Remerciements

Avant tout ,nous rendons nous profondes gratitudes à Dieu qui nous accorde de la science et nous à aidé à réaliser ce modeste traveil.

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur ***Mostefa Nedir ,*** *Professeur à universite de* ***Mohamed Boudiaf*** *pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé. Je lui suis également reconnaissant pour la confiance qu'il ma accordée. Il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.*

Je ne saurais oublier de remercier tous mes professeurs de département de mathématiques .Pour finir mes derniers mots il est important pour moi de remercier ma famille :mama ,mes frère et ma soeur qui ont toujours été une source inépuisable d'encouragements

et un grande merçi à mes amis *.et toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.*

Table des matières

0.1 Introduction

Les travaux de ce mémoire se situent dans le cadre de la théorie des opérateurs et

seront dédiés au comprendre les astuce quelques théorèmes sur les opérateurs fermés et fermables

dans le cas non borné (ou les opérateurs à domaine).

ce mémoire est composé de trois chapitres:

1. Dans **le premier** chapitre: je présenterai une petit rappelle sur les opérateur bornés et leur proprietés dans l'espace de Hilbert

2. Dans **le deuxième** chapitre: je exposerai différentes définitions et propriétés des opérateurs non borné qui contient les opérateurs fermés , fermables et aussi l'opérateur adjoint, auto-adjoint d'un opérateur non borné

   et la relation entre opérateur fermé et auto-adjoint.....

3. **Le dernièr** chapitre : constitu certains proprietés sur le spectre des opérateurs bornés, non bornés et fermés

Chapitre 1

Les opérateurs bornés

1.1 Continuité des opérateurs

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F est dit continu au point x_0 de G si, on a la propriété suivante

Pour tout suit x_n de G converge vers x_0, la suit $A(x_n)$ converge vers $A(x_0)$ c'est-à dire

$$lim_{n\to\infty} A(x_n) = A(\lim_{n\to\infty} x_n) = A(x_0)$$

L'opérateur linéaire A est dit continu sur G, s'il est continu en chaque point de l'ensemble G

1.2 Les opérateurs bornés

Un opérateur linéaire A défini sur E dans F est dit borné s'il exist une constante positive $C > 0$, telle que

$$\|A(x)\|_F \leq C \|x\|_E \tag{1.2.1}$$

Proposition 1.2.1

La plus petite des constante C verifiant la relation (1.2.1) est appellée norme de A notée $\|A\|$ et donnée par:

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E=1} \|A(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E\leq 1, x\neq 0} \|A(x)\|_F$$

1.3 Les opérateurs adjoints

Définition 1.3.1

Soit E et F deux espaces de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(E,F)$,L'unique application linéaire A^* $\in \mathcal{L}(E,F)$ telle que pour tout

$x \in E, y \in F$ on ait $\langle A(x), y\rangle_F = \langle x, A^*(y)\rangle_E$ est appellé adjoint de A

Exemple 1.3.1

soit un intérvalle fermé borné $[a,b]$, un fonction k continu sur $[a,b]\times[a,b]$ à valeur complexe et A l'opérateur intégral de Fredhom

de noyau k défini ,par $f \in L^2([a,b])$,par

$$Af(x) = \int_a^b k(x,y)f(y)dy$$

C'est un opérateur linéaire borné sur E, pour tout f et g dans E, on a

$$\begin{aligned}
\langle Af, g\rangle &= \int_a^b \left(\int_a^b k(x,y)f(y)dy\right)\overline{g(x)}dx \\
&= \int_a^b f(y)\left(\int_a^b k(x,y)\overline{g(x)}dx\right)dy \\
&= \int_a^b f(y)(\overline{\int_a^b \overline{k(x,y)}g(x)dx})dy \\
&= \langle f, A^*g\rangle
\end{aligned}$$

on en deduit que A^* est l'opérateur intégral de Fredholm de

noyau k^* avec $k^*(x,y) = \overline{k(y,x)}$

autrement dit

$$A^*f(x) = \int_a^b \overline{k(x,y)}f(y)dy$$

Soit E et F deux espaces de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors
il existe un unique $A^* \in \mathcal{L}(F,E)$tel que, pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$,
on ait :

$$< A(x), y >=< x, A^*(y) >$$

On a de plus $\|A\| = \|A^*\|$.

Soit H un Hilbert complexe et soit $A \in B(t)$ inversible alors A^* est inversible et on a $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$

1.4 Les opérateurs Auto-adjoint

Définition 1.4.1

Un opérateur $A \in \mathcal{L}(E,E) = \mathcal{L}(E)$ est dit Auto-adjoint (ou parfois Hermitien) si, quels que soit x et y dans E, on a

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$$

Proposition 1.4.1

Soit E un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$,un élément A de $\mathcal{L}(E)$ auto-adjoint si et seulement si,pour tout x dans E,
$\langle Ax, x \rangle$ est une nombre réel.

Corollaire 1.4.1

Soit E un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ et A dans $\mathcal{L}(E), si$ $\langle Ax, x \rangle = 0$ pour tout $x \in E$, alors $A = 0$

Proposition 1.4.2

si A est un opérateur auto-adjoint , alors

$$\|A\| = sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle|$$

Exemple 1.4.1

Pour tout $A \in (E, F)$ l'opérateur $A^*A \in \mathcal{L}(E)$ est auto-adjoint,car

$$(A^*A)^* = A^*A^{**} = A^*A$$

Chapitre 2

opérateur non borné

Définition 2.0.2

soit E et F deux espaces normés .

nous disons un opérateur non borné A de E à F une application linéaire définie sur un sous espace vectoriel $D(A)$ de E appelé le domaine de l'espace A à F

$$A : D(A) \to F$$

$$\varphi \to A(\varphi), \text{pour tout} \varphi \in D(A) \subset E$$

Exemple 2.0.2

1) soit $E = F = C([0,1])$ et A et f défini par

$$\{A : D(A) \subset E \to F\} \quad \text{tel que} \quad Ax = \frac{dx}{dt}$$

$$D(A) = C^{'}([0,1])$$

A est linéair mais pas continue .

on considére :

$$x_n(t) = t^n; n \in \mathbb{N} \qquad \|x_n\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} \|x_n(t)\| = \max_{t\in[0,1]} \|t^n\| = 1$$

$$\|Ax_n(t)\| = \max_{t\in[0,1]} \left\|nt^{n-1}\right\| = n_{n\to\infty} \to \infty$$

donc:$\|Ax_n\|_\infty \nless c\,\|x_n\|$ alors l'opérateur A n'est pas borné

2)$H = L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \qquad f \text{ mesurable tq:} \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx < \infty \right\}$

le produit scalaire sur $L^2(\mathbb{R})$ est

$$\langle f, g\rangle = \int f(x)\overline{g(x)}dx$$

$$A : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$$

$$f \to Af$$

tel que :$Af(x) = xf(x)$ le domaine $D(A) = \{f \in L^2(\mathbb{R})/xf(x) \in L^2(\mathbb{R})\}$

Alors :

$$f(x) = 1/\sqrt{1+x^2} \in L^2(\mathbb{R})$$

mais $xf(x) \notin L^2(\mathbb{R})$ car :

$\int xf(x)dx$ est divergente ,alors A est un opérateur non-borné.

Définition 2.0.3 *graphe*

soit A opérateur non borné sur un espace de Hilbert E

le graphe de A est le sous espace vectoriel noté :$G(A)$ de $E\times F$définit par:

$$G(A) = \{(x, y) : x \in D(A), y = Ax\}$$

Remarque 2.0.1

Les sous espaces de $E \times F$ n'est pas toujour un graphe d'un opérateur

Proposition 2.0.3

un sous espace $G \subset E \times F$ est le graphe d'un opérateur linéaire si et seulement si

$$(0, y) \in G \Rightarrow y = 0$$

Corollaire 2.0.2

Soit E et F deux espaces de Banach. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$; On suppose en autre u bijective de E sur F

Alors

$$u^{-1} \in \mathcal{L}(E, F)$$

Remarque 2.0.2

Soit E un espace de Banach muni de deux normes $\|.\|_1 , \|.\|_2$

on suppose qu'il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\|x\|_2 \leq c \|x\|_1 ; \forall x \in E$$

Alors les deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes (i.e il existe $c^{'} > 0$ avec $\|x\|_1 \leq c^{'} \|x\|_2 , \forall x \in E$)

En effet cela résulte immédiatement :

$$E = (E, \|.\|_1), \quad F = (E, \|.\|_2)$$

et pour u l'identité

2.1 Théorème du graphe fermé

Soient E et F deux espaces de Banach.soit u une application linéaire de E dans F

Alors $u \in \mathcal{L}(E, F)$,si et seulement si ,son graphe

$$G = \{(x, y) \in E \times F; y = u(x)\}$$

est fermé dans l'espace produit $E \times F$

Preuve.

