

THE UNIVERSITY OF NEW SOUTH
WALES

SCHOOL OF ELECTRICAL ENGINEERING AND
COMPUTER SCIENCE AND ENGINEERING

Université de M'sila

SAOUDI

Master en Mathématiques

Juin 2010

Supervisor: Prof.M. NADIR

Assessor: Mr. B. GAGUI

Table des matières

1	Analyse fonctionnelle des équation intégrales	1
1.1	Opérateur intégral linéaire	1
1.1.1	Opérateur compact	1
1.1.2	Opérateur adjoint	2
1.2	<i>Classification des équations intégrales</i>	2
1.3	Existence et unicité de la solution	4
1.3.1	Théorème de Riesz et Alternative de Fredholm	4
2	Méthodes approximatives et implémentations	6
2.1	Méthode de collocation :	6
2.2	Séries de Neumann :	9
2.2.1	Noyaux itérés :	9
2.2.2	Séries de Neumann :	9
2.2.3	Méthode de produit d'intégration :	12
2.2.4	Méthode de collocation et la méthode de Nyström	14
2.2.5	Méthode de Produit intégration	15

Table des figures

Liste des tableaux

Chapitre 1

Analyse fonctionnelle des équations intégrales

1.1 Opérateur intégral linéaire

Soit

$$k : C([a, b]) \times C([a, b]) \rightarrow R$$

une fonction continue, Alors on définit l'opérateur intégral linéaire sur $C([a, b])$ par la formule suivante

$$A : \Psi \in C([a, b]) \rightarrow C([a, b]) \tag{1.1}$$

$$(A\Psi)(x) = \int_a^b K(x, y) \Psi(y) dy \tag{1.2}$$

la fonction K s'appelle noyau de l'opérateur intégral A

1.1.1 Opérateur compact

Un opérateur linéaire A entre deux espaces normés est dit compact si l'image de la boule unité B_X de X est relativement compact i.e; si $\overline{A(B_X)}$ est compact.

Ceci est équivalent à dire que pour toute suite bornée (φ_n) de X , On peut extraire de $(A\varphi_n)$ une sous suite convergente dans Y .

Remarque 1 *L'identité sur un espace normé X n'est pas compacte sauf si X est de dimension finie .*

Aussi, en dimension infinie, un opérateur compact n'est jamais bijectif .

1.1.2 Opérateur adjoint

On considère $C(D)$ muni du produit scalaire identique à celui défini sur $L^2(D)$ par

$$\forall (f, g) \in C([a, b])^2 : \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$$

Ce produit scalaire permet de définir la notion d'orthogonalité, Ainsi que celle d'adjoint, On dit que

$$A : C([a, b]) \rightarrow C([a, b]), B : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$$

Sont adjoints s'ils vérifient

$$\forall (f, g) \in C([a, b])^2 : \langle Af, g \rangle = \langle f, Bg \rangle \quad (1.3)$$

Si un opérateur A admet un adjoint B , alors cet adjoint est unique et unique .

1.2 Classification des équations intégrales

a-Equations intégrales linéaires

Une équation à une inconnue φ de la forme

$$\varphi(x) + f(x) = \lambda \int_{\Omega} k(x, t) \varphi(t) dt \quad (1.4)$$

est appelée équation intégrale, avec $f(x)$ et $k(x, t)$ sont deux fonctions connues, λ un paramètre numérique et Ω un ensemble borné et fermé d'un espace euclidien .

1-Equations intégrales de Fredholm

i) Une équation à une inconnue φ de la forme

$$\varphi(x) + f(x) = \lambda \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt$$

est appelée équation intégrales de Fredholm de deuxième espèce .

ii) Si $\varphi(x) = 0$ l'équation (1.4) s'écrit sous la forme

$$f(x) = \lambda \int_{\Omega} k(x, t)\varphi(t)dt \quad (1.5)$$

est appelée équation intégrale de Fredholm de première espèce .

