REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : EDP et applications

Thème

Sur la stabilisation interne d'une corde vibrante

Présentée par :

Bachir Safa

Devant le jury composée de :

Abdelhak *Mokhtari*	M.C.A.,	Université de M'sila	**Président**.
Abdelmouhcene *Sengouga*	M.C.A,	Université de M'sila	**Encadreur**.
Abderachid *Saadi*	M.C.A.,	Université de M'sila	**Examinateur**.

Année universitaire 2022/2023

Dédicace

Avec tous mes sentiments de respect, avec l'expérience de ma reconnaissance, je dédie ma remise de diplôme et ma joie.

À mon paradis, à la prunelle de mes yeux à la source de ma joie et mon bonheur, ma lune et le fil d'espoir qui allumer mon chemin, ma moitié, *maman*

À celui qui ma fait une femme, ma source de vie, d'amour et d'affection à mon support qui était toujours à mes cotés pour me soutenir et m'encourage, à mon prince, *papa*.

À mes frères *Acherf, Khalil et Walid* pour l'amour qu'ils me réservent.

À ma grande sœur *Amira* qui n'ont pas cessé de ma conseille, encourage et soutenir tout au long de mes études.

À ma deuxième sœur, la femme de mon frère *Narimen* Merci d'être avec moi, merci de m'encourager , merci de me soutenir.

À mon adorable petite sœur *Ritedj* qui sait toujours comment procurer la joie et le bonheur pour toute la famille.

À la jeune famille *Anes, Kaouther et Joude* les petits de mon coeur.

À tous ce qui participé à ma réussite et à tous qui m'aiment

BACHIR SAFA

Remerciements

Avant tout, nous remercions Dieu Tout-Puissant, de m'avoir ouvert la voie tout au long de ma vie, et de m'avoir donné le courage, la force et la volonté de réussir. Dieu qui m'a permis de faire ce travail et d'arriver à ce jour qui pour moi est le point de départ d'une grande aventure, l'aventure de la recherche et de l'amélioration.

Notre enseignant et encadreur le Dr.*Abdelmouhcene Sengouga* Merci pour votre aide, pour vos conseils et pour le temps que vous m'avez accordé.

Aux membres du jury, je vous remercie de l'honneur que vous m'avez fait en acceptant de siéger au jury de ma thèse. Je suis très heureux de pouvoir bénéficier de votre contribution pour améliorer la qualité de mon travail. Merci à tous les docteurs.

Merci Mr.*Seyf Eddine Ghenimi* pour les conseil et l'aide.

Enfin, j'adresse mes sincères remerciements à toutes les personnes qui ont contribué de plus ou moins près à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction

Les phénomènes vibratoires et les équations d'ondes jouent un rôle crucial dans de nombreux domaines de la science et de l'ingénierie, allant de l'acoustique à la mécanique des structures en passant par les télécommunications. Dans ce contexte, l'étude de la stabilité des systèmes vibratoires revêt une importance fondamentale pour garantir leur comportement prédictible et fiable. Ce travail est consacré au problème de stabilisation de l'équation d'onde , en particulier lorsque l'amortissement interne présente des caractéristiques linéaires ou non linéaires.

Plus précisément, on intéresse à l'étude de la stabilisation de l'équation des ondes sous la forme suivante :

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta w + F(x, w_t) = 0, & \text{dans } \ x \in \Omega \text{ et } t > 0, \\ w = 0, & \text{pour } \ x \in \partial\Omega \text{ et } t > 0, \\ w(x,0) = w^0(x) \text{ et } w_t(x,0) = w^1(x) \ \ , & \text{dans } \ x \in \Omega \end{cases} \tag{WE}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, w^0 et w^1 sont la position et la vitesse initiale de la membrane. L'amortissement et représenté par une fonction $F(x, w_t)$ dépendent de la position x et la vitesse w_t et satisfaisant

$$F(x, w_t)w_t \geq 0 \text{ pour p.p. } x \in \Omega \text{ et } t > 0.$$

On définie l'énergie de la solution de (WE) par

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} w_t^2(t,x) + |\nabla w|^2(t,x)dx \tag{1}$$

et la solution est dite stable lorsque

$$E(t) \longrightarrow 0, \text{ si } t \longrightarrow +\infty.$$

Sans amortissement, i.e. $F \equiv 0$, l'énergie est conservé en temps, i.e.

$$E(t) = E(0), \forall t \geq 0.$$

Si un amortissement est introduit, i.e. $F(x, w_t) \neq 0$, l'énergie est décroissant avec un taux dépendent du choix de la forme de la fonction F. Par exemple, si F est linéaire, l'énergie décroit exponentiellement, i.e.,

$$E(t) \leq Ce^{-\beta t}, \quad \forall t > 0,$$

où C et β sont des constantes positives avec C qui dépend des données initiales. Ce mémoire rasseble différente méthode de démonstration de ce résultat qui sont dispersées sur plusieurs références [1, 2, 4].

Le premier chapitre de ce travail est consacré aux préliminaires mathématiques indispensables à la compréhension des concepts et des méthodes utilisés. Nous introduisons des espaces fonctionnels tels que les espaces de Sobolev et les espaces de Lebesgue, qui serviront de bases pour notre analyse. De plus, nous explorons l'équation d'onde linéaire sans amortissement, établissant l'existence et l'unicité de la solution, ainsi que la conservation d'énergie.

Le deuxième chapitre se penche sur l'étude de l'équation d'onde avec un amortissement interne linéaire. Nous abordons différentes techniques pour démontrer la stabilité du système, comprenant des méthodes d'intégrales d'énergie, les séries de Fourier, en passant aussi par des approches basées sur le lemme de Gronwall et une technique d'itération.

Dans le troisième chapitre, on traite un exemple d'amortissement non linéaire interne de l'équation d'onde qui est un problème plus difficile à traiter.

En conclusion, ce mémoire offre une analyse de la stabilisation de l'équation d'onde, mettant en lumière différentes techniques de preuve pour démontrer la décroissance de l'énergie et assurer la stabilité du système.

Enfin, nous clôturons ce travail avec une bibliographie, répertoriant les sources et références utilisée dans ce travail.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on introduit quelques espaces fonctionnels et quelques inégalités qui seront utilisé dans ce mémoire. Ensuite, on s'intéresse à l'équation des ondes avec amortissement linéaires et non linéaires.

1.1 Espaces fonctionnelles

Dans la suite Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

1.1.1 Espace des fonctions continues :

• $C(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions continues définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.Pour tout $m \in \mathbb{N}$ on note $C^m(\Omega)$ l'ensemble des fonctions définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leq m$ la dérivée $D^\alpha \varphi$ existe et est continue sur Ω.

• $C^\infty(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $w : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ qui sont indéfiniment dérivables.

• $D(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions de $C^\infty(\Omega)$ à support compact dans Ω.

1.1.2 Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$: $1 \leq p \leq +\infty$

• Pour $1 \leq p < +\infty$; on définit l'espace des classes des fonctions $L^p(\Omega)$ comme suite :

$$L^p(\Omega) = \left\{ w : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; w \text{ mesurable et } \int_\Omega |w|^p \, dx < +\infty \right\}.$$

On munit cet espace vectoriel de la norme :

$$w \mapsto \|w\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |w(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach.

• Pour $p = \infty$, on définit l'espace des classes de fonctions $L^\infty(\Omega)$ comme suite :

$$L^\infty(\Omega) = \{ w : \exists C > 0, \text{telle que } w \text{ est mesurable et } |w(x)| < C \}.$$

Cet espace vectoriel est complet pour la norme :

$$\|w\|_{L^\infty(\Omega)} := \sup_{x \in \Omega} ess\, w(x) = Inf \{ C > 0, \ |w(x)| \leq C \text{ p.p. x sur } \Omega \},$$

i.e., $L^{\infty}(\Omega)$ est une espace de Banach.