- 1. (a) Si u est continue,il est évident que G est fermé

     (b) Montrons que G fermé entraine $u \in \mathcal{L}(E, F)$

Considérons sur E les deux normes:

Montrons que G fermé entraine $u \in \mathcal{L}(E, F)$

Considérons sur E les deux normes:

$$\|x\|_1 = \|x\|_E + \|u(x)\|_F$$

$$\|x\|_2 = \|x\|_E$$

Comme G est fermé , E muni de la norme $\|.\|_1$ est un espace de Banach .par ailleurs $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$donc ces deux normes sont équivalentes :il existe une constante $c > 0$ telle que$\|x\|_1 \leq c\,\|x\|_2$.

Donc

$$\|u(x)\|_F \leq c^{'}\,\|x\|_E$$

Le théorème est valable pour les espaces vectoriels topologique plus généraux que les espaces de Banach. ■

2.1.1 Opération algèbriques

- la somme:

$$(S + A)(x) = Sx + Ax \text{ avec } D(S + A) = D(S) \cap D(A)$$

- le produit :

$$(S.A)(x) = S(A(x)) \text{ avec } D(S.A) = \{x \in D(A) \text{ tel que :} A(x) \in D(S)\}$$

- Les lois usuelles d'associtivité:

$$(R + S) + A = R + (S + A); (RS)A = R(SA)$$

- Les lois de distributivité:

$$(R+S)A = RA + SA, A(R+S) \supset AR + AS$$

.car il se peut que $(R+S)x \in D(A)$ meme si Rx ou Sx n'est pas dans $D(A)$

- Multiplication par scalaire: si $\alpha = 0$ Alors $D(\alpha A) = H$ et $\alpha A = 0$.

si $\alpha \neq 0$ Alors

$$D(\alpha A) = D(A) et (\alpha A)x = \alpha(Ax)$$

pour $x \in D(A)$

2.2 Opérateurs fermés et leurs proprietés

Définition 2.2.1

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire A de E dans F; de domaine $D(A)$ est dit fermé si pour toute suite $(\varphi_n) \subset D(A)$ vérifiant
$\varphi_n \to \varphi$ dans $A\varphi_n \to \psi$ dans F lorsque $n \to \infty$
alors $\varphi \in D(A)$ et $\psi = A\varphi$

Remarque 2.2.1

Soit $(A, D(A))$ un opérateur fermé. Alors A est borné si et seulement si $D(A) = E$

Preuve. On appliquant le théorème du graphe fermé. ■

Proposition 2.2.1

soit E et F deux espaces normé et A un opérateur linéaire alors : les assertion suivante sont équivalence:

1. A est un opérateur fermé

2. le graphe $G(A)$ est fermé dans $E \times F$

3. le sous espace $D(A)$ est complet pour la norme de graphe définit par $\boxed{\|\varphi\|_{D(A)} = \|\varphi\|_E + \|A\varphi\|_F}$

Proposition 2.2.2

Soient E et F deux espaces da Banach et soit A un opérateur linéaire de E dans F de domaine $D(A)$: On suppose que l'application A est injective. Alors l'opérateur Ade domaine $D(A)$ est fermé si et seulement si son inverse A^{-1}(de domaine $\operatorname{Im} A$) l'est.

Preuve. Le résultat provient immédiatement de la propriété des graphes de A et A^{-1}
$G(A) = G^s(A^{-1})$ (symétrisé du graphe de A).
de sort que l'un est fermé ,l'autre l'est aussi. ■

Proposition 2.2.3

Soit A un opérateur fermé de E dans F de domaine $D(A)$: Alors, son noyau $\ker A$ est fermé.

Preuve. En effet, si$(\varphi_n) \subset \ker A$ est une suite convergente vers φ dans E;

$$A\varphi_n = 0 \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

puisque A est fermé, on a

$$\varphi \in D(A) \ et \ \ A\varphi = 0; \ donc \ \varphi \in \ker A$$

■

Exemple 2.2.1

Soit A un opérateur non borné défini sur $H^1(]0,1[)$ avec $A = -i\frac{d}{dx}$
ou $H^1(]0,1[)$ est l'espace de sobolev d'indice1

$$H^1(]0,1[) : \left\{ f \in L^2(]0,1[), f' \in L^2(]0,1[) \right\}$$

Alors :A est un opérateur fermé

Remarque 2.2.2

Si Aet B deux opérateurs linéaires de E dans F alors ,

$$D(A+B) = D(A) \cap D(B) \text{ par } (A+B)x = Ax + Bx$$

Remarque 2.2.3

- Les oérateur fermés sont donc les opérateurs dont le graphe est fermé
- un opérateur borné est fermé mais la réciproque est fausse en général

Proposition 2.2.4

1. Soit $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur linéaire fermé et soit $B \in \mathcal{L}(E,F)$ alors l'opérateur $A+B$ est fermé
2. Soit A et B deux opérateurs linéaires fermé alors $A+B$ n'est pas toujours fermé

- **Preuve.** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un séquence de $D(A+B) = D(A)$; avec $x_n \to x$ et $(A+B)x_n \to y$ .on a B est continue

  $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((A+B)x_n - Bx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converges à $y - Bx$.

  $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((A+B)x_n - Bx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converges à $y - Bx$

  on a A fermé ,et $x \in D(A)$ et $Ax = y - Bx$,

  i.e $(A+B)x = y$ donc $A+B$ est fermé . ■

  contre exemple

Condidère A et B définie par:
$A(x) = f'(x)$,$B(x) = -f'(x)$ de $D(A) = D(B) = H^1(\mathbb{R})$ où
$H^1(\mathbb{R}) = \left\{f \in L^2(\mathbb{R}) : f' \in L^2(\mathbb{R})\right\}$est espace sobolev.
A et B sont fermés mais $A(x) + B(x) = 0$ n'est pas fermé dans H^1(car $0 \notin G(H^1)$)

mais $0 \in \overline{G(H^1)} = G(\overline{H^1}) = G(L^2)$ (car $H^1 \subset L^2(\mathbb{R})$)
donc 0 fermé dans L^2(car $0 \in G(L^2)$)

Corollaire 2.2.1

Soit A et B deux sous-espaces fermé de E .On a

$$(A \cap B)^{\perp} \supset \overline{A^{\perp} + B^{\perp}}$$

$$(A^{\perp} \cap B^{\perp})^{\perp} = \overline{A + B}$$

Théorème 2.2.1

Soit A et B deux sous-espaces fermé de E les propiétés suivantes sont équivalentes:

1. $A + B$ est fermé dans E
2. $A^{\perp} + B^{\perp}$ est fermé dans E
3. $A + B = (A^{\perp} \cap B^{\perp})^{\perp}$
4. $A^{\perp} + B^{\perp} = (A \cap B)^{\perp}$

La preuve (corollaire) et (Théorème) laisse au lecture[7]

2.2.1 Extension d'opérateur:

Définition 2.2.2

On dit que $B : E \to F$ extension de A et on note $A \subset B$ si :

- $D(A) \subset D(B)$

$Bx = Ax, \forall x \in D(A)$

- si $A \subset B \Rightarrow G(A) \subset G(B)$

2.2.2 Opérateur densément défini

Un opérateur A défini de l'espace normé E est dit densément défini si son domaine est un sous-espace dense dans E

i.e , $\overline{D(A)} = E$

2.3 Opérateur fermable

Définition 2.3.1

Un opérateur A est dit fermable si A admet une extension fermée

Proposition 2.3.1

La plus petite extension fermée d'un opérateur fermable est appelée la fermeture de A et notée $\overline{A}$

