



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Equations aux dérivées partielles et applications

Thème

Etude d'une classe de problème elliptique avec exposant critique de Sobolev.

Présentée par :

M^{lle} BOUAFIA Safa

Membres de jury :

Mr. Mechter Rabeh

Mr. Abdelhak MOKHTARI

Mr. Nour Eddine DACHOUCHA

M.C.B., Université de M'sila

M.C.B., Université de M'sila

M.A.A., Université de M'sila

Président.

Encadreur.

Examineur.

Année universitaire 2020/2021.

Remerciements

Au début tout, j'adresse mes premiers remerciements à mon Dieu pour m'avoir donné la santé, la volonté, la patience et la force durant toute mes années d'étude.

*J e veux à exprimer tout ma reconnaissance à ma encadreur **Mr. Abdelhak Mokhtari**, je la remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.*

Je tenais à remercier tous les membres du jury pour acceptant de présider et examiner ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements à tous les enseignants de département de mathématique et spécialement, les enseignants de spécialité équations aux dérivées partielles et applications qui par leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions.

Enfin, je remercie ma mère et mon père qui m'ont soutenu tout au long de mes années d'étude et tous ceux qui ont contribué d'une manière ou d'une autre à la réalisation de ce travail.

Dédicace

Avant tout, je remercie le bon Dieu de m'avoir donné le courage et la volonté pour terminer ce travail.

Je remercie beaucoup mon père et ma mère car ils ont été fiers de moi tout au long de ma vie. J'ai toujours été fier de vous, mon père et ma mère, qui m'ont soutenu moralement tout au long de mes années d'école. J'espère que vous l'êtes fier de moi.

J'espère que vous êtes satisfait de moi. Pour mes frères, source de joie et de bonheur.

À mes meilleurs amis qui n'ont jamais cessé de me soutenir.

À mon cher grand-père, j'espère que vous êtes toujours fier de votre petite-fille. Que Dieu vous protège de tout mal et vous donne toujours santé et bien-être.

À tous mes distingués professeurs et à tous ceux qui ont contribué à mon soutien dans mon parcours académique EDP 2020/2021.

À tous mes proches dans cette vie.

À vous cher lecteur.

BOUAFIA SAFA

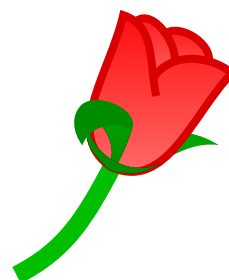


Table des matières

Remerciements	i
Dédicace	ii
Notation	i
Introduction générale	1
1 Espaces fonctionnels classiques et généralités	3
1.1 Définitions et propriétés élémentaires des espaces $L^p(\Omega)$	3
1.2 L'espace $W^{1,p}(\Omega)$	5
1.2.1 Définition et propriétés topologiques	5
1.2.2 Injections de Sobolev	6
1.2.3 L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$	6
1.2.4 L'espace $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$	7
2 Rappel sur la théorie du points critiques	9
2.1 Définitions et principe de minimisation	9
2.1.1 Faiblement semi-continue inférieurement	10
2.2 Dérivés d'une fonctionnelle et points critiques	10
2.2.1 Dérivé au sens de Gâteaux	11
2.2.2 Dérivé au sens de Fréchet	12
2.2.3 Points critiques	13
2.3 Condition de Palais Smale	13
3 Etude d'un problème compact par une technique de minimisation	14
3.1 Présentation du problème coercitif	14
3.1.1 Résultats d'existence	15

4	Problème avec l'exposant critique de Sobolev	19
4.1	Présentation du problème du prototype	19
4.2	Résolution du problème(4-3)	20
	Conclusion	31

Notation

Nous introduisons les notations et les définitions nécessaires qui sont utilisées par la suite.

$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels
$\mathbb{N}^*$	Ensemble des entiers naturels non nuls
$\mathbb{R}$	Ensemble des réels
$\mathbb{R}_+$	Ensemble des réels positifs
$\mathbb{R}^N$	Espace euclidien de dimension N
x	vecteur de $\mathbb{R}^N$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, $x_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq N$
dx	Mesure de Lebesgue de dimension N
$B(x, r)$	La boule ouverte de centre x et de rayon r , $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^N \mid x - y < r\}$
$\overline{B(x, R)}$	La boule fermée de centre x et de rayon R , telle que, $\overline{B(x, R)} = \{y \in \mathbb{R}^N \mid x - y \leq R\}$.
Ω	Ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue
$\overline{\Omega}$	La fermeture de Ω
u	Fonction mesurable définie de Ω dans $\mathbb{R}$
∇u	Gradient de u , $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N})$
$\operatorname{div} v$	Divergence du vecteur v , $\operatorname{div} v = \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial v}{\partial x_N}$
Δu	Laplacien de u , $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}$
$\Delta_p u$	Le p laplacien de u , $\Delta_p u = \operatorname{div}(\nabla u ^{p-2} \nabla u)$
$C(\Omega)$	Espace des fonctions continues sur Ω
$C^k(\Omega)$	Espace des fonctions continues sur Ω dont les dérivées partielles d'ordre $\leq k$ sont continues sur Ω , k entier positif
$C^1(\Omega, \mathbb{R})$	L'ensemble des fonctions différentiables et la dérivée est continue.
$C^\infty(\Omega)$	L'espace $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^\infty C^k(\Omega)$
$L^p(\Omega)$	$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable} \mid \int_\Omega u ^p dx < \infty\}$ ($1 \leq p < \infty$, constant)
$L^\infty(\Omega)$	$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable} \mid \exists c \geq 0 \text{ tel que } u(x) \leq c \text{ p.p. } x \in \Omega\}$
p'	Conjugué de Hölder de p , $p' = \frac{p}{p-1}$ si $p > 1$ et $p' = \infty$ si $p = 1$
p^*	L'exposant de Sobolev tel que : $p^* = \frac{Np}{N-p}$.

$\mathcal{D}(\Omega)$	Espace des fonctions indéfiniment dérivables dans Ω , à support compact dans Ω
$W^{1,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev des fonctions de $L^p(\Omega)$ dont les dérivées partielles au sens des distribution d'ordre 1 sont également dans $L^p(\Omega)$, muni de la norme $\ u\ _{W^{1,p}} = \sum \ \partial_i u\ _{L^p}$
$W_0^{1,p}(\Omega)$	La fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, c-à-d : $\overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$
$p.p.$	Presque partout.
$T.A.F$	Théorème des accroissements finis.
$T.C.D$	Théorème de convergence dominé de Lebesgue.
$H^1(\Omega)$	$u \in L^2(\Omega)$ et $\nabla u \in L^2(\Omega)$.
$H_0^1(\Omega)$	$\overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$.
$E \hookrightarrow F$	E s'injecte continûment dans F.
$E \hookrightarrow_c F$	E s'injecte d'une manière compacte dans F.
$\rightharpoonup$	Converge faiblement.
$\rightarrow$	Converge fortement.
E'	Est le dual topologique de E ou l'espace des formes linéaire et continue sur E.
$\gamma(A)$	Le genre de A.
$D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$	est une espace de type Sobolev .
$(u v)$	Est la produit scalaire .

Introduction générale

Les méthodes variationnelles et la théorie des points critiques se sont révélées être des techniques très utiles et populaires pour prouver l'existence de solutions aux problèmes aux limites dans divers contextes, notamment les équations différentielles ordinaires, les équations aux dérivées partielles, les problèmes impulsifs, etc.

Dans les applications, on établit que la solution proposée d'un problème aux limites (P) est un point critique d'une certaine fonctionnelle différentiable $I : E \rightarrow \mathbb{R}$ sur un espace approprié E , c'est à dire un point u dans l'espace où $I'(u) = 0$. L'existence des points où les dérivées s'annulent seramène à la résolution du problème. Dans ce cas là, le point critique u de la fonctionnelle I est une solution faible du problème.

L'injection compacte et très important pour résoudre les problèmes aux limites, là où nous avons utiliser plusieurs théories afin de prouver l'existence des solutions. Mais lorsque l'exposant atteint la valeur critique, nous perdons la propriété d'empilement, et de là, nous trouvons de nombreuses difficultés aux quelles nous sommes confrontés pour trouver des solutions, et ceci notre sujet.

L'injection compacte et très important pour résoudre les problèmes aux limites, là où nous avons utiliser plusieurs théories afin de prouver l'existence des solutions. Mais lorsque l'exposant atteint la valeur critique, nous perdons la propriété d'empilement, et de là, nous trouvons de nombreuses difficultés aux quelles nous sommes confrontés pour trouver des solutions, et ceci notre sujet.

Dans le **premier chapitre**, on va introduire dans une section un rappel et certaines notions et propriétés des espaces de Lebesgue et à l'autre section, l'espace de Sobolev.

Dans le **second chapitre**, nous voulons introduit quelques définitions sur la notion de la différentiabilité, et la condition de Palais-Smale, et le problème radial et la semi-continuité des fonctions.

Pour le **troisième chapitre**, on va étudier un problème où le second membre est d'exposant n'atteint pas la valeur critique de Sobolev, nous utilisons donc une méthode de minimisation

direct pour résoudre le problème, où plus précisément, on prend le modèle suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = f(u) + h(x) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pour obtenir une solution, nous utilisons comme technique le théorème de coercivité, sous les hypothèses suivantes :

(h_1) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est borné et ouvert, $q \in L^\infty(\Omega)$ et $q(x) \geq 0$ p.p. dans Ω

(h_2) $h \in L^2(\Omega)$.