- Pour $p=2$, l'espace $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire :

$$(w \cdot v) = \int_{\Omega} wv dx, \quad \forall w, v \in L^2(\Omega).$$

est un espace de Hilbert.

1.1.3 Espaces de Sobolev

On rappel que l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est définie par :

$$H^1(\Omega) = \left\{ w \in L^2(\Omega) \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, \cdots, n \right. \right\},$$

où la dérivée est prise au sens du distributions. L'espace $H^1(\Omega)$ est muni de la norme

$$w \mapsto \|w\|_{H_0^1(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |w(x)|^2 + |\nabla w(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

où ∇w dénote le vecteur gradient de w. Un sous-espace particulier de $H^1(\Omega)$ est l'espace

$$H_0^1(\Omega) := \overline{D(\Omega)} = \left\{ w \in H^1(\Omega) \mid \ u = 0 \ \text{ on } \partial\Omega \right\}$$

i.e. l'adhérence de $D(\Omega)$ dans l'espace $H^1(\Omega)$.

On a besoins aussi de l'espace $H^2(\Omega)$ définie par

$$H^2(\Omega) := \left\{ w \in L^2(\Omega) \left| \frac{\partial w}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega), i = 1, \cdots, n \right. \right\}.$$

Un autre résultat important est le suivant :

Théorème 1.1 (Sobolev injections) *Si Ω est un ouvert borné régulier de classe C^1, alors*

$$\begin{aligned} H^1(\Omega) &\subset L^{2^*}(\Omega), \quad \text{où } \ 2^* = 2n/(n-2) \ \text{ si } n > 2. \\ H^1(\Omega) &\subset L^q(\Omega), \quad \text{où } \ q \in [2, +\infty) \ \text{ si } n = 2. \\ H^1(\Omega) &\subset C(\Omega), \quad \text{si } \ n = 1. \end{aligned}$$

où "$\subset$" désigne une injection continue.

1.1.4 Espaces avec temps

Soit X un *espace de Banach*, $]0, T[$ un intervalle de $\mathbb{R}$,

Définition 1.1 *a) On désigne par $L^p(0, T; X)$ $(1 \leq p < +\infty)$ l'espace des (de classes) fonctions $t \to f(t)$ de $]0, T[\to X$ telle que :*

$$\begin{cases} i) \ f \ \text{est mesurable pour } dt \\ ii) \ \|f\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p} < +\infty \end{cases} \tag{1.1}$$

b) On désigne par $L^{\infty}(0,T;X)$ l'espace des (de classes) fonctions $t \to f(t)$ de $]0,T[\to X$ telle que :

$$\begin{cases} i)\ f \text{ est mesurable pour } dt \\ ii)\ f \text{ est bornée presque partout sur }]0,T[\text{ et on pose :} \\ \|f\|_{L^{\infty}(0,T;X)} = \inf\limits_{\|f(t)\|_X \leq M \ p.\ p.} (M) < +\infty \end{cases} \tag{1.2}$$

Ces espaces sont des espaces de Banach.

1.2 Équation d'onde linéaire

1.2.1 Existence et unicité de la solution

On considère l'équation des ondes

$$w_{tt} - \Delta w = f(x,t), \qquad \text{pour } x \in \Omega \text{ et } t > 0 \tag{1.3}$$

avec les condition initiales :

$$w(x,0) = w^0(x), \ \ w_t(x,0) = w^1(x), \ \ \text{pour} \ \ x \in \Omega, \tag{1.4}$$

et les conditions aux bord homogène de Dirichlet :

$$w(x,t) = 0, \quad \text{pour } x \in \partial\Omega \text{ et } t > 0. \tag{1.5}$$

Théorème 1.2 ([7]) *Sous les hypothèses*

$$w^0(x) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \ \ w^1(x) \in H_0^1(\Omega) \ \ \text{et} \ \ f \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right), \tag{1.6}$$

le problème (1.3)–(1.5) a une solution unique qui satisfait

$$w \in C([0,T];H_0^1(\Omega)), \ \ w_t \in C([0,T];L^2(\Omega)).$$

De plus si

$$w^0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \ \ \ w^1 \in H_0^1(\Omega) \ \ \ \text{et } f_t \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$$

alors, la solution du problème (2.1) satisfait :

$$w \in C\left([0,T],H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right) \ \ \ \text{et} \ \ w_t \in C\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right).$$

1.2.2 Conservation d'énergie par la méthode des intégrales d'énergie

On considère à présent l'équation d'onde homogène avec $f(x,t)=0$

$$\begin{cases} w_{tt}-\Delta w=0, & \text{pour } x\in\Omega \text{ et } t>0, \\ w\left(x,t\right)=0, & \text{pour } x\in\partial\Omega \text{ et } t>0, \\ w(x,0)=w^0\left(x\right), \quad w_t\left(x,0\right)=w^1\left(x\right), & \text{pour } x\in\Omega, \end{cases} \tag{W.Eq}$$

et on définit l'énergie de la solution par

$$E(t)=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} w_t^2\left(x,t\right)+\left|\nabla w_x\left(x,t\right)\right|^2 dx.$$

Théorème 1.3 *L'énergie de la solution de problème (W.Eq) est constante.*

Démonstration. On multiple (W.Eq) par w_t et on intègre sur Ω, on obtient :

$$\int\limits_{\Omega} w_{tt}w_t-\left(\Delta w\right)w_t dx=0.$$

Comme

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega} w_{tt}w_t dx &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} w_t^2(x,t)dx \\ \int\limits_{\Omega}\left(\Delta w\right)w_t dx &= \int\limits_{\Omega}\operatorname{div}(\nabla w w_t)-\nabla w_x\cdot\nabla w_t dx=\int\limits_{\Omega}\operatorname{div}(\nabla w w_t)dx-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\left|\nabla w_x\right|^2 dx. \end{aligned}$$

Alors,

$$\int\limits_{\Omega} w_{tt}w_t-\left(\Delta w\right)w_t dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} w_t^2+\left|\nabla w_x\right|^2 dx-\int\limits_{\Omega}\operatorname{div}(\nabla w w_t)dx=0.$$

Par le théorème de divergence

$$\int\limits_{\Omega}\operatorname{div}(\nabla w w_t)(x,t)dx=\int\limits_{\partial\Omega}\nabla\left(w w_t\right)\cdot\nu(s,t)ds=0$$

a cause du conditions aux limites. Finalement

$$E'(t)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} w_t^2(x,t)+w_x^2\left(x,t\right)dx=0.$$

Ce ci démontre la conservation d'énergie. ■

1.2.3 Solution par séparation de variable

On peut aussi utiliser la méthode de séparation des variables. Si $\Omega =]0,1[$. On cherche des solutions particulières de

$$w_{tt} - w_{xx} = 0, \qquad x \in [0,1], t > 0,$$

sous la forme

$$w(x,t) = X(x)T(t).$$

Donc,

$$\begin{cases} X(x)T''(t) - X''(x)T(t) = 0, \\ w(0,t) = X(0)T(t) = 0, \\ w(1,t) = X(1)T(t) = 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

On divise la première équation par $X(x)T(t)$ et comme x et t sont deux variables indépendants, alors il existe une constante λ :

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R}_+^*.$$

On doit supposer λ positive pour avoir des solutions bornées. Premièrement, L'équation de X est

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = 0 \text{ et } X(1) = 0 \end{cases}$$

dont la solution est

$$X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Les conditions aux bord implique que

$$X(0) = A = 0 \text{ and } X(1) = B\sin(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

On obtient :

$$B \neq 0 \text{ et } \sin(\sqrt{\lambda}) = 0 \Longrightarrow \lambda_n = (n\pi)^2.$$

Donc

$$X_n(x) = B\sin(n\pi x).$$

D'autre part, la fonction $T(t)$ satisfait :