1- Si $f(x) \neq 0$ l'équation (1.4) est dite non homogène

2- Si $f(x) = 0$ l'équation (1.4) est dite homogène

2- Equation intégrales de Volterra

a) On appelle équation intégrale de Volterra de deuxième espèce une équation de la forme :

$$\varphi(x) + f(x) = \lambda \int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt \quad (1.6)$$

b) Si $\varphi(x) = 0$ l'équation (1.6) s'écrit sous la forme :

$$f(x) = \lambda \int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt \quad (1.7)$$

est appelée équation intégrale de Volterra de première espèce .

i) Si $f(x) \neq 0$ l'équation (1.6)est dite non homogène .

ii) Si $f(x) = 0$ l'équation (1.6) est dite homogène .

b) Equation intégrales non linéaire

1) Equations intégrales de Fredholm

a) Une équation de la forme

$$\varphi(x) + f(x) = \lambda \int_a^b k(x, t, \varphi(t))dt \quad (1.8)$$

est appelée équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce non linéaire .

b) Si $\varphi(x) = 0$ l'équation (1.8) s'écrit sous la forme :

$$f(x) = \lambda \int_a^b k(x, t, \varphi(t))dt \quad (1.9)$$

est appelée équation intégrale de Fredholm de première espèce non linéaire.

2) Equations intégrales de Volterra

a)On appelle équation intégrale de volterra de deuxième espèce non linéaire une équation de la forme :

$$\varphi(x) + f(x) = \lambda \int_a^x k(x, t\varphi(t))dt \quad (1.10)$$

b)Si $\varphi(x) = 0$ l'équation(1.10) s'écrit sous la forme :

$$\lambda \int_a^x k(x, t, \varphi(t)) dt \quad (1.11)$$

Est appelée équation intégrale de volterra de première espèce non linéaire .

1.3 Existence et unicité de la solution

1.3.1 Théorème de Riesz et Alternative de Fredholm

On considère un opérateur compact A définie d'un espace normé E dans lui même .

Alors l'opérateur $L = I - A$ a les propriétés suivante :

a) L'espace nul de l'opérateur L i.e. le noyau de l'opérateur L

$$\ker(L) = \{\varphi \in X : L\varphi = 0\}$$

est un sous-espace de dimension finie.

b) L'image de l'opérateur L i.e.

$$\text{Im } L = \{L\varphi : \varphi \in X\}$$

est un sous-espace linéaire fermé et de co-dimension fini .

c) Il existe un unique $r \in \mathbb{N}$ nombre de Riesz de l'opérateur A tel que

$$\{0\} = \ker(L^0) \subset \ker(L^1) \subset \dots \subset \ker(L^r) = \ker(L^{r+1}) = \dots$$

$$E = \text{Im}(L^0) \supset \text{Im}(L^1) \supset \dots \supset \text{Im}(L^r) = \text{Im}(L^{r+1}) = \dots$$

Et on a la somme directe

$$E = \ker(L^r) \oplus \text{Im}(L^r)$$

De plus $(I - A)$ est injectif si et seulement si il est surjectif.

Dans ce cas $(I - A)$ inversible, et son inverse $(I - A)^{-1}$ est un opérateur borné.

Alternative de Fredholm :

On considère les deux équations de deuxième duale l'une de l'autre :

$$(I - A)u = f \quad (1.12)$$

$$(I - A^*)v = g \quad (1.13)$$

où A^* est l'adjoint de A , alors on a l'alternative suivante :

i) Ou bien les deux équations homogènes

$$(I - A)u = 0$$

et

$$(I - A^*)v = 0$$

ne possèdent que les solutions triviales $u = 0$ et $v = 0$.

- Dans ce cas (1.12) et (1.13) admettent une solution unique pour toute f et g dans E

ii) Ou bien les deux équations homogènes

$$(I - A)u = 0$$

et

$$(I - A^*)v = 0$$

possèdent le même nombre des solutions m linéairement indépendantes

u_j et v_j ($j = 1, 2, \dots, m$) respectivement et les solutions de (1.12) et (1.13) existent si et seulement si $\langle u_j, f \rangle = 0$ et $\langle v_j, g \rangle = 0$ pour tout $j = 1, 2, \dots, m$.