Preuve. $\overline{A}$ est une extension fermée de A .soit B extension fermée de A

$$A \subset B, G(A \subset G(B) \Rightarrow \overline{G(A)} \subset \overline{G(B)} = G(B)$$

d'où $\overline{A} \subset B$. ■

Remarque 2.3.1

Si A est fermable alors :

$$\boxed{G(\overline{A}) = \overline{G(A)}}$$

Preuve. Supposons que S est une extension fermée de A .ensuit $\overline{G(A)} \subset G(S)$ pour un certain $\langle 0, \psi \rangle \in \overline{G(A)}$ alors

$\psi = 0$.définir R avec

$$D(R) = \left\{ \psi, \langle \psi, \varphi \rangle \in \overline{G(A)} \right\}$$

pour certain ϑ par $R\psi = \vartheta$ ou $\vartheta \in E$ est l'unique vecteur de telle sorte que

$\langle\psi,\vartheta\rangle \in \overline{G(A)}$.ensuite

$$G(R) = \overline{G(A)}$$

de sorte est un prolongement de fermeture de A mais $R \subset S$ qu'est un arbitraire l'extention

fermée,de sorte que:

$$R = \overline{A}$$

■

Remarque 2.3.2

Soit A un opérateur non borné alors :A est femable si et seulement si

$$\forall (f_n)_n \subset D(A), \lim f_n = 0, \text{Nous avons:}$$

$$\lim Af_n = 0$$

$$\text{ou } \lim_{n\to\infty} Af_n \quad \text{n'existe pas}$$

Exemple 2.3.1

$$A : C(]0,1[) \to \mathbb{R}$$

$$Af = f^{'}(0), D(A) = C^1(]0,1[)$$

alors A n'est pas fermable car :si

$$f_n(t) = \frac{1}{n}\sin nt$$

$$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n} \to 0$$

$$\|Af_n\|_\infty = 1$$

Remarque 2.3.3

On dit que A est fermable si $\overline{G(A)}$ est le graphe d'un opérateur non-borné et on note par $\overline{A}$, c'est-à-dire $\overline{G(A)} = G(\overline{A})$ d'où :

A est un opérateur fermé sur H

$\overline{A}$ est une extension fermée de l'opérateur A

Tout opérateur fermé est fermable mais l'inverse est faux

Exemple 2.3.2

$$A = \frac{d}{dt} : L^2\left[-1,1\right] \to L^2\left[-1,1\right]$$

$D(A) = C^1([-1,1])$ n'est pas fermé mais fermable.

2.4 Adjoint d'un opérateur non borné

Définition 2.4.1

Soit $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur non borné à domaine dense.On va définir l'adjoint d'un opérateur non-borné

$A^* : D(A^*) \subset F' \to E'$ comme suit .On pose

$$D(A^*) = \left\{v \in F' ; \exists c \geq 0 \text{ tel que } |\langle v, Au\rangle| \leq c\,\|u\| \ \ \forall u \in D(A)\right\}$$

il est claire que $D(A^*)$ est un sous-espace vectoriel de F'

et vérifiant

$$\boxed{\langle v, Au\rangle = \langle A^*v, u\rangle \quad \forall u \in D(A), \forall v \in D(A^*)}$$

Proposition 2.4.1

Soit $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur non-borné à domaine dense.
Alors A^* est fermé, i.e. $G(A^*)$ est fermé dans $F' \times E'$.

Preuve. Soit $v_n \subset D(A^*)$tel que $v_n \to v$ dans F'et $A^* v_n \to f$ dans E'. II s'agit de prouver que $(a) v \in D(A^*)$

et $(b) A^* v = f$. Or on a

$$(v_n, Au) = (A^* v_n, u) \quad \forall u \in D(A).$$

D'où, à la limite il vient

$$(v, Au) = (f, u) \quad \forall u \in D(A)$$

Par conséquent $v \in D(A^*)$ (d'après la définition de $D(A^*)$) et $A^* v = f$
Les graphes de A et A^* sont liés par une relation d'orthogonalité très simple. En effet, considérons l'application

$$J : F' \times E' \to E' \times F'$$

considérons l'application définie par:

$$J([v, f]) = [-f, v].$$

Soit A un opérateur non-borné, $A : D(A) \subset E \to F$ avec $\overline{D(A)} = E$. Alors on a

$$\boxed{J[G(A^*)] = G(A)^{\perp}}$$

En effet, soit $[v, f] \in F' \times E'$; alors
$[v, f] \in G(A^*) \Leftrightarrow \langle f, u \rangle = \langle v, Au \rangle \quad \forall u \in D(A)$

$$[v, f] \in G(A^*) \Leftrightarrow \langle f, u \rangle = \langle v, Au \rangle \quad \forall u \in D(A)$$

$$\Leftrightarrow - \langle f, u \rangle + \langle v, Au \rangle = 0 \quad \forall u \in D(A)$$

$$\Leftrightarrow [-f, v] \in G(A)^{\perp}.$$

II est commode d'introduire l'espace $X = E \times F$ de sorte que $X' = E' \times F'$ et de considérer les sous-espaces $G = G(A)$ et $L = E \times \{0\}$ dans X. On peut décrire $N(A)$, $N(A^*)$, $R(A)$ et $R(A^*)$ en termes de G et L.

On vérifie très facilement que

1. $N(A) \times \{0\} = G \cap L$
2. $E \times R(A) = G + L$
3. $\{0\} \times N(A^*) = G^{\perp} \cap L^{\perp}$
4. $R(A^*) \times F' = G^{\perp} + L^{\perp}$.

■

Corollaire 2.4.1

Soit $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur non-borné ,fermé, avec $\overline{D(A)} = E$ .Alors on a

$(i) N(A) = R(A^*)^{\perp}$

$(ii) N(A^*) = R(A)^{\perp}$

$(iii) N(A)^{\perp} \supset \overline{R(A^*)}$

$(iv) N(A^*)^{\perp} = \overline{R(A).}$

Preuve. (i) D'après (4) on a

$R(A^*)^{\perp} \times \{0\} = (G^{\perp} + L^{\perp})^{\perp} = G \cap L$ (grace à proposition)

$= N(A) \times \{0\}$ (grace à 1)

(ii)D'aprés (2) on a

$\{0\} \times R(A)^{\perp} = (G + L)^{\perp} = G^{\perp} \cap L^{\perp}$ (grace à corollaire)

$= \{0\} \times N(A^*)$ (grace à 3)

de (iii) et (iv) Utiliser (i) (resp (ii), passer à l'orthogonal et appliquer la proposition $(M^{\perp})^{\perp} = \overline{M}$. ■

Théorème 2.4.1

Soit $(A, D(A))$ un opérateur a domaine dense. Alors

- A^* est fermé

- A est fermable si et seulement si $D(A^*)$ est dense.
- Si A est fermable alors $\overline{A} = A^{**}$ et $(\overline{A})^* = A^*$.

  laisse au lecture [4] .

