_{p,q_1}(\mathbb{R}^n).$$

ii) *Soient* $s_0 > s_1$ *et* $1 \le p_0 \le p_1 \le \infty$ *, et* $s_0 - \frac{n}{p_0} = s_1 - \frac{n}{p_1}$ *alors*

$$B^{s_0}_{p_0,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^{s_1}_{p_1,q}(\mathbb{R}^n).$$

iii) *soient* $s \in \mathbb{R}$ *et* $\varepsilon > 0$*, et* $1 \le q_0, q_1 \le \infty$*, alors*

$$B^{s+\varepsilon}_{p,q_0}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^s_{p,q_1}(\mathbb{R}^n).$$

Proposition 1.4.5 *Soient* $p, q \in [1, +\infty]$*,* $s < 0$ *et* f *une distribution tempéreé .Alors* $f \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *si et sulement si*

$$\left(2^{js}\|S_j f\|_p\right)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell_q(\mathbb{R}^n).$$

De plus l'expression ci-dessus est une norme équivalante à la norme $\|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}$.

Preuve.

Comme $S_j f = \sum_{k=0}^{j} Q_k f$ alors

$$\|S_j f\|_p \leq \sum_{k=0}^{j} 2^{-ks} \left(2^{ks} \|Q_k f\|_p\right)$$

c'est-à-dire

$$2^{js} \|S_j f\|_p \leq \sum_{k=0}^{j} 2^{(j-k)s} \left(2^{ks} \|Q_k f\|_p\right)$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^{j} 2^{(j-k)q's}\right)^{\frac{1}{q'}} \left(\sum_{k=0}^{j} \left(2^{ks} \|Q_k f\|_p\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq c 2^{js} \|f\|_{B_{p,q}^{s}(\mathbb{R}^n)} .$$

Comme $s < 0$ alors on obtient le résultat dés qu'on passe à la norme de $\ell_q(\mathbb{R}^n)$. ■

.

Chapitre 2

Estimation de type de Nikol'skii

2.1 Estimations de base dans $B_{p,q}^{s}(\mathbb{R}^n)$

Les preuves des propositions suivantes sont démontrées dans les travaux de M.Moussai et S.Allaoui.[8] , [7] , [1] .

Proposition 2.1.1 *Soient* $1 < p < \infty$ *et* $1 \leq q \leq \infty$*:*

Alors il existe une constante $c > 0$*; telle que*

$$\left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left| 2^{kn} \mathcal{F}^{-1} \theta \left(2^k .\right) * f_k \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p \leq c \left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} |f_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p ,$$

pour tout $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *et* $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Voir [1],[9, Prop4, p.23] . ■

Proposition 2.1.2 *Sioent* $s > 0$ *et* $\gamma \geq 1$,*il existe une constante* $c > 0$*; telle que*

$$\left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} |Q_k f_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p \leq c\gamma^s \left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} |f_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p ,$$

pour toute suite de fonctions $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *vérifiant supp* $\widehat{f_k} \subset B\left(0, \gamma 2^k\right)$.

Preuve. Voir [23],[31, Prop 3, p.22] . ■

Proposition 2.1.3 *Soient $a \in]0,1[$ et $p \in [1,\infty]$ .Pour toute suite $\{\varepsilon_j\}_{j\geq 0}$dans $\ell^p(\mathbb{Z})$, les suites $\eta_k = a^k \sum_{j\leq k} a^{-j}\varepsilon_j$, et $\omega_k = a^{-k}\sum_{j\geq k} a^j\varepsilon_j$ appartiennent à $\ell^p(\mathbb{Z})$ .De plus*

$$\|\eta_k\|_{\ell^p(\mathbb{Z})} + \|\omega_k\|_{\ell^p(\mathbb{Z})} = c\,\|\varepsilon_j\|_{\ell^p(\mathbb{Z})}.$$

Preuve. Il suffit d'appliquer l'inégalité de Young pour la convolution dans $\ell^p(\mathbb{Z})$. ■

Proposition 2.1.4 *Soient $0 < b < 1$ et $0 < q \leq \infty$. Pour toute suite réelle a tèrmes positifs $\{\varepsilon_j\}_{j\in\mathbb{N}}$dans $\ell^q(\mathbb{N})$, les suites $\left\{\sum_{j=0}^{k} b^{k-j}\varepsilon_j\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left\{\sum_{j=k}^{\infty} b^{j-k}\varepsilon_j\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ appartiennent a $\ell^q(\mathbb{N})$.*

