



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse mathématique et numérique

Thème

Étude une classe des équations intégral-différentielles de type Volterra d'ordre fractionnaire avec condition à la limite non locale

Présenté par :
M^{elle} NEDJAI Naziha

Soutenu publiquement le : 23/09/2020.

Devant le jury composé de :

Président :	M ^r GAGUI Bachir	M.C.A,	Université de M'sila
Encadreur :	M ^r NOUIRI Brahim	M.C.A,	Université de M'sila
Co-Encadreur :	M ^r ABDELKBIR Saad	M.A.A,	Université de M'sila
Examineur :	M ^r FERAHTIA Nacim	M.A.A,	Université de M'sila

Remerciements

Nous aimerons en premier lieu remercier notre dieu Allah qui nous donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

Nous tiennons à remercier vivement notre encadreur du mémoire Monsieur Mouiri Brahim professeur. Nous remercions également le membre de jury Monsieur Gagui Bachir et Monsieur Feraktia Macim. Je remercie aussi Co-encadreur monsieur Monsieur Abdelkebir Saad qui m'a bien aider.

Enfin nous adressons nos sincères remerciements à tous enseignants de Faculté des Mathématiques et de l'Informatique.

Merci à tout ceux qui on contribué, de pré ou de loin, à l'aboutissement de ce travail.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

À ce qui le plus cher, à ma mère et ma soeur Ommari

Imane ce qui était un bon soutien pour moi

à mon père qui m'a soutenu et m'aide pour arriver d'ici

Toute ma famille.

Et à tous ceux qui se fatiguent pour réussir leur avenir.

N. Nazika

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié une classe d'équations intégró-différentielles fractionnaires de type Volterra avec une condition à la limite non locale. D'abord, nous avons démontré un résultat d'existence et d'unicité de la solution de ce problème en utilisant le théorème de point fixe. Une approche numérique proposée basée sur les polynômes de Tchebychev décalés de la première espèce pour résoudre ce problème. La fonction inconnue est écrite comme une série de Tchebychev avec des m termes. Notre problème est réduit à un système d'équations algébriques linéaires ou non linéaire suivant la fonction F en utilisant les propriétés des polynômes de Tchebychev et la méthode d'intégration de Gauss-Tchebychev. Une attention particulière est accordée à l'étude de la convergence. Dans ce cas, la méthode de Newton est appliquée pour résoudre ce système. Enfin, quatre exemples numériques sont présentés pour confirmer la fiabilité et l'efficacité de cette approche numérique.

Mots-Clés : Équation intégró-différentielle fractionnaire de type Volterra, Méthode de point fixe, Méthode de Newton, Méthode de Gauss-Tchebychev, Polynômes de Tchebychev.

In this memoir, we have studied a class of fractional Volterra integro-differential equations with non-local boundary condition. First, we have proved a result of existence and uniqueness of the solution of this problem in a useful fixed point theorem. A proposed numerical approach based on shifted Chebyshev polynomials of the first kind to solve this problem. The unknown function is written as a Chebyshev series with m terms. Our problem is reduced to a system of linear or nonlinear algebraic equations following the function F using the properties of Chebyshev polynomials and the Gauss-Chebyshev method. Particular attention is given to the study of convergence. In this case, Newton's method is applied to solve this system. Finally, four numerical examples are presented to confirm the reliability and efficiency of this numerical approach.

Keywords : Fractional Volterra integro-differential equation, Fixed point theorem, Newton's method, Gauss-Chebyshev method, Chebyshev polynomials.

Table des matières

1	Rappel sur des outils mathématiques	8
1.1	Fonctions Mathématiques Utiles	9
1.1.1	Fonction Gamma	9
1.1.2	Fonction Bêta	10
1.2	Intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville	11
1.3	Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville	13
1.4	Dérivées fractionnaires au sens de Caputo	15
1.5	Théorème du point fixe de Banach	17
1.6	Méthode de Newton	17
1.7	Polynômes de Tchebychev de la première espèce	17
1.8	Méthode d'intégration de Gauss-Tchebychev	24
2	Existence et unicité	25
2.1	Position du problème	26
2.2	Problème d'équivalence	26
2.3	Existence et Unicité	30
3	Étude numérique	34
3.1	Propriétés du dérivée fractionnaire de Caputo	35
3.2	Polynômes de Tchebychev décalés $T_n^*(x)$	35
3.3	Évaluation du dérivée fractionnaire de Caputo en utilisant $T_n^*(x)$	36
3.4	Analyse des erreurs	38
3.5	Méthode collocation de Tchebychev	39
3.5.1	Cas linéaire	39
3.5.2	Cas non linéaire	43

Table des figures

3.1	Solutions exactes et approchées de l'exemple 3.2 pour $m = 3$	40
3.2	Variation d'erreur absolue de l'exemple 3.2.	41
3.3	Solutions exactes et approchées de l'exemple 3.3 pour $m = 3$	42
3.4	Variation d'erreur absolue de l'exemple 3.3.	43
3.5	Solutions exactes et approchées de l'exemple 3.4 pour $m = 2$	46
3.6	Variation de l'erreur absolue pour l'exemple 3.4.	47
3.7	Solution approchée de l'exemple 3.5 pour $m = 2$ et $\alpha = 0.7, 0.8, 0.9, 1$	48

Introduction générale

De nombreux problèmes peuvent être modélisés par des équations intégral-différentielles fractionnaires issues de diverses applications des sciences et de l'ingénierie. En outre, la plupart de ces problèmes ne peuvent pas être résolus de manière analytique et, par conséquent, trouver de bonnes solutions approximatives à l'aide de méthodes numériques sera très utile.

Récemment, plusieurs méthodes numériques pour résoudre des équations différentielles fractionnaires (EDF) et des équations intégral-différentielles fractionnaires (EIDF) ont été proposées. Les auteurs de [2, 18] ont appliqué la méthode de collocation pour résoudre ce qui suit : équation de Langevin fractionnaire non linéaire impliquant deux ordres fractionnaires dans des intervalles différents et équations intégral-différentielles fractionnaires de Fredholm. La méthode des polynômes de Tchebychev est introduite dans [3, 4, 8] pour résoudre des équations différentielles d'ordre fractionnaire multitermique et des équations intégral-différentielles non linéaires de Volterra et Fredholm d'ordre fractionnaire. Les auteurs de [7] ont appliqué la méthode d'itération variationnelle pour résoudre des équations intégral-différentielles fractionnaires avec les conditions aux limites non locales. La méthode de décomposition Adomienne est introduite dans [11, 14] pour résoudre l'équation de diffusion fractionnaire et les équations intégral-différentielles fractionnaires. Les références [15, 16] ont utilisé la méthode de perturbation par homotopie pour résoudre les équations intégral-différentielles non linéaires de Fredholm d'ordre fractionnaire et le système d'équations linéaires intégral-différentielles fractionnaires de Fredholm. La méthode des séries de Taylor est introduite dans [1] pour résoudre des équations intégral-différentielles fractionnaires linéaires de type Volterra. Les auteurs dans [5, 12] donnent une application des équations différentielles fractionnaires non linéaires et de leurs approximations et théorème d'existence et d'unicité pour les équations différentielles fractionnaires avec conditions aux limites intégrales.

Comme les polynômes de Tchebychev est une famille bien connue de polynômes orthogonaux sur l'intervalle $[-1, 1]$ qui ont de nombreuses applications et largement utilisées en raison de leurs bonnes propriétés dans l'approximation des fonctions. Cela a motivé à trouver une solution numérique d'équations intégral-différentielles fractionnaires de Volterra non linéaires en utilisant la méthode de collocation à l'aide de polynômes de Tchebychev pour réduire au

système d'équations algébriques non linéaires et qui peut être résolue par la méthode itérative de Newton.

L'objectif de ce mémoire est l'étude théorique et numérique des équations intégrales fractionnaires de type Volterra suivantes :

$${}^c\mathcal{D}^\alpha u(x) = g(x) + \int_0^x K(x,t) F(t, u(t)) dt, \quad 0 \leq x \leq T, \quad (1)$$

avec la condition au limite non locale suivante :

$$au(0) + bu(T) = 0, \quad (2)$$

où ${}^c\mathcal{D}^\alpha$ désigne la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $0 < \alpha \leq 1$, $g \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R})$ et $K \in \mathcal{C}([0, T]^2, \mathbb{R})$ sont des fonctions données, $u(x)$ est la fonction inconnue et $F \in \mathcal{C}([0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ est une fonction donnée et $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a + b \neq 0$.

Ce mémoire se décompose en trois chapitres de la manière suivante : dans le premier chapitre, nous rappelons quelques définitions et propriétés de base concernant le calcul fractionnaire, la méthode de point fixe et les polynômes de Tchebychev de premier type.

Dans le deuxième chapitre, nous avons démontré l'existence et l'unicité de la solution du problème (1)-(2), en utilisant la méthode de point fixe.

Dans le dernier chapitre, nous avons proposé une approche numérique basée sur les polynômes de Tchebychev décalés de la première espèce pour résoudre le problème (1)-(2). La fonction inconnue est écrite comme une série de Tchebychev avec des m termes. Le problème (1)-(2) est réduit à un système d'équations algébriques linéaires ou non linéaire suivant la fonction F en utilisant les propriétés des polynômes de Tchebychev et la méthode d'intégration de Gauss-Tchebychev. Une attention particulière est accordée à l'étude de la convergence de la méthode proposée. Dans ce cas, la méthode de Newton est appliquée pour résoudre ce système. Enfin, quatre exemples numériques sont présentés pour confirmer la fiabilité et l'efficacité de cette approche numérique.

On termine ce mémoire par une conclusion et quelques perspectives.

RAPPEL SUR DES OUTILS MATHÉMATIQUES

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions et propriétés de base concernant le calcul fractionnaire, la méthode de point fixe et les polynômes de Tchebychev de premier type.

1.1 Fonctions Mathématiques Utiles

Dans ce paragraphe nous introduisons les fonctions Gamma et Bêta, qui seront utilisées ultérieurement. Ces deux fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

1.1.1 Fonction Gamma

La fonction Gamma est tout simplement la généralisation de la notion de factoriel à tous les nombres réels. Elle est définie par une intégrale impropre.

Définition 1.1 ([13]). La fonction Gamma est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{C} \text{ et } \operatorname{Re}(\alpha) > 0.$$

Propriétés 1.1. Nous avons les propriétés suivantes :

1. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0.$
2. $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(-m) = \pm\infty.$
3. $\Gamma(0) = \infty.$
4. Si $n \in \mathbb{N}$, on a : $\Gamma(n+1) = n!$ et $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!}.$

Exemple 1.1. 1. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$

2. Pour $\alpha = \frac{1}{2}$ on a par définition : $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt$ posons

$$t = u^2$$

donc

$$dt = 2udu$$

il s'ensuit :

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{u} e^{-u^2} 2udu \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \end{aligned}$$

L'intégrale de Gauss est donnée par :

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

d'où

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Lemme 1.1. *la fonction Gamma est une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* , (resp. holomorphe sur le demi plan $x \in \mathbb{C}$, $Re(x) > 0$) et*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^* (\text{resp. } x \in \mathbb{C}, Re(x) > 0); \Gamma^k(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} dx.$$

Corollaire 1.1. *La détermination de la fonction Gamma pour les valeur négatifs non entiers par la formule*

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)}, \quad 0 \leq x+n \leq 1.$$

1.1.2 Fonction Bêta

Définition 1.2 ([13]). La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie pour tout complexes p et q par

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \quad Re(p) > 0, \quad Re(q) > 0.$$

Proposition 1.1. *La relation entre la fonction Gamma et Bêta donnée par*

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p, q \in \mathbb{C} \text{ avec } Re(p) > 0 \text{ et } Re(q) > 0.$$

Démonstration. Soit, $D =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ on a

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} dx \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-y} y^{q-1} dy \right) \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x+y)} x^{p-1} y^{q-1} dx dy. \end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable suivant

$$\begin{cases} y = u - x \\ x = ut \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dy = du \Rightarrow dx dy = dx du \\ dx = u dt \end{cases}$$

De même que le domaine D' correspondante à D dans les coordonnées u, x est

$$D' = \{(u, x) / u \geq 0, 0 \leq x \leq 1\}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
 \Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^{+\infty} \int_0^1 e^{-u}(u-x)^{q-1} dx du \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-u} \left(\int_0^1 (tu)^{p-1} (u-tu)^{q-1} u dt \right) du \\
 &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 t^{p-1} u^{p-1} u^{q-1} (1-t)^{q-1} u dt \right) du \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{p+q-1} du \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \\
 &= \Gamma(p+q)B(p, q)
 \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

□

Exemple 1.2. Calculons $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$\begin{aligned}
 B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} \\
 &= \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{1} \\
 &= \pi
 \end{aligned}$$

Propriétés 1.2. 1. $B(p, q) = B(q, p)$, (symétrique).

2. $B(p, 1) = \frac{1}{p}$.