Définition 2.4.2

Image de A :

$$R(A) = \{y \in Y, \text{ il existe } x \in D(A) \text{ tel que } y = Ax\}$$

Noyau de A :

$$N(A) = \{x \in D(A), Ax = 0\}$$

Proposition 2.4.2

Soit A un fermable à domaine dense $D(A)$ sur E,alors

$$N(\overline{A})^\perp = \overline{R(A^*)} \text{ et } N(A^*) = R(A)^\perp$$

$$N(\overline{A}) = R(A^*)^\perp \text{ et } N(A^*)^\perp = \overline{R(A)}$$

Preuve.

$$y \in R(A)^\perp \Leftrightarrow (\langle y, Ax\rangle = 0, \forall x \in D(A^*))$$

$$\Leftrightarrow (y \in D(\overline{A}))et\, \langle Ay, x\rangle = 0, \forall x \in D(A^*)$$

$$\Leftrightarrow y \in N(\overline{A})$$

$$y \in R(A)^\perp \Longleftrightarrow (\langle y, Ax\rangle = 0, \forall x \in D(A))$$

$$\Leftrightarrow ((y \in D(A^*))\text{et}\, \langle A^*y, x\rangle = 0, \forall x \in D(A)$$

$$\Leftrightarrow y \in N(A^*)$$

Les deux autres relations s'obtiennent en prenant l'ortogonale et en remarquant que $N(\overline{A})$ est fermé. ■

Théorème 2.4.2 *(1)*

Si A est un opérateur densément définit d'un espace Hilbert H donc A^* est un opérateur fermé

Preuve. Si $y_n \in D(A^*), y_n \to y$ et $A^* y_n \to z$ puis pour chaque $x \in D(A)$ on obtient

$$\langle Ax, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Ax, y_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, A^* y_n\rangle = \langle x, z\rangle$$

Donc

$$y \in D(A^*) \text{ et } A^* y = z$$

■

Remarque 2.4.1

$$D(A+B) = D(A) \cap D(B) \ \textit{par} \ (A+B)(x) = Ax + Bx \tag{2.4.1}$$

$$D(BA) = \{x \in D(A) : Ax \in D(B)\} \tag{2.4.2}$$

Proposition 2.4.3

Chaque opérateur linéaire borné A définie de E dans F est fermé.

En effet ,suppose $\varphi_n \in D(A) = E$ tel que φ_n convergent dans F .

De la continuité de A ,il est clair que $A\varphi = \psi$

Lemme 2.4.1 *(1)*

Si A et B deux opérateur non-borné

si A défini de E à F, B de F à K

1. $A^* + B^* \subset (A+B)^*$

2. $A^*B^* \subset (BA)^*$

   si B est borné alors:

$$\boxed{(BA)^* = A^*B^*} \tag{2.4.3}$$

et

$$\boxed{(A+B)^* = A^* + B^*} \tag{2.4.4}$$

Preuve.

(a) i. d'après 2.4.1 ensuit'il que avec $A + B$,les deux A et B sont densément définie si

$$y \in D(A^* + B^*) = D(A^*) \cap D(B^*)$$

puis pour tous $x \in D(A + B)$

$$\langle (A+B)x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle + \langle Bx, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle + \langle x, B^*y\rangle = \langle x, (A^* + B^*)y\rangle$$

par définition implique

$$y \in D((A+B)^*), \text{et } (A+B)^*y = (A^* + B^*)y,$$

donc

$$A^* + B^* \subset (A+B)^*...............(1)$$

ii. Suposons que:$x \in D(BA)$ et $y \in D(A^*B^*)$ donc:

$$y \in D(B^*) \text{ et } B^*y \in D(A^*)$$

Donc

$$\langle x, A^*B^*y\rangle = \langle Ax, B^*y\rangle$$

donc

$$Ax \in D(B) \text{ et } y \in D(B^*)$$

et

$$\langle Ax, B^*y\rangle = \langle BAx, y\rangle \text{ donc } y \in D((BA)^*)$$

Alors

$$D(A^*B^*) \subset D((BA)^*)\text{et } (x, A^*B^*y) = (x, (BA)^*y)$$

Donc

$$A^*B^* \subset (BA)^*............(2)$$

Supposons B borné ,alors:B^* est borné de sort que :$D(B^*) = H$ et soit: $y \in D((BA)^*)$ et $x \in D(BA)$:

$$\langle x, (BA)^* y\rangle = \langle BAx, y\rangle = \langle Ax, B^* y\rangle$$

car $y \in H$.
On a: $y \in D(B^*)$ et $B^*y \in D(A^*)$ alors:

$$y \in D(A^*B^*)$$

Et d'après précident

$$D(A^*B^*) \subset D((BA)^*) et \, \langle x, A^*B^*y\rangle$$

Donc:2.4.3 est vérifier.
Soit $y \in D(A^*)$. Alors pour $x \in D(A)$:

$$\langle Ax + Bx, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle + \langle x, B^*y\rangle = \langle x, A^*y + B^*y\rangle$$

où $A^* + B^* \subset (A + B)^*$.échangeant les roles de A et $A + B$ .Nous donnont l'inclusion opposée.

■

Lemme 2.4.2 *(2)*

Le produit AB (dans cet ordre) de deux opérateur fermé est fermé si l'une des situation suivantes vérifier:

1. A est inversible
2. B est borné.

Corollaire 2.4.2

A est un opérateur linéaire tel que $\overline{D(A)} = E$ et A^{-1} existe tel que :
$\overline{D(A^{-1})} = F$.Alors :

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$$

Preuve. $D(A)$ Dense dans E .Alors:A^* existe et $D(A^{-1})$ Dense dans H
Alors:$(A^{-1})^*$ existe ;Montrons que: $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$. pour $f \in D(A)$ et $g \in D((A^{-1})^*)$.
Alors:

$$\langle f, g \rangle = \left\langle A^{-1}Af, g \right\rangle = \left\langle Af, (A^{-1})^* g \right\rangle$$

cette équation montre que:

$$(A^{-1})^* g \in D(A^*) \text{ et } A^*(A^{-1})^* g = g$$

pour $f \in D(A^{-1})$ et $h \in D(A^*)$ .Alors :

$$\langle f, h \rangle = \left\langle AA^{-1}f, h \right\rangle = \left\langle A^{-1}f, A^*h \right\rangle$$

cette équation montre que:

$$A^*h \in D((A^{-1})^*) \text{ et } (A^{-1})^* A^* h = h$$

Donc

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$$

■

Lemme 2.4.3 *(3)*

Si A et B sont densément définit et A est inversible avec inverse A^{-1} dans $B(H)$, alors 2.4.3

puisque A inversible $AA^{-1} = I$ et $BAA^{-1} = B \Rightarrow (A^{-1})^*(BA)^* \subset \left[(BA)A^{-1}\right]^* \subset B^*$

par

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} et A^*(A^*)^{-1}(BA)^* = (BA)^* \subset A^*B^*$$

puisque nous avons toujours

$$\boxed{A^*B^* \subset (BA)^*} \; \textit{donc } 2.4.3$$

Théorème 2.4.3 *(2)*

Soit A et B deux opérateurs non borné tel que $AB = BA$ .Si A est inversible B est fermé et $D(BA^{-1}) \subset D(A)$. donc $A + B$ est fermé sur $D(B)$

Preuve. Notons $D(A+B) = D(A) \cap D(B)$. par:

$$AB = BA \Rightarrow A^{-1}B \subset BA^{-1} \Rightarrow D(B) = D(A^{-1}B) \subset D(BA^{-1}) \subset D(A)$$

$$\text{car:} \left\{ \begin{array}{c} A \text{ inversible} \Rightarrow A^{-1}A \subset AA^{-1} = I \\ A^{-1}AB \subset B \\ A^{-1}BA \subset B (\text{car } AB = BA) \\ \text{donc:} A^{-1}B \subset BA^{-1} \\ D(A^{-1}B) = \{x \in D(B) : Bx \in D(A^{-1})\} \\ = \{x \in D(B) : Bx \in H\} = D(B) \end{array} \right\}$$

donc $D(A+B) = D(B)$

donc A automatiquement fermé .puis on obtient :

$$A + B = A + BAA^{-1}$$

$$= A + ABA^{-1}$$

$$= A(I + BA^{-1})(\text{car } D(BA^{-1}) \subset D(A))$$

puisque A^{-1} est borné (et B est fermé),BA^{-1} est fermé, donc théorème $I + BA^{-1}$ est fermé

donc $A(I + BA^{-1})$ est fermé par Lemme(2.4.2)

donc $A + B$ est fermé sur $D(B)$. ■

Théorème 2.4.4 *(3)*

Soit A et B deux opérateurs non borné auto-adjoint tel que B inversible.si $AB = BA$ et $D(AB^{-1}) \subset D(B)$ alors $(A+B)^* = A + B$ sur $D(A)$