De plus il existe un constante $c > 0$ telle que

$$\left\|\left\{\sum_{j=0}^{k} b^{k-j}\varepsilon_j\right\}_{k\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell^q(\mathbb{N})} + \left\|\left\{\sum_{j=k}^{\infty} b^{j-k}\varepsilon_j\right\}_{k\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell^q(\mathbb{N})} \leq c\left\|\{\varepsilon_{jk}\}_{k\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell^q(\mathbb{N})}.$$

La valeur exacte de c est :$\dfrac{2}{1-b}$.

Preuve. voir [5,proposition 1.25] ■

Proposition 2.1.5 *Soit $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p, q \leq \infty$ et $\gamma > 1$. Nous mettons $\mu := (1 + [s])\, max(signe\ s, 0)$. puis il existe une constante $c > 0$, telle que*

$$\left(\int_0^1 t^{-sq}\|\theta_t * f\|_p^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \leq c\gamma^{\mu-s+\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\sup_{|\alpha|\leq m}\left\|\widehat{\theta}^{(\alpha)}\right\|_\infty\right)\|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}$$

Alors pour toute $f \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$,et $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tel que supp $\widehat{\theta} \subset B(0,\gamma)$, (et dans le cas $s \geq 0$, $\theta^{(\alpha)}(0) = 0$ pour $|\alpha| \leq [s]$).

Ici $\theta_t := t^{-n}\theta(t^{-1}.)$, $t > 0$ et $m \geq 3 + \left[\frac{n}{2}\right] + \mu$.

Preuve. Voir [7], [4]. ■

Proposition 2.1.6 *Soit $s > 0, 1 \leq p, q \leq \infty$ et $\gamma > 1$. Alors il existe une constante $c > 0$ tel que*

$$\left\|\int_0^1 f_t \frac{dt}{t}\right\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c\gamma^s\left(\int_0^1 t^{-sq}\|f_t\|_p^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Preuve. Voir [7], [4]. ■

Chapitre 3

Inégalités maximales

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous rappelons d'abord la définition des fonctions maximales et certains inégalités pour étudier l'inégalité de Nikoll'skii sous deux formes discrétes et continues. D'après les travaux de M.Yamazaki, G.Bourdaud et H.Triebel,nous fairs les travail suivant.

3.2 Fonctions maximales

Définition 3.2.1 *:*

1. *Soit f est une fonction mésurable sur $\mathbb{R}^n$ et $0 < p < \infty$ .On définit la fonction maimale de f de type Hardy-littlewood par la forme suivant :*

$$M_p f(x) = \sup_{t>0} \left(\frac{1}{|B(x,t)|} \int\limits_{B(x,t)} |f(y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

   où $B(x,t)$,est la boule ouvert de centre x et de rayoun t.

   Avec on note M_1 par M.

2. *Soit a et R des nombres positive. On définit la fonction maximal de $f(x)$ de type Feffermane-Stein par la forme suivant:*

$$f^{**}(a, R; x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \langle y \rangle^{-a} \left| f\left(x - R^{-m} y\right) \right|.$$

Les propositions suivantes concernent des estimation des suites et séries de fonction dans les espaces $L^p(\ell^q), \ell^q(L^p)$ ...etc.

Proposition 3.2.1 *Soit $1 < p < \infty$ et $1 < q \leq \infty$ Alors*

i) *Si $\theta \in L^1$ et $g \in L_1^{loc}$,on a*

$$\left| \left(t^{-n} \theta \left(\frac{\cdot}{t} \right) \right) * g(x) \right| \leq \|\theta\|_1 Mg(x), \quad (\forall t > 0, x \in \mathbb{R}^n) \ .$$

ii) *Il existe une constane $c = c(n, p) > 0$ telle que pour tout $g \in L^p$ on a*

$$\|Mg\|_p \leq c \|g\|_p .$$

iii) *Il existe une constane $c > 0$ telle que l'inégalité suivante*

$$\left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} (Mg_j)^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p \leq c \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} |g_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p .$$

est vérifiée, pour toute suite des fonctions des distributions $\{g_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ localement Lebesgue-intégrables.