1.2 Intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Soient $\Omega = [a, b]$ avec $(-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle fini sur \mathbb{R} et $f \in L^1([a, b])$ fonction intégrable sur Ω . Nous avons

$$I_a^1 f(t) = \int_a^t f(x) dx.$$

La primitive seconde de f définit comme suite

$$I_a^2 f(t) = \int_a^t \left(\int_a^u f(x) dx \right) du,$$

Permutant l'ordre d'intégration, de plus d'après le théorème de Fubini, on obtient

$$I_a^2 f(t) = \int_a^t \left(\int_x^t du \right) f(x) dx,$$

$$I_a^2 f(t) = \int_a^t (t-x) f(x) dx.$$

Le n^{ieme} itération l'opérateur I peut s'écrire

$$I_a^{(n)} = \int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \cdots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t \frac{f(x)}{(t-x)^{1-n}} dx.$$

Cette formule est appelée formule de Cauchy, et d'après la propriété de Gamma $\Gamma(n) = (n-1)!$, nous avons

$$I_a^{(n)} = \int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \cdots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n = \frac{1}{(n)!} \int_a^t \frac{f(x)}{(t-x)^{1-n}} dx.$$

Définition 1.3. L'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ de Riemann-Liouville d'une fonction $f \in L^1([a, b])$ est donnée par

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} I^\beta(f(x)) dx, \quad t > a \quad (1.1)$$

Définition 1.4 ([9,17]). Soient $\Omega = [a, b]$ avec $(-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle fini sur \mathbb{R} et $f \in L^1([a, b])$ une fonction intégrable sur Ω . Les intégrales

$$I_{a^+}^{(\alpha)} f(t) = \frac{1}{(\alpha)!} \int_a^t \frac{f(x)}{(t-x)^{1-\alpha}} dx, \quad t > a, \operatorname{Re}(\alpha) > 0. \quad (1.2)$$

$$I_{b^-}^{(\alpha)} f(t) = \frac{1}{(\alpha)!} \int_t^b \frac{f(x)}{(t-x)^{1-\alpha}} dx, \quad t < b, \operatorname{Re}(\alpha) > 0. \quad (1.3)$$

sont appelés les intégrales fractionnaires à gauche (à droite) de **Riemann-Liouville** d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\operatorname{Re}(\alpha) > 0$) respectivement.

Exemple 1.3. Soit $f(x) = (t-a)^\beta$. On

$$I_{a^+}^{(\alpha)} (t-a)^\beta = \frac{1}{(\alpha)!} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} (t-a)^\beta dx.$$

Avec le changement de variable $x = a + (t-a)z$, nous avons

$$\begin{cases} x = a \Leftrightarrow z = 0, \\ x = t \Leftrightarrow z = 1, \\ dx = (t-a)dz. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
I_{a^+}^{(\alpha)}(t-a)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-a - (t-a)z)^{\alpha-1} (a + (t-a)z - a)^\beta (t-a) dz \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-a)^{\alpha-1} (1-z)^{\alpha-1} (t-a)^\beta z^\beta (t-a) dz \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 z^\beta (1-z)^{\alpha-1} dz (t-a)^{\alpha+\beta} \\
&= \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\beta+1, \alpha) \\
&= \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} (t-a)^{\alpha+\beta}
\end{aligned}$$

Si $\alpha = 1$

$$\begin{aligned}
I_{a^+}^1(t-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+2)} (t-a)^{\beta+1} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} (t-a)^{\beta+1}
\end{aligned}$$

Remarque 1.1. L'intégrale d'une fonction constante au sens Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ est donnée par

$$I_{a^+}^\alpha f(t) = \frac{C}{\Gamma(1+\alpha)} (t-a)^\alpha \text{ et } I_{b^-}^\alpha f(t) = \frac{C}{\Gamma(1+\alpha)} (b-t)^\alpha, \quad f(t) = C \in \mathbb{C}.$$

1.3 Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.5 ([9]p. 70). Soit $f \in L^1([a, b])$ une fonction intégrable sur $[a, b]$. Les dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville $\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f$ et $\mathcal{D}_{b^-}^\alpha f$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ ($Re(\alpha) > 0$) sont définies par

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n (I_{a^+}^{n-\alpha} f(t)) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \frac{f(x)dx}{(t-x)^{\alpha-n+1}}, \quad n = [Re(\alpha)] + 1; \quad t > a. \quad (1.4)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(t) &= \left(\frac{-d}{dt}\right)^n (I_{b^-}^{n-\alpha} f(t)) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{-d}{dt}\right)^n \int_t^b \frac{f(x)dx}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad n = [Re(\alpha)] + 1; \quad t < b. \quad (1.5)
\end{aligned}$$

respectivement, où $[Re(\alpha)]$ est partie entière de $Re(\alpha)$.

Remarque 1.2. 1. pour $\alpha = 0, n = 1$. on a $\mathcal{D}_{a^+}^0 f(t) = \frac{d}{dt} (I_{a^+}^1 f) = f(t)$

2. Toutes ces dérivées coïncident avec les dérivées usuelles pour les ordres entiers :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} \mathcal{D}_{a^+}^n f(t) = \mathcal{D}_+^n f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t) \\ \mathcal{D}_{b^-}^n f(t) = \mathcal{D}_-^n f(t) = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} f(t) \end{cases}$$

Propriétés 1.3 ([9]p.71). Pour $\alpha \geq 0, \beta > 0$, on a

$$1. (\mathcal{D}_{a^+}^\alpha (t-a)^\beta)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha}$$

$$2. (\mathcal{D}_{b^-}^\alpha (b-t)^\beta)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-t)^{\beta-\alpha}$$

Démonstration. On calcul la dérivée fractionnaire d'ordre α de la fonction $f = (t-a)^\beta$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_a^\alpha (t-a)^\beta &= \frac{d^n}{dt^n} [I^{n-\alpha} (t-a)^\beta] \\ \mathcal{D}_a^\alpha (t-a)^\beta &= \frac{d^n}{dt^n} \left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n+\beta-\alpha+1)} (t-a)^{n-\alpha+\beta} \right] \end{aligned}$$

Dérive n fois, on obtient

$$\mathcal{D}_a^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}$$

Comme cas particulier $\alpha = 1$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_a (t-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)} (t-a)^{\beta-1} \\ \mathcal{D}_a (t-a)^\beta &= \beta (t-a)^{\beta-1} \end{aligned}$$

□

Remarques 1.1. Quelques remarques pour ces dérivées

1. Tout ces dérivées coïncident avec les dérivées usuelles pour les ordres entiers :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} \mathcal{D}_{a^+}^m f(t) = f^{(m)}(t), \\ \mathcal{D}_{b^-}^m f(t) = (-1)^m f^{(m)}(t). \end{cases}$$

2. Si $0 < \alpha < 1$, alors $n = [\alpha] + 1 = 1$. Donc, (1.3) et (1.4) devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{f(t) dt}{(t-x)^{\alpha}}, \quad t > a \\ \mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_t^b \frac{f(t) dt}{(x-t)^{\alpha}}, \quad t < b \end{aligned}$$

3. Si $\beta = 1$, et $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < 1$, alors la dérivée au sens de Riemann-Liouville d'une fonction en général n'est pas nulle :

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} 1 = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_{b-}^{\alpha} 1 = \frac{(b-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

4. Pour tout $j = 1, 2, \dots, [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1$ avec $\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$, nous avons

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} (t-a)^{\alpha-j} = \mathcal{D}_{b-}^{\alpha} (b-t)^{\alpha-j} = 0.$$

1.4 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Définition 1.6 ([9]). Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction telle que $f^{(n)} \in L^1[a, b]$. Les dérivées fractionnaires d'ordre α de f au sens de Caputo sont définies

$${}^c \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(t) = I_{a+}^{n-\alpha} f^{(n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(t) dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}, \quad (1.6)$$

et

$${}^c \mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f(t) = (-1)^n I_{b-}^{n-\alpha} f^{(n)}(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b \frac{f^{(n)}(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad (1.7)$$

Théorème 1.1 ([9]). Soit $f \in C([a, b])$ et $\alpha > 0$. Les intégrales fractionnaires de **Riemann-Liouville** et possède les propriétés suivantes

$$I_{a+}^{\alpha} \left[I_{a+}^{\beta} f(t) \right] = I_{a+}^{\alpha+\beta} f(t). \quad (1.8)$$

$$I_{b-}^{\alpha} \left[I_{b-}^{\beta} f(t) \right] = I_{b-}^{\alpha+\beta} f(t). \quad (1.9)$$

$${}^c \mathcal{D}_a^{\alpha} (I_a^{\alpha} f)(t) = f(t). \quad (1.10)$$

$$I_{a+}^{\alpha} ({}^c \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(t)) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k. \quad (1.11)$$

$$I_{b-}^{\alpha} ({}^c \mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f(t)) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (b-t)^k. \quad (1.12)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 I_{a^+}^\alpha I_{a^+}^\beta f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} I^\beta(f(x)) dx, \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-s)^{\beta-1} f(s) ds \right) dx, \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_a^x (t-x)^{\alpha-1} (x-s)^{\beta-1} f(s) ds dx, \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(s) ds \int_s^t (t-x)^{\alpha-1} (x-s)^{\beta-1} dx,
 \end{aligned}$$

Par le changement de variable

$$\begin{cases} x = s + (t-s)\tau \\ dx = (t-s)d\tau \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = s \Rightarrow \tau = 0 \\ x = t \Rightarrow \tau = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(s) ds \int_0^1 (t-s - (t-s)\tau)^{\alpha-1} ((t-s)\tau)^{\beta-1} (t-s) d\tau, \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(s) ds \int_0^1 (t-s)^{\alpha-1} (1-\tau)^{\alpha-1} (t-s)^{\beta-1} \tau^{\beta-1} (1-s) d\tau, \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(s) ds \int_0^1 (t-s)^{\alpha+\beta-1} \tau^{\beta-1} (1-\tau)^{\alpha-1} d\tau, \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(s) (t-s)^{\alpha+\beta-1} ds \int_0^1 \tau^{\beta-1} (1-\tau)^{\alpha-1} d\tau \\
 &= \frac{B(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f(s) ds, \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f(s) ds, \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f(s) ds, \\
 &= I_{a^+}^{\alpha+\beta} f(t).
 \end{aligned}$$

□

Proposition 1.2. Les relation entre les dérivées au sens de Caputo (1.6),(1.7) et les dérivées au sens de Riemann-Liouville (1.4),(1.5) sont données par

$${}^c\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(t) = \mathcal{D}_{a^+}^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right], \quad (1.13)$$

et

$${}^c\mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(t) = \mathcal{D}_{b^-}^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (b-t)^k \right]. \quad (1.14)$$

1.5 Théorème du point fixe de Banach

Définition 1.7. 1. Soit $(X; \|\cdot\|)$ un espace de Banach, f une application définie de X sur lui-même. On appelle point fixe de f tout point $x^* \in X$ tel que :

$$x^* = f(x^*).$$

2. On dit que f est une application lipschitzienne si

$$\exists K > 0, \forall x, y \in X, \|f(x) - f(y)\| \leq K \|x - y\|.$$

Si $k < 1$, f est dite une contraction.

Théorème 1.2. (Principe de contraction de Banach) Soit E un espace métrique complet et soit $f : X \rightarrow X$ une application contractante, alors f possède un point fixe unique.

1.6 Méthode de Newton

Considérons le problème de la résolution d'un système d'équations non linéaires :

$$F(x) = 0 \tag{1.15}$$

où la fonction $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est supposée être au moins une fois différentiable. Si $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est une approximation de la solution cherchée, on linéarise $F(x)$ autour de x_0

$$F(x) \approx F(x_0) + J_F(x_0)(x - x_0)$$

où $J_F(x_0)$ est la matrice Jacobienne de F . On calcule le zéro de cette linéarisation. Si l'on répète cette procédure avec la nouvelle approximation, on obtient l'algorithme suivant :

Algorithme 1 (Méthode de Newton)

1: **Initialisation :** $V^0 = (x_0^0, x_1^0, \dots, x_n^0)^T$, $B^0 = F(x_0^0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ et $\varepsilon > 0$ sont donnés.

2: **Itération :** Résoudre le système linéaire

$$A(V^{k+1} - V^k) = -B^k. \tag{1.16}$$

3: **Test d'arrêt :** Si $\|B^{k+1}\| < \varepsilon$.