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0, \quad t > 0.$$

La solution T correspondant à cette valeur de λ est de la forme :

$$T(t) = \alpha\cos(\sqrt{\lambda}t) + \beta\sin(\sqrt{\lambda}t),$$

i.e.,

$$T_n(t) = \alpha_n \cos(n\pi t) + \beta_n \sin(n\pi t).$$

On obtient :

$$w_n(x,t) = T_n(t)X_n(x) = [\alpha_n \cos(n\pi t) + \beta_n \sin(n\pi t)] \sin(n\pi x).$$

Alors, la solution du problème est donnée par :

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n \cos(n\pi t) + \beta_n \sin(n\pi t)] \sin(n\pi x).$$

Par les conditions initiales, on trouve :

$$w(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(n\pi x) = w^0(x) \quad \text{et} \quad w_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi\beta_n \sin(n\pi x) = w^1(x).$$

Donc, les coefficients α_n et β_n sont donnés par orthogonalité on trouve :

$$\alpha_n = 2\int_0^1 w^0(x) \sin(n\pi x)\, dx \quad \text{et} \quad \beta_n = \frac{2}{n\pi}\int_0^1 w^1(x) \sin(n\pi x)\, dx.$$

1.2.4 Conservation d'énergie par les séries de Fourier

Théorème 1.4 *On a :*

$$E(t) = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} (n\pi\gamma_n)^2 = cste, \quad \forall t \geq 0,$$

où $\gamma_n = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}$.

Démonstration. On pose :

$$E_n(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 (w_n)_t^2(x,t) + (w_n)_x^2(x,t)\, dx. \tag{1.8}$$

Alors, on va calculer :

$$(w_n)_t = [-\alpha_n n\pi \sin(n\pi t) + \beta_n n\pi \cos(n\pi t)] \sin(n\pi x), \tag{1.9}$$

et

$$(w_n)_x = [\alpha_n \cos(n\pi t) + \beta_n \sin(n\pi t)]\, n\pi \cos(n\pi x). \tag{1.10}$$

En remplaçant (1.9) et (1.10) dans (1.8) :

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \left[(w_n)_t^2(x,t)+(w_n)_x^2(x,t)\right]dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \Big[(n\pi)^2\left[-\alpha_n\sin(n\pi t)+\beta_n\cos(n\pi t)\right]^2\sin^2(n\pi x)$$

$$+\left[\alpha_n\cos(n\pi t)+\beta_n\sin(n\pi t)\right]^2(n\pi)^2\cos^2(n\pi x)\Big],$$

$$=\frac{1}{2}(n\pi)^2\left(\alpha_n^2+\beta_n^2\right)\int_0^1 \sin^2(n\pi x)\cos^2(n\pi t)+\sin^2(n\pi t)\cos^2(n\pi x)dx,$$

$$=\frac{1}{2}(n\pi)^2\left(\alpha_n^2+\beta_n^2\right)\left[\cos^2(n\pi t)\int_0^1 \sin^2(n\pi x)\,dx+\sin^2(n\pi t)\int_0^1 \cos^2(n\pi x)dx\right].$$

Comme

$$\sin^2(n\pi x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2n\pi x), \quad \text{et } \cos^2(n\pi x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2n\pi x),$$

de sorte que

$$\int_0^1 \sin^2(n\pi x)\,dx=\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \cos^2(n\pi x)=\frac{1}{2}.$$

Rappelons que $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$, alors

$$E_n(t)=(n\pi)^2\frac{\alpha_n^2+\beta_n^2}{4}\left[\cos^2(n\pi t)+\sin^2(n\pi t)\right]=(n\pi)^2\frac{\alpha_n^2+\beta_n^2}{4}.$$

Finalement, on obtient :

$$E_n(t)=(n\pi)^2\frac{\alpha_n^2+\beta_n^2}{4}.$$

Alors, l'énergie totale de chaque mode est constante.

On utilise la solution de la série infinie dérivée pour calculer

$$\begin{aligned}E(t) &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} w_n\right)_t^2+\left(\sum_{n=1}^{\infty} w_n\right)_x^2 dx,\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^1 (w_n)_t(w_m)_t+(w_n)_x(w_m)_x\,dx.\end{aligned}$$

On peut écrire $w_n(x,t)$ sous la forme :

$$w_n(x,t)=\gamma_n\sin(n\pi x)\sin(n\pi t+\Psi_n),$$

où

$$\gamma_n=\sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2} \quad \text{et} \quad \Psi_n=\arctan\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right),$$

Alors, on a

$$(w_n)_t=\gamma_n n\pi\sin(n\pi x)\cos(n\pi t+\Psi_n) \quad \text{et} \quad (w_n)_x=\gamma_n n\pi\cos(n\pi x)\sin(n\pi t+\Psi_n).$$

Alors

$$E(t)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_n\gamma_m nm\pi^2\cos\left(n\pi t+\Psi_n\right)\cos\left(m\pi t+\Psi_n\right)\times\int_0^1\sin\left(n\pi x\right)\sin\left(m\pi x\right)dx$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_n\gamma_m nm\pi^2\sin\left(n\pi t+\Psi_n\right)\sin\left(m\pi t+\Psi_n\right)\times\int_0^1\cos\left(n\pi x\right)\cos\left(m\pi x\right)dx.$$

De la relation d'orthogonalité, donne :

$$\begin{aligned}E(t) &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\gamma_n n\pi\right)^2\cos\left(n\pi t+\Psi_n\right)^2\times\int_0^1\sin\left(n\pi x\right)^2dx\\ &+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\gamma_n n\pi\right)^2\sin\left(n\pi t+\Psi_n\right)^2\times\int_0^1\cos\left(n\pi x\right)^2dx.\end{aligned}$$

Donc

$$E(t)=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\gamma_n n\pi\right)^2\left[\cos\left(n\pi t+\Psi_n\right)^2+\sin\left(n\pi t+\Psi_n\right)^2\right].$$

Finalement, on obtient :

$$E(t)=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\gamma_n n\pi\right)^2,$$

qui est constante pour tout t. ■

1.3 Quelques inégalités utiles

Inégalité de Young

Supposons que $1\leq p\leq\infty$, on désigne par p' l'exposant conjugué de p, i.e. : $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. Rappelons l'inégalité de Young

$$ab\leq\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{p'}b^{p'},\qquad\forall a\geq0,\forall b\geq0. \tag{1.11}$$

Remarque 1.1 *Pour $p=p'=2$, l'inégalité précédente s'écrit sous la forme :*

$$ab\leq\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2.$$

Pour $\varepsilon>0$, on a aussi

$$ab\leq\frac{1}{2\varepsilon}a^2+\frac{\varepsilon}{2}b^2.$$

Inégalité de Poincaré

Soit p, tel que $1\leq p<\infty$ et Ω est bornée. Alors il existe une constante $C>0$ (dépendant uniquement de Ω et p) telle que :

$$\left\|w\right\|_{L^p(\Omega)}\leq C\left\|w'\right\|_{L^p(\Omega)}, \tag{1.12}$$

pour tout $w \in H_0^1(\Omega)$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient $w \in L^2(\Omega)$, $v \in L^2(\Omega)$, alors $wv \in L^1(\Omega)$, et on a

$$\left| \int_\Omega w(x)v(x)ds \right| \leq \left(\int_\Omega |w(x)|^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v(x)|^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.13}$$

Lemme de Gronwall

Lemme 1.1 *Supposons qu'une fonction continue de $I = [0, T]$ sur $\mathbb{R}^+$, vérifié :*

$$\Psi(x) \leq C_1(x) + \int_0^t C_2(s)\Psi(s)ds,$$

pour tout $t \in I$, où C_2 est une fonction continue de I dans $\mathbb{R}^+$ et C_1 une fonction continue croissante de I dans $\mathbb{R}$. Alors, on a l'inégalité

$$\Psi(x) \leq C_1(x) + \int_0^t \exp\left(\int_s^t C_2(r)dr \right) C_1(s)C_2(s)ds,$$

pour tout $t \in [0, T]$.

