UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF M'SILA

FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L' INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

Mémoire de Fin d'Etude

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Analyse Fonctionnelle

Par

Mohammed Said SEGHIRI

Sujet

Sur la réalisation des espaces de Besov homogènes

Soutenu le : 11/06/2015

Devant le jury composé de :

Mr. Douadi DRIHEM MCA Univ.M'sila Président

Mr. Madani MOUSSAI Prof Univ.M'sila Rapporteur

Mr. Bachir GAGUI MCB Univ.M'sila Examinateur

Promotion: 2014/2015

Remerciements

Je remercie tout d'abord mon Dieu qui m'a donné la force pour terminer ce travail.

Je tiens à remercier vivement le professeur Madani MOUSSAI pour avoir accepté de proposer et diriger ce travail, ainsi pour sa gentillesse, son dévouement et ses conseils précieux.

Je remercie aussi les professeurs Douadi DRIHEM et Bachir GAGUI d'avoir accepté respectivement la présidence et d'être membre du jury.

Je remercie également ma famille.

Résumé

L'espace de Besov homogène $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace de l'espace $S'_\infty(\mathbb{R}^n)$ des distributions tempérées modulo les polynômes. On peut réaliser canoniquement comme un sous-espace, invariant par translations et par dilatations, de l'espace $S'_\nu(\mathbb{R}^n)$ des distributions tempérées modulo les polynômes de degré inférieur à ν, l'entier ν étant minimal.

Mots-clés: Espace de Besov homogène $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, **Réalisation**, Espace $S'_\nu(\mathbb{R}^n)$ des distributions tempérées modulo les polynômes de degré inférieur à ν, Translations, Dilatations, Espace de Sobolev homogène, Inégalité de Hardy.

Abstract

The homogeneous Besov space $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ is a subspace of the space $S'_\infty(\mathbb{R}^n)$ of tempered distributions modulo all polynomials. It is possible to realize it as a tanslation and dilation invariant subspace of the space $S'_\nu(\mathbb{R}^n)$ of tempered distributions modulo polynomials of degree less than ν, for some minimal natural number ν.

Key words: Homogeneous Besov space $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, **Realization,** Space $S'_\nu(\mathbb{R}^n)$ of tempered distributions modulo polynomials of degree less than ν, Translation, Dilatation, Homogeneous Sobolev space, Inequality of Hardy.

Notations :

- Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$.

  La dérivée partielle $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \ldots \partial^{\alpha_n} x_n}$ est notée $\partial^\alpha f$,

  si f est une fonction de deux variables (x, y) on note $\partial_x^\alpha f$ et $\partial_y^\alpha f$.

- $x \cdot \xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \xi_i$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

- $f * g\,(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f\,(x-y)\, g\,(y)\, dy$ est la convolution des fonctions f et g.

- La transformation de Fourier de la fonction $f \in S\,(\mathbb{R}^n)$ est définit par:

$$(\mathcal{F} f)\,(\xi) = \hat{f}\,(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f\,(x)\, dx, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

  et sa transformée de Fourier inverse est:

$$\mathcal{F}^{-1} f\,(x) = \check{f}\,(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} f\,(\xi)\, d\xi.$$

- Pour $(u, v) \in S\,(\mathbb{R}^n) \times S'\,(\mathbb{R}^n)$, on a $u * v \in S'\,(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{F}\,(u * v) = \mathcal{F}u * \mathcal{F}v$.

- Pour tout $p \in [1, +\infty]$, on définit l'exposant conjugué par p', telle que $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$.

- Soit $a \in \mathbb{R}$, $a_+ = \max(a, 0)$.

- Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, $\operatorname{supp} f$ est le support de f.

- E' est l'espace dual de E.

- Soient A_1 et A_2 deux espaces, on dit que $A_1 \hookrightarrow A_2$ s'il existe $c > 0$, telle que:

$$\|f\|_{A_2} \leq c\, \|f\|_{A_1}, \ (\forall f \in A_1).$$

- Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, l'opérateur différentiel ∂^α de $S'_m\,(\mathbb{R}^n)$ dans $S'_{(m-|\alpha|)+}\,(\mathbb{R}^n)$.

- $L_{loc}^{1}(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions mesurables telles que:

$$\int_k |f(x)|\, dx < \infty,\ \forall k \text{ compact} \subset \mathbb{R}^n.$$

- $L^p(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions mesurables f telles que $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty$ où

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } p \neq \infty \\ \displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \text{ess}\, |f(x)| & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

- $\ell^q(\mathbb{R}^n)$ l'espace des suites $(a_k)_k$ qui vérifient:

$$\|(a_k)\|_{\ell^q(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

- $C(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions continues f tels que:

$$\|f\|_{C(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)| < \infty.$$

- $C^m(\mathbb{R}^n)$ Soit $m \in \mathbb{N}$, l'espace des fonctions $f \in C(\mathbb{R}^n)$ et $\partial^\alpha f \in C(\mathbb{R}^n)$, tels que:

$$\|f\|_{C^m(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha f\|_{C(\mathbb{R}^n)} < \infty, \text{ avec } C^0(\mathbb{R}^n) = C(\mathbb{R}^n).$$

- Soit $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$, $C^s(\mathbb{R}^n)$ l'espace de Hölder des fonctions f bornées telles que:

$$\|f\|_{C^s(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^s} < \infty.$$

- Soit $0 < s < 1$, $\dot{C}^s(\mathbb{R}^n)$ l'espace de Hölder homogène défini par la condition:

$$\sup_{x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^s} < \infty.$$

- $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ les éléments de $C^m(\mathbb{R}^n)$, pour tout $m \in \mathbb{N}$.

- $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact.

- $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble de toutes les formes linéaires et continues définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

- $S(\mathbb{R}^n)$ l'espace de Schwartz des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à décroissance rapide.
- $S'(\mathbb{R}^n)$ l'espace des disributions temperées.
- $S_\infty(\mathbb{R}^n)$ les éléments de $S(\mathbb{R}^n)$ orthogonaux à tous polynômes.
- $S'_\infty(\mathbb{R}^n)$ l'espace des disributions temperées modulo les polynômes.
- Soit $s \in \mathbb{R}$, on définit l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ par des $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ tels que:

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\xi|^2\right)^s \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

- Soit $s \in \mathbb{R}$, on définit l'espace de Sobolev homogène $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ par des $f \in S'_\infty(\mathbb{R}^n)$ tels que:

$$\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} 4^{sk} \|Q_K f\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire l'espace de Besov homogène sur $\mathbb{R}^n$ est un espace de Banach des distributions tempérées modulo les polynômes. Si E est un tel espace, une réalisation de E est une application linéaire continue $\sigma : E \longrightarrow S'(\mathbb{R}^n)$ telle que $\forall f \in E$, la classe d'équivalence de $\sigma(f)$ égale à f, à savoir l'invariance par translations et par dilatations.