1.7 Polynômes de Tchebychev de la première espèce

Définition 1.8. Les polynômes de Tchebychev de la première espèce $T_n(x)$ sont des polynômes en x de degré n définis à l'aide de la relation suivante :

$$\cos(n\theta) = T_n(x), \quad \text{avec } x = \cos \theta, \tag{1.17}$$

pour tout x dans $[-1, 1]$, alors θ appartient à $[0, \pi]$,

on peut vérifier facilement que $T_n(x)$ est un polynôme de degré n , voici quelques polynôme $T_n(x)$

$$\begin{aligned} T_0 &= 1, T_1 = x \\ T_2 &= 2x^2 - 1, T_3 = 4x^3 - 3x, \dots \end{aligned}$$

on donne quelques valeurs de $T_n(x)$:

$$T_n(1) = 1, T_n(-1) = (-1)^n, T_{2n}(0) = (-1)^n, T_{2n+1}(0) = 0.$$

Proposition 1.3. *Les polynômes de Tchebychev de la première espèce $T_n(x)$ sont orthogonaux dans l'intervalle $[-1, 1]$ par rapport à la fonction poids $w(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$*

i.e

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} \delta_{mn}.$$

Démonstration. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \neq n$,

on a par définition :

$$\cos(n\theta) = T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad -1 \leq x \leq 1,$$

et on a :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx &= \int_{-1}^1 \cos(n \arccos x) \cos(m \arccos x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= \int_{-1}^1 \cos(n \arccos x) \cos(m \arccos x) \left(-\frac{d \arccos x}{dx} \right) dx \end{aligned}$$

si on pose :

$$\theta = \arccos x$$

alors l'intégrale devient :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 T_n(t)T_m(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx &= - \int_{\pi}^0 \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta \\ &= - \int_{\pi}^0 \frac{1}{2} [\cos(m-n)\theta + \cos(m+n)\theta] \\ &= 0, \text{ pour } m \neq n \end{aligned}$$

pour $m=n$, on a :

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 T_n^2(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx &= \int_{-1}^1 \cos^2(n \arccos x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx \\
 &= - \int_{\pi}^0 \cos^2(n\theta) \frac{d \arccos x}{dx} dx \\
 &= - \int_{\pi}^0 \cos^2(n\theta) d\theta \\
 &= - \int_{\pi}^0 \frac{\cos(2n\theta) + 1}{2} d\theta \\
 &= - \int_{\pi}^0 1 d\theta \\
 &= \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

d'où

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} \delta_{mn}.$$

□

Proposition 1.4. Les polynômes de Tchebychev de première espèce $T_n(x)$ vérifiant la relation de récurrence d'ordre deux, [6, 9] suivante :

$$\begin{cases} T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), & \forall n \geq 1 \\ T_0(x) = 1 \text{ et } T_1(x) = x \end{cases} \quad (1.18)$$

Démonstration. Soit $x \in [-1, 1]$, posons $\theta = \arccos x$, ainsi $\theta \in [0, \pi]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned}
 \cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta &= 2 \cos \left[\frac{(n+1)\theta + (n-1)\theta}{2} \right] \cos \left[\frac{(n+1)\theta - (n-1)\theta}{2} \right] \\
 &= 2 \cos n\theta \cos \theta,
 \end{aligned}$$

donc

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2 \cos \theta \cos n\theta,$$

d'où le résultat i.e.

$$T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}, \quad \forall n \geq 1$$

avec

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x.$$

□

Proposition 1.5. Les polynômes de Tchebychev de la première espèce $T_n(x)$ sont les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$(1-x^2)y''(x) - xy'(x) + n^2y(x) = 0. \quad (1.19)$$

Proposition 1.6. Les zéros du polynôme $T_n(x)$ sont de la forme :

$$x = x_k = \cos \frac{\left(k - \frac{1}{2}\right) \pi}{n}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Démonstration. De la définition, les zéros pour t dans $[-1, 1]$ de $T_n(x)$ doivent correspondre à les zéros pour θ dans $[0, \pi]$ de $\cos n\theta$, i.e.

$$n\theta = \left(k - \frac{1}{2}\right) \pi, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

d'où les zéros de $T_n(x)$ sont

$$x = \cos \frac{\left(k - \frac{1}{2}\right) \pi}{n}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

□

Exemple 1.4. On considère le polynôme $T_3(x)$ tel que

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x,$$

les zéros du polynôme $T_3(x)$ sont :

$$\begin{aligned} t_1 &= \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ t_2 &= \cos \frac{\pi}{2} = 0, \\ t_3 &= \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \end{aligned}$$

On remarque que $T_3(x)$ admet trois racines réelles, simples et distincts dans $[-1, 1]$.

Exemple 1.5. L'orthogonalité des polyômes $\{T_i(x), i = 0, 1, \dots, n\}$ dans le cas discret

On peut vérifier que les polynôme de Tchebychev de la première espèce $\{T_i(x), i = 0, 1, \dots, n\}$ sont orthogonaux dans l'ensemble de $(n + 1)$ points $x_{k=1}^{n+1}$, à savoir :

$$x_k = \cos \theta_k, \theta_k = \frac{\left(k - \frac{1}{2}\right) \pi}{n + 1},$$

i.e.

$$\sum_{k=1}^{n+1} T_i(x_k) T_j(x_k) = \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ \frac{n+1}{2} & i = j \neq 0 \\ n + 1 & i = j = 0. \end{cases}$$

En effet , on considère la somme suivant :

$$S_n(\theta) = \sum_{k=1}^{n+1} \cos \left(k - \frac{1}{2} \right) \theta = \cos \frac{1}{2} \theta + \cos \frac{3}{2} \theta + \dots + \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \theta, \quad (1.20)$$

si on pose $z = e^{i\theta}$, alors

$$\begin{aligned} S_n(\theta) &= \operatorname{Re} \left[z \frac{1}{2} (1 + z + z^2 + \dots + z^n) \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[z^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \right) \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[z^{\frac{1}{2}} \left(\frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} \right) \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[z^{\frac{1}{2}} \frac{z^{\frac{n+1}{2}}}{z^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{z^{\frac{n+1}{2}} - z^{-\frac{n+1}{2}}}{z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}}} \right) \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[z^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{z^{\frac{n+1}{2}} - z^{-\frac{n+1}{2}}}{z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}}} \right) \right], \end{aligned}$$

on sait que

$$\frac{z^{\frac{n+1}{2}} - z^{-\frac{n+1}{2}}}{2i} = \sin \left(\frac{n+1}{2} \theta \right), \text{ et } \frac{z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}}}{2i} = \sin \frac{1}{2} \theta,$$

par conséquent

$$\begin{aligned} S_n(\theta) &= \operatorname{Re} \left[z^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{\sin \left(\frac{n+1}{2} \right) \theta}{\sin \frac{1}{2} \theta} \right) \theta \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\cos \left(\frac{n+1}{2} \right) \theta + i \sin \left(\frac{n+1}{2} \right) \theta \right] \frac{\sin \left(\frac{n+1}{2} \right) \theta}{\sin \frac{1}{2} \theta} \\ &= \frac{2 \cos \left(\frac{n+1}{2} \right) \theta \sin \left(\frac{n+1}{2} \right) \theta}{2 \sin \frac{1}{2} \theta}, \end{aligned}$$

donc

$$S_n(\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{2 \sin \frac{1}{2} \theta}, \quad (1.21)$$

d'après ((1.20)),

$$S_n(0) = n + 1,$$

on a : pour $0 \leq i, j \leq n$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} T_i(x_k) T_j(x_k) &= \sum_{k=1}^{n+1} \cos(i\theta_k) \cos(j\theta_k) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} [\cos(i+j)\theta_k + \cos(i-j)\theta_k] \\ &= \frac{1}{2} \left[S_n \left(\frac{(i+j)\pi}{n+1} \right) + S_n \left(\frac{(i-j)\pi}{n+1} \right) \right], \end{aligned}$$

si $i = j = 0$, alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} T_0(x_k) T_0(x_k) &= \frac{1}{2} [S_0 + S_0] \\ &= \frac{1}{2} [2(n+1)] \\ &= n+1, \end{aligned}$$

si $i = j \neq 0$, alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} T_i(x_k) T_j(x_k) = \frac{1}{2} \left[S_n \left(\frac{2i\pi}{n+1} \right) + S_0 \right],$$

d'après (1.21) on a :

$$\begin{aligned} S_n \left(\frac{2i\pi}{n+1} \right) &= \frac{\sin[(n+1)\left(\frac{2i\pi}{n+1}\right)]}{2 \sin\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2i\pi}{n+1}\right)\right]} \\ &= \frac{\sin(2i\pi)}{2 \sin\left(\frac{i\pi}{n+1}\right)} \\ &= 0, \forall i \leq n, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} T_i(x_k) T_j(x_k) &= \frac{1}{2} [0 + (n+1)] \\ &= \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

si $i \neq j$ alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} T_i(x_k) T_j(x_k) = \frac{1}{2} \left[S_n \left(\frac{(i+j)\pi}{n+1} \right) + S_n \left(\frac{(i-j)\pi}{n+1} \right) \right]$$

or d'après (1.21) on a :

$$S_n \left(\frac{(i+j)\pi}{n+1} \right) = \frac{\sin(i+j)\pi}{2 \sin \left(\frac{(i+j)\pi}{2(n+1)} \right)}$$

et

$$S_n \left(\frac{(i-j)\pi}{n+1} \right) = \frac{\sin(i-j)\pi}{2 \sin \left(\frac{(i-j)\pi}{2(n+1)} \right)}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n+1} T_i(x_k) T_j(x_k) = 0, \forall i, j \leq n, i \neq j,$$

d'ou le résultat i.e.

$$\sum_{k=1}^{n+1} T_i(x_k) T_j(x_k) = \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ \frac{n+1}{2} & i = j \neq 0 \\ n+1 & i = j = 0. \end{cases}$$

Propriétés 1.4. 1. Le coefficient dominant des polynômes $T_n(x)$ est $2^{n-1}, \forall n \geq 1$,
2. $T_n(x)$ a la parité de n .

Démonstration. 1. Soit le polynôme $T_n(x)$ tel que

$$T_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots,$$

supposons que $a_n \neq 0$ on obtient :

$$\begin{aligned} a_{n+1} x^{n+1} + \dots &= 2x(a_n x^n + \dots) - a_{n-1} x^{n-1} - \dots \\ &= 2a_n x^{n+1} + \dots \end{aligned}$$

par identification on trouve

$$a_{n+1} = 2a_n,$$

i.e.

$$a_{n+1} = 2a_n = 2^2 a_{n-1} = 2^n a_1,$$

puisque $T_1(x)$, alors

$$a_n = 2^{n-1}, \forall n \geq 1.$$

2.

$$\begin{aligned} T_n(-x) &= T_n(-\cos \theta) \\ &= T_n(\cos(\theta + \pi)) \\ &= \cos(n\theta + n\pi) \\ &= (-1)^n \cos(n\theta) \\ &= (-1)^n T_n \cos(\theta), \end{aligned}$$

d'ou le résultat i.e.

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x).$$

□

1.8 Méthode d'intégration de Gauss-Tchebychev

Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $m \in \mathbb{N}^*$. La méthode d'intégration de Gauss-Tchebychev est donnée par :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{q=0}^m \omega_q f(x_q) \sqrt{1 - x_q^2},$$

où x_q sont les racines de polynômes de Tchebychev $T_{m+1}(x)$ donné par :

$$x_q = \cos\left(\frac{2q+1}{2m+1}\pi\right)$$

et ω_q sont les fonctions poids données par :

$$\omega_q = \frac{\pi}{m+1}.$$

EXISTENCE ET UNICITÉ

Dans ce chapitre, nous avons démontré un résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème (1)-(2) en utilisant le théorème de point fixe.