Remarque 1.2 *Si C_1 est une constante, l'inégalité de Gronwall peut se simplifier et on écrit :*

$$\Psi(x) \leq C_1 \exp\left(\int_0^t C_2(s)ds \right).$$

Chapitre 2

Équation d'onde avec amortissement linéaire

Dans ce chapitre on étudie la stabilisation de l'équation des ondes avec un terme d'amortissement c'est-à-dire la vitesse de mouvement est retardé par une force d'amortissement proportionnelles à la vitesse de la corde. On obtient l'équation des ondes avec termes d'amortissement suivante :

$$w_{tt} - w_{xx} + \alpha(x) w_t = 0, \text{ dans } \Omega.$$

où $\alpha(x)$ est le coefficient d'amortissement et Ω un domaine bornée de $\mathbb{R}^n$.

2.1 Existence et l'unicité

On considère le problème suivante :

$$\begin{cases} w_{tt} + \alpha(x) w_t - w_{xx} = 0, & \text{dans} \quad \Omega, \\ w|_{\partial\Omega} = 0, & \text{dans} \quad \partial\Omega, \\ w(x,0) = w^0(x), \quad w_t(x,0) = w^1(x), & \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

$\alpha \in L^\infty(\Omega)$ satisfait

$$\alpha(x) \geq a > 0, \quad \text{p.p } x \in \Omega.$$

Théorème 2.1 *Sous les donnes initiale suivante :*

$$w^0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \ \textit{et} \ \ w^1 \in H_0^1(\Omega),$$

Alors, il existe une solution unique w de problème (2.1) qui satisfait :

$$w \in C\left([0,T], H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right) \quad \textit{et} \ \ w^1 \in C\left([0,T]; H_0^1(\Omega)\right).$$

Démonstration. *Voir ([7]).* ■

2.2 Stabilité par la méthode des intégrales d'énergies

Dans cette section on s'intéresse à l'étude pour décroissant exponentielle par méthode énergie. On prend

$$\Omega =]0, L[\,,\ \text{où}\ L > 0.$$

Théorème 2.2 *Soit $w(x,t)$ la solution de l'équation du problème (2.1) avec condition initial (w^0, w^1), alors il existe $K, \beta > 0$, tel que :*

$$\left(\int\limits_{\Omega} ({w_t}^2 + w_x^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq K e^{-\beta t} \int\limits_{\Omega} \left|w_x^0\right|^2 + \left(w^1\right)^2 dx. \tag{2.2}$$

Démonstration. On multiple l'équation de problème (2.1) par w_t et intègre par parties sur Ω :

$$\int\limits_{\Omega} w_{tt} w_t - (w_{xx})\, w_t + \alpha(x) w_t^2 dx = 0.$$

En utilisant les argument du théorème 1.3, On obtient

$$E'(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} w_t^2 + |w_x|^2\, dx + \int\limits_{\Omega} \alpha(x) w_t^2 dx = 0. \tag{2.3}$$

De la même manière, on multiple l'équation du problème (2.1) par λw et intègre par parties sur Ω

$$\int\limits_{\Omega} \lambda w_{tt} w + \alpha(x)\lambda w_t w - \lambda w_{xx} w dx = 0.$$

Comme :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \lambda w_{tt} w dx &= \lambda \frac{d}{dt}\int_{\Omega} w_t w dx - \int_{\Omega} w_t^2 dx, \\
\int_{\Omega} \alpha(x)\lambda w_t w dx &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega} \alpha(x)\lambda w^2 dx, \\
-\int_{\Omega} w_{xx} w dx &= \int_{\Omega} -(w_x w)_x + w_x^2 dx,
\end{aligned}$$

alors

$$\lambda \frac{d}{dt}\int_{\Omega} w_t w dx - \int_{\Omega} w_t^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega} \alpha(x) w^2 dx + \int_{\Omega} w_x^2 dx - \int_{\Omega} (w_x w)_x\, dx = 0 \tag{2.4}$$

et

$$\int\limits_{\Omega} (w_x w)_x dx = w_x(x,t) w(x,t)]_0^L = w_x(L,t) w(L,t) - w_x(0,t) w(0,t).$$

Par les conditions de bord homogène de Dirichlet

$$\int\limits_{\Omega} (w_x w)_x dx = 0.$$

En additionnant (2.3) et (2.4), on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega} w_t^2 + w_x^2 + 2\lambda w_t w + \lambda\alpha(x)w^2 dx + \int_{\Omega} \alpha(x)w_t^2 + \lambda w_x^2 - \lambda w_t^2 dx = 0. \tag{2.5}$$

On pose :

$$\frac{d}{dt}P(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega} w_t^2 + w_x^2 + 2\lambda w_t w + \lambda\alpha(x)w^2 dx, \tag{2.6}$$

et

$$Q = \int_{\Omega} \alpha(x)w_t^2 + \lambda w_x^2 - \lambda w_t^2 dx.$$

Alors, on écrit l'équation (2.5) simplement comme :

$$\frac{d}{dt}P + Q = 0. \tag{2.7}$$

Par l'inégalité de Poincaré (1.12), il existe une constante C_1 telle que :

$$\int_{\Omega} w^2 dx \leq C_1 \int_{\Omega} w_x^2 dx. \tag{2.8}$$

Soit C_2 est une constante telle que :

$$ess \sup_{x\in\Omega} \alpha(x) \leq C_2. \tag{2.9}$$

On utilise l'inégalité de Young (1.11) de (2.6), on obtient :

$$P(t) \leq \frac{1}{2}\int_{\Omega} w_t^2 + w_x^2 + \lambda\left(w_t^2 + C_1 w_x^2\right) + \lambda C_2 C_1 w_x^2 dx,$$

$$\leq \int_{\Omega} \frac{1}{2}w_t^2 + \frac{1}{2}w_x^2 + \frac{1}{2}\lambda w_t^2 + \frac{1}{2}\lambda\left(C_2C_1 + C_1\right) w_x^2 dx.$$

On choisit $0 < \lambda \leq \min(\frac{1}{2}, \frac{1}{2(C_1+C_1C_2)})$, alors :

$$P(t) \leq \int_{\Omega} \frac{1}{2}w_t^2 + \frac{1}{2}w_x^2 + \frac{1}{2}w_t^2 dx + \int_{\Omega} \frac{1}{2\left(C_1 + C_1C_2\right)}\left(C_2C_1 + C_1\right) w_x^2 dx.$$

Par une simplification on trouve :

$$P(t) \leq \frac{1}{2}\int_{\Omega} w_t^2 + w_x^2 + w_t^2 + w_x^2 dx.$$

Finalement, on obtient :

$$P(t) \leq \int_{\Omega} w_t^2 + w_x^2 dx. \tag{2.10}$$

D'autre part, on applique l'inégalité de Young (1.11), on obtient :

$$2w_t w \geq -w_t^2 - w^2.$$

On utilise aussi l'inégalité de Poincaré (1.12), on trouve :

$$P(t) \geq \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} w_t^2 + w_x^2 + \lambda\left[-w_t^2 - C_1 w_x^2\right] - \lambda\alpha(x)C_1 w_x^2 dx,$$

$$\geq \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} (1-\lambda)\, w_t^2 + w_x^2 - \lambda\left(C_2C_1 + C_1\right) w_x^2 dx.$$

On choisit $0 < \lambda \leq \min(\frac{1}{2}, \frac{1}{2(C_1+C_1C_2)})$, donc :

$$P(t) \geq \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \left(1 - \frac{1}{2}\right) w_t^2 + \left(1 - \frac{1}{2\left(C_1 + C_1C_2\right)}\left(C_2C_1 + C_1\right)\right) w_x^2 dx.$$