La contribution principale de ce mémoire est répartie dans trois chapitres:

Dans le premier chapitre, nous rappelons les définitions, quelques propriétés des espaces de Sobolev et Besov homogènes suivant le formalisme de Littlewood-Paley, avec l'interpolation et quelques résultats qu'on utilisera par la suite. Dans le cinquième paragraphe de ce chapitre, on donne quelques inégalilés nécessaires pour ce travail.

Dans le deuxième chapitre, nous traiterons de l'existence et de l'unicité de réalisations de $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ dans $S'(\mathbb{R}^n)$ invariantes par translations (resp. dilatations), à savoir la réalisation de $\dot{H}^s_p(\mathbb{R}^n)$ avec quelques généralités sur les réalisations.

Dans le troisième chapitre, à partir la définition de l'espaces de $\dot{H}^{\ s}(\mathbb{R}^n)$, on applique l'inégalité de type Hardy sur les fonctions des espaces réalisés, avec quelques exemples de fonctions dans $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Chapitre 1

Rappel sur les espaces de Besov homogènes

L'objet de ce chapitre est de rappeler les notions essentielles qui seront utilisées dans la suite à savoir les espaces de Sobolev et Besov, Sobolev et Besov homogènes et quelques résultats principaux concernant les inégalités de Hölder, Young et de Bernstein.

1.1 Séries de Littlewood-Paley

Les séries de Littlewood-Paley jouent un rôle important dans la définition des espaces de Sobolev et Besov homogènes. Nous allons rappeler la définition de la décomposition de Littlewood-Paley d'une distribution temperée.

Définition 1.1.1 (Fonction Cut-off) *Une fonction ρ est dit Cut-off si elle est: $\rho \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \rho \leq 1$, paire. Autrement dit ρ est une fonction de classe C^{∞}, positive, radiale sur $\mathbb{R}^n$ i.e: $\rho(\xi) = \phi(|\xi|)$, avec $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que: $\rho(\xi) = 1$ si $|\xi| \leq 1$, $\rho(\xi) = 0$ si $|\xi| \geq \frac{3}{2}$. On définit:*

$$\gamma(\xi) = \rho(\xi) - \rho(2\xi), \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Définition 1.1.2 (Décomposition de Littlewood-Paley) *Soit $\gamma \in S(\mathbb{R}^n)$ telle que:*

- $\operatorname{supp} \gamma \subset \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} \leq |\xi| \leq \frac{3}{2}\right\}$.

- $\gamma(\xi) \geq 0$ *pour* $\frac{1}{2} \leq |\xi| \leq \frac{3}{2}$.
- $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma\left(2^{-k}\xi\right) = 1, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

On pose: $\rho(\xi) = 1 - \sum_{k\geq 1} \gamma\left(2^{-k}\xi\right)$, *alors on obtient une fonction* $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *telle que:*

$$\operatorname{supp} \rho \subset \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n \ : \ |\xi| \leq \frac{3}{2} \right\},$$

donc pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ *la partition de l'unité non homogène est:*

$$\rho(\xi) + \sum_{k\geq 1} \gamma\left(2^{-k}\xi\right) = 1. \tag{1.1.1}$$

Si $\xi \neq 0$, *alors* $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma\left(2^{-k}\xi\right) = 1$ *est appelée partition de l'unité homogène. La partition* (1.1.1) *on associe une suite d'opérateurs de convolutions notés*

$$\begin{aligned} Q_k &: S'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n) \\ R_j &: S'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

définis par

$$\begin{aligned} Q_k f(x) &= \mathcal{F}^{-1}\left(\gamma\left(2^{-k}.\right)\right) * f(x) \qquad k \geq 1 \\ R_j f(x) &= \mathcal{F}^{-1}\left(\rho\left(2^{-j}.\right)\right) * f(x) \qquad j \geq 0 \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(Q_k f)(\xi) &= \gamma\left(2^{-k}.\right) \hat{f}(\xi) \qquad k \geq 1 \\ \mathcal{F}(R_j f)(\xi) &= \rho\left(2^{-j}.\right) \hat{f}(\xi) \qquad j \geq 0 \end{aligned}$$

avec la notation: $Q_0 = R_0$. *Si dans la relation* (1.1.1) *on change* ξ *par* $2^{-j}\xi$ *et on multiplie par* $\hat{f}(\xi)$ *on obtient*

$$\hat{f}(\xi)\rho\left(2^{-j}\xi\right) + \hat{f}(\xi) \sum_{k\geq j+1} \gamma\left(2^{-k}\xi\right) = \hat{f}(\xi). \tag{1.1.2}$$

En appliquant l'application $\mathcal{F}^{-1}$ *sur* (1.1.2) *on obtient*

$$R_j f + \sum_{k\geq j+1} Q_k f = f. \tag{1.1.3}$$

Pour $j = 0$ *on trouve*

$$R_0 f + \sum_{k \geq 1} Q_k f = f.$$

Pour tout $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ *la décomposition de Littlewood-Paley de* f *est alors l'identité*

$$f = \sum_{k \geq 0} Q_k f. \tag{1.1.4}$$

La série (1.1.4) *converge au sens des distributions temperées. De* (1.1.3) *et* (1.1.4) *alors*

$$R_j f + \sum_{k \geq j+1} Q_k f = \sum_{k=0}^{j} Q_k f + \sum_{k \geq j+1} Q_k f.$$

Donc

$$R_j f = \sum_{k=0}^{j} Q_k f.$$

1.2 Espaces de Sobolev et Besov

Nous donnons dans ce paragraphe les définitions de l'espace de Sobolev et Besov, quelques propriétés sur ces espaces.

Définition 1.2.1 (Espace de Sobolev) *Soit* $m = 1, 2, ...$ *et* $1 \leq p \leq \infty$, *l'espace de Sobolev noté par* $W_p^m(\mathbb{R}^n)$ *est l'ensemble des* $f \in S'(\mathbb{R}^n)$, $\partial^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *tels que:*

$$\|f\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Définition 1.2.2 *Soit* $s \in \mathbb{R}$ *et* $1 < p < \infty$, *l'espace de potentiel de Bessel noté* $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ *est définit par des* $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ *tels que:*

$$\|f\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)} = \left\| \mathcal{F}^{-1}\left(\left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \hat{f}(\xi) \right)(.) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Remarque 1.2.1 $H_2^s(\mathbb{R}^n)$ *est l'espace de Sobolev usuel.*

Proposition 1.2.1 *Les propriétés suivantes sont vérifiées:*

- $H_2^s(\mathbb{R}^n) = H^s(\mathbb{R}^n)$, $\forall s \in \mathbb{R}$.
- $H_p^m(\mathbb{R}^n) = W_p^m(\mathbb{R}^n)$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $(1 < p < \infty)$.