Preuve. Voir par exemple et [9.p.21] ou [10.p.89] , [11] ■

Proposition 3.2.2 *Soit $0 < r, b < \infty$ et f une fonction telle que supp $\widehat{f} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq b\}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,on a*

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|f(x-y)|}{(1+|y|)^{\frac{n}{r}}} \leq c \left(M |f|^r (x)\right)^{\frac{1}{r}} .$$

Preuve. Voir [10] , [11] . ■

Corollaire 3.2.1 *:Supposons que* $0 \leq p \leq \infty$, $0 < r \leq \frac{q}{q-1}$, $A, R \geq 1$ *et* $a > \frac{|m|}{r}$.*Si* $\phi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *et si* $f(x)$ *est une fonction dans* $\mathbb{R}^n$ *telle que supp*$\widehat{f}(\xi) \subset B(0, AR)$ *on a alors*

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{\phi}\widehat{f}\right)(x)\right\|_p \leq CR^{|m|\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{q-1}\right)} A^{-\frac{|m|}{r}} \left\|\langle A^m x\rangle^a \phi(x)\right\|_q M_r f(x)_p .$$

avec la constante C *indépendante de* $A, R, \phi(x)$ *and* $f(x)$.

Preuve. On mettre $p = \frac{q}{q-1}$ on a alors

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{\phi}\widehat{f}\right)(x)\right| &\leq \int |\phi(y) f(x-y)| \, dy \\ &\leq \left\|\langle A^m .\rangle^a \phi(.)\right\|_q \left\|\langle A^m .\rangle^{-a} f(x-.)\right\|_p \\ &\leq \left\|\langle A^m .\rangle^a \phi(.)\right\|_q \left\|\langle A^m .\rangle^{-a} f(x-.)\right\|_r^{\frac{r}{p}} . \left(\sup_{y\in\mathbb{R}^n} \langle A^m .\rangle^{-a} |f(x-y)|\right)^{1-\frac{r}{p}}\end{aligned}$$

par l'inégalitè de Hölder.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\sup_{y\in\mathbb{R}^n} \langle A^m .\rangle^{-a} |f(x-y)| &\leq \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \langle A^m .\rangle^{-\frac{|m|}{r}} |f(x-y)| \\ &\leq R^{\frac{|m|}{r}} f^{**}\left(\frac{|m|}{r}, AR; x\right).\end{aligned}$$

■

3.3 La méthode classique de représentation Nikol'skij

Théorème 3.3.1 *Soit* $s > 0$, $1 \leq p, q \leq \infty$, *et* $\gamma > 1$.

i) *Il existe une constante* $c > 0$ *tel que*

$$\left(\sum_{j\geq 0} 2^{qsj} \left\|2^{jn}\theta\left(2^j .\right) * f\right\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq c \sup_{|\alpha|\leq\left[\frac{n}{2}\right]+3} \left\|\widehat{\theta}^{(\alpha)}\right\|_\infty \|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \qquad (3.3.1)$$

est valable pour tout $\theta \in \mathcal{S}$ *tel que supp* $\widehat{\theta} \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n : \gamma^{-1} \leq |\xi| \leq \gamma\}$, *et tout* $f \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

ii) *Soit* $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions telles que :*

$$f_j \in L^p, \text{ suup } \widehat{f_j} \subset B\left(0, 2^j\gamma\right) \text{ et } A := \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{qsj} \|f_j\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty;$$

Donc la série $\sum_{j\in\mathbb{N}} f_j$ *converge dans* $\mathcal{S}'$ *et on a*

$$\left\|\sum_{j=0}^{\infty} f_j\right\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq cA. \qquad (3.3.2)$$

Où c ne dépend que de n, s, p, q et γ.

iii) *Soient* $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < 2\gamma_1$.*Soit* $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions telles que :*

suup $\widehat{f} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : \gamma_1 2^j < \xi < \gamma_2 2^j\}$ *et* $A := \left\| \sum_{j=0}^{\infty} f_j \right\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} < \infty;$

alors on a l'inégalité suivante

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{qsj} \|f_j\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq cA.$$

Où c ne dépend que de n, s, p, q et γ_1, γ_2.