En fin, dans **le quatrième chapitre**. Nous nous limitons ici à un modèle tel que le second membre d'exposant égale simple à la valeur critique

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-2}u, \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

La technique utilisé pour la démonstration est consacre à un modèle simple où la compacité n'est pas garantie, le manque de compacité peut prendre plusieurs formes, mais dans notre modèle, les suites minimisantes sont peut être bornées mais pas pré-compactes dans l'espace fonctionnel considéré, cela conduit à utiliser une nouvelle technique dans le cadre de la

ESPACES FONCTIONNELS CLASSIQUES ET GÉNÉRALITÉS

théories de minimisation.

Ce chapitre constitue un rappel de quelques préliminaires et résultats nécessaires pour la suite de ce travail. On citera en particulier certains résultats élémentaires des espaces fonctionnels.

1.1 Définitions et propriétés élémentaires des espaces $L^p(\Omega)$

Dans ce que suit, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue dx .

Définition 1.1 (Voir [1]). Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, on pose

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{1/p}.$$

On peut vérifier facilement que $\|\cdot\|_{L^p}$ définit une norme sur l'espace vectoriel $L^p(\Omega)$ ce qui montre que $L^p(\Omega)$ est un espace normé.

Définition 1.2. On définit l'espace $L^\infty(\Omega)$ par,

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ est mesurable} \cdot \exists C > 0 \text{ t.q. } |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega \right\}.$$

$L^\infty(\Omega)$ est un espace normé quand on le munit par la norme :

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \left\{ C ; |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega \right\}.$$

Notation Soit $1 \leq p \leq \infty$, on désigne par p' l'exposant **conjugué** de p c'est à dire :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \quad \text{ou} \quad p' = \frac{p}{p-1}$$

Proposition 1.1 (Inégalité de Hölder). (voir [1]) Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ avec $p \in [1, \infty]$ alors $f.g \in L^1(\Omega)$ et :

$$\int_{\Omega} |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

Proposition 1.2 (Inégalité de Hölder généralisée). (voir [1]) Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et soit $r > 0$ tel que : $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{r}$, on a :

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Proposition 1.3 (Inégalité de Young). (voir [1]) $\forall a \geq 0, \forall b \geq 0$, supposons que :

$$1 < p < \infty$$

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}.$$

L'écriture $f_n(x) \rightarrow f(x)$ p.p. sur Ω , signifie que la suite $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ presque partout sur Ω .

Théorème 1.1 (Convergence dominée de Lebesgue). (Voir [1])

Soit (f_n) une suite des fonctions de $L^1(\Omega)$. On suppose que :

$$(I) \quad f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ p.p. sur } \Omega,$$

$$(II) \quad \text{il existe une fonction } g \in L^1(\Omega) \text{ telle que pour chaque } n, |f_n(x)| \leq g(x) \text{ p.p. sur } \Omega^1.$$

Alors $f \in L^1(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$.

Théorème 1.2 (Convergence dominée de Lebesgue inverse). (Voir [1]) Soient (f_n) une suite de L^p et $f \in L^p$, tels que : $\|f_n - f\|_{L^p} \rightarrow 0$. Alors, il existe une sous suite extraite (f_{n_k}) telle que :

$$a) \quad f_{n_k}(x) \rightarrow f(x) \text{ p.p. sur } \Omega$$

$$b) \quad |f_{n_k}(x)| \leq h(x) \quad \forall k \text{ et p.p. sur } \Omega \text{ avec } h \in L^p$$

Le résultat suivant introduit quelques propriétés topologiques des espaces de Lebesgue.

Théorème 1.3 (Voir [1]). 1. L'espace $L^p(\Omega)$ est de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$,

2. L'espace $L^p(\Omega)$ est séparable pour $1 \leq p < \infty$,

3. L'espace $L^p(\Omega)$ est réflexif pour $1 < p < \infty$.

Définition 1.3 (La convergence faible et forte). (voir [12]) Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$ et soit E' son dual topologique². On dit que (x_n) converge faiblement dans E s'il existe un élément $x \in E$ tel que :

$$\forall f \in E', \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x). \text{ ou } (\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle)$$

1. On dit que g est une majorante intégrable des fonctions (f_n)

2. l'espace des formes linéaire et continues sur E , $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$

Notation : On notera $x_n \rightharpoonup x$, ou $x_n \xrightarrow{E} x$ pour être précis, la convergence faible dans E . On notera de même $x_n \rightarrow x$, ou $x_n \xrightarrow{E} x$ pour être précis, la convergence forte dans E (c'est à dire la convergence en norme).

1.2 L'espace $W^{1,p}(\Omega)$

1.2.1 Définition et propriétés topologiques

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, on note par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ et de support compacte inclus dans Ω .

Définition 1.4 (voir [1]). L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est définie par :

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \exists g_i \in L^p(\Omega), \text{ tel que : } \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g_i \varphi, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \forall i \in \overline{1..n} \right\}.$$

En particulier, pour $p = 2$, on pose :

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

pour $u \in W^{1,2}(\Omega)$ on note

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \text{ et } \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right).$$

∇u est appelé la dérivé au sens faible de g .

L'espace $W^{1,p}$ est muni de la norme :

$$\| u \|_{W^{1,p}} = \| u \|_{L^p} + \| \nabla u \|_{L^p}.$$

(ou parfois, si $1 < p < \infty$, de la norme équivalente $[\| u \|_{L^p}^p + \| \nabla u \|_{L^p}^p]^{1/p}$).

Proposition 1.4. L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert quand le muni par le produit scalaire

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2};$$

La norme associée :

$$\| u \|_{H^1} = \left[\| u \|_{L^2}^2 + \| \nabla u \|_{L^2}^2 \right]^{1/2}.$$

est équivalent de la norme de $W^{1,2}(\Omega)$.

Voici quelques propriétés topologiques de l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$.

Proposition 1.5.

- (I) L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$,
- (II) l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est réflexif pour $1 < p < \infty$ et séparable pour $1 \leq p < \infty$,
- (III) l'espace $H^1(\Omega)$ est espace de Hilbert séparable.

1.2.2 Injections de Sobolev

Le but de cette section est de découvrir quelques injections continues et compactes concernant aux espaces de Sobolev. Rappelons qu'un opérateur linéaire T entre deux espaces vectoriels topologiques (par exemple normé) E et F est dit **compact** si l'image par T de toute partie bornée de E est relativement compact (adhérence compacte) dans F . Plus précisément Pour toute suite (x_n) une suite bornée dans E , on peut extraire une sous suite $u_n = (T(x_{n_k}))_{n_k \in \mathbb{N}}$ de la suite $u_n = T(x_n)$ converge dans F .

Si E s'injecte **continûment** dans F , le caractère compacte de cette injection entraîne que toute suite faiblement convergente est fortement convergente dans l'espace d'arrivée.

Notation

1. E s'injecte d'une manière **continue** dans F , signifie que l'injection canonique $j : E \rightarrow F$ est continue et on le note par $E \hookrightarrow F$.

2. E s'injecte d'une manière **compacte** dans F , signifie que l'injection $j : E \rightarrow F$ est compacte et on le note par $E \hookrightarrow_c F$.

Si $1 \leq p < N$, l'exposant de Sobolev de p est définie par :

$$p^* = \frac{Np}{N-p}.$$

ou :

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}.$$

Théorème 1.4. ([1]) Soit $1 \leq p \leq \infty$. On suppose que Ω est un ouvert de classe C^1 , borné, ou bien $\Omega = \mathbb{R}_+^N$:

(I) Si $1 \leq p < N$, alors $W^{1,p} \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$,

(II) Si $p = N$, alors $W^{1,p} \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, +\infty[$,

(III) Si $p > N$, alors $W^{1,p} \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Théorème 1.5 (Rellich-Kondrachov). ([1]). On suppose que Ω borné de classe C^1 . On a

(I) Si $p < N$, alors $W^{1,p} \hookrightarrow_c L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, p^*[$,

(II) Si $p = N$, alors $W^{1,p} \hookrightarrow_c L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, +\infty[$,

(III) Si $p > N$, alors $W^{1,p} \hookrightarrow_c C(\bar{\Omega})$,

1.2.3 L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.5 ([1]). Étant donné $1 \leq p < \infty$, on désigne par $W_0^{1,p}(\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ c'est à dire $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$.

On note $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est munit de la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$, l'espace $H_0^1(\Omega)$ est munit du produit scalaire induit par $H^1(\Omega)$.

Proposition 1.6 ([1]). *L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable, il est de plus réflexif pour $1 < p < \infty$. L'espace $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.*

Remarque 1.1. Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^N$. On sait que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et par conséquent $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Le résultat suivant fournit une caractérisation essentielle de base des fonctions dans l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 1.6. ([1]) Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$, alors $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ si et seulement si $u = 0$ sur $\partial\Omega$.

Proposition 1.7 (Inégalité de Poincaré). ([1]) Soit Ω un ouvert, borné alors il existe une constante C (dépendant de $|\Omega|$ et p) telle que :

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (1 \leq p < \infty).$$

Autrement dit, sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ la quantité $\|\nabla u\|_{L^p}$ est une norme équivalente à la norme usuelle de $W^{1,p}(\Omega)$.