- $H_p^0(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Théorème 1.2.1 (Sobolev) *Si $0 < s < \frac{n}{p}$, on a:*

- $H_p^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H_p^t(\mathbb{R}^n)$, $0 < t < s$.
- $H_p^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{q} \leq \frac{1}{p} \leq \frac{1}{q} + \frac{s}{n}$ *(Injection de Sobolev).*

Preuve. Voir [1]. ■

Définition 1.2.3 (Espace de Besov) *Soit $s \in \mathbb{R}$ et $p, q \in]0, +\infty[$ l'espace de Besov noté $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est défini par des $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ tels que:*

$$\|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} = \begin{cases} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{skq} \|Q_k f\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty, \text{ pour } q \neq \infty \\ \sup_{k \geq 0} 2^{sk} \|Q_k f\|_p < \infty, \text{ pour } q = \infty. \end{cases}$$

Proposition 1.2.2 *Les propriétés suivantes sont vérifiées:*

- $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ *est un espace de Banach si* $\min(p, q) \geq 1$.
- $B_{\infty,\infty}^s(\mathbb{R}^n) = C^s(\mathbb{R}^n)$ *si* $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$.
- $B_{2,2}^s(\mathbb{R}^n) = H^s(\mathbb{R}^n)$, $\forall s \in \mathbb{R}$.
- $B_{p,2}^s(\mathbb{R}^n) = H_p^s(\mathbb{R}^n)$, $\forall s \in \mathbb{R}$.

Preuve. Voir [9, 10, 11]. ■

Proposition 1.2.3 *Soit $s \in \mathbb{R}$, alors:*

- $S(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S'(\mathbb{R}^n)$.
- $B_{p,q}^{s+\epsilon}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, $\forall \epsilon > 0$.
- $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$, *si* $s > 0$.

Preuve. Voir [8, 9]. ■

1.3 Espace de Sobolev et Besov homogène

Rappelons dnas ce paragraphe les définitions des espaces de Sobolev et Besov homogènes qui seront utilisées dans la réalisation et quelques propriétés sur ces espaces.

Définition 1.3.1 (Espace de Sobolev homogène) *L'espace de Sobolev homogène noté par* $\dot{W}_p^m(\mathbb{R}^n)$ *est l'ensemble des* $f \in S'_\infty(\mathbb{R}^n)$, $\partial^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *pour tout* $m \in \mathbb{N}$ *tels que:*

$$\|f\|_{\dot{W}_p^m(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha f\|_p < \infty.$$

Définition 1.3.2 *Soit* $s \in \mathbb{R}$ *et* $1 < p < \infty$, *l'espace de potentiel de Bessel homogène noté aussi par* $\dot{H}_p^s(\mathbb{R}^n)$ *est définit par des* $f \in S'_\infty(\mathbb{R}^n)$ *tels que:*

$$\|f\|_{\dot{H}_p^s(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 4^{sk} \|Q_k f\|_p^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Proposition 1.3.1 *Soit* $s \in \mathbb{R}$, *alors:*

- $\dot{H}_p^s(\mathbb{R}^n)$ *est un espace de Banach.*
- $\dot{H}_p^s(\mathbb{R}^n) = \dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$.
- $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S'_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Définition 1.3.3 (Espace de Besov homogène) *Soit* $s \in \mathbb{R}$ *et* $p, q \in [1, +\infty]$, *l'espace de Besov homogène noté* $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ *est défini par des* $f \in S'_\infty(\mathbb{R}^n)$ *tels que:*

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} = \begin{cases} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(2^{sk}\|Q_k f\|_p\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty, \text{ si } q \neq \infty \\ \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{sk}\|Q_k f\|_p < \infty, \text{ si } q = \infty. \end{cases}$$

Proposition 1.3.2 *On a:*

- $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ *est un espace de Banach.*
- $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) = \dot{C}(\mathbb{R}^n)$, *pour* $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$.
- $\dot{B}_{2,2}^m(\mathbb{R}^n) = \dot{W}_2^m(\mathbb{R}^n), \forall m \in \mathbb{N}$.

- $B^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{B}^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *si* $s > 0$.

- $\dot{B}^{s}_{p,q_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{B}^{s}_{p,q_2}(\mathbb{R}^n)$ *si* $q_1 < q_2$.

Preuve. Voir [4]. ■

Proposition 1.3.3 *Soit* $s \in \mathbb{R}$, *alors:*

- $S_\infty(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{B}^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S'_\infty(\mathbb{R}^n)$.

- $\dot{B}^{s_1}_{p_1,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{B}^{s_2}_{p_2,q}(\mathbb{R}^n)$, *si* $p_1 < p_2$ *et* $s_1 - \frac{n}{p_1} = s_2 - \frac{n}{p_2}$.

Preuve. Voir [4]. ■

Proposition 1.3.4 *Il existe deux constantes* $0 < c_1 < c_2$ *telles que pour tout* $f \in \dot{B}^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *et tout* $\lambda > 0$, *alors:*

$$c_1 \|f\|_{\dot{B}^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq \lambda^{\frac{n}{p}-s} \|f(\lambda(.))\|_{\dot{B}^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c_2 \|f\|_{\dot{B}^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)}.$$

1.4 L'interpolation

Théorème 1.4.1 (Riesz-Thorin) *Soit* T *un opérateur linéaire une (application linéaire) de* $L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ *dans* $L^{q_0}(\mathbb{R}^n)$ *et de* $L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ *dans* $L^{q_1}(\mathbb{R}^n)$ *avec* $1 \leq p_0, q_0, p_1, q_1 \leq \infty$, $p_0 \neq p_1$ *et* $q_0 \neq q_1$ *avec* $p \leq q$ *telles que*

$$\|Tf\|_{q_0} \leq A \|f\|_{p_0} \, et \, \|Tf\|_{q_1} \leq B \|f\|_{p_1}.$$

Alors T *applique de* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *dans* $L^q(\mathbb{R}^n)$ *avec*

$$\|Tf\|_q \leq C \|f\|_p.$$

telle que: $C = A^{1-\theta} B^{\theta}$ *avec* $0 < \theta < 1$ *et* $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$. *Où:* p *entre* p_0 *et* p_1, q *entre* q_0 *et* q_1.

Remarque 1.4.1 *Pour l'interpolation des espaces* $L^p(\mathbb{R}^n)$, $H^s_p(\mathbb{R}^n)$ *ou* $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *on peut consulter le livre de Bergh et Löfstrôm* [1].

1.5 Inégalités de Hölder, Young et Bernstein

Quelques inégalités classiques, dans les espaces $L^p(\mathbb{R}^n)$ sont nécessaires pour la suite de ce mémoire.