2.1 Position du problème

On considère l'équation intégrale-différentielle d'ordre fractionnaire de type Volterra définie dans un domaine borné $]0, T[$:

$${}^c\mathcal{D}_0^\alpha u(t) = g(t) + \int_0^t k(t, s)f(s, u(s))ds, \quad 0 < t < T, \quad (2.1)$$

et la condition au limite non locale :

$$au(0) + bu(T) = 0, \quad (2.2)$$

où g, k et f sont des fonctions données et $a, b \in \mathbb{R}$, $a + b \neq 0$. ${}^c\mathcal{D}_0^\alpha$ est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $0 < \alpha \leq 1$ définie par :

$${}^c\mathcal{D}_0^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u'(s)}{(t-s)^\alpha} ds. \quad (2.3)$$

2.2 Problème d'équivalence

Pour l'étude d'existence de la solution de problème (2.1)-(2.2) nous avons la proposition suivant :

Proposition 2.1. (voir [10]) soit $0 < \alpha \leq 1$, et $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, le problème aux limites (2.1)-(2.2) admet une solution unique donné par :

$$\begin{aligned} u(t) = & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left(g(s) + \int_0^s k(s, \tau)f(\tau, u(\tau))d\tau \right) ds \\ & - \frac{b}{(a+b)\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \left(g(s) - \int_0^s k(s, \tau)f(\tau, u(\tau))d\tau \right) ds. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Démonstration. On a pour $t \in]0, T[$

$${}^c\mathcal{D}_0^\alpha u(t) = g(t) + \int_0^t k(t, s)f(s, u(s))ds. \quad (2.5)$$

En composant par l'opérateur d'intégration d'ordre α dans les deux côtés de l'équation précédente, on obtient :

$$I^\alpha ({}^c\mathcal{D}_0^\alpha u(t)) = I^\alpha \left(g(t) + \int_0^t k(t, s)f(s, u(s))ds \right). \quad (2.6)$$

Pour $0 < \alpha < 1$, en utilisant la propriété 1.11 :

$$I_{a^+}^\alpha ({}^c\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(t)) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k. \quad (2.7)$$

Donc en appliquant (2.7) à u pour $a = 0$, on obtient

$$I^\alpha ({}^c\mathcal{D}^\alpha u(t)) = u(t) - u(0). \quad (2.8)$$

D'autre part, d'après la définition (1.1), on a :

$$I^\alpha \left(g(t) + \int_0^t k(t, s) f(s, u(s)) ds \right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left(g(s) + \int_0^s k(s, \tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau \right) ds. \quad (2.9)$$

Alors, avec (2.8) et (2.9), l'équation (2.6) on trouve

$$u(t) = u(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left(g(s) ds + \int_0^s k(s, \tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau \right) ds.$$

Pour trouver $u(0)$, on utilisant la conditions aux limites non locale (2.2) :

$$u(T) - u(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \left(g(s) + \int_0^s k(s, \tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau \right) ds. \quad (2.10)$$

On multiplie 2.10 par $-b$, on obtient :

$$-bu(T) + bu(0) = \frac{-b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \left(g(s) + \int_0^s k(s, \tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau \right) ds. \quad (2.11)$$

De plus, on addition 2.11 et 2.2, on trouve

$$(a+b)u(0) = \frac{-b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \left(g(s) + \int_0^s k(s, \tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau \right) ds.$$

Donc $u(0)$ est :

$$u(0) = -\frac{b}{(a+b)\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \left(g(s) + \int_0^s k(s, \tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau \right) ds.$$

Alors on a :

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left(g(s) + \int_0^s k(s, \tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau \right) ds \\ &\quad - \frac{b}{(a+b)\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \left(g(s) + \int_0^s k(s, \tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau \right) ds. \end{aligned} \quad (2.12)$$

On récrit l'équation 2.12 sous la forme suivant :

$$u(t) = I^\alpha \left(g(t) + \int_0^t k(t, s) f(s, u(s)) ds \right) - \frac{b}{(a+b)} \left(I^\alpha \left(g(T) + \int_0^T k(T, s) f(s, u(s)) ds \right) \right). \quad (2.13)$$

d'ou le résultat.

Inversement on a : On applique l'opérateur ${}^c\mathcal{D}^\alpha$ à l'équation 2.13 on a :

$$\begin{aligned} {}^c\mathcal{D}^\alpha u(t) &= {}^c\mathcal{D}^\alpha \left(I^\alpha \left(g(t) + \int_0^t k(t, s) f(s, u(s)) ds \right) \right) \\ &\quad - {}^c\mathcal{D}^\alpha \left(\frac{b}{(a+b)} \left(I^\alpha \left(g(T) + \int_0^T k(T, s) f(s, u(s)) ds \right) \right) \right) \\ &= g(t) + \int_0^t k(t, s) f(s, u(s)) ds. \end{aligned}$$

donc il reste vérifier que si,

$$au(0) + bu(T) = 0$$

on a :

$$u(0) = I^\alpha (g(0)) - \frac{b}{(a+b)} \left(I^\alpha \left(g(T) + \int_0^T k(T, s) f(s, u(s)) ds \right) \right) \quad (2.14)$$

$$u(T) = I^\alpha \left(g(T) + \int_0^T k(T, s) f(s, u(s)) ds \right) - \frac{b}{(a+b)} \left(I^\alpha \left(g(T) + \int_0^T k(T, s) f(s, u(s)) ds \right) \right) \quad (2.15)$$

On multiplie 2.14 par a , on obtient

$$au(0) = aI^\alpha (g(0)) - \frac{ab}{(a+b)} \left(I^\alpha \left(g(T) + \int_0^T k(T, s) f(s, u(s)) ds \right) \right) \quad (2.16)$$

On multiplie 2.15 par b , on obtient

$$bu(T) = bI^\alpha \left(g(T) + \int_0^T k(T, s) f(s, u(s)) ds \right) - \frac{b^2}{(a+b)} \left(I^\alpha \left(g(T) + \int_0^T k(T, s) f(s, u(s)) ds \right) \right) \quad (2.17)$$

En addition 2.16 et 2.17, on obtient

$$\begin{aligned}
au(0) + bu(T) &= aI^\alpha g(0) - \frac{ab}{(a+b)} \left(I^\alpha \left(g(T) + \int_0^T k(T,s)f(s,u(s))ds \right) \right) \\
&\quad + bI^\alpha g(T) + b \int_0^T k(T,s)f(s,u(s))ds - \frac{b^2}{(a+b)} \left(I^\alpha \left(g(T) + \int_0^T k(T,s)f(s,u(s))ds \right) \right) \\
&= -\frac{a+b}{a+b} \left(b \left(I^\alpha \left(g(T) + \int_0^T k(T,s)f(s,u(s))ds \right) \right) \right) \\
&\quad + b \left(I^\alpha \left(g(T) + \int_0^T k(T,s)f(s,u(s))ds \right) \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Alors u est solution du problème . □

Remarque 2.1. (voir [10]) Par l'équation intégrale 2.4 , nous avons

$$\begin{aligned}
u(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left(\int_0^s (t-s)^{\alpha-1} k(s,\tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau \right) ds \\
&\quad - \frac{b}{(a+b)\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} g(s) ds - \frac{b}{(a+b)\Gamma(\alpha)} \int_0^T \left(\int_0^s (T-s)^{\alpha-1} k(s,\tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau \right) ds.
\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned}
u(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left(\int_s^t (t-\tau)^{\alpha-1} k(\tau,s) \right) f(s,u(s)) ds \\
&\quad - \frac{b}{(a+b)\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} g(s) ds - \frac{b}{(a+b)\Gamma(\alpha)} \int_0^T \left(\int_s^T (T-\tau)^{\alpha-1} k(\tau,s) \right) f(s,u(s)) ds. \\
&= \int_0^t \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds + \int_0^t \left(\int_s^t \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-\tau)^{\alpha-1} k(\tau,s) \right) f(s,u(s)) ds \\
&\quad + \int_0^T \frac{-b}{(a+b)\Gamma(\alpha)} (T-s)^{\alpha-1} g(s) ds + \int_0^T \left(\int_s^T \frac{-b}{(a+b)\Gamma(\alpha)} (T-\tau)^{\alpha-1} k(\tau,s) \right) f(s,u(s)) ds.
\end{aligned}$$

Alors on a

$$\begin{aligned}
u(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g(s) ds + \int_0^T \frac{-b(T-s)^{\alpha-1}}{(a+b)\Gamma(\alpha)} g(s) ds \\
&\quad + \int_0^t \left(\int_s^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} k(\tau,s) d\tau + \int_s^T \frac{-b(T-\tau)^{\alpha-1}}{(a+b)\Gamma(\alpha)} k(\tau,s) d\tau \right) f(s,u(s)) ds \\
&\quad + \int_t^T \left(\int_s^T \frac{-b(T-\tau)^{\alpha-1}}{(a+b)\Gamma(\alpha)} k(\tau,s) d\tau \right) f(s,u(s)) ds.
\end{aligned}$$

2.3 Existence et Unicité

Pour étudier des résultats d'existence et d'unicité dans cette problème on utilise le théorème de point fixe de Banach.

Les hypothèses Afin d'établir de la solution de problème (2.1) et (2.2) nous proposons les hypothèses suivantes :

(H1) soit $f : J * \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

(H2) supposons que : Il exist une constante $L \geq 0$ telle que on a :

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L |x - y| \quad \forall t \in J = [0, T]$$

Si

$$\begin{aligned} w_1 &< 1 \\ \sup |f(t, 0)| &= L_{01} \\ \sup |f(t, s)| &= \mu \\ \|g\| &= \sup_{t \in J} |g(t)| \end{aligned}$$

et denotée par :

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\mu L_1}{\Gamma(\alpha + 2)} \\ \theta_0 &= \frac{\mu L_{01}}{\Gamma(\alpha + 2)} \\ w_1 &= \theta T + \theta \frac{|b|}{|a + b|} T^{\alpha+1} \\ w_2 &= \theta_0 T + \frac{\|g\|}{\Gamma(\alpha + 1)} T + \left(\theta_0 T^{\alpha+1} + \frac{\|g\|}{\Gamma(\alpha + 1)} T^\alpha \right) \frac{|b|}{|a + b|} \end{aligned}$$

(H3) Il existe $r > 0$ telque :

$$r \geq \frac{w_2}{1 - w_1}$$

Théorème 2.1. (voir [10]) Sous les hypothèses H1, H2 et H3.

si

$$w_1 < 1$$

alors le problème ((2.1)-(2.2)) possède un unique solution sur $[0, T]$.

Démonstration. Dans le but de démontrer l'existence de la solution de l'équation intégrale 2.4 on introduit le sous ensemble

$$B_r = \{U \in X : \|U\| \leq r\}$$

r étant la constant introduite dans (H3). Il est clair que c'est une partie fermé et convexe de l'espace X muni de la norme $\|\cdot\|$.

L'opérateur T définit sur B_r par :

$$\begin{aligned}
 Tu(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g(s) ds + \int_0^T \frac{-b(T-s)^{\alpha-1}}{(a+b)\Gamma(\alpha)} g(s) ds \\
 &+ \int_0^t \left(\int_s^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} k(\tau, s) d\tau + \int_s^T \frac{-b(T-\tau)^{\alpha-1}}{(a+b)\Gamma(\alpha)} k(\tau, s) d\tau \right) f(s, u(s)) ds \\
 &+ \int_t^T \left(\int_s^T \frac{-b(T-\tau)^{\alpha-1}}{(a+b)\Gamma(\alpha)} k(\tau, s) d\tau \right) f(s, u(s)) ds.
 \end{aligned}$$

Montrons que $T(B_r) \subset B_r$ soient $u \in B_r$ et $t \in [0, T]$ on a :

$$\begin{aligned}
|Tu(t)| &= \left| \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g(s) ds + \int_0^T \frac{-b(T-s)^{\alpha-1}}{(a+b)\Gamma(\alpha)} g(s) ds \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t \left(\int_s^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} k(\tau, s) d\tau + \int_s^T \frac{-b(T-\tau)^{\alpha-1}}{(a+b)\Gamma(\alpha)} k(\tau, s) d\tau \right) f(s, u(s)) ds \right. \\
&\quad \left. + \int_t^T \left(\int_s^T \frac{-b(T-\tau)^{\alpha-1}}{(a+b)\Gamma(\alpha)} k(\tau, s) d\tau \right) f(s, u(s)) ds \right| \\
&\leq \frac{|k(\tau, s)|}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left| \int_s^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau + \int_s^T \frac{-b(T-\tau)^{\alpha-1}}{(a+b)} \right| d\tau |f(s, u(s)) - f(s, 0) + f(s, 0)| ds \\
&\quad + \frac{|k(\tau, s)|}{\Gamma(\alpha)} \int_t^T \left| \int_s^T \frac{-b(T-\tau)^{\alpha-1}}{(a+b)} \right| d\tau |f(s, u(s)) - f(s, 0) + f(s, 0)| ds \\
&\quad + \frac{\|g\|}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \frac{|b|}{|a+b|} \frac{\|g\|}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds \\
&\leq \frac{\mu}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left| \int_s^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau + \int_s^T \frac{-b(T-\tau)^{\alpha-1}}{(a+b)} \right| d\tau |f(s, u(s)) - f(s, 0) + f(s, 0)| ds \\
&\quad + \frac{\mu}{\Gamma(\alpha)} \int_t^T \left| \int_s^T \frac{-b(T-\tau)^{\alpha-1}}{(a+b)} \right| d\tau |f(s, u(s)) - f(s, 0) + f(s, 0)| ds \\
&\quad + \frac{\|g\|}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \frac{|b|}{|a+b|} \frac{\|g\|}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds \\
&\leq \frac{\mu(rL_1 + L_{01})}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left| \int_s^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau + \frac{|b|}{|a+b|} \int_s^T (T-\tau)^{\alpha-1} d\tau \right| ds \\
&\quad + \frac{\mu(rL_1 + L_{01})}{\Gamma(\alpha)} \frac{|b|}{|a+b|} \int_t^T \left(\int_s^T (T-\tau)^{\alpha-1} d\tau \right) ds \\
&\quad + \frac{\|g\|}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \frac{|b|}{|a+b|} \frac{\|g\|}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds \\
&\leq \frac{\mu(rL_1 + L_{01})}{\Gamma(\alpha+2)} (t^{\alpha+1} + \frac{|b|}{|a+b|} [-(T-t)^{\alpha+1} + T^{\alpha+1}]) \\
&\quad + \frac{\mu(rL_1 + L_{01})}{\Gamma(\alpha+2)} \frac{|b|}{|a+b|} (T-t)^{\alpha+1} + \frac{\|g\|}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha + \frac{\|g\|}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{|b|}{|a+b|} T^\alpha \\
&\leq \frac{\mu(rL_1 + L_{01})}{\Gamma(\alpha+2)} (T + \frac{|b|}{|a+b|} [T^{\alpha+1}]) + \frac{\|g\|}{\Gamma(\alpha+1)} T + \frac{\|g\|}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{|b|}{|a+b|} T^\alpha \\
&= r \left(\frac{\mu L_1}{\Gamma(\alpha+2)} T + \frac{\mu L_1 |b|}{(\alpha+2)|a+b|} T^{\alpha+1} \right) + \frac{\mu L_{01}}{\Gamma(\alpha+2)} T + \frac{\mu L_{01} |b|}{(\alpha+2)|a+b|} T^{\alpha+1} \\
&\quad + \frac{\|g\|}{\Gamma(\alpha+1)} T + \frac{\|g\|}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{|b|}{|a+b|} T^\alpha \\
&= r \left(\theta T + \theta \frac{|b|}{|a+b|} T^{\alpha+1} \right) + \theta_0 T + \frac{\|g\|}{\Gamma(\alpha+1)} T + \left(\theta_0 T^{\alpha+1} + \frac{\|g\|}{\Gamma(\alpha+1)} T^\alpha \right) \frac{|b|}{|a+b|} \\
&= rw_1 + w_2 \\
&\leq rw_1 + (1-w_1)r \\
&\leq r.
\end{aligned}$$

Donc $\|Tu\| \leq r$, ce qui implique que $T(B_r) \subset B_r$.