1.2.4 L'espace $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$

Définition 1.6. Soit $N \geq 3$ et soit le nombre critique $2^* = \frac{2N}{N-2}$. On définit l'espace $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ par :

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N) \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^N), i = 1, 2, \dots, N \right\}$$

Cet espace a une structure Hilbert lorsqu'il est muni du produit scalaire :

$$(u|v) = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v dx,$$

de sorte que la norme correspondante est

$$\|u\| = \sqrt{(u|u)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'espace $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. On a $H^1(\mathbb{R}^N) \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, mais il existe des fonctions, par exemple

$$u(x) = \frac{1}{(1 + |x|)^{\frac{N}{2}}},$$

qui sont dans $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ mais n'est pas dans $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, et par suite n'est pas dans $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Le résultat suivant introduit une injection importante pour ce type d'espaces.

Théorème 1.7. soit $N \geq 3$. On a

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$$

Cette injection est continue et n'est pas compacte. Plus précisément, il existe une constante $C > 0$ ne dépendant pas de u telle que :

$$\|u\|_q \leq C \|u\| \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

Les inégalités de ce type sont souvent appelées inégalités de type Sobolev.

RAPPEL SUR LA THÉORIE DU POINTS CRITIQUES

2.1 Définitions et principe de minimisation

Définition 2.1. 1. On dit qu'une fonctionnelle $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement (*s.c.i.*) au point x_0 , si pour chaque suite $(x_n) \subset \Omega$, telle que $x_n \rightarrow x_0$, on a

$$f(x_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

2. On dit que f est semi-continue supérieurement (*s.c.s.*) au point x_0 , si pour toute suite $(x_n) \subset \Omega$, telle que $x_n \rightarrow x_0$, on a

$$f(x_0) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

exe 2.1. 1. Soit la fonctionnelle $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Alors f est semi-continue inférieurement (*s.c.i.*) à $x_0 = 0$ mais n'est pas semi-continue supérieurement.

2. Soit la fonctionnelle $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Alors f est semi-continue supérieurement (*s.c.s.*) à $x_0 = 0$ mais n'est pas semi-continue inférieurement.

Définition 2.2. 1. Une fonctionnelle $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite faiblement semi-continue inférieurement (*f.s.c.i.*) au point x_0 , si pour chaque suite $(x_n) \subset \Omega$ telle que $x_n \rightharpoonup x_0$, on a

$$f(x_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

2. On dit que f est faiblement semi-continue supérieurement ($f.s.c.s.$) au point x_0 , si pour toute suite $(x_n) \subset \Omega$, telle que $x_n \rightharpoonup x_0$, on a

$$f(x_0) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

Remarque 2.1. 1. On remarque que la fonctionnelle J définie sur un espace de Hilbert H par

$$J : u \rightarrow \|u\|^2,$$

est faiblement semi-continue inférieure ($f.s.c.i.$).

2. Il est facile de voir que si f est continue en x_0 , alors f est ($s.c.s.$) et ($s.c.i.$) et inversement.
3. Si f est faiblement continue en x_0 , alors f est ($f.s.c.s.$) et ($f.s.c.i.$) et inversement.

2.1.1 Faiblement semi-continue inférieurement

Définition 2.3. (Suite minimisante) Une suite minimisante d'une fonctionnelle $J : X \rightarrow \mathbb{R}^N$ est une suite (x_n) telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J(x_n) = \inf_{x \in X} J(x).$$

Théorème 2.1. Soit X un espace de Banach réflexif, et J une fonctionnelle définie sur X , telle que

1. J est ($f.s.c.i.$),
2. La suite minimisante de J est bornée sur X ,

alors J atteint son infimum sur X .

Fonction radiale

Définition 2.4. Une fonction radiale est une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ dont la valeur à chaque point ne dépend que la distance entre ce point et l'origine

Autrement-dit : une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite radiale si elle est invariante pour toute les rotations conservant l'origine.

Autrement dit : une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite radiale autour de l'origine s'il existe une fonction F sur intervalle $]0, \varepsilon]$ telle que $f(x) = F(r)$ (ou $r = d(0, x)$)

2.2 Dérivés d'une fonctionnelle et points critiques

Dans ce que suit, on introduit quelques notions des dérivées pour des fonctions définies sur des espaces de Banach. Nous commençons par celle de la dérivée directionnelle.

2.2.1 Dérivé au sens de Gâteaux

Définition 2.5. ([4]) Soit E un espace de Banach, $\Omega \subseteq E$ un ensemble ouvert et soit $I : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle. On dit que I est différentiable au sens de Gâteaux (G-différentiable) en $u \in \Omega$, s'il existe $A \in E'$ (A linéaire et continue), noté par $I'_G(u)$ tel que, pour tout $v \in E$, où $I(u + tv)$ existe pour $t > 0$ assez petit, la dérivée directionnelle $DI(u)$ existe c-à-d :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{I(u + tv) - I(u)}{t} = \langle A, v \rangle. \quad (2.1)$$

Si I est différentiable au sens de Gâteaux en u , il existe seulement une fonctionnelle linéaire vérifié (2.1).

exe 2.2. Soit $I : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}; \quad I(u) = \int_{\Omega} |u|^p dx$, I est G-différentielle et on a :

$$\langle I'_G(u), v \rangle = p \int_{\Omega} |u|^{p-2} uv dx$$

En effet, soit $x \in \Omega$, t suffisamment petit fixé et on définit

$$g_{u,v}(s) = |u + sv|^p, \quad s \in [0, t]$$

Soit $g_{u,v} : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$, on a $g_{u,v}$ est continue sur l'intervalle fermé $[0, t]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]0, t[$, alors d'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel $c_t \in]0, t[$ vérifiant :

$$\begin{aligned} |u + tv|^p - |u|^p &= g_{u,v}(t) - g_{u,v}(0) \\ &= g'_{u,v}(c_t)t \\ \frac{|u + tv|^p - |u|^p}{t} &= g'_{u,v}(c_t) \\ &= p|u + c_tv|^{p-2}(u + c_tv)v. \end{aligned}$$

et lorsque $t \rightarrow 0$, On a : $c_t \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|u + tv|^p - |u|^p}{t} &= \lim_{c_t \rightarrow 0} p|u + c_tv|^{p-2}(u + c_tv)v \\ &= p|u|^{p-2}uv \end{aligned}$$

d'après le théorème de convergence de Lebesgue, on a :

$$\langle I'(u), v \rangle = p \int_{\Omega} |u|^{p-2} uv$$

Et on définit :

$$\begin{aligned} A : L^p(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longrightarrow A(v) = p \int_{\Omega} |u|^{p-2} uv \end{aligned}$$

On démontre que $A \in (L^p(\Omega))' = L^{p'}(\Omega)$. I.e. A est linéaire et continue.

A est linéaire, en effet : Soit $v_1, v_2 \in L^p(\Omega)$ et soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} A(\alpha v_1 + \beta v_2) &= p \int |u|^{p-2} u (\alpha v_1 + \beta v_2) \\ &= p \left[\int |u|^{p-2} u \alpha v_1 + \int |u|^{p-2} u \beta v_2 \right] \\ &= \alpha p \int |u|^{p-2} u v_1 + \beta p \int |u|^{p-2} u v_2 \\ &= \alpha A(v_1) + \beta A(v_2) \end{aligned}$$

Donc, A est linéaire.

A est continue, en effet : Pour tout $u, v \in L^p(\Omega)$

$$\begin{aligned} \left| p \int |u|^{p-2} u v \right| &\leq p \int |u|^{p-1} |v| \\ &\leq p \left(\int |u|^{(p-1)p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int |v|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq p \left(\int |u|^{(p-1)\left(\frac{p}{p-1}\right)} \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int |v|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|u\|_{L^p}^{p-1} \|v\|_{L^p} . \end{aligned}$$

Alors A est continue. Donc, la fonctionnelle est **G-différentiable**.

2.2.2 Dérivé au sens de Fréchet

Définition 2.6. ([4]) Soit E un espace de Banach, $\Omega \subseteq E$ un ensemble ouvert et soit $I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle. On dit que I est différentiable au sens de Fréchet en $u \in \Omega$, s'il existe $A \in E'$ tel que :

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{I(u+v) - I(u) - Av}{\|v\|} = 0.$$

ou

$$I(u+v) - I(u) = Av + o(\|v\|).$$

si I est différentiable, alors A est unique et on note $I'(u) = A$. L'ensemble des fonctions différentiables sera noté $C^1(\Omega, \mathbb{R})$.

Proposition 2.1. Supposons que $\Omega \subseteq E$ un ensemble ouvert, tel que I Gâteau différentiable dans Ω et que I'_G est continue en $u \in \Omega$. Alors I est aussi différentiable en u , et bien sur $I'_G(u) = I'(u)$.

Remarque 2.2. L'importance de la proposition 2.1 réside dans le fait qu'il est souvent techniquement plus facile de calculer la dérivée au sens de Gâteau et ensuite de prouver qu'il est continu, plutôt que de prouver directement la différentiabilité au sens de Fréchet.

2.2.3 Points critiques

Définition 2.7. ([4]) Soient Ω un ouvert d'un espace de Banach E . Supposons que $I \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$. On dit que $u \in \Omega$ est un **point critique** de I , si :

$$I'(u) = 0.$$

Si u n'est pas un point critique, alors on dit que u est un point régulier de I .