Théorème 1.5.1 (Inégalité de Hölder) *Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p, q \leq \infty$ et $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}\right)$ alors:*

$$fg \in L^r(\mathbb{R}^n) \;\; et \;\; \|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

Théorème 1.5.2 (Inégalité de Young) *Soient $p, q, t \in [1, +\infty]$ tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{t}+1$, avec $t \geq p$ et $t \geq q$ alors pour toute $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ on a:*

$$f * g \in L^t(\mathbb{R}^n) \;\; et \;\; \|f * g\|_t \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

Preuve. On fixe $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ et on considère l'opérateur $Tf = f * g$, on a

$$\begin{aligned} Tf(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)^{\frac{1}{q}} g(x-y) f(y)^{\frac{1}{q'}} dy \\ |Tf(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{\frac{1}{q}} |g(x-y)| |f(y)|^{\frac{1}{q'}} dy, \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient d'une part

$$\|Tf(x)\|_q \leq \|f\|_1 \|g\|_q .$$

D'autre part l'inégalité de Hölder donne :

$$|Tf(x)| \leq \|f\|_{q'} \|g\|_q .$$

Alors on applique le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin, i.e:

$$\begin{aligned} T &: L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^q(\mathbb{R}^n) \\ &: L^{q'}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Il vient:

$$T : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^t(\mathbb{R}^n),$$

avec $\frac{1}{p} = \theta + \frac{1-\theta}{q'}$, $\frac{1}{t} = \frac{\theta}{q}$ et $0 < \theta < 1$, en éléminant θ, on a: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{t}+1$. ∎

Théorème 1.5.3 (Inégalité de Bernstein) *Soient* $1 \leq p \leq t \leq \infty$ *et* $\alpha \in \mathbb{N}^n$, *il existe* $c = c(\alpha, p, q, n)$, *telle que pour toute* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, *avec* $\operatorname{supp} \hat{f} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| < R\}$, *on a:*

$$\left\| f^{(\alpha)} \right\|_t \leq c R^{n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{t}\right) + |\alpha|} \|f\|_p .$$

Preuve. Soit $\rho \in S(\mathbb{R}^n)$ telle que $\rho(\xi) = 1$ pour $|\xi| \leq 1$, on pose $\rho_R(\xi) = \rho\left(\frac{\xi}{R}\right)$, on a

$$\hat{f} = \rho_R \hat{f} \quad et \quad f^{(\alpha)} = \left(\mathcal{F}^{-1}\rho_R\right)^{(\alpha)} * f.$$

Par l'inégalité de Young, on obtient

$$\left\| f^{(\alpha)} \right\|_t \leq \left\| \left(\mathcal{F}^{-1}\rho_R\right)^{(\alpha)} \right\|_q \|f\|_p , \text{ avec } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{t} + 1,$$

comme pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$\left(\mathcal{F}^{-1}\rho_R\right)^{(\alpha)}(x) = R^n \left(\mathcal{F}^{-1}\rho\right)^{(\alpha)}(Rx),$$

il vient

$$\left\| \left(\mathcal{F}^{-1}\rho_R\right)^{(\alpha)} \right\|_q = R^{n+|\alpha|-\frac{n}{q}} \left\| \left(\mathcal{F}^{-1}\rho\right)^{(\alpha)} \right\|_q ,$$

donc

$$\left\| f^{(\alpha)} \right\|_t \leq c R^{n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{t}\right) + |\alpha|} \|f\|_p .$$

■

L'inégalité précédente est connue sous le nom de Bernstein.

Chapitre 2

Réalisation des espaces de Besov homogènes

Dans ce chapitre, nous traiterons de l'existence et de l'unicité de réalisations de $\dot{B}^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ dans $S'(\mathbb{R}^n)$ invariantes par translations ou dilatations, on se limitera au cas $s < \frac{n}{p}$ ou $q > 1$.

2.1 Généralités sur les réalisations

Définition 2.1.1 (Distributions modulo les polynômes) *Pour tout* $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, *on désigne par* $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ *le sous-espace de* $S'(\mathbb{R}^n)$ *constitué des polynôme de degré inférieur à* m *et par* $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n)$ *le sous-espace de* $S'(\mathbb{R}^n)$ *constitué de tous les polynômes.*

Proposition 2.1.1 *Soit* $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ *et* $m \in \mathbb{N}$. *Alors* $f \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ *si et seulement si* $f^{(\alpha)} = 0$ *pour tout* $|\alpha| = m$.

Définition 2.1.2 *On désigne par:*

- $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n) = \{0\}$, $\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^n) = \{c\ ;\ c \in \mathbb{C}\}$
- $S_m(\mathbb{R}^n) = \{f \in S(\mathbb{R}^n) \text{ tel que } \langle p, f\rangle = 0\ \forall p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)\}$.
- $S'_m(\mathbb{R}^n)$ *est le dual de* $S_m(\mathbb{R}^n)$.
- $[f]_m$ *la classe d'équivalence d'une disributions temperées* f *modulo* $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$.

Définition 2.1.3 (Espace de Banach de distributions) *Soit $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Un espace de Banach de distributions (E.B.D) modulo $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ dans $S'_m(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace vectoriel E de $S'_m(\mathbb{R}^n)$ muni d'une norme complète telle que l'injection canonique $E \hookrightarrow S'_m(\mathbb{R}^n)$ soit continue.*

Définition 2.1.4 *Soit f est une fonction ou une (distribution) sur $\mathbb{R}^n$, on définit les translatées et les dilatées de f par les formules:*

$$(\tau_a f)(x) = f(x-a) \quad , \quad (h_\lambda f)(x) = f\left(\frac{x}{\lambda}\right),$$

pour tous $a \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda > 0$.

Définition 2.1.5 (Invariance par translations et par dilatations) *Soit E un espace de Banach de distributions:*

- *E est dit invariant par translations si:*

$$\forall a \in \mathbb{R}^n, \forall f \in E : \tau_a(E) \subseteq E.$$

- *E est dit invariant par dilatations si:*

$$\forall \lambda > 0, \forall f \in E : h_\lambda(E) \subseteq E.$$

- *E est dit isométriquement invariant par translation si:*

$$\forall a \in \mathbb{R}^n, \forall f \in E : \|\tau_a f\|_E = \|f\|_E .$$

- *E est dit homogène de degré $r \in \mathbb{R}$ s'il est invariant par dilatation et si:*

$$\forall \lambda > 0, \forall f \in E : \|h_\lambda f\|_E = \lambda^{-r} \|f\|_E .$$

Définition 2.1.6 (Réalisations) *Soient m et k des éléments de $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tels que $0 \leq k \leq m$. Soit E un E.B.D. dans $S'_m(\mathbb{R}^n)$. Une réalisation de E modulo $\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n)$ dans $S'_k(\mathbb{R}^n)$ est une application linéaire continue $\sigma : E \hookrightarrow S'_k(\mathbb{R}^n)$ telle que $\forall f \in E$, la classe d'équivalence de $\sigma(f)$ égale à f, i.e: $[\sigma(f)]_m = f$.*