Supposons maintenant que $u, v \in C([0, T], \mathbb{R})$ et $t \in [0, T]$.

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
|Tu(t) - Tv(t)| &= \left| \int_0^t \left(\int_s^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} k(\tau, s) d\tau + \int_s^T \frac{-b(T-\tau)^{\alpha-1}}{(a+b)\Gamma(\alpha)} k(\tau, s) d\tau \right) [f(s, u(s)) - f(s, v(s))] ds \right. \\
&\quad \left. + \int_t^T \left(\int_s^T \frac{-b(T-\tau)^{\alpha-1}}{(a+b)\Gamma(\alpha)} k(\tau, s) d\tau \right) [f(s, u(s)) - f(s, v(s))] ds \right| \\
&\leq \frac{\mu L_1}{\Gamma(\alpha)} \|u - v\| \int_0^t \left| \int_s^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau + \int_s^T \frac{-b(T-\tau)^{\alpha-1}}{(a+b)} d\tau \right| ds \\
&\quad + \frac{\mu L_1}{\Gamma(\alpha)} \|u - v\| \int_t^T \left| \int_s^T \frac{-b(T-\tau)^{\alpha-1}}{(a+b)} d\tau \right| ds \\
&\leq \frac{\mu L_1}{\Gamma(\alpha)} \|u - v\| \int_0^t \left(\int_s^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau + \int_s^T \frac{|b|}{|a+b|} (T-\tau)^{\alpha-1} d\tau \right) ds \\
&\quad + \frac{\mu L_1}{\Gamma(\alpha)} \|u - v\| \int_t^T \left(\int_s^T \frac{|b|}{|a+b|} (T-\tau)^{\alpha-1} d\tau \right) ds \\
&\leq \frac{\mu L_1}{\Gamma(\alpha+2)} \|u - v\| (t^{\alpha+1} + \frac{|b|}{|a+b|} [-(T-t)^{\alpha+1} + T^{\alpha+1}]) \\
&\quad + \frac{\mu L_1}{\Gamma(\alpha+2)} \frac{|b|}{|a+b|} \|u - v\| (T-t)^{\alpha+1} \\
&\leq \frac{\mu L_1}{\Gamma(\alpha+2)} \|u - v\| (T + \frac{|b|}{|a+b|} T^{\alpha+1}) \\
&\leq \frac{\mu L_1}{\Gamma(\alpha+2)} (T + \frac{|b|}{|a+b|} T^{\alpha+1}) \|u - v\| \\
&\leq (\theta T + \theta \frac{|b|}{|a+b|} T^{\alpha+1}) \|u - v\| \\
&\leq w_1 \|u - v\|
\end{aligned}$$

On obtient

$$\|Tu(t) - Tv(t)\| \leq w_1 \|u - v\|.$$

Donc d'après l'hypothèse (H1), l'opérateur T est une contraction. En appliquant le principe de l'application contractante de Banach, on déduit que le problème ((2.1)-(2.2)) admet une solution unique in B_r . \square

ÉTUDE NUMÉRIQUE

Dans ce chapitre, nous avons proposé une approche numérique basée sur les polynômes de Tchebychev décalés de la première espèce pour résoudre le problème (1)-(2). La fonction inconnue est écrite comme une série de Tchebychev avec des m termes. Le problème (1)-(2) est réduit à un système d'équations algébriques linéaires ou non linéaire suivant la fonction F en utilisant les propriétés des polynômes de Tchebychev et la méthode d'intégration de gauss-Tchebychev. Une attention particulière est accordée à l'étude de la convergence de la méthode proposée. Dans ce cas, la méthode de Newton est appliquée pour résoudre ce système. Enfin, deux exemples numériques sont présentés pour confirmer la fiabilité et l'efficacité de cette approche numérique.

3.1 Propriétés du dérivée fractionnaire de Caputo

Proposition 3.1. *Nous avons :*

1. *La dérivée fractionnaire de Caputo est linéaire c'est à dire :*

$${}^c\mathcal{D}^\alpha (au + bv)(x) = a {}^c\mathcal{D}^\alpha u(x) + b {}^c\mathcal{D}^\alpha v(x), \forall a, b \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

2. *La dérivée fractionnaire de Caputo d'une constante est nulle :*

$${}^c\mathcal{D}_{a^+}^\alpha C = 0, \quad \forall C \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

3. *Pour la dérivée fractionnaire de Caputo, nous avons :*

$${}^c\mathcal{D}^\alpha x^\beta = \begin{cases} 0 & \text{pour } \beta \in \mathbb{N} \text{ et } \beta \leq [\alpha], \\ \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} x^{\beta-\alpha} & \text{pour } \beta \in \mathbb{N} \text{ et } \beta \geq [\alpha] + 1 \text{ ou } \beta \notin \mathbb{N} \text{ et } \beta \geq \alpha, \end{cases} \quad (3.3)$$

où $[\alpha]$ est la partie entière de α .

3.2 Polynômes de Tchebychev décalés $T_n^*(x)$

Pour un point de vue pratique, l'intervalle $[0, 1]$ est plus important que l'intervalle $[-1, 1]$. En utilisant la transformation

$$s = 2x - 1 \text{ ou } x = \frac{1}{2}(s + 1) \text{ avec } s \in [-1, 1] \text{ et } x \in [0, 1],$$

on obtient les polynômes de Tchebychev décalés de la première espèce $T_n^*(x)$ sont définis par :

$$T_n^*(x) = T_n(s) = T_n(2x - 1).$$

Proposition 3.2. *Les polynômes de Tchebychev décalés de la première espèce $T_n^*(x)$ sont orthogonaux dans l'intervalle $[0, 1]$ par rapport à la fonction poids $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ i.e.*

$$\int_0^1 \frac{T_n^*(x) T_m^*(x) dx}{\sqrt{x-x^2}} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m, \\ \pi & \text{si } n = m = 0, \\ \pi/2 & \text{si } n = m \neq 0. \end{cases}$$

Proposition 3.3. 1. *Les polynômes de Tchebychev décalés de la première espèce $T_x^*(x)$ vérifiant la relation de récurrence d'ordre deux suivante :*

$$\begin{cases} T_0^*(x) = 1, \\ T_1^*(x) = 2x - 1, \\ T_{n+1}^*(x) = 2(2x - 1)T_n^*(x) - T_{n-1}^*(x), \quad n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

2. La forme explicite de $T_n^*(x)$ de degré n est donnée par :

$$T_n^*(x) = T_{2n}(\sqrt{x}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k 2^{2n-2k} \frac{n\Gamma(2n-k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(2n-2k+1)} x^{n-k}, \quad (3.4)$$

où $\Gamma(\cdot)$ est la fonction Gamma d'Euler.

Proposition 3.4. Les racines du polynôme $T_n^*(x)$ sont de la forme :

$$x_p = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{(p-1/2)\pi}{n} \right) \right), \quad p \in \mathbb{N}^*. \quad (3.5)$$

Une fonction $u(x)$, qui est carrée intégrable dans $[0, 1]$, peut être exprimée en termes de polynômes de Tchebychev décalés de la première espèce comme suit :

$$u(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k T_k^*(x),$$

où

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{u(x) T_0^*(x)}{\sqrt{x-x^2}} dx, \quad c_i = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{u(x) T_i^*(x)}{\sqrt{x-x^2}} dx, \quad i \in \mathbb{N}^*. \quad (3.6)$$

Pour des raisons pratiques, nous prenons seulement les premiers $(m+1)$ -termes de $T_n^*(x)$ qui est donnée :

$$u_m(x) = \sum_{i=0}^m c_i T_i^*(x). \quad (3.7)$$

3.3 Évaluation du dérivée fractionnaire de Caputo en utilisant $T_n^*(x)$

La principale formule approximative de la fonction $u_m(x)$ donnée en (3.7) est présentée dans le théorème suivant.

Théorème 3.1 (19). Soit $u_m(x)$ une approximation de $u(x)$ par des polynômes de Tchebychev décalés de la première espèce donnée par (3.7). Alors, pour tout $\alpha > 0$ nous avons :

$${}^c \mathcal{D}^\alpha (u_m(x)) = \sum_{i=[\alpha]+1}^m \sum_{k=0}^{i-[\alpha]-1} c_i \mathcal{N}_{i,k}^{(\alpha)} x^{i-k-\alpha}, \quad (3.8)$$

où $[\alpha]$ est la partie entière de α et $\mathcal{N}_{i,k}^{(\alpha)}$ est donné par :

$$\mathcal{N}_{i,k}^{(\alpha)} = (-1)^k \frac{2^{2i-2k} i\Gamma(2i-k)\Gamma(i-k+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(2i-2k+1)\Gamma(i-k+1-\alpha)}. \quad (3.9)$$

Démonstration. En utilisant la linéarité de la dérivée fractionnaire de Caputo donnée par (3.1) et la définition de la fonction d'approximation $u_m(x)$ donné par (3.7), on obtient

$${}^c\mathcal{D}^\alpha u_m(x) = \sum_{i=0}^m c_i {}^c\mathcal{D}^\alpha T_i(x). \quad (3.10)$$

D'après (3.2), (3.3) et (3.4) on trouve

$$\begin{aligned} {}^c\mathcal{D}^\alpha T_i(x) &= \sum_{k=0}^i (-1)^k 2^{2i-2k} \frac{i\Gamma(2i-k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(2i-2k+1)} {}^c\mathcal{D}^\alpha (x^{i-k}), \\ &= \sum_{k=0}^{i-[\alpha]-1} (-1)^k 2^{2i-2k} \frac{i\Gamma(2i-k)\Gamma(i-k+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(2i-2k+1)\Gamma(i-k+1-\alpha)} x^{i-k-\alpha}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

où $i = [\alpha] + 1, [\alpha] + 2, \dots, m$. Mais, le polynôme $T_i^*(x)$ est de degré i , donc

$${}^c\mathcal{D}^\alpha T_i^*(x) = 0 \text{ pour tout } i = 0, 1, \dots, [\alpha]. \quad (3.12)$$

En combinant (3.10)-(3.12), on obtient

$$\begin{aligned} {}^c\mathcal{D}^\alpha u_m(x) &= \sum_{i=[\alpha]+1}^m \sum_{k=0}^{i-[\alpha]-1} c_i (-1)^k 2^{2i-2k} \frac{i\Gamma(2i-k)\Gamma(i-k+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(2i-2k+1)\Gamma(i-k+1-\alpha)} x^{i-k-\alpha} \\ &= \sum_{i=[\alpha]+1}^m \sum_{k=0}^{i-[\alpha]-1} c_i \mathcal{N}_{i,k}^{(\alpha)} x^{i-k-\alpha} \end{aligned}$$

qui est le résultat souhaité. \square

Exemple 3.1. On considère la formule (3.8) avec $u_m(x) = x^2$, $m = 2$ et $\alpha = 1/2$. la série de Tchebychev décalé de $x \mapsto x^2$ est donnée par :

$$x^2 = \frac{3}{8}T_0^*(x) + \frac{1}{2}T_1^*(x) + \frac{1}{8}T_2^*(x). \quad (3.13)$$

En utilisant (3.3), on obtient

$${}^c\mathcal{D}^{1/2}(x^2) = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(5/2)} x^{3/2} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{3/2}.$$

Avec Théorème 3.1, on obtient

$${}^c\mathcal{D}^{1/2}(x^2) = c_1 \mathcal{N}_{1,0}^{(\alpha)} x^{1/2} + c_2 \mathcal{N}_{2,0}^{(\alpha)} x^{3/2} + c_2 \mathcal{N}_{2,1}^{(\alpha)} x^{1/2}. \quad (3.14)$$

Avec (3.13), (3.6) et (3.9), on obtient

$$c_1 = 1/2, c_2 = 1/8, \mathcal{N}_{1,0}^{(\alpha)} = 4/\sqrt{\pi}, \mathcal{N}_{2,0}^{(\alpha)} = 64/3\sqrt{\pi} \text{ et } \mathcal{N}_{2,1}^{(\alpha)} = -16/\sqrt{\pi}. \quad (3.15)$$

De (3.14) et (3.15), on obtient

$${}^c\mathcal{D}^{1/2}(x^2) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}}x^{3/2}.$$

3.4 Analyse des erreurs

L'objectif de cette section est d'étudier l'erreur de troncature et l'analyse de convergence.