Si $c \in \mathbb{R}$, alors on dit que c est une valeur critique de I , s'il existe $u \in \Omega$ tel que

$$I(u) = c \text{ et } I'(u) = 0.$$

Si c n'est pas une valeur critique, alors on dit que c est une valeur régulière de I .

2.3 Condition de Palais Smale

La condition de Palais Smale joue un rôle assez semblable pour des suites sur lesquelles la fonctionnelle prend des valeurs tendant vers une valeur critique potentielle et pas seulement vers la borne inférieure. C'est une condition à priori, à vérifier au cas par cas sur chaque fonctionnelle. Indépendamment de l'existence ou non des valeurs critiques. Elle sera par contre un ingrédient essentiel pour montrer cette existence dans un certain nombre de cas.

Définition 2.8. Soit E un espace de Banach et $I : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . On dit que I vérifie la condition de Palais Smale (au niveau c) si de toute suite u_n de Ω telle que :

$$I(u_n) \longrightarrow c \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et } I'(u_n) \longrightarrow 0 \text{ dans } E'.$$

Alors, on peut extraire une sous suite **convergente**.

Remarque 2.3.

- i) La condition de Palais Smale ne préjuge pas de l'existence d'une valeur critique. Elle dit seulement que si on a une telle suite u_n , celle ci est nécessairement relativement compacte. Pour l'utiliser effectivement de façon utile, il faudra pouvoir démontrer par un autre biais qu'une telle suite existe.
- ii) Les deux hypothèses sont indépendantes. En effet même si $c = \inf_{\Omega} I$, on peut parfaitement avoir une sous suite minimisante u_n telle que $I'(u_n) \not\rightarrow 0$.

ETUDE D'UN PROBLÈME COMPACT PAR UNE TECHNIQUE DE MINIMISATION

Tout au long de ce chapitre, nous montrons comment les techniques basées sur des arguments de minimisation peut être utilisé pour établir des résultats d'existence pour divers types de problèmes. Où on possède la compacité des injection.

3.1 Présentation du problème coercitif

On commence par le problème suivant, en tout au long de ce chapitre ,on vent trouver une solution (faible) de :

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = f(u) + h(x) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

Dans cette section, le cadre général est spécifié par les hypothèses

(h_1) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est borné et ouvert, $q \in L^\infty(\Omega)$ et $q(x) \geq 0$ p.p. dans Ω

(h_2) $h \in L^2(\Omega)$.

On munit $H_0^1(\Omega)$ par le produit scalaire suivant :

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} q(x)uv dx, \quad (3.2)$$

et on note par $\|\cdot\|$ la norme induite, équivalente à la norme standard.

Remarque 3.1. En hypothèse (h_1), l'exigence $q(x) \geq 0$, p.p. est utilisé uniquement pour obtenir $\lambda_1(-\Delta + q(x)) > 0$, ce qui garantit que (3.2) est en effet un produit scalaire et que la norme induite est équivalente à la norme standard de $H_0^1(\Omega)$, on commence par faire l'hypothèse suivante sur le terme non linéaire f .

(h_3) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et bornée.

On pose $F(t) = \int_0^t f(s)ds$ pour démontrer le résultat d'existence, on a besoin de définir la fonctionnelle $I : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ qui définie par :

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} q(x)u^2 dx - \int_{\Omega} F(u)dx - \int_{\Omega} h u dx \\ &= \frac{1}{2} \|u\|^2 - \int_{\Omega} F(u)dx - \int_{\Omega} h u dx \end{aligned}$$

Lemme 3.1. I est une fonctionnelle de classe C^1 et :

$$\langle I'(u), \phi \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi dx + \int_{\Omega} q(x) u \phi dx - \int_{\Omega} f(u) \phi dx - \int_{\Omega} h \phi dx$$

De plus, les points critiques de I sont des solutions faibles de (3.1)

3.1.1 Résultats d'existence

Théorème 3.1. Sous les hypothèses (h_1) , (h_2) , et (h_3) Problème (3.1) admet au moins une solution dans $H_0^1(\Omega)$.

Remarque 3.2. L'idée de la preuve est que puisque f est bornée, le terme $\int_{\Omega} F(u) dx$ devrait croître au plus linéairement par rapport à $\|u\|$, ainsi que le dernier terme. Si cela est vrai, la fonctionnelle I peut être vue comme une perturbation «au plus linéaire» du terme quadratique $\|u\|^2$. Cela suggère l'existence d'un minimum global. Maintenant, on voit comment tout ça fonctionne vraiment

Démonstration. Preuve Nous le décomposons en deux étapes. Nous utilisons à plusieurs reprises Hölder et Sobolev inégalités.

Étape 1. La fonctionnel I est coercitive. Notez d'abord que puisque f est borné, alors il existe $M > 0$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$|F(t)| \leq M|t| \dots \quad (**)$$

D'où :

$$\left| \int_{\Omega} F(u) dx \right| \leq M \int_{\Omega} |u| dx \leq C \|u\|,$$

où la dernière inégalité vient de la continuité de l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$. Cela confirme l'idée de la croissance linéaire comme dans la remarque précédente. Ainsi

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2} \|u\|^2 - \int_{\Omega} F(u) dx - \int_{\Omega} h u dx \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|^2 - C \|u\| - |h|_2 \|u\|_2 \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|^2 - C \|u\|, \end{aligned}$$

ce qui montre que I est coercive .

Étape 2. Le minimum de I est atteint : en effet, on pose :

$$m = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} I(u).$$

L'étape 1 montre que $m > -\infty$, donc il suffit du fait qu'il est atteint.

Soit $\{u_k\}_k \subset H_0^1(\Omega)$ une suite minimisante de I , à partir de l'étape 1, on a immédiatement que $\{u_k\}_k$ est borné dans $H_0^1(\Omega)$, et donc on peut supposer qu'il y a une sous-suite, notée u_k , vérifie que :

1. • $u_k \rightharpoonup u$ dans H_0^1 ; (faiblement)
2. • $u_k \rightharpoonup u$ dans $L^2(\Omega)$; (faiblement)
3. • $u_k(x) \rightharpoonup u(x)$ p.p dans Ω ;
4. • il existe $w \in L^2(\Omega)$ tel que $|u_k(x)| \leq w(x)$ p.p dans Ω pour tout k .

Puisque F est continue, on déduit que $F(u_k(x)) \rightarrow F(u(x))$, p.p dans Ω , et d'après la relation (**), on a également

$$|F(u_k(x))| \leq M|u_k(x)| \leq Mw(x) \quad \text{p.p dans } \Omega$$

Pour tout k . comme Ω est borné, $w \in L^1(\Omega)$, et par la convergence dominée de Lebesgue on obtient $F(u_k) \rightarrow F(u)$ dans $L^1(\Omega)$; en particulier,

$$\int_{\Omega} F(u_k) dx \rightarrow \int_{\Omega} F(u) dx.$$

On a aussi, bien sûr,

$$\int_{\Omega} hu_k dx \rightarrow \int_{\Omega} h u dx \quad \text{et} \quad \|u\|^2 \leq \liminf_k \|u_k\|,$$

par faiblement la semi-continuité inférieurement de la norme. Ainsi

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2} \|u\|^2 - \int_{\Omega} F(u) dx - \int_{\Omega} h u dx \\ &\leq \liminf_k \frac{1}{2} \|u_k\|^2 - \lim_k \int_{\Omega} F(u_k) dx - \lim_k \int_{\Omega} h u_k dx \\ &= \liminf_k \left(\frac{1}{2} \|u\|^2 - \int_{\Omega} F(u_k) dx - \int_{\Omega} h u_k dx \right) = \liminf_k I(u_k) = m. \end{aligned}$$

Mais $u \in H_0^1(\Omega)$, de sorte que $I(u) \geq m$, ce qui montre que $I(u) = m$. Par conséquent u est un minimum global pour I , et donc c'est un point critique, d'où u une solution de (3.1). $\square$

Remarque 3.3. La bornétude de f dans le résultat précédent a été utilisée pour montrer que le terme non linéaire $\int_{\Omega} F(u) dx$ ne détruit pas les propriétés de croissance de I hérité par le terme $\|u\|^2$. Cela était du, comme on a vu, le terme non linéaire croît au plus linéairement. ça ce n'est

pas vraiment nécessaire, il suffit que ce terme pousse moins que quadratiquement. Voyons quel genre d'hypothèses nous pouvons utiliser dans ce sens les deux résultats suivants.

On commence par remplacer la condition de bornétude (h_3) par l'hypothèse de croissance (h_4) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et il existe $\sigma \in (0, 1)$ et $a, b > 0$ tel que

$$|f(t)| \leq a + b|t|^\sigma \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ainsi f n'est pas bornée, mais est autorisée à croître de manière sous-linéaire ($\sigma < 1$). Ça implique que F croît au plus "sous quadratiquement", en ce sens que pour certains $a_1, b_1 > 0$,

$$|F(t)| \leq a_1 + b_1|t|^{\sigma+1} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

avec $\sigma + 1 < 2$.

Théorème 3.2. Sous les hypothèses (h_1) , (h_2) et (h_4) , le problème (3.1) admet ou moins une solution dans $H_0^1(\Omega)$.