Remarque 2.1.1 *Pour tout $f \in E$, on a:*

- $\sigma(f)$ *est l'unique représentant de f dans $\sigma(E)$.*
- *Si $k = m$, il existe un unique réalisation trivial, c'est-à-dire l'injection canonique $E \hookrightarrow S'_m(\mathbb{R}^n)$.*
- *Si σ est une telle réalisation, alors σ est un isomorphisme linéaire de E sur $\sigma(E)$ qui est dès lors un E.B.D. dans $S'_k(\mathbb{R}^n)$, muni de la norme*

$$\|\sigma(f)\| = \|f\|_E \, .$$

Théorème 2.1.1 ([4] classification des réalisations) *Soit $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $k < m$ et E un E.B.D. dans $S'_m(\mathbb{R}^n)$.*

- *E admet une infinité de réalisation modulo $\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n)$ dans $S'_k(\mathbb{R}^n)$.*
- *Soit $\sigma_0 : E \longrightarrow S'_k(\mathbb{R}^n)$ une réalisation de E modulo $\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n)$. Si $(\mathcal{L}_\alpha)_{k \leq |\alpha| \leq N}$ une famille finie de formes linéaires continues sur E, alors la formule suivante définit une réalisation de E modulo $\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n)$ dans $S'_k(\mathbb{R}^n)$:*

$$\sigma(f)(x) = \sigma_0(f)(x) + \sum_{k \leq |\alpha| \leq N} \mathcal{L}_\alpha(f)\, x^\alpha.$$

Inversement, toute réalisation σ de E modulo $\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n)$ est de la forme ci-dessus.

Preuve. Voir [4, 5]. ■

Théorème 2.1.2 ([4] Réalisations invariantes par translations) *Soit E un E.B.D. dans $S'_m(\mathbb{R}^n)$, isométriquement invariant par translations, et $k < m$. Soit σ_0 une réalisation de E modulo $\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n)$, commutant aux translations. Soit $(\mathcal{L}_\alpha)_{k=|\alpha|}$ une famille finie de formes linéaires continues sur E, invariantes par translations au sens où $\mathcal{L}_\alpha \circ \tau_a = \mathcal{L}_\alpha$, pour tout $a \in \mathbb{R}^n$. Alors la formule suivante définit une réalisation de E modulo $\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n)$, qui commute aux translations:*

$$\sigma(f)(x) = \sigma_0(f)(x) + \sum_{k=|\alpha|} \mathcal{L}_\alpha(f)\, x^\alpha.$$

Inversement, toute réalisation σ de E modulo $\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n)$, commutant aux translations, est de la forme ci-dessus.

Preuve. Voir [4, 5]. ■

Théorème 2.1.3 ([4] Réalisations invariantes par dilatations) *Soit E un E.B.D. dans $S_m'(\mathbb{R}^n)$, invariant par dilatations et homogène de degré $r \in \mathbb{R}$, et soit $k < m$.*

- *Si $r \notin \{k, k+1, ...\}$, alors E admet au plus une réalisation modulo $\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n)$ qui commute aux dilatations.*

- *Supposons que r est un entier au moins égal à k. Soit $\sigma_0 : E \longrightarrow S_k'(\mathbb{R}^n)$ une réalisation de E modulo $\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n)$, commutant aux dilatations, et $(\mathcal{L}_\alpha)_{|\alpha|=r}$ une famille de formes linéaires continues sur E, telles que $\mathcal{L}_\alpha \circ h_\lambda = \lambda^{-r}\mathcal{L}_\alpha$, pour tout $\lambda > 0$. Alors la formule suivante définit une réalisation de E modulo $\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n)$ dans $S_k'(\mathbb{R}^n)$, qui commute aux dilatations:*

$$\sigma(f)(x) = \sigma_0(f)(x) + \sum_{|\alpha|=r} \mathcal{L}_\alpha(f)\, x^\alpha.$$

Inversement, toute réalisation σ de E modulo $\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n)$, commutant aux dilatations, est de la forme ci-dessus.

Preuve. Voir [4, 5]. ■

2.2 Réalisation des espaces de potensiel de Bessel $\dot{H}_p^s(\mathbb{R}^n)$

Proposition 2.2.1 *L'espace $\dot{H}_p^s(\mathbb{R}^n)$ est isométriquement invariant par translation et homogène de degré $s - \frac{n}{p}$.*

Proposition 2.2.2 *L'avantage de norme homogène réside dans leur comportement simple vis-à-vis de dilatation, on a en effet pour $\lambda > 0$*

$$\left\| f\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right\|_{\dot{H}_p^s(\mathbb{R}^n)} = \lambda^{\frac{n}{p}-s} \|f\|_{\dot{H}_p^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Théorème 2.2.1 *(Invariance par translations)*

- *Pour $s < \frac{n}{p}$, l'espace $\dot{H}_p^s(\mathbb{R}^n)$ admet une seule réalisation invariant par translation.*

- *Pour* $s > \frac{n}{p}$, *l'espace* $\dot{H}_p^s(\mathbb{R}^n)$ *n'admet aucune réalisation invariant par translation, il en est de même pour* $\dot{H}_p^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Voir [2]. ■

Théorème 2.2.2 *(Invariance par dilatations)*

- *Pour* $s - \frac{n}{p} \notin \mathbb{N}$, *l'espace* $\dot{H}_p^s(\mathbb{R}^n)$ *admet une seule réalisation invariant par dilatation.*

- *Pour* $s - \frac{n}{p} \in \mathbb{N}$, *l'espace* $\dot{H}_p^s(\mathbb{R}^n)$ *n'admet aucune réalisation invariant par dilatation.*

Preuve. Voir [2]. ■

2.3 Réalisations des espaces de Besov homogènes

Définition 2.3.1 *Une réalisation de* $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ *modulo* $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ *dans* $S'(\mathbb{R}^n)$ *est une application linéaire continue* $\sigma : \dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ *telle que* $\forall f \in \dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, $[\sigma(f)]_m = f$.

Remarque 2.3.1 *Dans le cas* $s < \frac{n}{p}$ *ou* $q \geq 1$ *on a*

$$\sigma(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} Q_k f.$$

Voir les travaux de Bourdaut et Moussai.

Proposition 2.3.1 *On a:*

- *L'espace* $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ *est un E.B.D. dans* $S'_\infty(\mathbb{R}^n)$, *isométriquement invariant par translation et homogène de degré* $s - \frac{n}{p}$.