Chapitre 2

Méthodes approximatives et implémentations

2.1 Méthode de colocation :

On considère l'équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce

$$\varphi(x) - \int_a^b k(x,t) \varphi(t) dt = f(x) \quad , \quad a \leq x \leq b \quad (2.1)$$

Remarque générales :

Récrivons l'équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce sous la forme

$$R[\varphi(x)] = \varphi(x) - \int_a^b k(x,t) \varphi_n(t) dt - f(x) \quad (2.2)$$

Cherchons la solution approchée de l'équation (2.1) dans le cas spécial

$$\varphi_n(x) = \phi(x, A_1, A_2, \dots, A_n) \quad (2.3)$$

Avec les paramètres libres A_1, A_2, \dots, A_n (coefficient indéterminé), dessus substitution de l'expression (2.3) dans l'équation (2.1) nous obtenons le résidu

$$R[\varphi_n(x)] = \varphi_n(x) - \int_a^b k(x,t) \varphi_n(t) dt - f(x)$$

Si $\varphi(x)$ est une solution exacte, alors le résidu $R[\varphi(x)] = 0$

Le résidu $R[\varphi_n(x)]$ peut être réduit au minimum de plusieurs manière, habituellement à simplifier les calculs, à fonctions $\varphi_n(x)$ linéairements dépendentes

selon les paramètres A_1, A_2, \dots, A_n est prend à la conclusion des paramètres A_1, A_2, \dots, A_n nous obtenons la solution approchée (2.3).

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$, alors en prenant suffisamment grand nombre des paramètres A_1, A_2, \dots, A_n nous constatons que la solution $\varphi(x)$ peut être trouvé pour un arbitraire précision donnée.

Décrivons maintenant la méthode concrète de construction d'une solution approchée

$\varphi_n(x)$.

Soit la solution approchée φ_n donnée par

$$\varphi_n(x) = \phi_0(x) + \sum_{i=1}^n A_i \phi_i(x) \quad (2.4)$$

où

$$\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x)$$

sont des fonctions données (fonctions de même rang) et A_1, A_2, \dots, A_n sont des coefficients indéterminés, où les fonctions $\phi_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) sont linéairement indépendant.

De particulier nous pouvons prend $\varphi_0(x) = f(x)$ où $\varphi_0(x) = 0$ à la substitution de l'expression (2.4) dans l'équation (2.2) on obtient le résidu :

$$R[\varphi_n(x)] = \phi_0(x) + \sum_{i=1}^n A_i \phi_i(x) - f(x) - \lambda \int_a^b k(x, t) \left[\phi_0(t) + \sum_{i=1}^n A_i \phi_i(t) \right] dt$$

Avec

$$R[\varphi_n(x)] = \psi_0(x, \lambda) + \sum_{i=1}^n A_i \psi_i(x, \lambda) \quad (2.5)$$

où

$$\begin{aligned} \psi_0(x, \lambda) &= \phi_0(x) - f(x) - \lambda \int_a^b k(x, t) \phi_0(t) dt \\ \psi_i(x, \lambda) &= \phi_i(x) - \lambda \int_a^b k(x, t) \phi_i(t) dt \end{aligned} \quad (2.6)$$

On a

$$\begin{aligned} R[\varphi_n(x_j)] &= 0 \\ j &= 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

où

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n \leq b$$

Il est pratique commune de placer $x_1 = a$ et $x_n = b$, ceci, ainsi que la formule (2.5) implique le système linéaire algébrique

$$\sum_{i=1}^n A_i \psi_i(x_j, \lambda) = \psi_0(x_j, \lambda) \tag{2.7}$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

pour les coefficient A_1, A_2, \dots, A_n si le déterminant du système (2.7) est non nul

$$\det \psi(x_j, \lambda) = \begin{vmatrix} \psi_1(x_1, \lambda) & \psi_1(x_2, \lambda) & \dots & \psi_1(x_n, \lambda) \\ \psi_2(x_1, \lambda) & \psi_2(x_2, \lambda) & \dots & \psi_2(x_n, \lambda) \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ \psi_n(x_1, \lambda) & \psi_n(x_2, \lambda) & \dots & \psi_n(x_n, \lambda) \end{vmatrix} \neq 0 \dots (8)$$

Le système (2.7) détermine les nombres A_1, A_2, \dots, A_n et par conséquent la solution approximative φ_n de l'équation intégrale.