Finalement,on obtient :

$$P(t) \geq \frac{1}{4}\int\limits_{\Omega} w_t^2 + w_x^2 dx. \tag{2.11}$$

Par les inégalités (2.10) et (2.11), on trouve :

$$\frac{1}{2}E(t) \leq P(t) \leq 2E(t). \tag{2.12}$$

D'autre part, on a :

$$Q(t) = \int\limits_{\Omega} \alpha(x)w_t^2 + \lambda w_x^2 - \lambda w_t^2 dx = \int\limits_{\Omega} \left(\alpha(x) - \lambda\right) w_t^2 + \lambda w_x^2 dx.$$

Pour

$$\alpha(x) \geqslant a > 0 \ \text{ p.p. sur } \Omega, \ \alpha \in L^\infty(\Omega).$$

On choisit $0 < \lambda \leq \min\left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2C_1}\right)$ de sorte que :

$$Q(t) \geq \int\limits_{\Omega} \left(a - \frac{1}{2}a\right) w_t^2 + \lambda w_x^2 dx \geq \int\limits_{\Omega} \frac{1}{2}a w_t^2 + \lambda w_x^2 dx.$$

Par simplification, on trouve :

$$Q(t) \geq \min\left\{\frac{1}{2}a, \lambda\right\}\int\limits_{\Omega} w_t^2 + w_x^2 dx \geq C_3\int\limits_{\Omega} w_t^2 + w_x^2 dx \geq C_3 P(t). \tag{2.13}$$

où $C_3 = \min(\frac{1}{2}a, \lambda)$. Des équations précédents (2.7) et (2.13), on trouve :

$$\frac{d}{dt}P + Q \geq \frac{d}{dt}P + C_3 P(t) = 0.$$

Alors, la résolution de cette inéquation différentielle linéaire donne :

$$P(t) \leq P(0)e^{-C_3 t}.$$

Par l'inégalité (2.12), on trouve finalement :

$$\int\limits_{\Omega} w_t^2 + w_x^2 dx \leq 4P(t) \leq 4P(0)e^{-C_3 t} \leq 4e^{-C_3 t}\int\limits_{\Omega} \left(w_x^0\right)^2 + \left(w^1\right)^2 dx$$

et le théorème est démontré. ■

2.3 Stabilité par les séries de Fourier

On considère le cas

$$\alpha(x) = \gamma > 0$$

où γ est une constate tel que

$$0 < \gamma < \frac{\pi}{L}.$$

On est intéressé par le problème suivant :

$$\begin{cases} w_{tt} + 2\gamma w_t - w_{xx} = 0, & \text{pour } (x,t) \in (0,L) \times (0,\infty), \\ w(t,0) = w_x(t,L) = 0, & \text{pour } t \in (0,\infty), \\ w(x,0) = 0, \quad w_t(x,0) = w^1(x), & \text{pour } x \in (0,L), \end{cases} \tag{2.14}$$

avec les conditions initiales

$$w^0 \in H^1(0,L) \quad \text{et} \quad w^1 \in L^2(0,L).$$

Pour $n \in \{0,1,2,3,.....\}$, on note :

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\sqrt{\lambda_n} x\right) \quad \text{où} \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2.$$

Les coefficient de Fourier sont définie par

$$a_n^0 = \int_0^L w^0(x) X_n(x) dx \quad \text{et} \quad a_n^1 = \int_0^L w^1(x) X_n(x) dx,$$

et on a

$$a_n(t) = \exp(-\gamma t) \left[a_n^0 \cos\left(\sqrt{(c^2\lambda_n - \gamma^2 t)}\right) + a_n^1 \frac{1}{\sqrt{(c^2\lambda_n - \gamma^2 t)}} \sin\left(\sqrt{(c^2\lambda_n - \gamma^2 t)}\right) \right].$$

Alors, on le théorème suivant :

Théorème 2.3 *La solution de l'équation de problème (2.14), est donnée par :*

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) X_n(x) dx.$$

De plus $w(t,\cdot) \in L^2(0,L)$, pour $t > 0$, avec

$$\int_0^L w^2(t,x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2(t).$$

L'énergie satisfait l'estimation

$$E(t) \leq 3e^{-2\gamma t} E(0).$$

Démonstration. On utilise la méthode de séparation des variables, donc :

$$w(x,t) = X(x)T(t).$$

Comme

$$w_t = X(x)T'(t), \;\; w_{tt} = X(x)T''(t) \quad \text{et} \quad w_{xx} = X''(x)T(t).$$

Alors :

$$X(x)T''(t) + 2\gamma X(x)T'(t) = X''(x)T(t). \tag{2.15}$$

On divise (2.15) sur $X(x)T(t)$:

$$\frac{X(x)T''(t)}{X(x)T(t)} + 2\gamma\frac{X(x)T'(t)}{X(x)T(t)} = \frac{X''(x)T(t)}{X(x)T(t)}.$$

On trouve

$$\frac{T''(t)}{T(t)} + 2\gamma\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \tag{2.16}$$

où x et t sont deux variables indépendants. La relation (2.16) implique, qu'il existe une constante λ

$$\frac{T''}{T} + 2\gamma\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda.$$

où $\lambda > 0$. On a donc

$$\begin{cases} T'' + 2\gamma T' + \lambda T = 0, \\ X'' + \lambda X = 0. \end{cases} \tag{2.17}$$

qui sont des équations de $2^{éme}$ ordre, on a d'abord :

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = 0 \text{ et } X(L) = 0. \end{cases}$$

dont la solution

$$X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x),$$

et la conditions initiales implique

$$X(0) = A = 0 \;\;\text{et}\;\; X(L) = B\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0.$$

La dernière équation donne $\sqrt{\lambda}L = n\pi$, si $B \neq 0$, i.e.,

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2.$$

Donc

$$X(x) = B\sin\left(\frac{x}{L}n\pi\right), \quad \text{pour } n = 1, 2, \cdots.$$

La solution s'écrit sous la forme :

$$X_n(x) = B\sin\left(\frac{x}{L}n\pi\right).$$

On va choisi B tel que

$$\int_0^L X_n^2(x)dx = 1, \quad n = 1, 2, \cdots .$$

Rappelons que $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, donc

$$\begin{aligned} B^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{x}{L}\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) dx &= \frac{B^2}{2} \int_0^L 1 - \cos 2\left(\frac{x}{L} n\pi\right) dx, \\ &= \frac{B^2}{2} L - \frac{L}{2n\pi} \sin\left(2n\pi \frac{x}{L}\right)\Big]_0^L = 1. \end{aligned}$$

Comme

$$\frac{L}{2n\pi + \pi} \sin\left(2n\pi \frac{x}{L}\right)\Big]_0^L = 0,$$

alors

$$\frac{B^2}{2} L = 1 \implies B = \sqrt{\frac{2}{L}}.$$

Finalement, on obtient :

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right).$$

On suite, on résout :

$$T'' + 2\gamma T' + \lambda_n T = 0, \quad n = 1, 2, ... \tag{2.18}$$

qui a comme équation caractéristique :

$$r^2 + 2\gamma r + \lambda = 0. \tag{2.19}$$

On a

$$\Delta = 4(\gamma^2 - \lambda_n).$$

Comme on a supposé $\gamma^2 < \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \le \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 = \lambda_n$, pour $n \ge 1$, alors $\Delta < 0$. La solution de (2.18) s'est écrit comme :

$$\begin{aligned} T(t) &= Ae^{\left(-\gamma - i\sqrt{\gamma^2 - \lambda_n}\right)t} + Be^{\left(-\gamma + i\sqrt{\gamma^2 - \lambda_n}\right)t}, \\ &= e^{-\gamma t}\left[Ae^{-i\sqrt{\gamma^2 - \lambda_n} t} + Be^{i\sqrt{\gamma^2 - \lambda_n} t}\right]. \end{aligned}$$