Preuve. Premièrement toujour on obtient

$$\boxed{A + B \subset (A+B)^*} \tag{2.4.5}$$

deuxièment , il est clair que:

$$D(A) = D(B^{-1}A) \subset D(AB^{-1}) \subset D(B),$$

$$\text{car:}\left\{\begin{array}{c} B^{-1}B \subset BB^{-1} = I \\ B^{-1}BA \subset A \\ B^{-1}AB \subset A \quad (AB = BA) \\ B^{-1}A \subset AB^{-1} \\ D(B^{-1}A) = \{x \in D(A), Ax \in D(B^{-1})\} \\ = \{x \in D(A), Ax \in H\} \\ = D(A) \end{array}\right\}$$

domaine $A + B$ est $D(A)$ .on obtient:

$$B^{-1}BA + B \subset A + B \quad (AB = BA)$$

et donc

$$(I + B^{-1}A)B \subset A + B$$

et donc

$$(A + B)^* \subset \left[(I + B^{-1}A)B\right]^* = B^*(I + B^{-1}A)^*$$

(par lemme(3) tel que B inversible)

$$= B^*\left[I + (B^{-1}A)^*\right] \quad \text{(par Lemme(2.4.1))}$$

$$= B^*\left[I + A^*(B^{-1})^*\right] \quad \text{(tel que } B^{-1} \text{ est borné)}$$

$$= B(I + AB^{-1}) \ (A \text{ et } B \text{ sont auto-adjoint})$$

$$= B + BAB^{-1}(\text{de } D(AB^{-1}) \subset D(B)$$

$$= B + ABB^{-1}$$

$$= A + B$$

donc

$$\boxed{(A + B)^* \subset A + B} \tag{2.4.6}$$

de 2.4.5 et 2.4.6 on a: Alors

$$\boxed{(A + B)^* = A + B} \tag{2.4.7}$$

■

Théorème 2.4.5

Soit A et B deux opérateurs non borné inversible tel que

$$AB = BA.$$

Si $D(A^*(B^*)^{-1}) \subset D(B^*)$, donc $(A+B)^* = A^* + B^*$

Preuve. Premiérement toujour on obtient

$$\boxed{A^* + B^* \subset (A+B)^*} \tag{2.4.8}$$

deuxièment,on a A et B les deux inversible ,par théorème (3) on obtient:

$$AB = BA \to A^*B^* = B^*A^*$$

on écrit:

$$B^{-1}BA + B \subset A + B \ (AB = BA)$$

$$(I + B^{-1}A)B \subset A + B$$

et donc:

$$(A+B)^* \subset \left[(I + B^{-1}A)B\right]^* = B^*(I + B^{-1}A)^* \quad \text{(par Lemme3)}$$

$$= B^* \left[I + (B^{-1}A)^*\right] \ \text{(par théoréme 1)}$$

$$= B^* \left[I + A^*(B^{-1})^*\right] \quad \text{(tel que } B^{-1}\text{est borné)}$$

$$= B^* + B^*A^*(B^*)^{-1}(D(A^*(B^*)^{-1}) \subset D(B^*))(\text{de } A^*B^* = B^*A^*)$$

$$= B^* + A^*B^*(B^*)^{-1}$$

$$= A^* + B^*$$

donc

$$\boxed{(A+B)^* \subset A^* + B^*} \tag{2.4.9}$$

alors d'aprés 2.4.8 et 2.4.9

$$\boxed{(A+B)^* = A^* + B^*}. \tag{2.4.10}$$

$\blacksquare$

Théorème 2.4.6

Soit A est un opérateur densément définit.donc A^* est fermé

Preuve. Soit x_n une suite convergente d'éléments de $D(A^*)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} A^* x_n = z$$

Quel que soit $y \in D(A)$. on a $:< x_n, Ay >=< A^* x_n, y >$,

et, en vertu de la continuité du produit scalaire, on en déduit :

$$(\forall y \in D(A)) < x, Ay >=< z, y >;$$

ce qui signifie que $x \in D(A^*)$ et que

$$z = \lim_{n\to\infty} A^* x_n = A^* x.$$

A^* est donc fermé. ■

Théorème 2.4.7 *(4)*

Soit A et B deux opérateur densément définit de l'espace Hilbert H

1. Si $A \subset B$,donc $B^* \subset A^*$
2. Si $D(B^*)$ est dense dans H, donc $B \subset B^{**}$

   Preuve. (i)notons que $A \subset B$ impliques

   $\langle Ax, y\rangle = \langle x, B^* y\rangle$ pour tout $x \in D(A)$ et tout $y \in D(B^*)$................(a)

   d'autre terme ,on obtient

   $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle$ pour tout $x \in D(A)$ et tout $y \in D(A^*)$..................(b)

   comparant (a) et (b) on conclusion que $D(B^*) \subset D(A^*)$ et

   $A^*(y) = B^*(y)$ pour tout $y \in D(B^*)$

   (ii)observe la condition

   $\langle Bx, y\rangle = \langle x, B^* y\rangle$ pour tout $x \in D(B)$ et tout $y \in D(B^*)$,

   on peut écrire

$\langle B^*y, x\rangle = \langle y, Bx\rangle$ pour tout $y \in D(B^*)$ et tout $x \in D(B)$.................(c)

on a $D(B^*)$ est dense dans H , B^{**} existe et on obtient

$\langle B^*y, x\rangle = \langle y, B^{**}x\rangle$ pour tout $y \in D(B^*)$ et tout $x \in D(B^{**})$..............(d)

de (c) et (d) ensuit'il $D(B) \subset D(B^{**})$ et $B(x) = B^{**}(x)$

pour tout $x \in D(B)$. ■

2.5 Opérateur auto adjoint

- Dans le cas des opérateurs linéaires bornés l'opérateur auto-adjoint et symétrique sont équivalent
- Dans le cas des opérateurs non borné tout opérateur auto-adjoint est symétrique par contre un symétrique n'est pas forcément auto-adjoint

2.5.1 Opérateur symétrique

Un opérateur A à domaine dense est dit symétrique si $A \subset A^*$ i.e

$$D(A) \subset D(A^*) \text{ et } Ax = A^*x, \forall x \in D(A)$$

Autrement dit,

$$\forall x \in D(A), \forall y \in D(A) \quad \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$$

Proposition 2.5.1

Si A est symétrique et inversible avec range dense, donc A^{-1} est symétrique

2.5.2 Opérateur auto-adjoint

On dit qu'un opérateur A à domaine dense est auto-adjoint si $A^* = A$ i.e:

$$D(A) = D(A^*) \text{ et } Ax = A^*x, \forall x \in D(A)$$

Exemple 2.5.1

Consédérons l'opérateur avec domaine

1.
$$D(A) = \left\{ f \in L^2([a,b]) : f^{'} \text{ est continue et } \ f(a) = f(b) = 0 \right\}$$

puis

$$\langle Af, g \rangle = \int_a^b if^{'}(t)\overline{g(t)}dt$$

$$= if(b)\overline{g(b)} - if(a)\overline{g(a)} - \int_a^b if(t)\overline{g'(t)}dt$$

$$= \int_a^b f(t)\overline{ig'(t)}dt = \langle f, Ag \rangle$$

cet montre que A est symétrique . et la fonction g non satisfait $g(a) = g(b)$

et $g \notin D(A)$ donc A est non auto-adjoint.