Convergence et estimation de l'erreur :

Soit $A : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$ un opérateur borné et soit l'opérateur $P_n : C([a, b]) \rightarrow X_n$ de projection

Avec $X_n = span \{ \varphi_0^{(n)}, \dots, \varphi_n^{(n)} \} \subset C[a, b]$ satisfait :

$$i) \|P_n A - A\|_\infty \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$$

$$ii) P_n f(x_i) = f(x_i), i = 1, 2, \dots, n$$

Alors por tout $n \geq N$, l'opérateur $(I - \lambda P_n A)^{-1} : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$, existe et est borné, tel que

$$\sup \|(I - \lambda P_n A)^{-1}\| < \infty.$$

Et on a $\varphi - \varphi_n = (I - \lambda P_n A)^{-1} (\varphi - \lambda P_n \varphi)$ tel que $P_n \varphi = \sum_{i=1}^n A_i \psi_i(x)$ et les deux coté de l'erreue est estimée par :

$$\frac{|\lambda|}{\|I - \lambda P_n A\|} \|\varphi - P_n \varphi\| \leq \|\varphi - \varphi_n\| \leq |\lambda| \|(I - \lambda P_n A)^{-1}\| \|\varphi - P_n \varphi\|$$

Ce qui veut dire que $\|\varphi - \varphi_n\|$ convergence ver zéro exactement avec la même vitesse que $\|\varphi - P_n \varphi\|$.

2.2 Séries de Neumann :

2.2.1 Noyaux itérés :

On définit les noyaux itérés $k_n(x, t)$ par la formule suivante :

$$k_n(x, t) = \int_a^b k(x, s) k_{n-1}(s, t) ds \quad (2.8)$$

où $n = 1, 2, \dots$

Et nous avons $k_0(x, t) = k(x, t)$

Ces noyaux satisfont la relation

$$k_n(x, t) = \int_a^b k_m(x, s) k_{n-m}(s, t) ds \quad (2.9)$$

Où m est entier positif quelconque.

Les noyaux itérés $k_n(x, t)$ peuvent être directement exprimés par le noyau de $k(x, t)$ par la formule :

$$k_n(x, t) = \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b k(x, s_1) k(s_1, s_2) \dots K(s_{n-1}, t) ds_1 ds_2 \dots ds_{n-1}$$

2.2.2 Séries de Neumann :

Cette méthode n'utilise pas les propriétés hilbertiennes telles que le produit scalaire, le projections.

Soit l'équation intégrale de Fredholm

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt$$

qu'on peut écrire aussi sous la forme

$$\varphi - \lambda A(\varphi) = f$$

L'existence de la solution pour cette équation dépend de l'existence de l'inverse de l'opérateur $(I - A)$ i.e $(I - A)^{-1}$

Théorème :(de Banach)

Soit E un espace de Banach et A un opérateur linéaire continue de $E \rightarrow E$

Si $\|A\| \leq q < 1$.

Alors l'opérateur $(I - A)$ est inversible et son inverse $(I - A)^{-1}$ est donné par

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n.$$

On approche donc la solution φ par $\varphi_n = M_n f$, où $M_n = \sum_{i=1}^n \lambda^n k^i$

En réalité, on calcule cette somme par récurrence, Et par l'utilisation des noyaux itérés

Alors l'expression de $\varphi_n(x)$ est définie par :

$$\varphi_n(x) = \int_a^b M_n(x, t) f(t) dt$$

Avec

$$M_n(x, t) = \sum_{i=1}^n \lambda^n k_i(x, t)$$

Méthode de Nyström

Les formes quadratures :

La méthode de Nyström utilise les formules des quadratures consistent à construire la solution d'une équation intégrale en besoin de la formule suivante :

$$\begin{aligned} Q(\psi) &= \int_a^b \psi(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \psi(x_i) + \epsilon_n[\psi] \dots (20) \end{aligned}$$

Avec

$-x_i (i = 1, 2, \dots, n)$:Les noeuds d'interpolations de la quadrature.