Remarque 3.3.1 *:La preuve du théorème en-dessus est basée sur l'estimation suivante:*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} b^{k-j} \varepsilon_j \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{1-b} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j^q \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{3.3.3}$$

avec $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell_q(\mathbb{N})$ *de nombres positifs, et* $p \in \,]1, \infty[\,, b \in [1, \infty]\,.$

L'inégalité (3.3.3) peut être obtenu facilement par applique l'inégalité de Young sur la suite $\left\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} \omega_{k-j} \eta_j \right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *dans* $\ell_q(\mathbb{Z})$ *,où* $\omega_j := b^j$ *si* $j \geq 0$, $\omega_j := 0$ *si* $j < 0$, *and* $\eta_j := \varepsilon_j$ *si* $j \geq 0$, $\eta_j := 0$ *si* $j < 0$.

Preuve.

i) Nous utilisons la définition de la norme de $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et de ϕ_k tel que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi_k = 1$

Clairement on a

$$supp\widehat{\theta}\left(2^{-j}.\right) \cap supp\phi_k \neq \emptyset \text{ si } max(j-N, 0) \leq k \leq j+N$$

avec l'entier $N := N(\gamma) = \left[\dfrac{\log 2\gamma}{\log 2} \right]$.

Par l'inégalité de Young, on a

$$\left\| 2^{jn}\theta\left(2^j.\right) * f \right\|_p \leq c \sum_{k=j-N}^{j+N} \left\| \mathcal{F}^{-1}\phi_k * f \right\|_p \tag{3.3.4}$$

où la constante c dépend $sup|\alpha| \leq M$, mais pas sur f et j.

Par le preuve de proposition (2.3.5) , l'inégalité (3.3.4) devient

$$2^{sj} \left\| 2^{jn}\theta\left(2^{j}.\right) * f \right\|_{p} \leq c2^{sj} \sum_{k=j-N}^{j+N} 2^{-sk} \left(2^{sk} \left\| \mathcal{F}^{-1}\phi_{k+N} * f \right\|_{p}\right).$$

Maintenant, il suffit d'employer (3.3.3), on obtient alors

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{sqk} \left\| \mathcal{F}^{-1}\phi_{k+N} * f \right\|_{p}^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \leq c2^{-Ns} \left\| f \right\|_{B^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^{n})}.$$

ii) Convergence dans $\mathcal{S}'$. Soit $g \in \mathcal{S}$. Nous considérons une fonction $\eta \in \mathcal{C}_0^{\infty}$,tel que $\eta\left(\xi\right) = 1$ si $\xi \in B\left(0,\gamma\right)$.

On met $\eta_j := \eta\left(2^{-j}\bullet\right)$, et $\eta_j \widehat{f_j} = \widehat{f_j}$ por tout $j \in \mathbb{N}$. D'où

$$\left\langle f_j, g\right\rangle = \left\langle f_j, \left(\mathcal{F}^{-1}\eta_j\right) * g\right\rangle.$$

Cela implique

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{N}} \left|\left\langle f_j, g\right\rangle\right| &\leq \left(\sup_{j\in\mathbb{N}} 2^{js} \left\| f_j \right\|_{p}\right) \sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{-js} \left\| \left(\mathcal{F}^{-1}\eta_j\right) * g \right\|_{p'} \\
&\leq \left\| \left(\mathcal{F}^{-1}\eta_j\right) \right\|_{1} \left\| g \right\|_{p'} \left(\sup_{j\in\mathbb{N}} 2^{js} \left\| f_j \right\|_{p}\right) \sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{-js} \text{ (Par l'inégalité de Young)} \\
&\leq cA
\end{aligned}$$

La propriété désirée.

Pour la preuve de l'inégalité (3.3.2) ,on applique l'inégalité (3.3.3)

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{skq} \left\| \mathcal{F}^{-1}\left(\phi_k \mathcal{F}\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} f_j\right)\right) \right\|_{p}^{q} &\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{skq} \left(\sum_{j=k+N}^{\infty} \left\| \mathcal{F}^{-1}\phi_k * f_j \right\|_{p}\right)^{q} \\
&\leq c_1 \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{skq} \left(\sum_{j=k}^{\infty} 2^{-sj} \left(2^{sj} \left\| f_j \right\|_{p}\right)\right)^{q} \\
&\leq c_2 \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{skq} \left\| f_j \right\|_{p}^{q}.
\end{aligned}$$

iii) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $\dfrac{\gamma_2}{2} < a < \gamma_1 < \gamma_2 < b < 2\gamma_1$.On choise la fonction $\psi \in \mathcal{S}$ telle que :

$\widehat{\psi}(\xi) = 1$ si $\gamma_1 \leq |\xi| \leq \gamma_2$, $\widehat{\psi}(\xi) = 0$ si $|\xi| \leq a$,et $\widehat{\psi}(\xi) = 0$ si $|\xi| \geq b$.