Démonstration. En travaillant comme dans la preuve précédente, nous montrons d'abord que I est coercitive. En utilisant le fait que $\sigma + 1 < 2$ on a

$$\left| \int_{\Omega} F(u) dx \right| \leq a_1 |\Omega| + b_1 \int_{\Omega} |u|^{\sigma+1} dx \leq C_1 + C_2 \|u\|^{1+\sigma},$$

grâce à la continuité de l'encastrement $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\sigma+1}(\Omega)$. Puis

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2} \|u\|^2 - \int_{\Omega} F(u) dx - \int_{\Omega} h u dx \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|^2 - C_1 - C_2 \|u\|^{\sigma+1} - |h|_2 \|u\|_2 \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|^2 - C_2 \|u\|^{\sigma+1} - C_3 \|u\| - C_1 \end{aligned}$$

D'où la coercivité de I .

Soit maintenant $\{u_k\}_k \subset H_0^1(\Omega)$ est une suite minimisante pour I . Comme dans la preuve de Theorem 3.1 dessus, $\{u_k\}_k$ est bornée et donc, admet une sous-suite, il converge faiblement à certains $u \in H_0^1(\Omega)$ et satisfait aux mêmes propriétés que dans le précédent cas. Ensuite, en raisonnant comme nous l'avons fait ci-dessus, nous obtenons à nouveau

$$\int_{\Omega} F(u_k) dx \rightarrow \int_{\Omega} F(u) dx,$$

de sorte que

$$I(u) \leq \liminf_K \left(\frac{1}{2} \|u_k\|^2 - \int_{\Omega} F(u_k) dx - \int_{\Omega} h u_k dx \right) = \liminf_K I(u_k) = \inf_{H_0^1(\Omega)} I$$

La fonction u est un minimum global, donc un point critique de I , et nous avons trouvé une solution de (3.1). □

(h_5) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et il existe $a > 0$ et $b \in (0, \lambda_1)$ tel que

$$|f(t)| \leq a + b|t| \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

En intégrant, il s'ensuit immédiatement que en intégrant, il s'ensuit immédiatement que

$$|F(t)| \leq a|t| + \frac{b}{2}|t|^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Théorème 3.3. Sous les hypothèses (h_1) , (h_2) et (h_5) , le problème (3.1) admet au moins une solution.

Démonstration. Pour vérifier le terme $\int_{\Omega} F(u)dx$ on utilise la caractérisation de la première valeur propre, Théorème 1.7.6 (voir [3], page 33), on a

$$\left| \int_{\Omega} F(u)dx \right| \leq a \int_{\Omega} |u|dx + \frac{b}{2} \int_{\Omega} |u|^2dx \leq C\|u\| + \frac{b}{2\lambda_1}\|u\|^2,$$

de sorte que

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{\Omega} F(u)dx - \int_{\Omega} h u dx \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - C\|u\| - \frac{1}{2} \frac{b}{\lambda_1} \|u\|^2 - |h|_2 |u|_2 \\ &\geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b}{\lambda_1} \right) \|u\|^2 - C_1 \|u\|. \end{aligned}$$

Depuis $b < \lambda_1$, le fonctionnel est coercive. Le reste de la preuve est exactement comme dans les théorèmes précédents. $\square$

PROBLÈME AVEC L'EXPOSANT CRITIQUE DE SOBOLEV

Nous discutons dans ce chapitre un exemple où le terme non linéaire a une croissance critique. C'est l'un des cas les plus dramatiques de perte de compacité et a été étudié de manière intensive au cours des 35 dernières années, à commencer par l'article pionnier [10]. On va présenter ici un cas simple, dans le but de maîtriser quelques techniques impliquées.

4.1 Présentation du problème du prototype

On considère dans $\mathbb{R}^N$, avec $N \geq 3$, l'équation suivante

$$-\Delta u = |u|^{2^*-2}u. \quad (4.1)$$

Formellement, les solutions de (4.1) devraient apparaître comme des points critiques de la fonctionnelle

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx. \quad (4.2)$$

Il n'est pas commode de penser à J est défini sur $H^1(\mathbb{R}^N)$, car dans cet espace le premier intégrale dans J n'est pas une norme, ce qui pose des difficultés. Pour cela on travaille dans l'espace $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ que nous avons introduit dans la sous-section 1.2.4. Le problème devient alors :

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-2}u, \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (4.3)$$

On sait que l'injection $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ est continue, mais n'est pas compacte, même pas au sens local, comme nous le précisons maintenant. Clairement, puisque nous travaillons dans $\mathbb{R}^N$, il y a un manque de compacité dû à l'invariance sous les translations. Cependant dans ce cas il y a un problème encore plus sérieux, qui découle de l'invariance sous mises à l'échelle, comme suit. Soit $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ (Par conséquent $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$) est une fonction fixée, pour $\lambda > 0$, on pose

$$v_\lambda(x) = \lambda^{\frac{N-2}{2}} v(\lambda x).$$

On a le résultat préliminaire suivant :

Lemme 4.1. On a :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_\lambda|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx \quad \text{pour tout } \lambda > 0$$

et

$$v_\lambda \rightharpoonup 0 \text{ dans } D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \text{ pour } \lambda \longrightarrow 0 \text{ ou } \lambda \longrightarrow +\infty.$$

et on a aussi

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_\lambda|^{2^*} dx = \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{2^*} dx \quad \text{pour chaque } \lambda > 0. \quad (4.4)$$

De sorte que $\{v_\lambda\}$ n'est pas précompact dans $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Cela se produit exactement parce que l'exposant est 2^* . En ce qui concerne la discussion informelle sur la perte de compacité menée dans la section précédente, nous devons faire face ici à de nouvelles manières dont ce phénomène se déroule. En effet, en supposant fixer les idées que $v(0) \neq 0$, on voit que lorsque $\lambda \longrightarrow 0$ les fonctions $v_\lambda \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tendent à zéro uniformément, tandis que $\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx$ est maintenu constant (voir (4.4)). On peut dire que la «masse» se répand partout. Au contraire, si $\lambda \longrightarrow +\infty$, alors $v_\lambda(x) \longrightarrow 0$ pour tout $x \neq 0$, tandis que $v_\lambda(0) \longrightarrow +\infty$, et encore (4.4) est vrai, c'est la fameuse perte de compacité par concentration, que l'on rencontre dans chaque problème de croissance critique, même sur des domaines bornés.

4.2 Résolution du problème(4-3)

La partie difficile de la preuve du résultat principal de cette section sera consacrée l'analyse des suites minimisantes pour comprendre les conséquences de la concentration de masse. La première chose à faire si l'on veut résoudre (4.3), on a besoin de introduire l'espace suivant :

$$D_r = \{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) | u \text{ est radial}\}$$

Définition 4.1. On dit que $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ est une solution faible du problème (4.3) si et seulement si :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*-2} \cdot u \cdot v dx \quad \forall v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Lemme 4.2. La fonctionnelle J est de classe $C^1(D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ et on a :

$$\langle J'_G(u), v \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*-1} u v dx$$

De plus, les pointes critiques de J sont des solutions faibles du problème (4.3)

Démonstration. De la même manière avec l'exemple 2.2, on peut trouver :

$$\langle J'_G(u), v \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*-2} u \cdot v dx, \quad \forall u, v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Il reste de prouver que $J'_G(u) : D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \rightarrow (D^{1,2}(\mathbb{R}^N))'$ est continue ; en effet, soit (u_n) une suite de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ telle que $u_n \rightarrow u$ dans $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. on peut voir que :

- $u_n \rightarrow u$ dans $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$
- $u_n \rightarrow u$ dans $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ quand $n \rightarrow +\infty$
- $u_n(x) \rightarrow u(x)$ p.p dans $\mathbb{R}^N$ quand $n \rightarrow +\infty$ et pour une sous-suite.

Il existe $w \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ telle que $|u_n(x)| \leq w(x)$ p.p dans $\mathbb{R}^N$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ avec $\|v\| = 1$ on a :

$$\begin{aligned} |\langle J'_G(u_n) - J'_G(u), v \rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla v dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*-2} u_n v dx - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*-2} u v dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n - \nabla u| |\nabla v| dx + \int_{\mathbb{R}^N} \left| |u_n|^{2^*-2} u_n - |u|^{2^*-2} u \right| |\nabla v| dx \end{aligned}$$

D'une part, d'après l'inégalité de cauchy-schwartz, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n - \nabla u| |\nabla v| dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n - \nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|u_n - u\| \cdot \|v\| \\ &= \|u_n - u\| \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

D'autre part, d'après l'inégalité de Hölder, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left| |u_n|^{2^*-2} u_n - |u|^{2^*-2} u \right| |v| dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left| |u_n|^{2^*-2} u_n - |u|^{2^*-2} u \right|^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx \right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{2^*} dx \right)^{\frac{1}{2^*}}$$

D'après l'injection continue $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, on a :

$\exists C > 0 : \|v\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|v\| = C$, car $\|v\| = 1$ comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| |u_n|^{2^*-2} u_n - |u|^{2^*-2} u \right| = 0$ p.p dans $\mathbb{R}^N$ et :

$$\begin{aligned} \left| |u_n|^{2^*-2} u_n - |u|^{2^*-2} u \right|^{\frac{2^*}{2^*-1}} &\leq \left(|u_n|^{2^*-1} + |u|^{2^*-1} \right)^{\frac{2^*}{2^*-1}} \\ &\leq 2^{\frac{1}{2^*-1}} \left(|u_n|^{2^*} + |u|^{2^*} \right) \end{aligned}$$

ce dernier inégalité en vertu de l'inégalité premier :