$-\alpha_i (i = 1, 2, \dots, n)$:Les coefficients numériques indépendants de $\psi(x)$.

$-\epsilon_n[\psi]$: L'erreur de troncature de la formule (20), telles que

$$\alpha_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n \alpha_i = b - a$$

Cette méthode, aussi appelée méthode de quadrature, consiste à appliquer les méthodes numériques de calcul d'intégrales pour obtenir un système linéaire.

On souhaite approximer l'opérateur A défini par :

$$\forall x \in [a, b], (A\varphi)(x) = \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt$$

pour ce faire, on se donne des règles de quadrature (Q_n) pour calculer l'intégrale de noyau via des points $(x_i^n)_{1 \leq i \leq n}$ ainsi que des points $(\alpha_i^{(n)})_{1 \leq i \leq n}$ d'où l'introduction d'un nouvel opérateur A_n

$$\forall x \in [a, b] (A_n\varphi)(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k^{(n)} k(x, x_k^{(n)}) \varphi(x_k^{(n)})$$

Remarque

On peut voir ces règles de quadratures comme une suite des opérateurs $Q_n : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$.

On dira que ces règles seront convergentes si elles convergent point à point, i.e. si :

$$\forall f \in C([a, b]) : Q_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f$$

Alors on va approcher la solution φ de l'équation $\varphi - A\varphi = f$ par la solution φ_n de problème $\varphi_n - A_n\varphi_n = f$.

Théorème : Méthode de Nyström

Soit φ_n comme décrit précédemment.

Alors les valeurs $\varphi_j^{(n)} = \varphi_n(x_j^{(n)})$ sont des solutions du système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} (1 - \alpha_1 k_{11}) & (-\alpha_2 k_{12}) & \dots & (\alpha_n k_{1n}) \\ (-\alpha_1 k_{21}) & (1 - \alpha_2 k_{22}) & \dots & (\alpha_n k_{2n}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (-\alpha_1 k_{n1}) & (-\alpha_2 k_{n2}) & \dots & (1 - \alpha_n k_{nn}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1^{(n)} \\ \varphi_2^{(n)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_n^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1^{(n)}) \\ f(x_2^{(n)}) \\ \cdot \\ \cdot \\ f(x_n^{(n)}) \end{bmatrix} \dots (30)$$

Où $k_{ij} = k(x_i, x_j)$

Réciproquement, si on donne une solution $(\varphi_j^{(n)})_{1 \leq i \leq n}$ du système (30) alors la fonction φ_n définie par :

$$\varphi_n(x) = f(x) + \sum_{k=1}^n \alpha_k^{(n)} k(x, x_k^{(n)}) \varphi_k^{(n)}$$

D'après le règle de Simpson, on a

$$\alpha_1 = \alpha_{2m+1} = \frac{1}{n}h, \alpha_2 = \dots = \alpha_{2m} = \frac{4}{3}h, \alpha_3 = \dots = \alpha_{2m+3} = \frac{2}{3}h$$

$$h = \frac{b-a}{n-1}, x_i = a + h(i-1), (n = 2m+1, i = 1, 2, \dots, n)$$

2.2.3 Méthode de produit d'intégration :

Considérons l'équation intégrales de Fredholm de deuxième espèce

$$\varphi(x) - \int_a^b k(x, t) \varphi(t) = f(x), a \leq x \leq b \quad (2.10)$$

Le problème a de trouver la fonction φ , où la fonction $f(x)$ est donnée et le noyau $k(x, t)$ sous la forme de singularités

on utilise deux forme :

$$i) k(x, t) = L(x, t) \log|x-t| \quad (2.11)$$

$$ii) k(x, t) = L(x, t) |x-t|^{-\alpha}, \alpha < 1 \quad (2.12)$$

Où $L(x, t)$ n'admet pas de singularité

Dans cette partie on applique la méthode de produit d'intégration pour obtenir la solution φ de l'équation (2.10) avec la forme de noyau (2.11) ou (2.12).