On a alors

$\widehat{\psi}(2^{-j}.)\widehat{f_k} = 0$ si $j \neq k$ et $\widehat{\psi}(2^{-j}.)\widehat{f_k} = \widehat{f_k}$,puis par (3.3.1), nous avons

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjq} \|f_j\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjq} \left\|\left(2^{jn}\psi\left(2^{-j}.\right)\right) * f_j\right\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjq} \left\|\left(2^{jn}\psi\left(2^{-j}.\right)\right) * \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k\right)\right\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq c \left\|\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k\right\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}.$$

■

3.4 Inégalité de Nikol'skii déscrète

Théorème 3.4.1 *Soit $A > 0$, $s \in \mathbb{R}, 0 < p, q \leq \infty$, et $(f_j(x))_{j=0}^{\infty}$ une suite de distributions tempérées telles que, pour tout j, supp$\widehat{f_0} \in B(0.A)$ et supp$\widehat{f_j} \in \{2^j A^{-1} \leq |\xi| \leq 2^j A\}$ .Alors nous avons la suivante:*

Si

$$\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(2^{js} \|f_j\|_p\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} = B \leq \infty.$$

Alors

- *La somme localement finit $g(x) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \widehat{f_j}(x) \in \mathcal{S}'$,et la transformée de Fourier inverse $f(x) = \mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} f_j(x) \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.*
- *$\|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq CB$, avec une constante C ne dépendant que de $n, A, s, p,$et q.*

Preuve. .

Soit $h \in \mathbb{N}$; et *supp* $\phi_k(\xi) \cap$ *supp* $\widehat{f}_j(\xi) = \emptyset$ si $|j-k| > h$.

D'apré le corollaire (4.2.2),on a

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} \left\|2^{sj}\mathcal{F}^{-1}\left(\phi_j \widehat{f}_{j+k}\right)(x)\right\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq CB.$$

Et il est clairement $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ car $(f_j(x))_{j\in\mathbb{N}}$une suit dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Puis nous avons

$$2^{sj}\mathcal{F}^{-1}\left(\phi_j \widehat{f}\right)(x) = \sum_{k=-h}^{h} 2^{sj}\mathcal{F}^{-1}\left(\phi_j \widehat{f}_{j+k}\right)(x).$$

Il reste à prouver que $f(x)$ exists et coïncide avec $\mathcal{F}^{-1}(g)(x)$.

Comme voir les relations :

$\ell^{s,q}(L^p) \subset \ell^{s,\infty}(L^p) \subset \ell^{s-\varepsilon,1}(L^p)$ et $L^p(\ell^{s,q}) \subset L^p(\ell^{s,\infty}) \subset \ell^{s,\infty}(L^p)$,nous avons obtenir la résult ces faits, et nous supposons $q = 1$.

Nous appliquons le résultat précédent à la somme partielle $f^{(N)}(x) = \sum_{j=0}^{N} f_j(x)$, où la convergence est trivial.

Alors nous avons

$$\left\|f^{(N)}(x) - f^{(L)}(x)\right\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq C \sum_{j=L+1}^{N} 2^{js} \|f_j\|_p,$$

pour $N > L$ et $q = 1$.

Cela implique que $f^{(N)}(x)$ converge vers certains $f(x)$ dans $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$,donc est converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Mais La somme localement finit $\sum_{j=0}^{\infty} \widehat{f}_j(x)$ converge vers $g(x)$ danc $g = \widehat{f}$. ∎

3.5 Inégalité de Nikol'skii continue

Lemme 3.5.1 *Soient a, b des réels tels que $0 < a < b$. Soit $t \longrightarrow u_t$ une application faiblement mesurable de $]0,1[$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que pour une certaine constante $\gamma > 0$ et un entier $N \in \mathbb{N}$, on ait*

- $\widehat{f}_t$ *est port´ee par la couronne $at^{-1} \leq |\xi| \leq bt^{-1}$.*

- $|u_t(x)| \leq \gamma \max(t, t^{-1})^N (1 + |x|)^N$.