Théorème 3.2 (Théorème de convergence uniforme). *Soit $u \in L^2(0, 1)$ une fonction deux fois différentiable avec la deuxième dérivée est bornée sur $[0, 1]$ c'est à dire*

$$\exists M > 0, \forall x \in [0, 1] : |u''(x)| \leq M.$$

Si $u(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} c_i T_i^*(x)$, alors la suite des sommes partielles $(u_m(x))$ avec $u_m(x) = \sum_{i=0}^m c_i T_i^*(x)$ converge uniforme vers $u(x)$ sur $[0, 1]$.

Démonstration. En utilisant le changement de variable $2x - 1 = \cos(\theta)$ dans (3.6), on obtient :

$$c_i = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{u(x) T_i^*(x) dx}{\sqrt{x-x^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u(\cos(2\theta)) \cos(i\theta) d\theta$$

Avec l'intégration par partie deux fois, on obtient :

$$c_i = \frac{4}{\pi} \int_0^\pi u''(\cos(2\theta)) \delta_i(\theta) d\theta,$$

où

$$\delta_i(\theta) = \left[\frac{\sin(i-2)\theta}{i(i-2)} - \frac{\sin(i+2)\theta}{i(i+2)} \right] \sin(2\theta).$$

Donc, nous avons :

$$|\delta_i(\theta)| \leq \frac{4M}{\pi} \int_0^\pi |\delta_i(\theta)| d\theta \leq \frac{8M}{i^2-4}.$$

D'autre part, on a :

$$|u(x) - u_m(x)| \leq \sum_{i=m+1}^{+\infty} |c_i| |T_i^*(x)| \leq \sum_{i=m+1}^{+\infty} |c_i| \leq \sum_{i=m+1}^{+\infty} \frac{8M}{i^2-4}.$$

Alors, $\sum_{i=3}^{+\infty} \frac{4M}{i^2-4}$ est une série numérique convergente, donc le reste de cette série est converge vers zéro. Par conséquent, la suite des sommes partielles $(u_m(x))$ converge uniformément vers $u(x)$ sur $[0, 1]$. \square

3.5 Méthode collocation de Tchebychev

Dans cette section, nous appliquons la méthode de collocation de Tchebychev pour résoudre numériquement le problème (1)-(2).

3.5.1 Cas linéaire

Soit $F(t, u(t)) = u(t)$. De (2.1), (3.7) et Théorème 3.1 nous avons :

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{i-1} c_i \mathcal{N}_{i,k}^{(\alpha)} x^{i-k-\alpha} = g(x) + \sum_{i=0}^m \int_0^x K(x, t) c_i T_i^*(t) dt \quad (3.16)$$

En remplaçant dans (3.16) la variable x par m racine x_p définie par (3.5), on obtient :

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{i-1} c_i \mathcal{N}_{i,k}^{(\alpha)} x_p^{i-k-\alpha} = g(x_p) + \sum_{i=0}^m c_i \int_0^{x_p} K(x_p, t) T_i^*(t) dt. \quad (3.17)$$

Avec le changement de variable $\tau = \frac{2}{x_p}t - 1$, (3.17) devient :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{i-1} c_i \mathcal{N}_{i,k}^{(\alpha)} x_p^{i-k-\alpha} &= g(x_p) \\ &+ \frac{x_p}{2} \sum_{i=0}^m c_i \int_{-1}^1 K\left(x_p, \frac{x_p}{2}(\tau+1)\right) T_i^*\left(\frac{x_p}{2}(\tau+1)\right) d\tau. \end{aligned} \quad (3.18)$$

En utilisant la formule d'intégration de Gauss-Tchebychev, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{i-1} c_i \mathcal{N}_{i,k}^{(\alpha)} x_p^{i-k-\alpha} &= g(x_p) \\ &+ \frac{x_p}{2} \sum_{i=0}^m c_i \sum_{q=0}^m \omega_q K\left(x_p, \frac{x_p}{2}(\tau_q+1)\right) T_i^*\left(\frac{x_p}{2}(\tau_q+1)\right) \sqrt{1-\tau_q^2}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

où τ_q sont $m+1$ racines de polynômes de Tchebychev $T_{m+1}(\tau)$ définies par

$$\tau_q = \cos\left(\frac{2q+1}{2m+2}\pi\right)$$

et ω_q sont les fonctions points correspondantes définies par :

$$\omega_q = \frac{\pi}{m+1}.$$

D'après (2.2) et (3.7), nous avons :

$$a \sum_{i=0}^m c_i T_i^*(0) + b \sum_{i=0}^m c_i T_i^*(1) = 0. \quad (3.20)$$

Le système (3.19)-(3.20) est un système d'équations algébriques linéaire.

Exemple 3.2.

$$\begin{cases} \mathcal{D}^{1/3}u(x) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4\Gamma(13/6)}x^{7/6} - \frac{2}{63}x^{9/2}(9 + 7x^2) + \int_0^x (xt + x^2t^2)u(t) dt, \\ au(0) + bu(1) = 0, \text{ avec } a = 1, b = 0. \end{cases}$$

La solution exacte est donnée par $u(x) = x^{3/2}$. Nous appliquons la méthode collocation de Tchebychev pour $m = 3$,

$$u_3(x) = \sum_{i=0}^3 c_i T_i^*(x).$$

En utilisant le système linéaire (3.19), nous calculons la solution approchée $u_3(x)$. Avec un programme sur Matlab, la solution approchée et la solution exacte sont données par Figure 3.1.

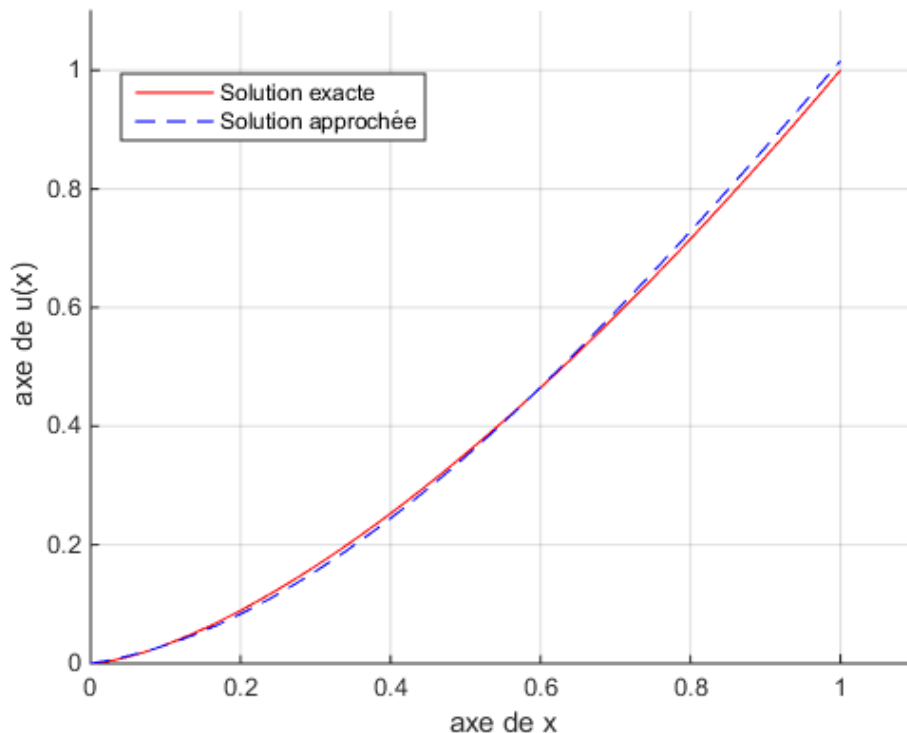


FIGURE 3.1 – Solutions exactes et approchées de l'exemple 3.2 pour $m = 3$.

La variation d'erreur absolue est donnée par Figure 3.2.

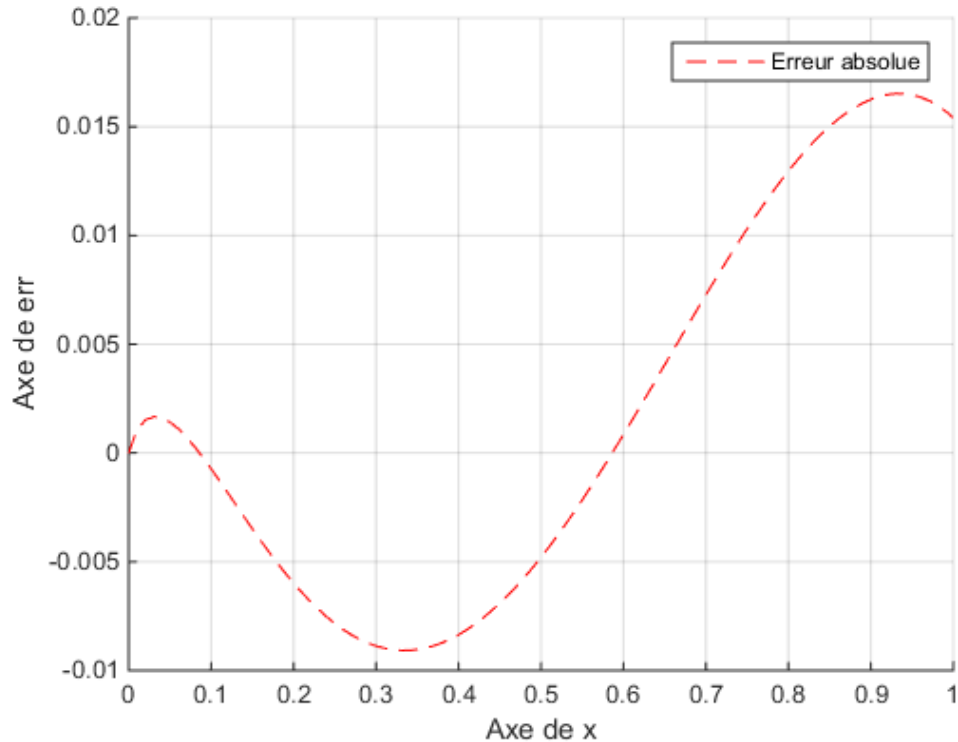


FIGURE 3.2 – Variation d’erreur absolue de l’exemple 3.2.

Exemple 3.3.

$$\begin{cases} \mathcal{D}^{1/2}u(x) = \frac{\sqrt{x}}{\Gamma(3/2)} - \frac{2x^{3/2}}{\Gamma(5/2)} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \int_0^x (x-t)u(t)dt, \\ u(0) + u(1) = 0. \end{cases}$$

La solution exacte est donnée par $u(x) = x - x^2$. Nous appliquons la méthode collocation de Tchebychev pour $m = 3$,

$$u_3(x) = \sum_{i=0}^3 c_i T_i^*(x).$$

En utilisant le système linéaire (3.19), nous calculons la solution approchée $u_3(x)$. Avec un programme sur Matlab, la solution approchée et la solution exacte sont données par Figure 3.3.