Proposition 2.5.2

Un opérateur symétrique A,est fermable ,et vérifie

$$A \subset \overline{A} \subset A^*$$

A est auto-adjoint si et seulement si $A = A^* = \overline{A}$

Remarque 2.5.1

1. Si A est un opérateur symétrique alors A^* et A^{**} sont deux extensions fermées de A avec
$$A \subset A^{**} \subset A^*$$
2. Si A est un opérateur symétrique fermé alors
$$A = A^{**} \subset A^*$$
3. Si A est un opérateur auto-adjoint alors
$$A = A^{**} = A^*$$

Preuve. Si A est symétrique,$D(A)$ est dense et contenu dans $D(A^*)$.Le domaine de A^* est donc dense ,et A est fermable

A^* étant fermé et prolongeant A ,on a :$\overline{A} \subset A^*$.Donc
$$A \subset \overline{A} = A^{**} \subset A^*$$

Le cas auto-adjoint s'en déduit immédiatement. ■

Proposition 2.5.3

Soit A symétrique fermé .A est auto-adjoint si et seulement si A^* est symétrique

Preuve. A^* est fermé ,et s'il symétrique on lui applique la proposition précédent
$$A^* = \overline{A^*} = A^{***} \subset A^{**} = \overline{A} = A$$

Donc $A = A^*$,puisque $A \subset A^*$par symétrie de A. ■

Remarque 2.5.2

$(D(A); A)$ un opérateur non-borné symétrique sur un H alors : A^* est une extension fermée de A et puisque $D(A) \subset D(A^*)$ et $D(A)$ dense dans H, alors

$D(A^*)$ est aussi dense dans H et on a par conséquent A fermable
$\overline{A} = A^{**}$ or $\overline{A}$ est la plus petite extension fermée de A
en particulier si A est symétrique fermé alors : $A = A^{**} \subset A^*$ et
$A = A^{**} \subset A^{***}$ si A auto-adjoint $A^* = A$ alors

$$A = A^* = A^{**} = A^{***}$$

Si A auto-adjoint alors A est fermé, en deduit alors qu'un opérateur non-borné symétrique fermé est auto-adjoint si seulement si son adjoint est symétrique

Proposition 2.5.4

Si A est symétrique et fermé, alors A auto-adjoint.
Si A^* est symétrique fermé alors $\overline{A} = A^{**}$ est une extension de A^*

Définition 2.5.1

Soit $(D(A); A)$ un opérateur non-borné sur H; symétrique de domaine
$D(A)$ dense dans H:
A est dit essentiellement auto-adjoint si $\overline{A}$ est auto-adjoint ou bien $(\overline{A})^* = \overline{A}$

Remarque 2.5.3

Tout opérateur auto-adjoint est essentiellement auto-adjoint mais la réciproque est fausse
si A est essentiellement auto-adjoint alors : A^* est la petite extension fermée de A:
si A est essentiellement auto-adjoint alors : A^* est auto-adjoint

Lemme 2.5.1

Si A est essentiellement auto-adjoint, A a une unique extension auto-adjoint $\overline{A}$

Preuve. Par défnition, $\overline{A}$ est extension auto-adjoint de A

Soit B une deuxiéme extension auto-adjoint de A

Alors:

$$A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset B \text{ et } B^* \subset (\overline{A})^* \Rightarrow B \subset \overline{A^*} = \overline{A}$$

donc:

$$B = \overline{A}$$

■

Proposition 2.5.5

Soit A et B deux opérateurs non-bornés auto-adjoints

Si $A \subset B$ alors : $A = B$

Preuve. On a :

$$A \subset B \Rightarrow B^* \subset A^* \Rightarrow B \subset A, \text{d'ou } A = B$$

■

Théorème 2.5.1

Soit $(D(A); A)$ un opérateur non-borné symétrique de domaine $D(A)$ dense dans H Alors les proprietés suivantes sont équivalentes :

1. A est auto-adjoint
2. A est fermé et $\ker(A^* + i) = \ker(A^* - i) = \{0\}$
3. $\text{Im}(A + i) = \text{Im}(A - i) = H$.

   Preuve laisse au lecture [4]

Théorème 2.5.2

Soit $(D(A); A)$ un opérateur non-borné symétrique sur un espace de Hilbert H et de domaine $D(A)$ dense dans H; alors on a l'équivalence de trois proprietés suivantes :

1. A est essentiellement auto-adjoint

2. $\ker(A^* \pm i) = \{0\}$

3. $Im(A \pm i)$ est dense dans H.

   Preuve laisse au lecture [4]

Proposition 2.5.6

A symétrique est essentiellement auto-adjoint si et seulement si $\overline{A} = A^*$

Preuve. Si $\overline{A}^* = A$,alors $A^* = \overline{A}$ car $\overline{A}^* = A^*$

Si $A^* = \overline{A}$,alors $\overline{A}^* = A^{**} = \overline{A}$. ■

Remarque 2.5.4

Si A est symétrique les relations suivants sont équivalent:

A est essentiellement auto-adjoint

A^* est symétrique

A^* est auto-adjoint

A^{**} est auto-adjoint.

Définition 2.5.2

Un opérateur symétrique A dans H est dit symétrique maximal

Si A n'admet pas d'extension symétrique propre, c'est-à-dire si les hypothèses

$A \subset B$ et B symétrique

implique que $B = A$.

Théorème 2.5.3

Les opérateurs auto-adjoints sont symétriques maximaux.

Preuve. Supposons que A est auto-odjoint, B est symétrique(c'est-à-dire, $B \subset B^*$) et $A \subset B$. Cette inclusion implique évidemment (d'après la défnition de l'adjoint) que $B^* \subset A^*$

donc

$$B \subset B^* \subset A^* = A \subset B$$

ce qui prouve que $B = A$. ■

Chapitre 3

Théorie spectrale des opérateurs

Etant donné un opérateur linéaire Adéfini dans un espace de Hilbert E, nous allons étudier les propriétés de l'opérateur $A - \lambda I$ où λ est un nombre complexe quelconque et I l'opérateur identité. Quel que soit λ, on a $D_{A-\lambda I} = D_A$
L'objet de la théorie spectrale est l'étude des propriétés de
$R_\lambda(A)$ en tant que fonction de λ définie dans $\mathbb{C}$ et à valeurs dans l'ensemble des opérateurs linéaires dans E.

3.1 spectre des opérateurs bornés

Définition 3.1.1

Soit $A \in \mathcal{L}(E)$.

1. On appelle **ensemble résolvante** de A l'ensemble

   $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, (A - \lambda I)$ est inversible i.e bijective de H dans H et que $(A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(H)\}$.

   Un élément de $\rho(A)$ est appelé valeur résolvante de A.

2. Si $\lambda \in \rho(A)$, on définit **la résolvante** $R_\lambda(A)$ de A au point λ par

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$$

La résolvante $R_\lambda(A)$ est simplement notée R_λ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur A.

3. Le **spectre** de A est l'ensemble

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A).$$

$$\sigma(A) \cap \rho(A) = \emptyset$$

Un élément de $\sigma(A)$ est une **valeur spectrale** de A.
$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $(A - \lambda I)$ n'est pas isomorphisme de $H\}$. ceci équivau à définir $\sigma(A)$ comme l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $A - \lambda I$ n'est pas bijective.
On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est un valeur propre de A si $A - \lambda I$ n'est pas injectif.Autrement dit, l'ensemble des valeurs propres $V_p(A)$ de A est donné par

$$V_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \ker(A - \lambda I) \neq 0\}$$

Définition 3.1.2

Il existe trois type de spectres distincts:

- **Le spectre ponctuel** de A :noté $\sigma_p(A)$ est l'ensemble des valeurs propres de A,il est défini comme:

  $\lambda \in \sigma_p(A)$ si et seulement si $\ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$,i.e.si et seulement si $A - \lambda I$ n'est pas injectif

- **Le spectre continu** de $A, \sigma_c(A)$,est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $A - \lambda I$ est injectif,non surjectif

  mais son image est dense dans H i.e.

$$\ker(A - \lambda I) = \{0\}\,, \mathrm{Im}(A - \lambda I) \neq H, \overline{\mathrm{Im}(A - \lambda I)} = H$$

- **Le spectre résiduel**,$\sigma_p(A)$,est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $A - \lambda I$ est injectif,non surjectif,

  mais son image n'est pas dense dans H,i.e.

$$\ker(A - \lambda I) = \{0\}\,, (\mathrm{Im}(A - \lambda I))^{\perp} \neq \{0\}$$

Le spectre $\sigma(A)$ est la réunion disjoint de $\sigma_p(A), \sigma_c(A)$ et $\sigma_r(A)$

Exemple 3.1.1

La matrice $M \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a un rayon spectral 0, mais $M \neq 0$ donc $\|M\| > 0 = \rho(M)$ (plus précisément, $\|M\| = 1$ car nous avons $\|M\|^2 = \|M^t M\| = \rho(MM) = 1$

Remarque 3.1.1

- La défintion ci-dessus restent valables si E n'est pas un Banach.
- L'ensemble des valeur propres est aussi appelé spectre ponctuel et est parfois noté $\sigma_p(A)$
- On a toujours $V_p(A) \subset \sigma(A)$
- Si E est de dimention finie, $A - \lambda I$ est inversible si et seulement si $\ker(A - \lambda I) = \{0\}$

  En particulier, on en déduit $V_p = \sigma(A)$.