Alors il existe $N_1 \in \mathbb{N}$, *tel que l'intégrale* $\int_0^\infty u_t \frac{dt}{t}$ *converge dans* $\mathcal{S}'_{N_1}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Voir [4,lemme 5.3 p.14-15]. ■

Théorème 3.5.1 *Soient* a, b *des réels tels que* $0 < a < b$. *Soit* $t \longrightarrow u_t$ *une application faiblement mesurable de* $]0,1[$ *dans* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *telle que*

- $\widehat{u_t}$ *est port ´ee par la couronne* $at^{-1} \leq |\xi| \leq bt^{-1}$
- $\left(\int_0^\infty \left(t^{-s} \|u_t\|_p\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} = B < \infty.$

Alors l'intégrale $\int_0^\infty u_t \frac{dt}{t}$ *existe dans* $\mathcal{S}'_\nu(\mathbb{R}^n)$ *et on a*

$$\left\| \int_0^\infty u_t \frac{dt}{t} \right\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c(s, a, b) B.$$

Preuve. .

1'ere partie. Soit $f \in \mathcal{S}_\nu(\mathbb{R}^n)$. On reprend les notations de la preuve du lemme ci-dessus. On considére un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $N + s > 0$. Notons que pour $s > 0$, on peut prendre $N = 0$.En utilisant la condition $\psi \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R}^n)$, preve de lemme et l'inégalité de Minkowski, on obtient,pour un certain $m \in N$,

$$\|f * \psi_t\|_{p'} \leq c\Delta_m(\psi) t^N \max_{|\alpha|=N} \left\| f^{(\alpha)} \right\|_{p'}, \forall t \in]0,1].$$

Grâce à lemme précédent et à l'hypothèse $f \in \mathcal{S}_\nu(\mathbb{R}^n)$, on en déduit

$$\|f * \psi_t\|_{p'} \leq c(\psi) \Delta_m(f) t^{-\nu-\left(\frac{n}{p}\right)}, \quad \forall t > 1.$$

Alors d'apré lemme 22 et les deux l'inégalité précédent,il vient

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\langle u_t, f\rangle| \frac{dt}{t} &\leq \int_0^\infty \|u_t\|_p \|f * \psi_t\|_{p'} \frac{dt}{t}. \\ &\leq \left(\int_0^\infty \left(t^s \|f * \psi_t\|_{p'}\right)^{q'} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_0^\infty \left(t^{-s} \|u_t\|_p\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq c(f) \left(\int_0^\infty \left(t^{-s} \|u_t\|_p\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

On a ainsi établi l'existence de l'intégrale $f := \int_0^\infty u_t \frac{dt}{t}$ existe dans $\mathcal{S}'_\nu(\mathbb{R}^n)$.

2 iéme partie. Il existe des réels positifs a', b', d´ependant de a, b et du support de $\widehat{\varphi}$,tels que $\varphi_r * u_t \neq 0$ implique $ra\prime < t < rb\prime$. De plus $a\prime = 0$ si et seulement si a = 0. Il vient

$$\varphi_r * f = \int_{a'}^{b'} \varphi_r * u_{rt} \frac{dt}{t},$$

ce qui nous donne

$$r^{-s} \|\varphi_r * f\|_p \leq \|\varphi\|_1 \int_0^\infty (tr)^{-s} \|u_{rt}\|_p \left(t^{-1}\right)^{-s} \mathbf{1}_{]a'^{-1}, b'^{-1}[} \left(t^{-1}\right) \frac{dt}{t}.$$

Le second membre de cet inégalité s'écrit comme une convolution dans le groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^*$. En notant que la fonction

$$t \longrightarrow t^{-s} \mathbf{1}_{]a'^{-1}, b'^{-1}[} (t);$$

appartient à $L^1 \left(\mathbb{R}_+^*\right)$ et en appliquant l'inégalité de Young, on obtient une constante $c = c(s, a, b, \varphi) > 0$ telle que

$$\left(\int_0^\infty \left(r^{-s} \|\varphi_r * f\|_p\right)^q \frac{dr}{r}\right)^{\frac{1}{q}} \leq c \left(\int_0^\infty \left(t^{-s} \|u_t\|_p\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

■

Finalement nous allons établie les résultats précédent dans Lizorkin-Triebel comme sont valabele pour ce espace.