- $\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} = \|f + p\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}$, *pour* $p \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 2.3.2 *Soit* $f \in S'_\infty(\mathbb{R}^n)$. *Alors* $f \in \dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ *si et seulement si les dérivées partielles* $\partial_j f$ *appartiennent à* $\dot{B}_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R}^n)$ *pour* $j = 1, ..., n$. *De plus l'expression suivante est équivalente à la norme de* $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$

$$\sum_{j=1}^{n} \|\partial_j f\|_{\dot{B}_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R}^n)}.$$

Preuve. Voir [4]. ■

Proposition 2.3.3 *Soit* $s \in]0,2]$ *et* $\forall a \in \mathbb{R}^n$, *alors*

$$\|\tau_a f\|_{\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}.$$

Preuve. Pour $s \in]0,1]$ on prend $x - a = y$, donc on a $dx = dy$, d'où

$$\|f(\cdot - a)\|_{\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}.$$

Pour $s \in]1,2]$ on a

$$\|f(\cdot - a)\|_{\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \sum_{j=1}^{n} \|\partial_j f(\cdot - a)\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \sum_{j=1}^{n} \|\partial_j f\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}.$$

■

Définition 2.3.2 (Distributions nulles à l'infini) *On dit qu'une distribution tempérée* $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ *tend vers 0 à l'infini si on a*

$$\lim_{\lambda \to 0} h_\lambda f = 0,$$

dans $S'(\mathbb{R}^n)$. *L'ensemble des telles distributions est noté* $\tilde{C}_0(\mathbb{R}^n)$ *vérifiant:*

$$\lim_{\lambda \to 0} \langle f\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right), \varphi\rangle = 0, \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Voici quelques exemples de distributios tend vers 0 à l'infini:

Proposition 2.3.4 ([6]) *Les éléments suivants de* $S'(\mathbb{R}^n)$ *tend vers 0 à l'infini:*

- *Les fonctions appartenant à* $C_0(\mathbb{R}^n)$ *ou à* $L^p(\mathbb{R}^n)$, *pour* $1 \leq p < \infty$.
- *Les dérivées des distributions appartenant à* $\tilde{C}_0(\mathbb{R}^n)$.
- *Les dérivées des fonctions continues* f *sur* $\mathbb{R}^n$ *telle que* $f(x) = \circ(|x|)$ *quand* $|x| \to \infty$.
- *Les éléments de tout E.B.D.* $E \subset S'(\mathbb{R}^n)$, *homogène de degré* $r < 0$.

Preuve. • Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Pour $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ et d'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}\left|\langle f\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right), \varphi\rangle\right| &\leq \|\varphi\|_{p'} \left\|f\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right)\right\|_p \\ &= \lambda^{\frac{n}{p}} \|\varphi\|_{p'} \|f\|_p ,\end{aligned}$$

d'où on déduit que

$$\lim_{\lambda\to 0}\langle f\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right), \varphi\rangle = 0,$$

donc $f \in \tilde{C}_0(\mathbb{R}^n)$.

• Soit une fonction continue f telle que $f(x) = \circ(|x|)$ à l'infini.Pour $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, on a

$$|\langle h_\lambda \partial_j f, \varphi\rangle| \leq |\lambda| \int_{\mathbb{R}^n} \left|f\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right| |\partial_j \varphi(x)| \, dx.$$

Pour un $\epsilon > 0$ donné, on choisit $R > 0$ tel que

$$\sup_{|x|\geq R} \frac{|f(x)|}{|x|} \leq \epsilon.$$

Soit

$$M(R) = \max_{|x|\leq R} |f(x)| .$$

Il vient alors

$$|\langle h_\lambda \partial_j f, \varphi\rangle| \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^n} |x| \, |\partial_j \varphi(x)| \, dx + |\lambda| \, M(R) \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_j \varphi(x)| \, dx,$$

d'où on déduit que

$$\lim_{\lambda\to 0}\langle h_\lambda \partial_j f, \varphi\rangle = 0.$$

■

Remarque 2.3.2 *Pour la preuve des autres voir* [6].

Proposition 2.3.5 *On a* $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n) \cap \tilde{C}_0(\mathbb{R}^n) = \{0\}$.

Preuve. Voir [2]. ■

2.4 Construction des réalisations

G.Bourdaud a donné la construction des réalisations pour les espaces de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ avec s, p, q et n quelconques. Cette construction dépend de ces paramètres que nous allons la donner par le théorème et les exemples suivants:

Théorème 2.4.1 *L'application σ_ν est définie sur $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. C'est une réalisation de $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ qui commute avec les translations et avec les dilatations. $\sigma_\nu(f)$ est l'unique réprésentant de f dont toutes les dérivées d'ordre $\nu = \nu(s,p,q,n)$ tend vers 0 à l'infini, on a en particulier*

$$\sigma_\nu(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_k f,$$

converge dans $S'_\nu(\mathbb{R}^n)$, vérifie $\partial^\alpha(\sigma_\nu(f)) \in \tilde{C}_0(\mathbb{R}^n)$, $|\alpha| = \nu$ telle que

$$\nu = \begin{cases} \max\left(\left[s - \frac{n}{p}\right] + 1, 0\right), \; si\ s - \frac{n}{p} \notin \mathbb{N}\ ou\ q > 1 \\ s - \frac{n}{p}, \; si\ s - \frac{n}{p} \in \mathbb{N}\ et\ q = 1 \end{cases}$$

Preuve. Voir [4]. ■

Exemple 2.4.1 $\dot{B}^1_{3,3}(\mathbb{R}^2)$

- $\nu = \max\left(\left[s - \frac{n}{p}\right] + 1, 0\right)$, *si* $s - \frac{n}{p} \notin \mathbb{N}$ *ou* $q > 1$,

  On a: $s - \frac{n}{p} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$, $\left[\frac{1}{3}\right] = 0$, *et:*

  $\nu = \max(0 + 1, 0) = 1$, *donc:*

  si $f \in \dot{B}^1_{3,3}(\mathbb{R}^2)$, *alors* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_k f$ *converge dans* $S'_1(\mathbb{R}^2)$.

Exemple 2.4.2 $\dot{B}^2_{3,1}(\mathbb{R}^3)$

- $\nu = s - \frac{n}{p}$, *si* $s - \frac{n}{p} \in \mathbb{N}$ *et* $q = 1$,

  On a: $s - \frac{n}{p} = 2 - \frac{3}{3} = 1 = \nu \in \mathbb{N}$, *donc:*

  si $f \in \dot{B}^2_{3,1}(\mathbb{R}^3)$, *alors* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_k f$ *converge dans* $S'_1(\mathbb{R}^3)$.