Alors, on a

$$T(t) = e^{-\gamma t}\left[(A + B)\cos\left(\sqrt{\lambda_n - \gamma^2} t\right) + i\,(A - B)\sin\left(\sqrt{\lambda_n - \gamma^2} t\right)\right].$$

On pose :

$$A + B = \alpha, \quad \text{et } i\,(A - B) = \beta.$$

Alors, la solution écrit sous la forme :

$$T_n(t) = e^{-\gamma t}\left[\alpha_n \cos\left(\sqrt{\lambda_n - \gamma^2 t}\right) + \beta_n \sin\left(\sqrt{\lambda_n - \gamma^2 t}\right)\right]. \tag{2.20}$$

D'après les conditions initiales, on a :

$$T_n(0) = \alpha_n = 0 \quad \text{et} \quad T_n'(0) = \beta_n\sqrt{\lambda_n - \gamma^2} - \gamma\alpha_n.$$

On obtient :

$$\beta_n = T_n'(0)/\sqrt{\lambda_n - \gamma^2}.$$

La dérivée T_n' est

$$T_n'(t) = \beta_n e^{-\gamma t}\left[\sqrt{\lambda_n - \gamma^2}\cos\left(\sqrt{\lambda_n - \gamma^2 t}\right) - \gamma \sin\left(\sqrt{\lambda_n - \gamma^2 t}\right)\right].$$

Alors :

$$T_n(t) = a_n(t) := T_n'(0)\frac{e^{-\gamma t}}{\sqrt{\lambda_n - \gamma^2}}\sin\left(\sqrt{\lambda_n - \gamma^2 t}\right).$$

Finalement, la solution générale du problème (2.14) s'écrit comme :

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(t)T_n(t) = \sqrt{\frac{2}{L}}e^{-\gamma t}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n \sin\left(\sqrt{\lambda_n - \gamma^2 t}\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_n}x\right).$$

Les dérivées sont données par

$$w_t(x,t) = \sqrt{\frac{2}{L}}e^{-\gamma t}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\left[-\gamma\sin\left(\sqrt{\lambda_n - \gamma^2 t}\right) + \sqrt{\lambda_n - \gamma^2}\cos\left(\sqrt{\lambda_n - \gamma^2 t}\right)\right]\sin\left(\sqrt{\lambda_n}x\right),$$

$$w_x(x,t) = \sqrt{\frac{2}{L}}e^{-\gamma t}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_n}\beta_n \sin\left(\sqrt{\lambda_n - \gamma^2 t}\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_n}x\right).$$

Par l'identité de Parseval

$$\int_0^L w_x^2(x,t)dx = \frac{2}{L}e^{-2\gamma t}\int_0^L \left|\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_n}\beta_n \sin\left(\sqrt{\lambda_n - \gamma^2 t}\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)\right|^2 dx.$$

Par la propriété d'orthogonalité

$$\int_0^L \cos\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_m}x\right)dx = \begin{cases} 0 & \text{if } n \neq m \\ L/2 & \text{if } n = m \end{cases}$$

alors

$$\int_0^L w_x^2(x,t)dx = \frac{2}{L}e^{-2\gamma t}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sqrt{\lambda_n}\beta_n \sin\left(\sqrt{\lambda_n - \gamma^2 t}\right)\right|^2\int_0^L \cos^2\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)dx,$$

i.e.,

$$\int_0^L w_x^2(x,t)dx \leq e^{-2\gamma t}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\beta_n^2, \tag{2.21}$$

D'après les conditions initiales

$$w_x(x,0)=0 \quad \text{et} \quad w_t(x,0)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\sqrt{\lambda_n-\gamma^2}\sin\left(\sqrt{\lambda_n}x\right).$$

De même, on a

$$\int_0^L w_t^2(x,0)dx=\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^2(\lambda_n-\gamma^2)\int_0^L \sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)dx.$$

En particulier, on a

$$\int_0^L w_t^2(x,0)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^2(\lambda_n-\gamma^2)\geq\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\beta_n^2. \tag{2.22}$$

On aussi

$$\begin{aligned}\int_0^L w_t^2(x,t)dx &= \frac{2}{L}e^{-2\gamma t}\int_0^L\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^2\left|-\gamma\sin\left(\sqrt{\lambda_n-\gamma^2}t\right)+\sqrt{\lambda_n-\gamma^2}\cos\left(\sqrt{\lambda_n-\gamma^2}t\right)\right|^2\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)dx\\ &= e^{-2\gamma t}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^2\left|-\gamma\sin\left(\sqrt{\lambda_n-\gamma^2}t\right)+\sqrt{\lambda_n-\gamma^2}\cos\left(\sqrt{\lambda_n-\gamma^2}t\right)\right|^2.\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}&\left|-\gamma\sin\left(\sqrt{\lambda_n-\gamma^2}t\right)+\sqrt{\lambda_n-\gamma^2}\cos\left(\sqrt{\lambda_n-\gamma^2}t\right)\right|^2\\ &\qquad\leq 2\left|-\gamma\sin\left(\sqrt{\lambda_n-\gamma^2}t\right)\right|^2+2\left|\sqrt{\lambda_n-\gamma^2}\cos\left(\sqrt{\lambda_n-\gamma^2}t\right)\right|^2\\ &\qquad\qquad\leq 2\left(\gamma^2+\lambda_n-\gamma^2\right)=\lambda_n,\end{aligned}$$

on obtient

$$\int_0^L w_t^2(x,t)dx\leq 2e^{-2\gamma t}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\beta_n^2. \tag{2.23}$$

La combinaison de (2.21), (2.23) et (2.22) donne

$$\int_0^L w_t^2(x,t)+w_x^2(x,t)dx\leq 2e^{-2\gamma t}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\beta_n^2+e^{-2\gamma t}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\beta_n^2\leq 3e^{-2\gamma t}\int_0^L w_t^2(x,0)dx,$$

i.e.,

$$E(t)\leq 3e^{-2\gamma t}E(0).$$

■

2.4 Stabilité par une technique d'itération

Dans cette section on prend

$$\Omega\subset\mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad 2\gamma=\alpha(x)\geq a>0 \text{ p.p. on } \Omega.$$

ou a est une constante. On a l'équation suivant :

$$\begin{cases} w_{tt} + \alpha(x) w_t - w_{xx} = 0, & \text{dans } \Omega, \\ w|_{\partial\Omega} = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \\ w(x,0) = w^0(x), \quad w_t(x,0) = w^1(x), & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{2.24}$$

avec les conditions initiales est :

$$w^0(x) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad \text{et} \quad w^1(x) \in H_0^1(\Omega).$$

On a besoin d'un résultat de contrôlabilité qui affirme qu'il existe un fonction (contrôle) f_0 qui satisfait

$$\begin{cases} y_{tt} - y_{xx} = f_0, & \text{pour} \quad x \in \Omega \text{ et } t > 0, \\ y|_{\partial\Omega} = 0, & \text{pour } t > 0, \\ y(x,0) = 0, \quad y_t(x,0) = 0, & \text{pour} \quad x \in \Omega, \\ y(x,T) = w(x,T) \quad \text{et} \quad y_t(x,T) = w_t(x,T) & \text{pour} \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{2.25}$$

voir Chen [2]. On le résultat de croissance suivant.