  Remarque 3.1.2

Il est clair que $V_p \in \sigma(A)$ .En général l'inclusion est strict:il peut existe λ tel que $N(A - \lambda I) = \{0\}$ et $R(A - \lambda I) \neq E$

En particulier ,A est injectif donc $0 \notin V_p(A)$ mais non surjectif donc $0 \in \sigma(A)$.

Exemple 3.1.2

prenons dans $E = l^2, Tu = (0, u_1, u_2, ...)$ où $u = (u_1, u_2, ..)$
(i.e A est le shift à droite).Alors $0 \in \sigma(A)$ et $0 \notin V_p(A)$

Proposition 3.1.1

Soit E un espace de Banach,et $A \in \mathcal{L}(E)$

A est injectif d'image fermée si et seulement si il existe $C > 0$ tell que

$$\forall u \in E, \|Au\| \geq C \|u\|$$

En particulier si A est d'image dense et vérifie une inégalité du type précédent ,A est inversible.

c'est le cas si $A = A^*$

Preuve lisse au lecture au livre(introduction à la théorie spectal cou)

Proposition 3.1.2

Soit E un espace de Banach et $A \in \mathcal{L}(E)$

Si $\|A\| < 1$,alors $I - A$ est inversible .De plus son inverse est donné par la série (série de Neuman)convergeant dans $\mathcal{L}(E)$:

$$\boxed{(I - A)^{-1} = \sum_{0}^{\infty} A^n}$$

Preuve. Il est claire que la série est normalement convergente,donc converge puisque $\mathcal{L}(E)$ est complet.

Par multiplication des séries ,on obtient alors:

$$(I - A) \sum_{0}^{\infty} A^n = I = \sum_{0}^{\infty} A^n (I - A)$$

■

Proposition 3.1.3

Soit $A \in \mathcal{L}(H), \lambda, \mu \in \rho(A)$, on a:

$$R_\lambda(A) R_\mu(A) = R_\mu(A) R_\lambda(A),$$

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\mu - \lambda) R_\mu(A) R_\lambda(A) (\text{formule de la résolvante}).$$

De plus,l'application $\lambda \to R_\lambda$ est dérivable sur $\rho(A)$ et sa dérivée est donnée par

$$\frac{dR_\lambda}{d\lambda} = -R_\lambda^2$$

Preuve. Pour $\lambda, \mu \in \rho(A), \lambda \neq \mu$,

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = R_\lambda(A)\underbrace{(\mu - A)R_\mu(A)}_{=I} - \underbrace{(\lambda - A)R_\lambda(A)}_{=I}R_\mu(A) = (\mu - \lambda)R_\lambda(A)R_\mu(A)$$

De plus , en écrivant

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\mu - \lambda)R_\lambda(A)R_\mu(A)$$

$$R_\mu(A) - R_\lambda(A) = (\lambda - \mu)R_\mu(A)R_\lambda(A)$$

et en faisant la somme des deux égalités, on obtient

$$0 = (\mu - \lambda)(R_\lambda(A)R_\mu(A) - R_\mu(A)R_\lambda(A))$$

avec $\mu - \lambda \neq 0$. ■

Définition 3.1.3

Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, on appelle rayon spectral de A, et on note $r(A)$, la quantité

$$r(A) = sup_{\lambda\in\sigma(A)}|\lambda| \text{ tel que } \sigma(A) \neq \emptyset$$

Si $\sigma(A) = \emptyset$,par convention,on pose $r(A) = 0$.

Théorème 3.1.1

Soit E un espace de Banach complexe et $A \in \mathcal{L}(E)$ .Alors

1. $\lim_{n\to+\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$ existe et est égale à $r(A)$;
2. Si $E = H$ est une space de Hilbert complexe et si $A \in \mathcal{L}(H)$ est auto-adjoint,alors $r(A) = \|A\|$.

   Preuve.

(a) La preuve laisse au lecture (Spectre d'un opérateur borné.pdf page(1et 2)).

(b) supposons que $E = H$ est un espace de Hilbert et que $A \in H$ est auto-adjoint.Nous allons utiliser la propriété

$$||A|| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle| \tag{3.1.1}$$

valable pour tout opérateur auto-adjoint A. Nous montrerons (1) . En effet (a) entraîne que :

$$\left\|A^2\right\| = \|A^*A\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle A^*Ax, x\rangle| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, Ax\rangle| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|^2 = \|A\|^2$$

Comme n'importe quelle puissance entière de A est encore auto-adjoint (vérifiez vous-même !), on peut étendre ce résultat à A^4 :

$$||A^4|| = ||(A^2)^2|| = ||A^2||^2 = (||A||^2)^2 = ||A||^4$$

et par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\|A^{2^n}\right\| = \|A\|^{2^n}$$

Donc, en utilisant le résultat 3.1.1 :

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left\|A^{2^n}\right\|^{2^{-n}} = \|A\|$$

■

Proposition 3.1.4

Soit $A \in \mathcal{L}(H)$,

1. $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$
2. pour $\lambda \in \rho(A)$, on a $(R_\lambda(A))^* = R_\lambda(A^*)$,
3. $\lambda \in \sigma_r(A) \Rightarrow \overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$,
4. $\lambda \in \sigma_p(A) \Leftrightarrow \overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*) \cup \sigma_r(A^*)$
5. $\lambda \in \sigma_c(A) \Leftrightarrow \overline{\lambda} \in \sigma_c(A^*)$

La preuve laisse au lecture[8]

Théorème 3.1.2

Soit A un opérateur linéaire autoadjoint défini dans un espace de Hilbert E.

1. Ses valeurs propres est réelles.

2. Les vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes sont orthogonaux.

3. $\sigma_r(A)$ est vide.

4. $\sigma_c(A)$ est réel

   Preuve.

   (a) i. Si λ est une valeur propre de A^* , il existe un vecteur $x \neq 0$ appartenant à E tel que, $Ax = \lambda x$ et, par conséquent :

   $$\lambda = \frac{\langle x, Ax \rangle}{\|x\|^2}$$

   Or, A étant autoadjoint,

   $$< x, Ax >=< Ax, x >$$

   $$= \overline{< x, Ax >}$$

   ce qui implique

   $$\lambda = \overline{\lambda}.$$

   ii. Si x_1 est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_1 de A et x_2 un vecteur propre associé à la valeur propre λ_2 on a :

   $$(\lambda_1 - \lambda_2) < x_1, x_2 >=< Ax_1, x_2 > - < x_1, Ax_2 >$$

   $$= 0$$

   ce qui implique

   $$< x_1, x_2 >= 0$$

   si $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

   Preuve(3) et (4) laisse au lecture [1] .