Remarque 2.4.1 *Dans le cas au* s, n, p *et* q *ne vérifient pas la condition*

$$s < \frac{n}{p} \text{ ou } q \geq 1$$

la réalisation de $\dot{B}^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *s'écrit*

$$\sigma(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (Q_k f + p_k).$$

Où $p_k \in \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n)$ *défini selon chaque cas.*

Théorème 2.4.2 *(Réalisations inariantes par translations)*

- *Pour* $s < \frac{n}{p}$ *et* $q < \infty$*, l'espace* $\dot{B}^{\frac{n}{p}}_{p,1}(\mathbb{R}^n)$ *admet une seule réalisation invariante par translations.*

- *Pour* $s > \frac{n}{p}$ *et* $q > 1$*, l'espace* $\dot{B}^{\frac{n}{p}}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *n'admet aucune réalisation invariante par translations.*

Preuve. Voir [2]. ■

Théorème 2.4.3 *(Réalisations invariantes par dilatatios)*

- *Si* $s - \frac{n}{p} \notin \mathbb{N}$*, alors* $\dot{B}^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *admet une seule réalisation invariante par dilatations.*

- *Si* $s - \frac{n}{p} \in \mathbb{N}$*, l'espace* $\dot{B}^{s}_{p,1}(\mathbb{R}^n)$ *admet une infinité de réalisations invariantes par dilatations.*

- *Si* $s - \frac{n}{p} \in \mathbb{N}$ *et* $q > 1$*, alors* $\dot{B}^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *n'admet aucune réalisation invariante par dilatations.*

Preuve. Voir [2]. ■

Proposition 2.4.1 *Les propriétés suivantes sont vérifiées:*

- *Pour tout* $f \in \dot{B}^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$*, les séries* $\sum_{k \in \mathbb{Z}} Q_k f$ *converges dans* $S'_\nu(\mathbb{R}^n)$*.*

- *si on définit* $\sigma_\nu(f)$ *la somme des séries* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_k f$ *dans* $S'_\nu(\mathbb{R}^n)$, *pour tout* $f \in \dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, *alors* σ_ν *est une réalisation invariant par translation (resp. dilatation) de* $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *dans* $S'_\nu(\mathbb{R}^n)$.
- $\sigma_\nu\left(\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right)$ *est l'ensemble de* $f \in S'_\nu(\mathbb{R}^n)$ *telle que* $[f] \in \dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *et* $f^{(\alpha)}$ *tend vers 0 à l'infini pour tout* $|\alpha| = \nu$.
- *nous avons* $\partial^\alpha \circ \sigma_\nu = \sigma_{(\nu-|\alpha|)_+} \circ \partial^\alpha$, *pour tout* $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Preuve. Voir [6]. ■

Remarque 2.4.2 *De la même manière on réalise les espaces de Lizorkin-Triebel* $\dot{F}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, *voir* [6].

Chapitre 3

Applications

Dans ce chapitre, a partir la définition de l'espace de Sobolev homogène $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$, on applique l'inégalité de Hardy sur les espaces réalisés, avec quelques exemples des fonctions dans $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

3.1 Espace de Sobolev homogène $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$

Définition 3.1.1 *$S_0(\mathbb{R}^n)$ est le sous-espace de $S(\mathbb{R}^n)$ constitué des fonctions u vérifiant*

$$\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha u(x)\,dx = 0,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Et on note $S_0'(\mathbb{R}^n)$ le dual de $S_0(\mathbb{R}^n)$. Cet espace s'identifie à $S'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 3.1.1 *Pour la définition de l'espace de Sobolev homogène $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$, voir les notations.*

Proposition 3.1.1 *Soit les inclusions de Sobolev:*

- $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)\ \left(\frac{n}{q} = \frac{n}{2} - s\right)$, *si* $s < \frac{n}{2}$.
- $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{C}^{s-\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$, *si* $s > \frac{n}{2}$.

Les fonctions des espaces réalisés vérifient une inégalité de type Hardy suivante:

Proposition 3.1.2 (Inégalité de type Hady) *Soit $s \geq 0$ et $s - \frac{n}{2} \notin \mathbb{N}$. Il existe une constante $c > 0$ telle que, pour toute fonction f de l'espace $\dot{H}^s_{\text{real}}(\mathbb{R}^n)$, on a*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^2}{|x|^{2s}} dx \leq c \|f\|^2_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} .$$

Preuve. Voir [3]. ■

3.2 Inégalité de Hardy

On définit $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ comme l'espace des distributions tempérées f, modulo les polynômes. On note par $\dot{B}^{s,\text{real}}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ la réalisation de $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 3.2.1 *Si $s - \frac{n}{p} > 0$, alors:*

- $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{C}^{s-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)$.

Nous avons la caractérisation suivante:

Définition 3.2.1 *Si $S < \frac{n}{p}$, la réalisation de $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace*

$$\dot{B}^{s,\text{real}}_{p,q}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \tilde{C}_0(\mathbb{R}^n) ; \ [f] \in \dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \right\} .$$

On a l'inégalité de Hady suivante:

Proposition 3.2.2 *Pour $p \geq q$, $s > 0$ avec $s - \frac{n}{p} \notin \mathbb{N}$ et pour toute $f \in \dot{B}^{s,\text{real}}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ on a*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^p}{|x|^{ps}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq c \|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} .$$

Preuve. Voir [12]. ■

Remarque 3.2.1 *On peut remplacer $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ par $\dot{B}^{s-\frac{n}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ dans la proposition, voir les travaux de Moussai [7].*

Remarque 3.2.2 *L'inégalité de Hardy est aussi valable pour les $\dot{F}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ car on a le prolongement $\dot{F}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{B}^{s-\frac{n}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$.*

Corollaire 3.2.1 *$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, l'opérateur de dérivation ∂^α envoie $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ dans $B^{s-|\alpha|}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Autrement dit, si $f \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ alors*

$$\partial^\alpha f \in B^{s-|\alpha|}_{p,q}(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. D'après l'inégalité de Bernstein on a:

$$\|Q_k(\partial^\alpha f)\|_p \leq c2^{k|\alpha|}\|Q_k f\|_p,$$

car

$$Q_k(\partial^\alpha f) = \partial^\alpha(Q_k f),$$

ce qui donne le résultat:

$$\left(\sum_{k\geq 0}\left(2^{k(s-|\alpha|)}\|Q_k(\partial^\alpha f)\|_p\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq c\left(\sum_{k\geq 0}\left(2^{sk}\|Q_k f\|_p\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

■

3.3 Exemples de fonctions dans $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$

Exemple 3.3.1 *Si $f = \delta$, (δ mesure de dirac). Alors $\mathcal{F}f = 1$ donc on a $f \in B^{-\frac{n}{p'}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ avec $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right)$. Un calcul formel donne*

$$Q_k\delta = \mathcal{F}^{-1}\gamma_k(.) * \delta = \mathcal{F}^{-1}\gamma_k(.)$$

où

$$\mathcal{F}^{-1}\gamma_k(x) = 2^{kn}\mathcal{F}^{-1}\gamma\left(2^k x\right),$$

comme

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}\gamma_k\right\|_p = 2^{k\frac{n}{p'}}\left\|\mathcal{F}^{-1}\gamma\right\|_p,$$

il vient alors

$$\|Q_k f\|_p = 2^{k\frac{n}{p'}}\left\|\mathcal{F}^{-1}\gamma\right\|_p,$$

c-à-d:

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(2^{-k\frac{n}{p'}}\|Q_k\delta\|_p\right) = \left\|\mathcal{F}^{-1}\gamma\right\|_p.$$

D'où

$$\delta \in B^{-\frac{n}{p'}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n).$$