Théorème 2.4 *Soit $T > 0$, alors il existe $\beta > 1$, tel que :*

$$\int_\Omega w_x^2(x,t) + w_t^2(x,t) dx \leq e^{-\frac{\ln \beta}{T} t} \int_\Omega \left(w_x^0(x)\right)^2 + \left(w^1(x)\right)^2 dx,$$

où $t \geq (n+1)T$, pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. On multiple l'équation (2.24) par y_t solution de (2.25) et on intégre par partie,comme :

$$-y_t w_{xx} = -(y_t w_x)_x + y_{tx} w_x.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega y_t \left(w_{tt} + \alpha(x) w_t - w_{xx}\right) dxdt &= \int_0^T \int_\Omega y_t w_{tt} - y_t w_{xx} + \alpha(x) y_t w_t dxdt, \\ &= \int_0^T \int_\Omega y_t w_{tt} - (y_t w_x)_x + y_{tx} w_x + \alpha(x) y_t w_t dxdt \end{aligned}$$

Par les conditions aux bords homogène de Dirichlet

$$\int_0^T \int_\Omega (y_t w_x)_x dxdt = 0.$$

On obtient :

$$\int_0^T \int_\Omega y_t \left(w_{tt} + \alpha(x) w_t - w_{xx}\right) dxdt = \int_0^T \int_\Omega y_t w_{tt} + y_{tx} w_x + \alpha(x) y_t w_t dxdt. \tag{2.26}$$

On multiple l'équation (2.25) par w_t et on intègre par partie

$$\int_0^T\int_\Omega w_t\left(y_{tt}-y_{xx}-f_0\right)dxdt=\int_0^T\int_\Omega w_ty_{tt}-w_ty_{xx}-f_0w_tdxdt,$$

$$=\int_0^T\int_\Omega w_ty_{tt}-(w_ty_x)_x+w_{tx}y_x-f_0w_tdxdt.$$

Par les conditions de bord homogène de Dirichlet

$$\int_0^T\int_\Omega (w_ty_x)_xdxdt=0$$

On obtient :

$$\int_0^T\int_\Omega w_t\left(y_{tt}-y_{xx}-f_0\right)dxdt=\int_0^T\int_\Omega w_ty_{tt}+w_{tx}y_x-f_0w_tdxdt. \tag{2.27}$$

On additionnant (2.26) et (2.27), on :

$$W=\int_0^T\int_\Omega y_tw_{tt}+w_ty_{tt}+(w_xy_x)_t-f_0w_t+\alpha(x)y_tw_tdxdt$$

On obtient :

$$W=\int_0^T\int_\Omega \left(y_tw_t\right)_t+(w_xy_x)_t+\left[\alpha(x)y_t-f_0\right]w_tdxdt,$$

$$=\int_0^T\int_\Omega \left(y_tw_t+w_xy_x\right)_t dxdt+\int_0^T\int_\Omega \left[\alpha(x)y_t-f_0\right]w_tdxdt.$$

En intégrant sur $[0,T]$,on a :

$$\int_\Omega w_t^2(x,T)+w_x^2(x,T)dx=\int_0^T\int_\Omega \left[f_0-\alpha(x)y_t\right]w_tdxdt.$$

puisque :

$$y_t(x,T)=w_t\left(x,T\right)\ \text{ et } y_t(x,0)=y_x(x,0)=0.$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz (1.13) dans le deuxième terme, on obtient :

$$\int_0^T\int_\Omega \left[f_0-\alpha(x)y_t\right]w_tdxdt\leq\left(\int_0^T\int_\Omega \left[f_0-\alpha(x)y_t\right]^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T\int_\Omega w_t^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On déduit que :

$$\int_0^T\int_\Omega w_t^2dxdt\geq\frac{\left\{\displaystyle\int_\Omega w_t^2(x,T)+w_x^2(x,T)dx\right\}^2}{\displaystyle\int_0^T\int_\Omega \left[f_0-\alpha(x)y_t\right]^2dxdt}. \tag{2.28}$$

D'après [2], il existe une constante K_1 tel que :

$$\int_0^T \int_\Omega [f_0 - \alpha(x) y_t]^2 \, dx dt \leq K_1 \int_\Omega w_t^2(x,T) + w_x^2(x,T) dx. \tag{2.29}$$

Par l'équation de problème (2.24) on trouve :

$$\int_\Omega w_t^2(x,0) + w_x^2(x,0)dx - \int_\Omega w_t^2(x,T) + w_x^2(x,T)dx = \int_0^T \int_\Omega \alpha(x) w_t^2 dx dt \tag{2.30}$$

et comme :

$$\alpha(x) \geq a > 0 \text{ p.p. on } \Omega. \tag{2.31}$$

alors

$$\int_0^T \int_\Omega \alpha(x) w_t^2 dx dt \geq a \int_0^T \int_\Omega w_t^2 dx dt. \tag{2.32}$$

De (2.28), (2.29) et (2.32), on déduit que :

$$a \int_0^T \int_\Omega w_t^2 dx dt \geq \frac{a}{K_1} \int_\Omega w_t^2(x,T) + w_x^2(x,T) dx,$$

Alors, de (2.30) on a

$$\frac{a}{K_1} \int_\Omega w_t^2(x,T) + w_x^2(x,T)dx \leq \int_\Omega w_t^2(x,0) + w_x^2(x,0)dx - \int_\Omega w_t^2(x,T) + w_x^2(x,T)dx.$$

On posant $K = \frac{a}{K_1}$, on obtient :

$$(K+1) \int_\Omega w_t^2(x,T) + w_x^2(x,T)dx \leq \int_\Omega w_t^2(x,0) + w_x^2(x,0)dx.$$

i.e :

$$\|w_x(x,T)\|^2 + \|w_t(x,T)\|^2 \leq \frac{1}{K+1} \left(\|w_x(x,0)\|^2 + \|w_t(x,0)\|^2 \right).$$

Pour $t = (n+1)T$, on a

$$\begin{aligned}
\|w_x(x,(n+1)T)\|^2 + \|w_t(x,(n+1)T)\|^2 &\leq \frac{1}{K+1} \left(\|w_x(x,nT)\|^2 + \|w_t(x,nT)^2\| \right) \\
&\leq \frac{1}{K+1} \frac{1}{K+1} \left(\|w_x(x,(n-1)T)\|^2 + \|w_t(x,(n-1)T)\|^2 \right) \\
&\vdots \\
&\leq \frac{1}{(K+1)^{n+1}} \left(\|w_x(x,0)\|^2 + \|w_t(x,0)\|^2 \right).
\end{aligned}$$

Notons $\beta = 1 + K$, on obtient

$$\|w_x(x,(n+1)T)\|^2 + \|w_t(x,(n+1)T)\|^2 \leq e^{-\frac{\ln \beta}{T} t} \left(\|w_x(x,0)\|^2 + \|w_t(x,0)\|^2 \right).$$

■

2.5 Stabilité par un lemme de Gronwall

Dans cette section on suppose que

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad \gamma > 0 \text{ est une constante.}$$

On considère l'équation des ondes amortie :

$$\begin{cases} w_{tt} + 2\gamma w_t - \Delta w = f, & \text{p.p. dans } \Omega \times \mathbb{R}_+^*, \\ w = 0, & \text{p.p. dans } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+^*, \\ w(x,0) = w^0(x) \;\; \text{et} \;\; w_t(x,0) = w^1(x), & \text{p.p. dans } x \in \Omega. \end{cases} \tag{2.33}$$

On suppose que f satisfait

$$\exists T_1 \text{ tel que } \; f(x,t) = 0 \; \text{ pour } t \geq T_1.$$

Théorème 2.5 *Il existe $C > 0$, tel que la solution du problème (2.33)*

$$\int_\Omega w_t^2(x,t) + w_x^2(x,t) dx \leq C e^{-2\gamma t}.$$

Démonstration. On pose $v = e^{2\gamma t} w$. Si on suppose que w est régulière, v est également solution d'une équation des ondes. En effet, si on multiple (2.33) par $\gamma e^{2\gamma t}$ on trouve :

$$2\gamma e^{2\gamma t} w_{tt} + 4\gamma e^{2\gamma t} w_t - 2\gamma e^{2\gamma t} w_{xx} = 2\gamma e^{2\gamma t} f,$$

On a

$$v_t = e^{2\gamma t} w_t + 2\gamma e^{2\gamma t} w, \quad v_{tt} = e^{2\gamma t} w_{tt} + 2\gamma e^{2\gamma t} w_t + 4\gamma^2 e^{2\gamma t} w, \quad \text{et} \quad \Delta v = e^{2\gamma t} \Delta w$$