On trouve la forme (2.11) pour le noyau singulière $k(x, t)$.

Alors on peut écrire l'équation (2.10) sous la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b L(x, t) \log|x-t| \varphi(t) dt, a \leq x \leq b$$

Soit

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

Une subdivision de $[a, b]$ avec $h = x_{i+1} - x_i$

$$L(x, t)\varphi(t) = L_i(x) (x_{i+1} - t) \varphi_i + L_{i+1}(t - x_i) \varphi_{i+1}.$$

Où

$$L_i(x) = L(x, x_i) \text{ et } \varphi_i = \varphi(x_i).$$

Donc

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{N-1} L_i(x) \varphi_i \phi_{ii+1}^1(x) + L_{i+1}(x) \varphi_{i+1} \phi_{ii+1}^2(x) + f(x) \quad (2.13)$$

Où

$$\phi_{ii+1}^1 = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - t) \log |x - t| dt.$$

Et

$$\phi_{ii+1}^2 = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (t - x_i) \log |x - t| dt.$$

Substitution $x = x_j$ dans (2.13) et la combinaison des deux sommes, alors on a le système des équations suivante :

$$\varphi_j = \sum_{j=1}^N L_{ji} \varphi_i [\phi_{ii+1j}^1(x) + \phi_{i-1ij}^2(x)] + f_j, j = 1, 2, \dots, N. \quad (2.14)$$

Où

$$\phi_{ijk}^\ell = \phi_{ij}^\ell(x_k), \ell = 1, 2, \dots \text{ et } f_j = f(x_j)$$

Erreur analytique et convergence :

Considérons l'équation suivante :

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b L(x, t) g(x, t) \varphi(t) dt = f(x)$$

avec $L(x, t)$ est continue, pour le noyau $g(x, t)$, on trouve :

$$C_g = \sup_{a \leq x \leq b} \int_a^b |g(x, t)| dt < \infty \dots (21)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} w_g(h) = 0$$

Où

$$w_g(h) = \sup_{\substack{|x-z| \leq h \\ a \leq x, z \leq b}} \int_a^b |g(x, z)g(z, t)| dt \dots (22)$$

Les deux propriétés sont juste pour $\log |x - t|$ et $|x - t|^{\alpha-1}$, $\alpha > 0$

Théorème :

on considère la fonction $g(x, t)$ satisfait les deux propriété (21) et (22), avec $L(x, t)$ est continue pour tout $a \leq x, t \leq b$, et soit l'équation intégrale suivante :

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b L(x,t)g(x,t)\varphi(t) dt = f(x), a \leq x \leq b$$

Alors l'équation admette une solution unique.

Considérons l'équation

$$k_n \varphi(x) = \int_a^b [L(x,t)\varphi(t)]_n g(x,t) dt \dots (23)$$

Avec

$$[L(x,t)\varphi(t)]_n = \frac{1}{h} [(x_j - t) L(x, x_{j-1}) \varphi(x_{j-1}) + (t - x_{j-1}) L(x, x_j) \varphi(x_j)]$$

Alors, pour n assez grand, l'équation (23) admet une solution unique, avec inverse borné

$$\|\varphi - \varphi_n\|_\infty \leq c \|k\varphi - k_n\varphi\|_\infty, n \geq N$$

pour $c > 0$.

2.2.4 Méthode de collocation et la méthode de Nyström

Soit l'équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce

$$\varphi(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 (x+1) \exp(-xt) \varphi(t) dt = \exp(-x) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \exp(-(x+1)), 0 \leq x \leq 1$$

Avec la solution exacte $\varphi(x) = \exp(-x)$

- Méthode de collocation donne

n	x=0	x=0,25	x=0,5	x=0,75	x=1
	erreue $ \varphi - \varphi_n $	erreue $ \varphi - \varphi_n $	erreue $ \varphi - \varphi_n $	erreur $ \varphi - \varphi_n $	erreur $ \varphi - \varphi_n $
4	0,004808	0,005430	0,006178	0,007128	0,008331
8	0,001199	0,001354	0,001541	0,001778	0,002078
16	0,000300	0,000338	0,000385	0,000444	0,000519