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1} (a^p + b^p), \quad \forall a, b > 0, \forall p > 1$$

en utilisant le fait que $|u_n(x)| \leq w$, alors on a :

$$\begin{aligned} \left| |u_n|^{2^*-2} u_n - |u|^{2^*-2} u \right|^{\frac{2^*}{2^*-1}} &\leq 2^{\frac{1}{2^*-1}} \left(|u_n|^{2^*} + |u|^{2^*} \right) \\ &\leq 2^{\frac{1}{2^*-1}} \left(|w|^{2^*} + |u|^{2^*} \right) \end{aligned}$$

facilement de voir que $2^{\frac{1}{2^*-1}}(|w|^{2^*} + |u|^{2^*}) \in L^1(\mathbb{R}^N)$. En appliquant le théorème du convergence dominé de Lebesgue, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left| |u_n|^{2^*-2} \cdot u_n - |u|^{2^*-2} \cdot u \right|^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty$$

On conclut que : $\sup_{\|v\|=1} |\langle J'_G(u_n) - J'_G(u), v \rangle| \longrightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ et par suit J est de classe $C^1(D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ □

Théorème 4.1. IL existe $u \in D_r$ positive et non trivial le solution faible du Problème (4.3), en particulier,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\mathbb{R}^N} u^{2^*-1} v dx \quad (4.5)$$

pour tout v dans $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

Remarque 4.1. Nous pouvons maintenant commencer par la démonstration principal, on veut minimiser la fonctionnelle J sur la sphère unitaire de $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Cela revient à fixer

$$S = \inf \left\{ \|u\|^2 \mid u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx = 1 \right\}, \quad (4.6)$$

Remarque 4.2. La valeur S est connue comme la meilleure constante de Sobolev. C'est la plus grande constante positive S telle que

$$S|u|_{2^*}^2 \leq \|v\|^2 \quad \text{pour tout } v \text{ dans } D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Grâce aux inégalités de Sobolev, on sait que $S > 0$. On montre que le infimum S est atteint par un certain $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

On commence à effectuer l'analyse des suites minimisantes sélectionnant celle qui bénéficie de certaines propriétés spéciales, comme on le montrera dans les trois prochains lemmes. On a besoin d'une suite minimisante faite par des fonctions radiales.

Lemme 4.3. Il existe une suite $\{v_k\}_k \subset D_r$ telle que $v_k \geq 0$ avec :

$$|v_k|_{2^*} = 1 \quad \text{et} \quad \|v_k\|^2 \longrightarrow S.$$

Soit $\{w_k\}_k \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ une suite minimisante pour S ; bien sûr que ce n'est pas restrictif de supposer que $w_k \geq 0$. On définit $v_k = w_k^* \geq 0$, alors :

$$v_k \in D_r, |v_k|_{2^*} = |w_k|_{2^*} = 1 \quad \text{et} \quad \|v_k\|^2 \leq \|w_k\|^2,$$

de sorte que $\{v_k\}_k \subset D_r$ est une suite minimisante pour S .

Lemme 4.4. Il existe une suite minimisante $\{u_k\}_k \subset D_r$ pour S et une fonction $u \in D_r$ avec les propriétés suivantes :

- $\{u_k\}_k \geq 0, u \geq 0$.
- $\int_{|x|<1} |u|_k^{2^*} dx = \int_{|x|\geq 1} |u|_k^{2^*} dx = \frac{1}{2}$.
- $u_k \rightharpoonup u$ dans $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ et dans $L^{2^*}(\mathbb{R}^N), u_k(x) \rightarrow u(x)$ p.p dans $(\mathbb{R}^N)$

Démonstration. Soit $\{v_k\}_k \subset D_r$ une suite minimisante pour S avec $v_k \geq 0$ alors :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v|_k^{2^*} dx = 1,$$

il existe $R_k > 0$ tel que

$$\int_{|x|<R_k} |v|_k^{2^*} dx = \int_{|x|\geq R_k} |v|_k^{2^*} dx = \frac{1}{2}.$$

Si on définit :

$$u_k(x) = R_k^{\frac{N-2}{2}} v_k(x)(R_k x),$$

il est immédiat de vérifier que $u_k \in D_r$ et $\|u_k\| = \|v_k\|$ et $|u_k|_{2^*} = |v_k|_{2^*}$. Cela signifie que $\{u_k\}_k$ est aussi une suite minimisante. Bien sûr, $u_k \geq 0$, avec un changement de variables on montre que :

$$\int_{|x|<1} |u|_k^{2^*} dx = \int_{|x|\geq 1} |u|_k^{2^*} dx = \frac{1}{2}.$$

Comme $\{u_k\}_k$ est borné dans $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, pour une sous-suite, $u_k \rightharpoonup u$ faiblement dans $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ et dans $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. De plus, pour chaque boule B , la suite u_k est bornée dans $H^1(B)$, de sorte que, encore autre fois pour une sous-suite, elle converge fortement dans $L^2(B)$ et satisfait aussi $u_k(x) \rightarrow u(x)$ presque partout dans $(\mathbb{R}^N)$. La preuve est complète. $\square$

Ensuite, on force la suite u_k à posséder la propriété technique indiquée dans le lemme suivant.

Lemme 4.5. Il existe une suite de minimisation $\{u_k\}_k$ pour S qui, en plus de celles du lemme précédent, satisfait aussi les propriétés suivantes : pour tout $j \in \mathbb{N}, j \geq 1$, les suites :

$$\left\{ \int_{|x|<1/j} |\nabla u_k|^2 dx \right\}_k \quad \text{et} \quad \left\{ \int_{|x|>j} |\nabla u_k|^2 dx \right\}_k$$

admettent des limites finies quand $k \rightarrow \infty$.

Démonstration. Soit $\{u_k\}_k$ la suite définie dans le lemme 4.4. Comme les suites numériques :

$$\int_{|x|<1} |\nabla u_k|^2 dx \quad \text{et} \quad \int_{|x|>1} |\nabla u_k|^2 dx$$

sont bornées, il existe une sous-suite $\{u_{k,1}\}_k$ telle que les suites

$$\int_{|x|<1} |\nabla u_{k,1}|^2 dx \quad \text{et} \quad \int_{|x|>1} |\nabla u_{k,1}|^2 dx$$

admettent des limites finies. De $\{u_{k,1}\}_k$ on peut extraire une nouvelle sous-suite $\{u_{k,2}\}_k$ telle que les suites

$$\int_{|x|<1/2} |\nabla u_{k,2}|^2 dx \quad \text{et} \quad \int_{|x|>2} |\nabla u_{k,2}|^2 dx$$

admettent des limites finies. En procédant de cette manière, pour tout $j \geq 2$, on a une suite $\{u_{k,j}\}_k$ telle que les suites

$$\int_{|x|<1/j} |\nabla u_{k,j}|^2 dx \quad \text{et} \quad \int_{|x|>j} |\nabla u_{k,j}|^2 dx$$

admettent des limites finies quand $k \rightarrow \infty$ et $\{u_{k,j}\}_k$ est une sous-suite de $\{u_{k,j-1}\}_k$. Alors on renomme en u_k la «diagonale», plus précisément $u_k = u_{k,k}$. C'est une suite minimisante qui satisfait les conditions du lemme précédent, car elle a été extraite de la suite minimisante d'origine. De plus, pour tout donnée j , sauf les j premiers termes, la suite est une sous-suite de $\{u_{k,j}\}_k$, et donc la suite numériques :

$$\int_{|x|<1/j} |\nabla u_k|^2 dx \quad \text{et} \quad \int_{|x|>j} |\nabla u_k|^2 dx$$

Sont des sous-suites d'une suite convergente, et par conséquent elles sont également convergentes. $\square$

Dans le lemme suivant, on introduit quelques quantités que nous utiliserons dans la preuve principal.

Lemme 4.6. Les limites suivantes existent et sont finies :

1. $v_0 = \lim_{R \rightarrow 0^+} (\limsup_k \int_{|x|<R} |u_k|^{2^*} dx),$
 $v_\infty = \lim_{R \rightarrow +\infty} (\limsup_k \int_{|x|\geq R} |u_k|^{2^*} dx).$
2. $\mu_0 = \lim_{R \rightarrow 0^+} (\limsup_k \int_{|x|<R} |\nabla u_k|^2 dx),$
 $\mu_\infty = \lim_{R \rightarrow \infty} (\limsup_k \int_{|x|\geq R} |\nabla u_k|^2 dx).$

En outre

3. $v_0, v_\infty \in [0, 1/2].$

Démonstration. On définit les fonctions suivantes :

$$f(R) = \limsup_k \int_{|x| < R} |u_k|^{2^*} dx \quad \text{et} \quad g(R) = \limsup_k \int_{|x| \geq R} |u_k|^{2^*} dx$$

il est immédiat de voir que f est borné et croissante, tandis que g est borné et décroissante. Donc

$$\lim_{R \rightarrow 0+} f(R) = v_0 \quad \text{et} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} g(R) = v_\infty$$

existent et sont finis (et positives). La même preuve faite pour μ_0 et μ_∞ . Le fait que $v_0 \leq 1/2$ et $v_\infty \leq 1/2$ vient de

$$\int_{|x| < 1} |u_k|^{2^*} dx = \int_{|x| \geq 1} |u_k|^{2^*} dx = \frac{1}{2}.$$

□

Les lemmes suivants établissent des inégalités entre les nombres introduits dans le résultat ci-dessus qui sera essentiel dans la preuve du théorème 4.3, le résultat suivant établit que lorsque $k \rightarrow \infty$, la masse d'origine de u_k n'est pas inférieure que la somme des contributions de la limite faible, de la partie qui se propage (v_∞) et de la partie qui se concentre (v_0).