■

3.2 spectre des opérateurs non- bornés

Soit $(D(A), A)$ un opérateur non-borné sur un espace de Hilbert H de domaine $D(A)$ dense dans H

on appelle ensemble résolvant de l'opérateur A l'ensemble $\rho(A)$ des λ complexes tels que $\mathrm{Im}(A - \lambda I)$est dense dans H

$(A - \lambda I)$ est inversible de $D(\lambda)$ sur $\mathrm{Im}(A - \lambda I)$ d'inverse borné

et $\mathrm{Im}(A - \lambda I)$ est muni de la topologie induite par H

on note $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ pour $\lambda \in \rho(A)$

$R_\lambda(A)$ est appelé l'opérateur résolvant de A

Remarque 3.2.1

$R_\lambda(A)$ est borné de $\mathrm{Im}(A - \lambda I)$ dans $D(A)$ c'est-à-dire

$\exists\ C \geq 0$ tel que:

$$\|R_\lambda(A)u\| \leq C \|u\|\, \forall u \in \mathrm{Im}(A - \lambda I)$$

Définition 3.2.1

Soit A un opérateur linéaire dont le domaine est dense et soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Pour l'opérateur $S = (A - \lambda I) : D(A) \to H$, on a l'arbre d'alternatives suivant :

1. si (S) ***n'est pas injectif***, on dit que λ est une valeur propre de A dit **spectre ponctuel** de A noté $\sigma_p(A)$

   défini comme suit : $\lambda \in \sigma_p(A)$ si et seulement si

$$\ker S = \{x \in D(A); Sx = 0\} \neq \{0\}$$

2. sinon (S) est ***injectif*** et

- si S n'est pas surjectif et

– – si l'image de S est dense dans H, on parle de **spectre continu** de A qu'on notera $\sigma_c(A)$

i.e $\ker(S) = \{0\}\,, \mathrm{Im}(S) \neq H \quad , \overline{\mathrm{Im}(S)} = H$

– sinon l'image de S n'est pas dense dans H, on parle de **spectre résiduel** de A qu'on notera $\sigma_r(A)$

$$i.e \ker(S) = \{0\} \quad , (\mathrm{Im}(S))^{\perp} \neq \{0\}$$

On déduit que le spectre (A) est la réunion disjointe de $\sigma_p(A), \sigma_c(A)$ et $\sigma_r(A)$

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_r(A) \cup \sigma_c(A)$$

- sinon S est bijectif et

– si S^{-1} n'est pas borné, on parle de spectre résiduel de type 2 de A qu'on notera $\sigma_r^{'}(A)$;

– sinon S^{-1} est borné et $\lambda \in \rho(A)$ est un point résolvant de A.

Définition 3.2.2

- Le spectre essentiel $(\sigma_{ess}(A))$est le complémentaire du spectre discret dans le spectre,

$$\sigma_{ess} = \sigma_c(A) \cup \{\lambda \in \sigma_{pp} \ \dim\ker(A - \lambda I) = \infty\})$$

tel que $\sigma_{pp}(A) = \{\lambda \in \sigma(A), \lambda$ est une valeur propre$\}$dit spectre purement ponctuel.

La caractérisation suivante du spectre essentiel,conue sous le nom de critère de weyl,peut etre

utile:un nombre complexe λ appartient à $\sigma_{ess}(A)$ s'il existe une suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend faiblement vers 0

tel que $\|\psi_n\| \equiv 1, \forall n \in \mathbb{N} \quad , (A\psi_n - \lambda\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend fortement vers 0.

- Le spectre discret:

$$\sigma_{disc}(A) = \sigma(A) - \sigma_{ess}(A)$$

3.3 Propriétés du spectre des opérateurs fermés

Proposition 3.3.1

Le spectre d'un opérateur fermée A d'un espace de Banach complexe X
dans lui même est une partie fermée de $\mathbb{C}$, et l'application ¸ $\lambda \to R_\lambda(A)$est analytique,
du complémentaire du spectre dans $\mathcal{L}(X)$

Corollaire 3.3.1

On a d'aprés la précédent

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$$

C'est immédiat ,puisque si $A - \lambda I$ est bijectif, alors $A - \lambda I$ est fermé donc $(A - \lambda I)^{-1}$ est continu.

Les opérateurs linéaires qui ne sont pas fermés ont un spectre égal à $\mathbb{C}(\sigma(A) = \mathbb{C})$.

Corollaire 3.3.2

Soit A un opérateur linéaire fermé. Alors $\sigma_r^{'}(A) = \emptyset$

Remarque 3.3.1

Pour $\lambda \in \sigma_c(A)$, l'opérateur $A - \lambda I$ est injectif d'image dense,
mais $(A - \lambda I)^{-1}$ n'est pas continu.

Lemme 3.3.1

Soient A un opérateur injectif fermé d'un espace de Banach E dans lui
même et λ¸ une valeur régulière de A non nulle ; alors λ^{-1}¸ est une valeur régulière de
A^{-1} et on a

$$R_{\lambda^{-1}}(A^{-1}) = -\lambda A R_\lambda(A) = -\lambda I - \lambda^2 R_\lambda(A)$$

3.4 Conclusion générale

- La notion d'opérateur fermé est une bonne généralisation de la notion d'opérateur continu à

  des opérateurs qui ne sont pas partout définis.

  si A un opérateur fermé de domaine dense,on a ou bien

  A est continu et partout définit,

  ou bien

  A n'est pas continu et n'est pas partout définit.

  Dans le $1^{ière}$ cas on a $A \in \mathcal{L}(H, G)$ et nous dirons que A est borné,dans $2^{ième}$ cas on dit A non-borné.

- Dans ce mémoire, aussi on intéresse aux opérateurs non-bornés,où le but de la théories

des opérateurs non-bornés est essentiellement de construire des prolongements fermés de l'opérateur donné dit opérateur fermable et la plus petit prolongement fermé s'appelle la fermeture ,puis d'étudier leurs propriétés dans l'espace de Hilbert.
Ensuit,remarquerons que la somme de deux opérateurs fermés qui ne sont pas bornés est n'est pas toujours fermé en général, mais si A borné et B fermé la somme est fermé.
Considère l'équation suivants:

$$L(u) = a(x)u^{''} + b(x)u^{'}$$

tel que

$$a(x)u^{''} = A(u), \qquad b(x)u^{'} = C(u)$$

Si

- A fermé
- C relativement borné A

$$\text{tel que}\left\{\begin{array}{c} D(A) \subset D(C) \\ \text{et } \|C\varphi\| < a\|\varphi\| + b\|A\varphi\| \\ \text{et} \qquad b \leq 1 \end{array}\right\}$$

alors la somme $(A + C)$ est fermé.

donc l'étude des opérateurs fermés jourent un role trés important dans l'analyse fonctionnelle nottament la théorie des opérateurs ,ainsi que l'étude des théories spectrales des opérateurs bornés ,non-bornés et fermés joue presque le même role.

Enfin ,La question que je me permets de poser ; les résultats aux quelles nous somme arrivées, resteront-elles, vraies pour les opérateurs non bornés en général ?

Bibliographie

[1] **N.Boccara**,Analyse fonctionnelle une introduction pour physicien,ellipses

[2] **M.NADIR**,Cours Analyse fonctionnelle ,Mastre $1^{ière}$année 2013

[3] **Zied.Ammari**/other/pdf/chapitre4 opérateur non-bornés/perso.univ-rennes 1

[4] www. oran.dz/these/document/TH3466.pdf/faculté des Sciences -unversité d'oran.

[5] **Chellali Cherifa**,Thème Sur Les Théorème De Fuglede-Putnam,soutenu 3/7/2011

[6] **CLAUDE POTENIER**,Chapitre7/WWW.Mathematik.Uni.narburg.de /potenier/Analyse/version28juin 2001

[7] **H.BREZIS**,Analyse Fonctionnelle,théorie et application,MASSON Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo 1987.

[8] **Lokenath Debnath**,Piotr Mikusihski Introduction to Hilbert space with applications,Copyright © 1990 by Academic Press

[9] **P.L.Bruhl**.Introduction à la théorie spectral cours et exercices corriger,DUNOD,paris,2003.

[10] **Dahia**,Mémoir Magister ,university m'sila.

[11] **Israel Gohberg Seymour Goldberg** ,Basic Operator Theory, Birkhauser .Boston. Basel .Stuttgart 1981

[12] **Reed-M-Simon B**,Functional analysis(Bookos.org)

[13] **Fanny Dardalhon**,Federico Verga,Théoréme de Hille-yosida et ses applications aux problèmes d'évolution semi-linéaires ,Mémoire encadré par Florance Hubert 7/6/2006

[14] **Rousse Vidian**,Notions de spectre d'opérateur linéaires non-bornés(première partie),Séminaire Caribou du 31/1/2005

[15] **Robert Dantray-Jacques Louis Lions**,Analyse Mathématique et calcul Numérique pour les sciences et les techniques ,Tome1,1980

[16] **Mohammad Hicham Mortad**,The sum of two unbounded linear operator:closedness,self-adjointness and normality,canada.Math.Bull.,54/3(2011)498-505.Doi:10.4153/CMB-2011041-7.