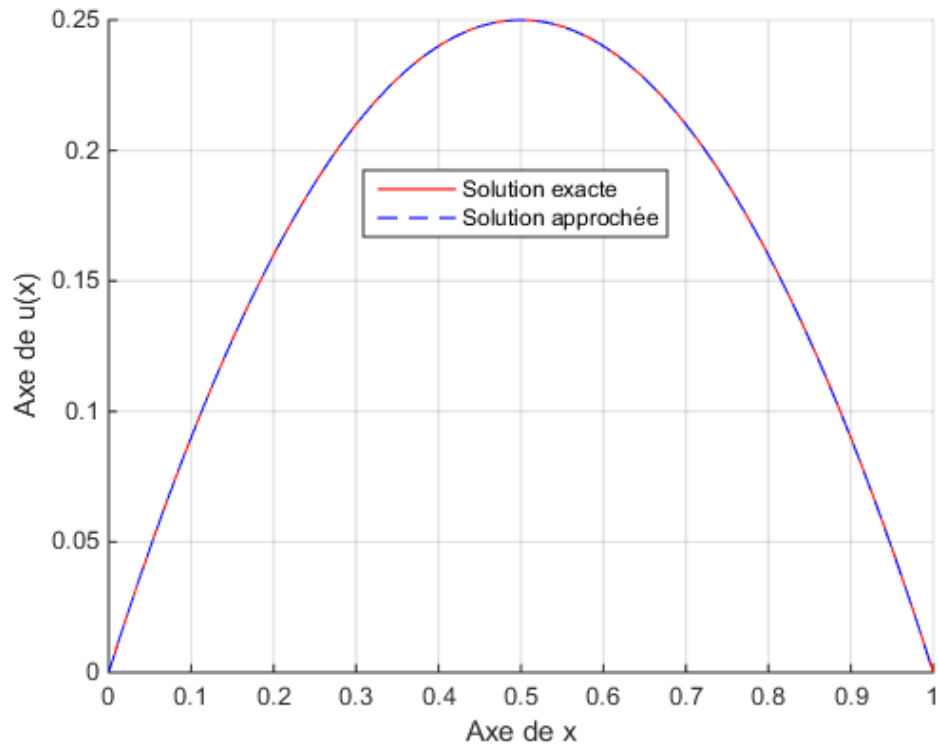


FIGURE 3.3 – Solutions exactes et approchées de l'exemple 3.3 pour $m = 3$.

La variation d'erreur absolue est donnée par Figure 3.4.

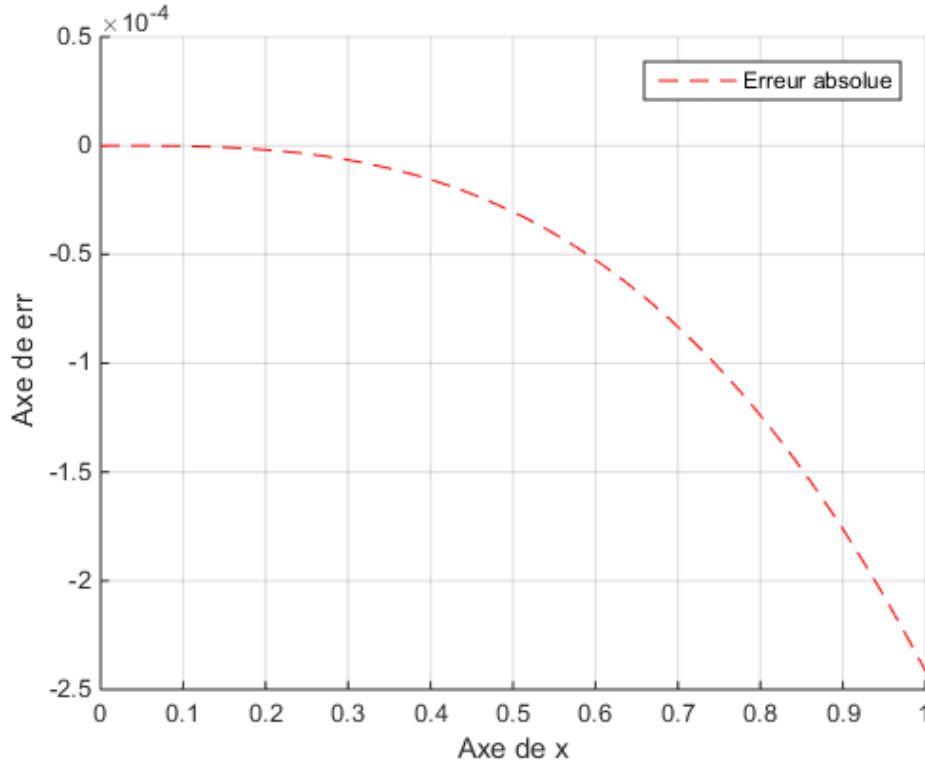


FIGURE 3.4 – Variation d'erreur absolue de l'exemple 3.3.

3.5.2 Cas non linéaire

Soit $F(t, u(t)) = (u(t))^s$ avec $s \in \mathbb{R}_+^*$ et $s \neq 1$. En utilisant (2.1), (3.7) et Théorème 3.1 nous obtenons :

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{i-1} c_i \mathcal{N}_{i,k}^{(\alpha)} x^{i-k-\alpha} = g(x) + \int_0^x K(x, t) \left[\sum_{i=0}^m c_i T_i^*(t) \right]^s dt \quad (3.21)$$

En remplaçant dans (3.21) la variable x par m racine x_p définie par (3.5), on obtient :

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{i-1} c_i \mathcal{N}_{i,k}^{(\alpha)} x_p^{i-k-\alpha} = g(x_p) + \int_0^{x_p} K(x_p, t) \left[\sum_{i=0}^m c_i T_i^*(t) \right]^s dt. \quad (3.22)$$

Avec le changement de variable $\tau = \frac{2}{x_p}t - 1$, (3.22) devient :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{i-1} c_i \mathcal{N}_{i,k}^{(\alpha)} x_p^{i-k-\alpha} &= g(x_p) \\ &+ \frac{x_p}{2} \int_{-1}^1 K\left(x_p, \frac{x_p}{2}(\tau + 1)\right) \left[\sum_{i=0}^m c_i T_i^*\left(\frac{x_p}{2}(\tau + 1)\right) \right]^s d\tau. \end{aligned} \quad (3.23)$$

En utilisant la formule d'intégration de Gauss-Tchebychev, on obtient :

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{i-1} c_i \mathcal{N}_{i,k}^{(\alpha)} x_p^{i-k-\alpha} = g(x_p) + \frac{x_p}{2} \sum_{q=0}^m \omega_q K\left(x_p, \frac{x_p}{2}(\tau_q + 1)\right) \left[\sum_{i=0}^m c_i T_i^*\left(\frac{x_p}{2}(\tau_q + 1)\right) \right]^s \sqrt{1 - \tau_q^2}, \quad (3.24)$$

où τ_q sont $m + 1$ racines de polynômes de Tchebychev $T_{m+1}(\tau)$ définies par

$$\tau_q = \cos\left(\frac{2q + 1}{2m + 2}\pi\right)$$

et ω_q sont les fonctions points correspondantes définies par :

$$\omega_q = \frac{\pi}{m + 1}.$$

Soit $F = (F_1(c_0, c_1, \dots, c_m), F_2(c_0, c_1, \dots, c_m), \dots, F_{m+1}(c_0, c_1, \dots, c_m))^T : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ une fonction définie par :

$$F_p(c_0, c_1, \dots, c_m) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{i-1} c_i \mathcal{N}_{i,k}^{(\alpha)} x_p^{i-k-\alpha} - g(x_p) - \frac{x_p}{2} \sum_{q=0}^m \omega_q K\left(x_p, \frac{x_p}{2}(\tau_q + 1)\right) \left[\sum_{i=0}^m c_i T_i^*\left(\frac{x_p}{2}(\tau_q + 1)\right) \right]^s \sqrt{1 - \tau_q^2}, \quad (3.25)$$

où $p = 1, 2, \dots, m$, et

$$F_{m+1}(c_0, c_1, \dots, c_m) = \sum_{i=0}^m [aT_i^*(0) + bT_i^*(1)] c_i. \quad (3.26)$$

La matrice jacobienne de la fonction F est définie par :

$$A = J_F(c_0, c_1, \dots, c_m) = (a_{pi}), \quad p = 1, 2, \dots, m + 1, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad (3.27)$$

où

$$a_{pi} = \frac{\partial F_p(c_0, c_1, \dots, c_m)}{\partial c_i} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{i-1} \mathcal{N}_{i,k}^{(\alpha)} x_p^{i-k-\alpha} - \frac{x_p}{2} \sum_{q=0}^m \omega_q K\left(x_p, \frac{x_p}{2}(\tau_q + 1)\right) sT_i^*\left(\frac{x_p}{2}(\tau_q + 1)\right) \left[\sum_{k=0}^m c_k T_k^*\left(\frac{x_p}{2}(\tau_q + 1)\right) \right]^{s-1} \sqrt{1 - \tau_q^2}$$

et

$$a_{(m+1)i} = \sum_{i=0}^m [aT_i^*(0) + bT_i^*(1)]$$

Le système (3.24) et (3.20) est un système d'équations algébriques non linéaires. Pour résoudre ce système, on utilise la méthode de Newton.

Algorithme 2 (Méthode de Newton)

- 1: **Initialisation** : $V^0 = (c_0^0, c_1^0, \dots, c_m^0)^T$, $B^0 = F(c_0^0, c_1^0, \dots, c_m^0)$ et $\varepsilon > 0$ sont donnés.
 2: **Itération** : Résoudre le système linéaire

$$A(V^{k+1} - V^k) = -B^k. \quad (3.28)$$

- 3: **Test d'arrêt** : Si $\|B^{k+1}\| < \varepsilon$ stop.
-

Exemple 3.4. Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} {}^c\mathcal{D}^{3/4}u(x) = g(x) + \int_0^x xt(u(t))^4 dt, & 0 < x < 1, \\ u(0) + u(1) = 0, \end{cases}$$

où

$$g(x) = \frac{1}{\Gamma(1/4)} \left(\frac{32}{5}x^{5/4} - 4x^{1/4} \right) + \frac{x^{11}}{10} + \frac{4x^{10}}{9} - \frac{4x^9}{3} + \frac{4x^8}{7} + \frac{x^7}{6}.$$

La solution exacte est donnée par $u(x) = x^2 - x$. Nous appliquons la méthode de Newton avec $m = 2$ pour calculer la solution approchée $u_2(x)$. Avec un programme sur Matlab, la solution approchée et la solution exacte sont données par Figure 3.5.

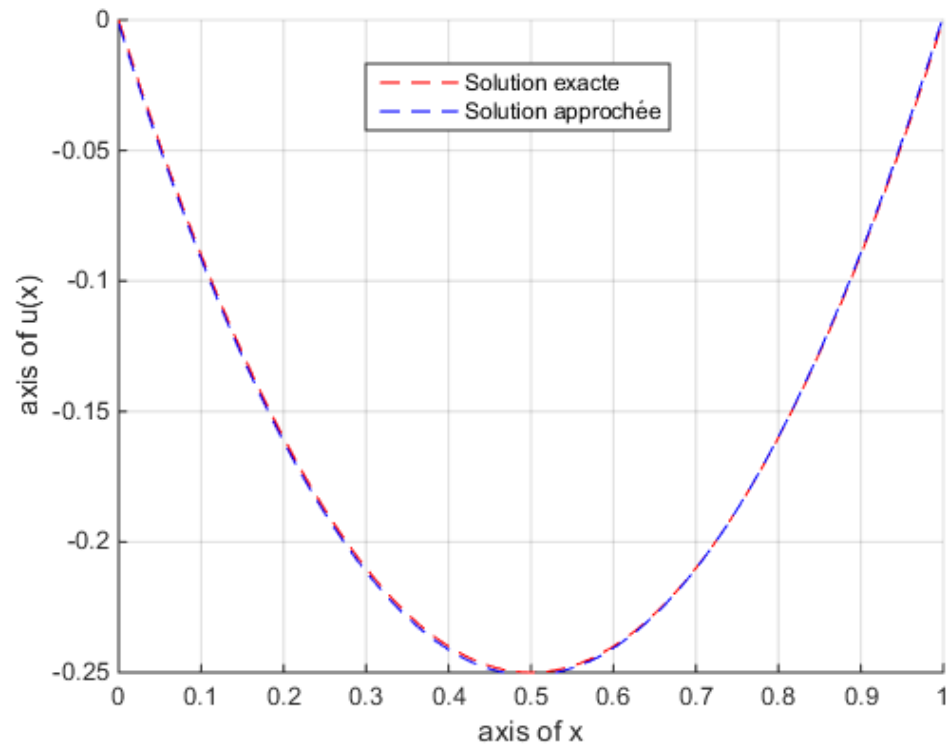


FIGURE 3.5 – Solutions exactes et approchées de l'exemple 3.4 pour $m = 2$.

La variation d'erreur absolue est donnée par Figure 3.6.