Tableau 1

- Méthode de Nyström donne

n	x=0	x=0,25	x=0,5	x=0,75	x=1
	erreure $ \varphi - \varphi_n $	erreure $ \varphi - \varphi_n $	erreure $ \varphi - \varphi_n $	erreure $ \varphi - \varphi_n $	erreure $ \varphi - \varphi_n $
4	0,00006652	0,00008311	0,000109	0,00015066	0,0002141
8	0,00000422	0,00000527	0,00000692	0,000000956	0,000013
16	0,00000066	0,00000033	0,00000043	0,00000060	0,00000086

2.2.5 Méthode de Produit intégration

Soit l'équation intégrale de fredholm de deuxième espèce

$$\varphi(x) - \int_0^\pi \log |\cos x - \cos t| \varphi(t) dt = 1, 0 \leq x \leq 1 \dots (2)$$

avec la solution exacte $\varphi(t) = \frac{1}{1+\log 2}$

On a

$$\begin{aligned} \log |\cos x - \cos t| &= \log \left\{ \frac{\sin((x-t)/2) \sin((x+t)/2)}{((x-t)/2)(x+t)(2\pi-x-t)} \right\} \\ &\quad + \log |x-t| + \log(2\pi-x-t) \\ &\quad + \log(x+t) \end{aligned}$$

Alors

$$\log |\cos x - \cos t| = \sum_{i=1}^4 p_i(x, t) \tilde{k}_i(x, t)$$

Tel que

$$p_1(x, t) = 1, p_2(x, t) = \log |x-t|, p_3 = \log(2\pi-x-t), p_4(x, t) = \log(x+t)$$

Et

$$\tilde{k}_1(x, t) \log \left\{ \frac{\sin((x-t)/2) \sin((x+t)/2)}{((x-t)/2)(x+t)(2\pi-x-t)} \right\}, \tilde{k}_2(x, t) = \tilde{k}_3(x, t) = \tilde{k}_4(x, t) = 1$$

Donc on peut écrire l'équation (2) sous la forme

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 1 + \int_0^\pi p_1(x, t) \tilde{k}_1(x, t) dt + \int_0^\pi p_2(x, t) \tilde{k}_2(x, t) dt \\ &\quad + \int_0^\pi p_3(x, t) \tilde{k}_3(x, t) dt + \int_0^\pi p_4(x, t) \tilde{k}_4(x, t) dt \end{aligned}$$

n	3	5	9	17	33
$x_n(0)$	0,31449048	0,31468781	0,31470316	0,31470422	0,31470429
erreur	2,14E-4	1,64E-5	1,13E-6	7,25E-8	4,56E-9

Tablau2

Bibliographie

- [1] Delves L.M., Mohamed J.L. *Computational Methods for Integral Equations*, Cambridge University Press, 1995.
- [2] GAGUI. B, Nadir. M . : *Résolution des Equations Intégrales par les Méthodes Adaptatives*, Thèse Magister, Département de Mathématiques, Université de M'SILA, 2006.
- [3] Jacques, Rappaz et Marco, Picasso . : *Introduction à l'analyse numérique*, Press polytechniques et universitaires romandes, lausanne, 1998.
- [4] Jean-Pierre Demailly . : *Analyse numérique et équations différentielles*, Presses Universitaires de Grenoble, 1994.
- [5] kendall E. Atkinson , *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*, Cambridge University Press, 1997.
- [6] Kress, Rainer . : *Linear integral equations*, second edition, Springer, Göttingen, Octobre 1998.
- [7] M. Krasnov, A. Kisselev, G. Makarenko . : *Equations intégrales problèmes et exercices*, Edition MIR, Moscou.
- [8] Mostefa. NAIDR, *Equations intégrales*, Cours master, Université de M'sila, 2010-2011
- [9] Peter Linz, *Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations*, SIAM Studies in Applied Mathematics, 1985.
- [10] Rahmoun. A, Nadir. M . : *Résolution Numérique des Equations Intégrales*, Thèse Magister, Département de Mathématiques, Université de M'SILA, 2004.