3.6 Extension aux espaces de Lizorkin-Triebel

Le deuxième chapitre et le troisiéme chapitre sont valabes pour les espaces de Lizorkin-Triebel.

3.6.1 Définition des espaces de Lizorkin-Triebel

Définition 3.6.1 *Soient $s \in \mathbb{R}$, $p \in [1, \infty[$ et $q \in [1, \infty]$. L'espace de Lizorkin-Triebel $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est ensemble des fonctions $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, telles que:*

$$\|f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} = \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} 2^{skq} |Q_k f|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p < \infty.$$

.

Et on définit une norme équivalente dans $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ pour $1 \leq p < \infty$ telle que:

$$\|f\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_p + \left\| \left(\int_0^1 \left(t^{-s-n} \int_{|h|\leq t} \left|\Delta_h^\ell f(.)\right|^p dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p < \infty.$$

Pour le preuv voir [10].

3.6.2 Plongements dans $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$

Proposition 3.6.1 *Les propriétés suivantes sont vérifées:*

i) $L_p(\mathbb{R}^n) = F^0_{p,2}(\mathbb{R}^n)$; *si* $1 < p < \infty$;

ii) $W^m_p(\mathbb{R}^n) = F^m_{p,2}(\mathbb{R}^n)$; *si* $1 < p < \infty; m \in \mathbb{N}^*$.

iii) $B^s_{p,p}(\mathbb{R}^n) = F^s_{p,p}(\mathbb{R}^n)$; *si* $1 \leq p < \infty, s \in \mathbb{R}$.

iv) $H^s_p(\mathbb{R}^n) = F^s_{p,2}(\mathbb{R}^n)$; *si* $1 < p < \infty$.

v) $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *est une espace de Banach si* $min(p,q) \geq 1$.

vi) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *pour* $s \in \mathbb{R}$ *et* $0 < p, q \leq \infty$.

Pour la définition de $H^s_p(\mathbb{R}^n)$ *et* $W^m_p(\mathbb{R}^n)$, *voir la notation.*

Proposition 3.6.2 **i)** *Soient* $s > \frac{n}{p}, 1 < q \leq \infty$ *ou* $p = 1$ *et* $s = \frac{n}{p}$, *alors*

$$F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_\infty(\mathbb{R}^n).$$

ii) *Soient* $1 < q_1 \leq q_2 \leq \infty$,$1 < p \leq \infty$ *et* $s \in \mathbb{R}$ *on a*

$$F^s_{p,q_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F^s_{p,q_2}.$$

iii) *Soient* $p_0 < p$ *et* $s - \frac{n}{p_0} = \alpha - \frac{n}{p}$ *alors*

$$F^s_{p_0,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F^\alpha_{p,q}.$$

iv) *Pour tout entier* $m > s$ *on a*

$$W^m_p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n).$$

v) *Soient* $s \in \mathbb{R},\ \ 0 < p < \infty$ *et* $\ q, t, \upsilon \in [1, \infty]$. *Alors*

$$B^s_{p,t}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F^s_{p,q} \hookrightarrow B^s_{p,\upsilon} \Longleftrightarrow 0 < t \leq \min(p,q) \ \ et \ \max(p,q) \leq \upsilon \leq \infty.$$

vi) *Soient* $0 < p_0 < p < p_1 \leq \infty, s \in \mathbb{R}$. *On pose* $\alpha - \frac{n}{p_0} = s - \frac{n}{p} = \beta - \frac{n}{p_1}$, *alors*

$$B^{\alpha}_{p_0,t}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F^s_{p,q} \hookrightarrow B^s_{p_1,\upsilon} \Longleftrightarrow 0 < t \leq p \leq \upsilon \leq \infty.$$

vii) *Soient* $0 < p < p_1 \leq \infty$ *et* $s - \frac{n}{p} = \alpha - \frac{n}{p_1}$ *alors*

$$F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F^{\alpha}_{p_1,q}.$$

3.6.3 Théorèmes de convergence

Ce paragraphe est consacrer e a des estimations du type de Yamazaki.

Proposition 3.6.3 *Soit* $s > 0,\ 1 \leq p, q \leq \infty,$ *et* $\gamma > 1$.