Exemple 3.3.2 *Si $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ tel que $\hat{f}(\xi) = |\xi|^{-t}$, $t > 0$ donc on a $f \in B^{t-\frac{n}{p'}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$.On démontre cet exemple, on a:*

$$\lambda(\xi) = \mathcal{F}(R_0 f)(\xi) = |\xi|^{-t} \rho(\xi),$$

tel que

$$\operatorname{supp} \mathcal{F}(R_0 f) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 2\}.$$

Avec

$$\lambda(\xi) = \begin{cases} \hat{f}(\xi) & |\xi| \leq 1 \\ |\xi|^{-t} \rho(\xi) & |\xi| > 1. \end{cases}$$

Par l'inégalité de Bernstein, on obtient

$$\|R_0 f\|_p \leq c \|R_0 f\|_p,$$

alors

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}\lambda\right\|_p \leq c \left\|\mathcal{F}^{-1}\lambda\right\|_p, \quad \left\|\mathcal{F}^{-1}\lambda\right\|_p < \infty.$$

Et on a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(Q_k f)(\xi) &= |\xi|^{-t} \gamma\left(2^{-k}\xi\right) \\ &= 2^{-kt}\left|2^{-k}\xi\right|^{-t} \gamma\left(2^{-k}\xi\right), \end{aligned}$$

avec

$$\frac{1}{2}2^k \leq |\xi| \leq \frac{3}{2}2^k.$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \|Q_k f\|_p &\leq c\left\|\mathcal{F}^{-1}\left(|\xi|^{-t}\gamma\left(2^{-k}\xi\right)\right)\right\|_p \\ &= c2^{-kt}\left\|\mathcal{F}^{-1}\left(\left|2^{-k}\xi\right|^{-t}\gamma\left(2^{-k}\xi\right)\right)\right\|_p \\ &= c2^{-kt+k\frac{n}{p'}}\left\|2^{kn}\mathcal{F}^{-1}\left(|\xi|^{-t}\gamma(\xi)\left(2^k.\right)\right)\right\|_p \\ &= c2^{-kt+k\frac{n}{p'}}\left\|\mathcal{F}^{-1}\left(|\xi|^{-t}\gamma(\xi)\right)\right\|_p, \end{aligned}$$

ce qui implique le résultat

$$\|R_0 f\|_p + \sup_k 2^{k\left(t-\frac{n}{p'}\right)} \|Q_k f\|_p \leq c' < \infty.$$

D'où

$$f \in B^{t-\frac{n}{p'}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n).$$

Exemple 3.3.3 *Plus généralement, si $f \in S(\mathbb{R}^n)$ tel que*

$$\hat{f}(\xi) = |\xi|^{-t} (\log |\xi|)^{-\sigma}$$

avec $t > 0$ et $\sigma > 0$, alors

$$f \in B^{t-\frac{n}{p'}}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \;\; si \; q > \frac{1}{t}.$$

Pour la démonstration de cet exemple voir Peetre [8].

Remarque 3.3.1 *Les exemples précédents sont valables dans $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, en effet*

$$\delta \in \dot{B}^{-\frac{n}{p'}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n) \;\; où \; \frac{1}{p\prime} = 1 - \frac{1}{p},$$

$$f \in \dot{B}^{t-\frac{n}{p'}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$$

et

$$f \in \dot{B}^{t-\frac{n}{p'}}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \;\; si \; q > \frac{1}{t}.$$

Nous donnons quelques exemples de réalisations:

Exemple 3.3.4 *Pour $0 \leq s < \frac{n}{p}$ et $q = 1$. Soit*

$$f \in \dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n),$$

en utilisant l'inégalité de Bernstein pour $t > p$ on a

$$\begin{aligned} \|Q_k f\|_t &\leq c2^{nk\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{t}\right)} \|Q_k f\|_p \\ &\leq c2^{nk\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{t}\right)-sk} \epsilon_k, \end{aligned}$$

ou $\epsilon_k \in \ell^1(\mathbb{Z})$. En choisissant t telle que

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{t} = \frac{s}{n},$$

on réalise $\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)$, en ayant démontré la continuité de l'inclusion

$$\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n) \subset L^t(\mathbb{R}^n).$$

Exemple 3.3.5 *Pour $s = \frac{n}{p}$, $p < \infty$ et $q = 1$. Dans ce cas l'inégalité de Bernstein pour $t = \infty$ donnent*

$$\|Q_k f\|_\infty \leq c 2^{\frac{nk}{p}} \|Q_k f\|_p \leq c\ \epsilon_k.$$

Ainsi

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} Q_k f$$

converge normalemant dans C_0. Or

$$C_0 \cap \mathcal{P} = \{0\}.$$

On réalise alors

$$\dot{B}^{\frac{n}{p}}_{p,1}(\mathbb{R}^n) \subset C_0.$$

Conclusion

Dans ce mémoire si $f \in \dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ avec $s < \frac{n}{p}$ ou $q \geq 1$, on a la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} Q_k f$ converge dans $S'_\nu(\mathbb{R}^n)$, en notant $\sigma_\nu(f)$ la somme de cette série dans $S'_\nu(\mathbb{R}^n)$ où $\nu = \max\left(\left[s - \frac{n}{p}\right] + 1, 0\right)$, on définit ainsi une réalisation de $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ dans $S'_\nu(\mathbb{R}^n)$, qui commute aux translations et aux dilatations.

Bibliographie

[1] J.Bergh et J.Löfstrom, *Interpolation spaces*, Springer, 1976.

[2] G.Bourdaud, *Réalisations des espaces de Besov homogènes*, Ark. Mat. 26, 41-54, 1988.

[3] G.Bourdaud, *Localisation et multiplicateurs des espaces de Sobolev homogènes*, Manuscripta Math. 60, 93-130, 1988.

[4] G.Bourdaud, *Ce qu'il faut savoir sur les espaces de Besov*, Préprint, Paris, 2009.

[5] G.Bourdaud, *Realizations of homogeneous Sobolev spaces*, Complex Variables and Elliptic Equations. 56, 857-874, 2011.

[6] G.Bourdaud, *Realizations of homogeneous Besov and Lizorkin-Triebel spaces*, Math. Nachr. 1-16, 2012.

[7] M.Moussai, *Realizations of homogeneous Besov and Triebel-Lizorkin spaces and applications to pointwise multiplications*, Anal. App, 2014.

[8] J.Peetre, *New thoughts on Besov spaces*, Duke Univ. Math. series 1, Durham, 1976.

[9] T.Runst, W.Sickel. *Sobolev spaces of fractional order, Nemytskij operators and nonlinear partial differential equations,* Walter de Gruyter, Berlin, 1996.

[10] H.Triebel, *Theory of function spaces*, Birkhäuser, Basel, 1983.

[11] H.Triebel, *Theory of function spaces II*, Birkhäuser, Basel, 1992.

[12] A.Youssfi, *Localisation des espaces de Lizorkin-Triebel homogènes*. Math. Nachr. 147, 107-121, 1990.