Lemme 4.7. Soit u la limite faible de la suite minimisante u_k construite au dessus. Alors

$$1 \leq \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx + v_0 + v_\infty.$$

Démonstration. Preuve Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $R > 1$ on a

$$1 = \int_{\mathbb{R}^N} |u_k|^{2^*} dx = \int_{|x| \leq 1/R} |u_k|^{2^*} dx + \int_{1/R < |x| < R} |u_k|^{2^*} dx + \int_{|x| \geq R} |u_k|^{2^*} dx.$$

Dans l'ensemble ouvert borné

$$\{x \in \mathbb{R}^N \mid 1/R < |x| < R\}$$

on a $|u_k(x)|^{2^*} \rightarrow |u(x)|^{2^*}$ presque partout et de plus :

$$|u_k(x)|^{2^*} \leq CR^N,$$

par le lemme 3.1.2. donc la convergence dominée de Lebesgue, on a :

$$\lim_k \int_{1/R < |x| < R} |u_k|^{2^*} dx = \int_{1/R < |x| < R} |u|^{2^*} dx.$$

D'où :

$$\begin{aligned} 1 &= \limsup_k \left(\int_{|x| < 1/R} |u_k|^{2^*} dx + \int_{1/R < |x| < R} |u_k|^{2^*} dx + \int_{|x| \geq R} |u_k|^{2^*} dx \right) \\ &\leq \int_{1/R < |x| < R} |u|^{2^*} dx + \limsup_k \int_{|x| < 1/R} |u_k|^{2^*} dx + \limsup_k \int_{|x| > R} |u_k|^{2^*} dx. \end{aligned}$$

Comme $R \rightarrow +\infty$, on obtient :

$$1 \leq \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx + v_0 + v_\infty.$$

□

Un comportement similaire (mais avec l'inégalité opposée) est satisfait également pour la norme dans $(D^{1,2})$.

Lemme 4.8. Soit u la limite faible de la suite minimisante u_k construite au dessus. Alors on a :

$$S \geq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \mu_0 + \mu_\infty.$$

Démonstration. On pose :

$$\varepsilon_k = \|u_k\|^2 - S,$$

pour tout K et tout j , il en résulte

$$\begin{aligned} S + \varepsilon_k &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_k|^2 dx \\ &= \int_{|x| < 1/j} |\nabla u_k|^2 dx + \int_{1/j < |x| < j} |\nabla u_k|^2 dx + \int_{|x| > j} |\nabla u_k|^2 dx \end{aligned} \quad (4.7)$$

La fonctionnelle

$$j(u) = \int_{1/j < |x| < j} |\nabla u|^2 dx,$$

est continue et convexe dans $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, de sorte qu'elle est faiblement semi-continue inférieure.

Rappelant que $\varepsilon_k \rightarrow 0$ et que les deux suites numériques

$$\left\{ \int_{|x| < 1/j} |\nabla u_k|^2 dx \right\}_k \quad \text{et} \quad \left\{ \int_{|x| > j} |\nabla u_k|^2 dx \right\}_k$$

admettent des limites, si dans (4.7), on prend la $\liminf$ par rapport à k , on obtient :

$$\begin{aligned} S &= \liminf_k \left(\int_{|x| < 1/j} |\nabla u_k|^2 dx + \int_{1/j < |x| < j} |\nabla u_k|^2 dx + \int_{|x| > j} |\nabla u_k|^2 dx \right) \\ &= \liminf_k \int_{1/j < |x| < j} |\nabla u_k|^2 dx + \lim_k \int_{|x| < 1/j} |\nabla u_k|^2 dx + \lim_k \int_{|x| > j} |\nabla u_k|^2 dx \\ &\geq \int_{1/j < |x| < j} |\nabla u|^2 dx + \lim_k \int_{|x| < 1/j} |\nabla u_k|^2 dx + \lim_k \int_{|x| > j} |\nabla u_k|^2 dx. \end{aligned}$$

Soit maintenant $j \rightarrow \infty$, on voit que

$$S \geq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \mu_0 + \mu_\infty.$$

A partir de la définition de S , on a, pour tout $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$,

$$S \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{2^*} dx \right)^{2/2^*} \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx. \quad (4.8)$$

□

Le lemme suivant est d'une importance fondamentale. Dans un certain sens, il dit que l'inégalité (4.8) est satisfait également pour les «composantes» de u_k qui se répandent ou se concentrent.

Lemme 4.9. On a :

$$Sv_0^{2/2^*} \leq \mu_0 \quad \text{et} \quad Sv_\infty^{2/2^*} \leq \mu_\infty.$$

Démonstration. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de C^∞ telle que $\varphi(t) = 1$ si $t \in [0, 1]$ et $\varphi(t) = 0$ si $t \geq 2$. Pour tout $R > 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, on pose :

$$\varphi_R(x) = \varphi\left(\frac{|x|}{R}\right).$$

Alors $\varphi_R \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{cases} \varphi_R(x) = 1 & \text{si } |x| \leq R, \\ \varphi_R(x) = 0 & \text{si } |x| \geq 2R, \\ |\nabla \varphi_R(x)| \leq C/R & \text{pour chaque } x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

pour un certain C indépendant de x et R .

pour tout $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, la fonction $\varphi_R v$ est aussi dans $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. En effet $\varphi_R v$ appartient à $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, et il suffit de vérifier que sa pente est en L^2 . Mais

$$\nabla(\varphi_R v) = v \nabla \varphi_R + \varphi_R \nabla v,$$

et évidemment $|\varphi_R \nabla v| \in L^2(\mathbb{R}^N)$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 |\nabla \varphi_R|^2 dx &= \int_{R < |x| < 2R} |v|^2 |\nabla \varphi_R|^2 dx \\ &\leq \left(\int_{R < |x| < 2R} |v|^{2^*} \right)^{\frac{N-2}{N}} \left(\int_{R < |x| < 2R} |\nabla \varphi_R|^N dx \right)^{2/N} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{2^*} \right)^{\frac{N-2}{N}} \left(\frac{C}{R^N} \int_{R < |x| < 2R} dx \right)^{2/N} \leq C |v|_{2^*}^2 < +\infty. \end{aligned}$$

Ainsi, le gradient de $\varphi_R v$ est la somme de deux L^2 les fonctions.

On considère maintenant, pour chaque K et pour chaque R , la fonction $\varphi_R u_k \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Certainement,

$$S \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi_R u_k|^{2^*} dx \right)^{2/2^*} \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\varphi_R u_k)|^2 dx. \quad (4.9)$$

Nous analysons ce qui arrive à cette inégalité lorsque nous calculons certaines limites. Comme en ce qui concerne le côté gauche, nous avons

$$\int_{|x| \geq R} |u_k|^{2^*} dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi_R u_k|^{2^*} dx \leq \int_{|x| < 2R} |u_k|^{2^*} dx,$$

de sorte que

$$\limsup_K \int_{|x|<R} |u_k|^{2^*} dx \leq \limsup_K \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi_R u_k|^{2^*} dx \leq \limsup_K \int_{|x|<2R} |u_k|^{2^*} dx.$$

Or le premier et le dernier terme de cette inégalité tendent vers v_0 , lorsque R tend vers zéro (4.7), et donc le terme central, à savoir

$$\lim_{R \rightarrow 0} \left(\limsup_K \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi_R u_k|^{2^*} dx \right) = v_0.$$

Nous passons à l'étude du membre de droite de (4.9). D'abord,

$$|\nabla(\varphi_R u_k)|^2 = u_k^2 |\nabla \varphi_R|^2 + \varphi_R |\nabla u_k|^2 + 2u_k \varphi_R \nabla \varphi_R \cdot \nabla u_k.$$

En répétant l'argument ci-dessus, on en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_k|^2 |\nabla \varphi_R|^2 dx \leq C \left(\int_{R<|x|<2R} |u_k|^{2^*} dx \right)^{\frac{N-2}{2}}.$$

De plus, en travaillant comme dans le lemme 4.8 on voit que

$$\lim_k \int_{R<|x|<2R} |u_k|^{2^*} dx = \int_{R<|x|<2R} |u|^{2^*} dx$$

de sorte que

$$\lim_{R \rightarrow 0} \left(\lim_k \int_{R<|x|<2R} |u_k|^{2^*} dx \right) = \lim_{R \rightarrow 0} \int_{R<|x|<2R} |u|^{2^*} dx = 0,$$

qui donne

$$\lim_{R \rightarrow 0} \left(\lim_k \int_{\mathbb{R}^N} |u_k|^2 |\nabla \varphi_R|^2 dx \right) = 0$$