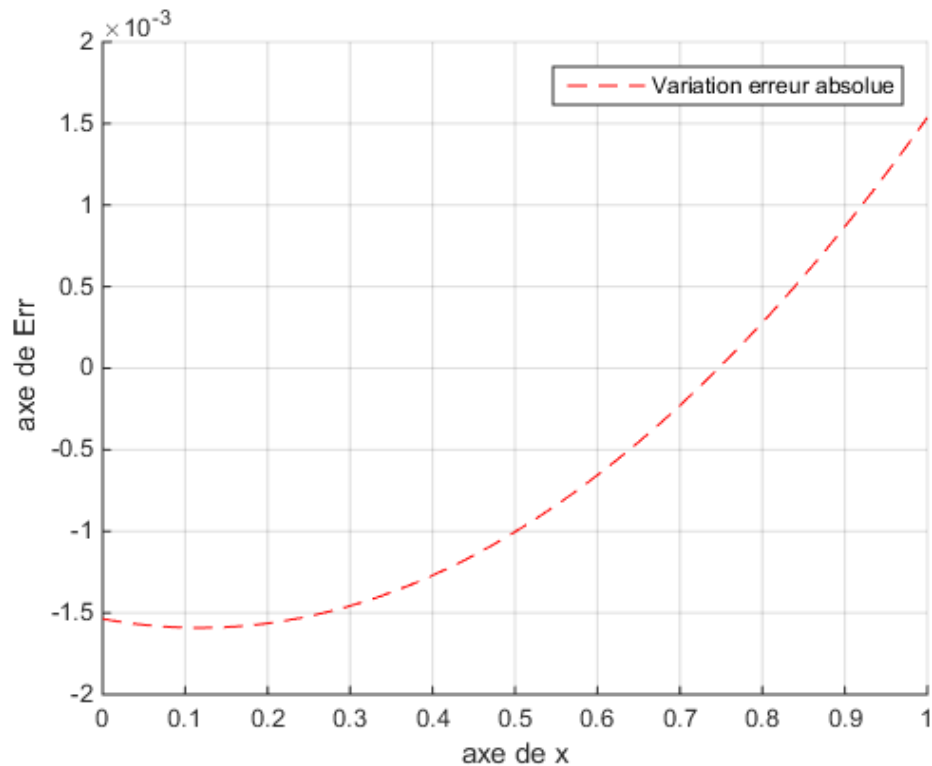


FIGURE 3.6 – Variation de l'erreur absolue pour l'exemple 3.4.

Exemple 3.5. On considère l'équation intégral-différentielle de Volterra fractionnaire suivante :

$${}^c\mathcal{D}^\alpha u(x) = -1 + \int_0^x (u(t))^2 dt, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

avec la condition initiale suivante : $u(0) = 0$. Nous appliquons la méthode de Newton avec $m = 2$ pour calculer la solution approchée $u_2(x)$. Avec un programme sur Matlab, la solution approchée pour $\alpha = 0.7, 0.8, 0.9, 1$ sont données par Figure 3.7.

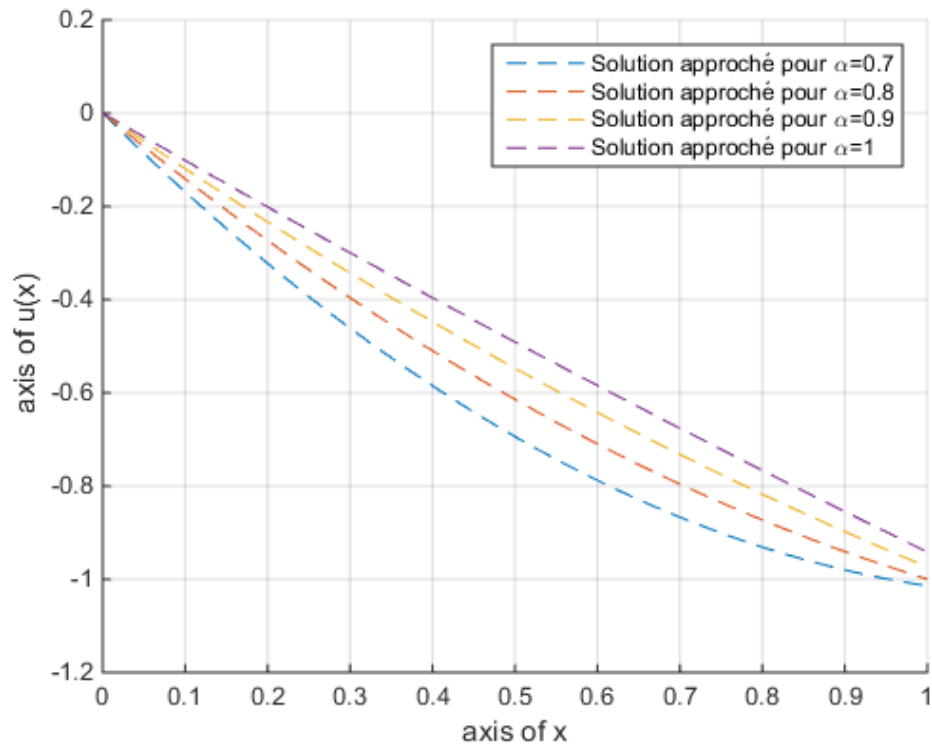


FIGURE 3.7 – Solution approchée de l'exemple 3.5 pour $m = 2$ et $\alpha = 0.7, 0.8, 0.9, 1$.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons étudié une classe d'équations intégral-différentielles fractionnaires de type Volterra avec une condition au limite non locale. Ce travail se déroule en deux étapes :

- ✓ **Existence et unicité** : nous avons démontré un résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème (1)-(2) en utilisant le théorème de point fixe.
- ✓ **Étude numérique** : nous avons proposé une approche numérique basée sur les polynômes de Tchebychev décalés de la première espèce pour résoudre le problème (1)-(2). La fonction inconnue est écrite comme une série de Tchebychev avec des m termes. Le problème (1)-(2) est réduit à un système d'équations algébriques linéaires ou non linéaire suivant la fonction F en utilisant les propriétés des polynômes de Tchebychev et la méthode d'intégration de gauss-Tchebychev. Une attention particulière est accordée à l'étude de la convergence de la méthode proposée. Dans ce cas, la méthode de Newton est appliquée pour résoudre ce système. Enfin, deux exemples numériques sont présentés pour confirmer la fiabilité et l'efficacité de cette approche numérique.

Comme perspectives, nous avons prévu le sujet de recherche suivant : Étude une classe d'équations intégral-différentielles fractionnaires suivante :

$$\mathcal{D}^\alpha u(x) = g(x)u(x) + f(x) + \int_0^x K(x,t,u(t))dt, \quad 1 < \alpha < 2, \quad 0 < x < 1,$$

avec les conditions aux limites non locales :

$$\begin{cases} au(0) + bu(1) = c, \\ a'u'(0) + b'u'(1) = c', \end{cases}$$

où g, f et K sont des fonctions continues, et a, b, c, a', b', c' sont des réels avec $a + b \neq 0$ et $a' + b' \neq 0$.

Bibliographie

- [1] AHMED, S., AND SALH, S. Generalized taylor matrix method for solving linear integro-fractional differential equations of volterra type. *Applied Mathematical Sciences* 5, 33-36 (2011), 1765–1780.
- [2] BHRAWY, A., AND ALGHAMDI, M. A shifted jacobi-gauss-lobatto collocation method for solving nonlinear fractional langevin equation involving two fractional orders in different intervals. *Boundary Value Problems Vol. 2012, article 62*, 13 pages (2012).
- [3] BHRAWY, A., AND ALOFI, A. The operational matrix of fractional integration for shifted chebyshev polynomials. *Applied Mathematics Letters* 26, 1 (2013), 25–31.
- [4] DOHA, E., BHRAWY, A., AND EZZ-ELDIEN, S. Efficient chebyshev spectral methods for solving multi-term fractional orders differential equations. *Applied Mathematical Modelling* 35, 12 (2011), 5662–5672.
- [5] HE, J. Some applications of nonlinear fractional differential equations and their approximations. *Bulletin of Science, Technology & Society* 15, 2 (1999), 86–90.
- [6] HUSSAINI, M., QUARTERONI, A., AND ZANG, T. *Spectral methods in fluid dynamic*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.
- [7] IRANDOUST-PAKCHIN, S., AND ABDI-MAZRAEH, S. Exact solutions for some of the fractional integro-differential equations with the nonlocal boundary conditions by using the modification of he’s variational iteration method. *International Journal of Advanced Mathematical Sciences* 1, 3 (2013), 139–144.
- [8] IRANDOUST-PAKCHIN, S., KHEIRI, H., AND ABDI-MAZRAEH, S. Chebyshev cardinal functions : an effective tool for solving nonlinear volterra and fredholm integro-differential equations of fractional order. *Iranian Journal of Science and Technology Transaction A : Science* 37, 1 (2013), 53–62.
- [9] KILBAS, A., SRIVASTAVA, H., AND TRUJILLO, J. *THEORY AND APPLICATIONS OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS*. ELSEVIER, 2006.
- [10] LAADJAL, Z., AND MA, Q.-H. Existence and uniqueness of solutions for nonlinear volterra-fredholm integro-differential equation of fractional order with boundarry conditions. *Math Meth Appl Sci* 29 (2019), 1–13.
- [11] MITTAL, R., AND NIGAM, R. Solution of fractional integrodifferential equations by adomain decomposition method. *International Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 4, 2 (2008), 87–94.
- [12] MURAD, S., ZEKRI, H., AND HADID, S. Existence and uniqueness theorem of fractional mixed volterra-fredholm integrodifferential equation with integral boundary conditions. *International Journal of Differential Equations vol. 2011, Article ID 304570*, 15 pages (2011).
- [13] PODLUBNY, I. *Fractional differential equations*. Academic Press, 1999.

- [14] RAY, S. S. Analytical solution for the space fractional diffusion equation by two-step adomian decomposition method. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 14, 4 (2009), 1295–1306.
- [15] SAEED, R., AND SDEQ, H. Solving a system of linear fredholm fractional integro-differential equations using homotopy perturbation method. *Australian Journal of Basic and Applied Sciences* 4, 4 (2010), 633–638.
- [16] SAEEDI, H., AND SAMIMI, F. He's homotopy perturbation method for nonlinear fredholm integro-differential equations of fractional order. *International Journal of Engineering Research and Applications* 2, 5 (2012), 52–56.
- [17] SAMKO, S., KILBAS, A., AND MARICHEV, O. *Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications*. Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
- [18] YANG, Y., CHEN, Y., AND HUANG, Y. Spectral-collocation method for fractional fredholm integro-differential equations. *Journal of the Korean Mathematical Society* 51, 1 (2014), 203–224.

ملخص: في هذه المذكرة ، قمنا بدراسة صنف من المعادلات التفاضلية-التكاملية الكسرية من نوع فولتيرا مع شرط حدي غير محلي. لقد أثبتنا الوجود والوحدانية لهذه المسألة وذلك باستخدام نظرية النقطة الثابتة. اقترحنا مخطط عددي يعتمد على كثيرات الحدود لتشبيبيشاف من النوع الأول وذلك بكتابة الحل على شكل سلسلة تشبيبيشاف ذات m حد. تم اختزال المسألة إلى جملة معادلات جبرية خطية أو غير خطية حسب خطية الدالة F وباستعمال طريقة التكامل العددية ل غوص-تشبيبيشاف. قمنا بدراسة مسألة التقارب. في هذه الحالة، تم تطبيق طريقة نيوتن لحل هذه الجملة. أخيرًا ، تم تقديم أربعة أمثلة لتأكيد دقة وكفاءة هذا المخطط العددي.

كلمات مفتاحية: معادلة تفاضلية-تكاملية كسرية من نوع فولتيرا، نظرية النقطة الثابتة، طريقة نيوتن، طريقة غوص-تشبيبيشاف ، كثيرات الحدود لتشبيبيشاف.

Dans ce mémoire, nous avons étudié une classe d'équations intégral-différentielles fractionnaires de type Volterra avec une condition à la limite non locale. D'abord, nous avons démontré un résultat d'existence et d'unicité de la solution de ce problème en utilisant le théorème de point fixe. Une approche numérique proposée basée sur les polynômes de Tchebychev décalés de la première espèce pour résoudre ce problème. La fonction inconnue est écrite comme une série de Tchebychev avec des m termes. Notre problème est réduit à un système d'équations algébriques linéaires ou non linéaire suivant la fonction F en utilisant les propriétés des polynômes de Tchebychev et la méthode d'intégration de Gauss-Tchebychev. Une attention particulière est accordée à l'étude de la convergence. Dans ce cas, la méthode de Newton est appliquée pour résoudre ce système. Enfin, quatre exemples numériques sont présentés pour confirmer la fiabilité et l'efficacité de cette approche numérique.

Mots-Clés : Équation intégral-différentielle fractionnaire de type Volterra, Théorème de point fixe, Méthode de Newton, Méthode de Gauss-Tchebychev, Polynômes de Tchebychev.

In this memoir, we have studied a class of fractional Volterra integro-differential equations with non-local boundary condition. First, we have proved a result of existence and uniqueness of the solution of this problem in a useful fixed point theorem. A proposed numerical approach based on shifted Chebyshev polynomials of the first kind to solve this problem. The unknown function is written as a Chebyshev series with m terms. Our problem is reduced to a system of linear or nonlinear algebraic equations following the function F using the properties of Chebyshev polynomials and the gauss-Chebyshev method. Particular attention is given to the study of convergence. In this case, Newton's method is applied to solve this system. Finally, four numerical examples are presented to confirm the reliability and efficiency of this numerical approach.

Keywords : Fractional Volterra integro-differential equation, Fixed point theorem, Newton's method, Gauss-Chebyshev method, Chebyshev polynomials.