1. *Il existe* $c > 0$, *telle que*

$$\left\| \sum_{j=0}^{\infty} f_j \right\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{qsj} |f_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p$$

   Pour toute suite de fonctions $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ *et supp*$\widehat{f_j}$ *contenue dans la boule* $|\xi| \leq 2^j\gamma$.

2. *Il existe* $c > 0$, *telle que*

$$\left\| \left(\sum_{j\geq 0} 2^{qsj} |f_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p \leq c \sup_{|\alpha| \leq \left[\frac{n}{2}\right]+3} \left\| \widehat{\theta}^{(\alpha)} \right\|_{\infty} \|f\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}$$

   détient, pour tous $f \in \mathcal{S}'$ *et pour tout* $\theta \in \mathcal{C}^{\infty}_0$ *tel que supp* $\theta \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n : \gamma^{-1} \leq |\xi| \leq \gamma\}$.*Ici, la séquence* $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *est défini par* $f_j = \theta(2^{-j}\bullet) f$.

3. *Soit* $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < 2\gamma_1$.*Alors il existe* $c > 0$, *telle que*

$$\left\| \left(\sum_{j\geq 0} 2^{qsj} |f_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p \leq c \left\| \sum_{j=0}^{\infty} f_j \right\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}$$

   Pour toute suite de fonctions $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$,*tel que supp*$\widehat{f_j} \subset \{2^j\gamma^{-1} \leq |\xi| \leq 2^j\gamma\}$

3.6.4 Inégalité de Nikol'skii dans l'espace de Lizorkin-Triebel

Théorème 3.6.1 *Soit* $A > 0$, $s \in \mathbb{R}, 0 < q \leq \infty$,*et* $0 < p < \infty$ *avec* $(f_j(x))_{j=0}^{\infty}$ *une suite de distributions tempérées telles que, pour tout* j, *supp*$\widehat{f_0} \subset B(0.A)$ *et supp*$\widehat{f_j} \subset \{2^j A^{-1} \leq |\xi| \leq 2^j A\}$ *.Alors nous avons la suivante:*

Si

$$\left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq} |f_j(x)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p < B.$$

Alors

- $f(x)$ *est défini de la même manière et appartiennent à* $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$.
- $\|f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} < CB$, *avec une constante* C *ne dépendant que de* n, A, s, p,*et* q.

Preuve. Voir [7], [10] ■

Conclusion générale

Nous avons présenté les istimation de type de Nikol'skii dans les espaces de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ connu comme deux inégalités, inégalité de Nikol'skii discrètes et inégalité de Nikoll'skii continues d'après les travaux de Triebel[10], Peetre[6],Moussai [7].Yamazaki [11].Bourdaud[4].

Bibliographie

[1] .**S.E.Allaoui.** Thèse de Doctorat. Intégrales singulières. Université de Batna 2011.

[2] .**S.E.Allaoui.** Sur la composition dans les espaces de Besov à valeurs vectorielles: un cas critique. Université de Laghouat 2013.

[3] .**J.Bergh, J. Löfström**, Interpolation spaces, Springer Verlag (1976).

[4] **.G.Bourdaud.** Ce qu'il faut savoir sur les espaces de Besov. 1 juin 2005.

[5] .**A.Djeriou**.Thèse de Doctorat. Continuité des opérateurs pseudo-différentiels sur certains espaces fonctionnels. Université de Batna 2012.

[6] .**J.Peetre**.New thoughts on Besov spaces. Duke Univ. Math. SeriesI,Durham,USA1976.

[7] .**M.Moussai** .Thèse de Doctorat. Continuite de certains opérateurs intégraux singuliers sur les espace de Besov. Université de Paris VII 1987.

[8] .**M.Moussai** ,**S.E.Allaoui**. Pseudodifferentiel operators on localized Besov spaces. Institute of Mathematics, Vietnam Academy of Science and Technology (VAST) and Springer Science + Business Media Singapore 2013.

[9] .**T.Runst,W.Sickel,** Sobolev spaces of fractional order, Nemystkij operators and nonlinear partial differential equations, De Gruyter series in non-linear analysis and applications,Berlin (1996).

[10] .**H.Triebel,** Theory of function spaces , Birkhüser. Basel (1983).

[11] .**M.Yamazaki**, A quasi-homogeneous version of paradifferential operators, I: Boundedness on spaces of Besov type, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math. 33, 131–174 (1986)