De là, il est également facile de voir que

$$\lim_{R \rightarrow 0} \left(\lim_k \int_{\mathbb{R}^N} u_k \varphi_R \nabla \varphi_R \cdot \nabla u_k dx \right) = 0$$

Enfin, puisque

$$\int_{|x|<R} |\nabla u_k|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi_R \nabla u_k|^2 dx \leq \int_{|x|<2R} |\nabla u_k|^2 dx,$$

en argumentant comme ci-dessus, nous obtenons

$$\lim_{R \rightarrow 0} \left(\limsup_K \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi_R \nabla u_k|^2 dx \right) = \mu_0.$$

En résumé, à partir de (4.9), en prenant d'abord la lim sup sur k , puis la limite comme $R > 0$ et chaque $x \in \mathbb{R}^N$ nous fixons

$$\psi_R(x) = \psi\left(\frac{|x|}{R}\right).$$

Encore une fois, il est immédiat de vérifier que $\psi_R \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{cases} \psi_R(x) = 0 & \text{si } |x| \leq R, \\ \psi_R(x) = 1 & \text{si } |x| \geq 2R, \\ |\nabla \psi_R(x)| \leq C/R & \text{pour chaque } x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

pour un certain C indépendant de x et R , Comme avant, $\psi_R v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ si $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. En partant de l'inégalité

$$S \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\psi_R u_k|^{2^*} dx \right)^{2/2^*} \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\psi_R u_k)|^2 dx$$

et en argumentant comme dans la première partie de la preuve, on obtient

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\limsup_k \int_{\mathbb{R}^N} |\psi_R u_k|^{2^*} dx \right) = v_\infty$$

et

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\limsup_k \int_{\mathbb{R}^N} |\psi_R \nabla u_k|^{2^*} dx \right) = \mu_\infty$$

de sorte que l'inégalité

$$S v_\infty^{2/2^*} \leq \mu_\infty,$$

est établi. □

Le lemme suivant est la dernière étape de la démonstration du théorème 4.1

Lemme 4.10. On a :

$$v_0 = v_\infty = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx = 1.$$

Démonstration. On sait que $v_0, v_\infty \in [0, 1/2]$ et, par la faible semi-continuité inférieurement, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx \in [0, 1].$$

Comme $2^* > 2$, pour tout $a \in [0, 1]$, on a $a^{2/2^*} \geq a$, et l'égalité tient si et seulement si $a = 0$ ou $a = 1$. En rassemblant les inégalités prouvées dans les lemmes précédents, on a

$$\begin{aligned} S &\geq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \mu_0 + \mu_\infty \\ &\geq S \left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx \right)^{2/2^*} + v_0^{2/2^*} + v_\infty^{2/2^*} \right] \\ &\geq S \left[\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx + v_0 + v_\infty \right] \geq S \end{aligned}$$

L'égalité, doit donc être partout, et en particulier on a :

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx \right)^{2/2^*} + v_0^{2/2^*} + v_\infty^{2/2^*} = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx + v_0 + v_\infty.$$

Mais alors, chacun des nombres $\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx$, v_0 doit être soit 0 ou 1, comme $v_0, v_\infty \in [0, 1/2]$, nécessairement on a $v_0 = v_\infty = 0$ comme :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx + v_0 + v_\infty \geq 1,$$

on déduit que $\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx \geq 1$ et donc $\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx = 1$. $\square$

On a prouvé jusqu'ici qu'il existe une suite minimisantes pour S qui admet une limite faible u satisfaisant :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx = 1. \quad (4.10)$$

Par la faiblement semi-continuité inférieurement, on a également $\|u\|^2 \leq S$, et par la définition de S et (4.10), ce doit être $\|u\|^2 = S$. Ainsi u est un minimiseur, la preuve du théorème 4.1 est maintenant terminée.

Remarque 4.3. Les solutions de (4.10) que nous avons trouvées sont explicitement connues. Les calculs élémentaires montrent qu'une solution est donnée, pour une constante appropriée $c > 0$, par

$$U(x) = \frac{c}{(1 + |x|^2)^{\frac{N-2}{2}}}$$

et on peut prouver (ce n'est pas facile) que cette fonction résout bien la minimisation du problème (4.6). Actuellement, toutes les solutions de (4.6) sont connues : sont la famille des fonctions

$$U_{\lambda,y}(x) = \lambda^{\frac{N-2}{2}} U(\lambda(x - y))$$

pour toute $y \in \mathbb{R}^N$ et tout $\lambda > 0$. Notez qu'ils sont générés par la fonction u ci-dessus par des traductions et des mises à l'échelle (voir par exemple [11]).

Conclusion

Dans ce travail, on a étudié quelques techniques de minimisation pour résoudre deux problèmes aux limites d'équations partielles l'un posés sur un ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert borné et l'autre posés sur $\mathbb{R}^N$ qui vient dans le cadre.

Dans le premier chapitre, on a donné quelques outils de base, qui sont nécessaires pour ce travail, comme la différentiabilité d'un opérateur dans l'espace de Banach et l'espace de Sobolev et quelques propriétés topologiques, comme les injections de Sobolev.

Dans le deuxième chapitre, notre objectif était donner quelques théories du point critiques. On a introduire également une condition de compacité connue sous le nom de condition Palais-Smale.

Dans le troisième chapitre, on a étudié l'existence de solutions pour le problème suivant,

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = f(u) + h(x) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Telle que nous avons obtenue la solution par la technique de coercive pour d'une certaine fonctionnelle.

En fin, on a étudié l'existence de solutions pour le problème elliptique avec l'exposant critique suivant,

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-2}u, \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Notre approche est variationnelle, nous avons utilisé le théorème de minimisation et la solution est obtenue comme des minimum ou de point critique pour d'une certaine fonctionnelle.

Nous prévoyons dans le futur d'essayer d'améliorer certains résultats de ces problèmes.

Bibliographie

- [1] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et application*, Masson, Paris, (1992).
- [2] Adams, R.A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, (1975).
- [3] M. Badiale, E. Serra, *Semilinear Elliptic Equations for Beginners, existence results via variational approach*, springer-verlag London Limited, (2011).
- [4] O. Kavian, *Introduction à la Théorie des Points Critiques, et application aux problèmes elliptiques*, O.K. Nancy, le 20 Juillet (1993).
- [5] M.A. Krasnoselskii, *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*, MacMillan, New York, (1964).
- [6] A. Castro, *Metodos variacionales y analisis functional no linear*, in : X Colóquio Colombiano de Matemáticas, (1980).
- [7] D.C. Clarke, *A variant of the Lusternik Schnirelman theory*, Indiana Univ. Math. J. 22 (1972) 65 – 74
- [8] K.C. Chang, *Methods in Nonlinear Analysis*, Peking Univercity, September, (2003).
- [9] H. Le Dret, *Note de cours, M2-Équations aux dérivées partielles elliptiques*, Université PIERRE et MARIE CURIE, 4 mars 2010.
- [10] H. Brezis, L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Commun. Pure Appl. Math. 36(4), (1983), 437~477.
- [11] E.H. Lieb, M. Loss, *Analysis, 2nd edn. Graduate Studies in Mathematics*, American Mathematical Society, Providence, vol. 14 (2001).
- [12] Jean-François Burnol, *Convergence faible, Résumé du cours de MEDP*, Maîtrise de mathématiques, nov 18, (2001).

Résumé

Dans ce mémoire, on a étudié deux problèmes aux limites d'équations différentielles partielles, sur $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Notre objectif dans cette étude était d'appliquer la méthode variationnelle et théorème de minimisation pour étudier l'existence de solution pour des problèmes aux limites avec un terme d'exposant sous-critiques et d'exposant critiques (respectivement) :

1.

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = f(u) + h(x) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-2}u, \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Lorsque nous avons utilisé la méthode variationnelle, Il s'avère que la solution du problème consiste à définir les points minimum ou critiques d'une fonctionnelle d'énergie.

Mots clés : méthode variationnelle, point critique, théorème de minimisation, coercive, valeur critique de sobolev, solution faible, inégalités de sobolev

ملخص

في هذه المذكرة قمنا بدراسة مسألتين حديتين لمعادلتين تفاضليتين على $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ، و لقد كان هدفنا من هذه الدراسة تطبيق طريقة التغيرات و نظرية النقطة الحرجة لدراسة وجود الحلول للمسألتين الحديتين مع حدّ بأس تحت الأس الحرج و حتى يبلغ الأس الحرج، وهما على الترتيب

1.

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = f(u) + h(x) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-2}u, \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

حيث إستخدمنا طريقة التغيرات و نظرية النقطة الحرجة، فأتضح أنّ حلول المسألة هو الحد الأدنى لدالة الطاقة.

كلمات مفتاحية : طريقة التغيرات، نظرية النقطة الحرجة، الشرط الناقصي، الحل الموجب، الأس الحرج لصوبولاف، متراجحات صوبولاف.

Abstract

In this memory, we have studied two boundary problems with partial differential equations, on $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Our objective in this study was to apply the variational method and minimization theorem to study the existence of solutions for the following boundary problems critical exponents and supercritical exponents (respectively) :

1.

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = f(u) + h(x) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-2}u, \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

When we used the variational method, it turns out that the solution of the problem consists in defining the minimum or critical points of an energy functional.

Keywords : variational methods, critical point, minimization theorem, coercive , positive solution, critical exponent, continuous, sobolev embedding.