On déduit que v satisfait le problème suivante :

$$\begin{cases} v_{tt} - \gamma \Delta v = \gamma e^{2\gamma t} f, & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+^*. \\ v = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+^*. \\ v(x,0) = v^0 \;\; et \;\; v_t = v^1 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{2.34}$$

avec

$$v^0 = w^0, \quad \text{et} \quad v^1 = 2\gamma w^1.$$

Maintenant, on multiple (2.34) par v_t, et on intègre par partie on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int v_t^2 + 2\gamma \left|\nabla v\right|^2 dx = 2\gamma \int e^{2\gamma t} f \; v_t dx.$$

On intègre sur $(0,t)$ et Ω

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t \int_\Omega v_t^2 dt dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t \int_\Omega 2\gamma \left|\nabla v\right|^2 \; dt dx = 2\gamma \int_0^t \int_\Omega e^{2\gamma t} f v_t dt dx. \tag{2.35}$$

D'après l'inégalité de Cauchy Schwarz (1.13), on obtient :

$$\int_0^t \int_\Omega 2\gamma e^{2\gamma t} f v_t dt dx \leq \left(\int_0^t \int_\Omega \left(2\gamma f(x,s) e^{2\gamma t}\right)^2 dx ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_\Omega v_t^2(x,s) ds dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'après l'inégalité de Young (1.11), on trouve :

$$\left(\int_0^t \int_\Omega \left(2\gamma f(x,s) e^{2\gamma t}\right)^2 dx ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_\Omega v_t^2(x,s) ds dx \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \frac{1}{2} \int_0^t \int_\Omega \left(2\gamma f(x,s) e^{2\gamma t}\right)^2 dx ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_\Omega v_t^2(x,s) ds dx.$$

Ensuite on intègre (2.35) entre 0 et t, on obtient :

$$\frac{1}{2} \int_\Omega v_t^2(x,t) - v_t^2(x,0) dx + \frac{1}{2} \int_\Omega 2\gamma \left|\nabla v(x,t)\right|^2 - 2\gamma \left|\nabla v(x,0)\right|^2 dx$$
$$\leq \frac{1}{2} \int_0^t \int_\Omega \left(2\gamma f(x,s) e^{2\gamma t}\right)^2 dx ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_\Omega v_t^2(x,s) ds dx.$$

Ensuite

$$\frac{1}{2} \int_\Omega v_t^2(x,t) + 2\gamma \left|\nabla v(x,t)\right|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_\Omega v_t^2(x,0) + 2\gamma \left|\nabla v(x,0)\right|^2 dx$$
$$+ \frac{1}{2} \int_0^t \int_\Omega \left(2\gamma f\ (x,s) e^{2\gamma t}\right)^2 dx ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_\Omega v_t^2(x,s) + 2\gamma v_x^2(x,t) ds dx.$$

D'après le lemme de Gronwall, on trouve :

$$\int_\Omega v_t^2(x,t) + 2\gamma \left|\nabla v(x,t)\right|^2 dx$$
$$\leq C \left(\int_\Omega \left|v^1(x)\right|^2 + 2\gamma \left|\nabla v^0(x)\right|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega \left(2\gamma f\ (x,s) e^{2\gamma t}\right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} ds.$$

Comme f est nul pour $t \geq T_1$ grand, le second membre est borné uniformément en temps

$$\int_\Omega v_t^2(x,t) + 2\gamma v_x^2(x,t) dx \leq C.$$

On déduit que v et v_t sont bornées dans $L^2(\Omega)$, d'où on déduit que les normes $L^2(\Omega)$ de w et w_t décroissent exponentiellement. ■

Chapitre 3

Une équation d'onde avec un amortissement non-linéaire

Dans cette section, on étudier la stabilité exponentiellement de le problème suivante avec un terme $F(x, w_t)$ non linéaire. On prend

$$\Omega =]0, L[\,,\text{ où } L > 0$$

et on s'intéresse à l'étude de l'équation :

$$w_{tt} - w_{xx} + F(x, w_t) = 0, \tag{3.1}$$

On écrit $F(x, w_t)$ se la forme :

$$F(x, w_t) = \gamma_1 (w_t) + \gamma_2 w_t^3,\ \ \gamma_1, \gamma_2 > 0.$$

Plus précisément, on considère le problème

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} + \gamma_1 w_t + \gamma_2 w_t^3 = 0, & x \in]0, L[\,, \\ w(0,t) = w(L,t) = 0, & \\ w(x,0) = w^0(x), \quad w_t(x,0) = w^1(x), & x \in]0, L[\,. \end{cases} \tag{3.2}$$

On a le résultat d'existence suivant :

Théorème 3.1 *Avec les conditions initiales*

$$w^0 \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L) \quad \text{ et } \quad w^1 \in H_0^1(0, L)$$

il existe une solution unique w du problème (3.1) qui satisfait :

$$w \in L^\infty \left(0, T; H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)\right), \ \ w_t \in L^\infty(0, T; H_0^1(0, L)) \ \text{ et } \ w_{tt} \in L^\infty(0, T; L^2(0, L)).$$

Démonstration. Voir [7, 2]. ■

On va démonter le théorème suivant :

Théorème 3.2 *Soit w est une solution de l'équation (3.2) et γ_2 petit, Alors, il existe des constantes $K_1, K_2, K_3, \alpha > 0$, qui sont indépendants de w^0 et w^1, tel que :*

$$\begin{aligned} \|w_x(\cdot,t)\|^2 + \|w_t(\cdot,t)\|^2 &\leq K_1 \left\{ e^{-\alpha t}\left(\|w_x^0\|^2 + \|w^1\|^2\right) + \int_0^t \int_0^L e^{\alpha(\tau - t)} w_t^6 dx d\tau \right\}, && (3.3) \\ \|w_x(\cdot,t)\|^2 + \|w_t(\cdot,t)\|^2 &\leq K_3 \left\{ e^{-\alpha t}\left(\|w_x^0\|^2 + \|w^1\|^2\right) + \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha}\left(\|w_x^0\|^2 + \|w^1\|^2\right)^2 \right\} && (3.4) \end{aligned}$$

Démonstration. On utilise la méthode des intégrales d'énergies. En multiple (3.2) par $w_t + \lambda w$. En effet, la multiplication de (3.2) par w_t donne

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L w_t^2 + w_x^2 dx + \int_0^L \gamma_1 w_t^2 dx + \int_0^L \gamma_2 w_t^4 dx = 0. \tag{3.5}$$

Donc

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L w_t^2 + w_x^2 dx = -\int_0^L \gamma_1 w_t^2 dx - \int_0^L \gamma_2 w_t^4 dx \leq 0. \tag{3.6}$$

Ce qui veut dire en particulier que l'énergie est décroissante.

Ensuite, on multiple (3.2) par w,on trouve :

$$\begin{aligned} \int_0^L w_{tt} w dx &= \frac{d}{dt}\int_0^L w_t w dx - \int_0^L w_t^2 dx, \\ \int_0^L \gamma_1 w_t w dx &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \gamma_1 w^2 dx, \\ \int_0^L \gamma_2 (w_t)^3 w dx &= \int_0^L \gamma_2 (w_t)^3 w dx, \\ \int_0^L -w_{xx} w dx &= \int_0^L w_x w dx - \int_0^L w_x^2 dx, \end{aligned}$$

Alors :

$$\frac{d}{dt}\int_0^L w_t w - w_t^2 + \frac{\gamma_1}{2} w^2 dx + \int_0^L \gamma_2 w_t^3 w + w_x w - w_x^2 dx = 0. \tag{3.7}$$

De (3.5) et (3.7), la multiplication par $w_t + \lambda w$ donne :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L w_t^2 + w_x^2 + \lambda\left(2w_t w + w^2\right) dx + \int_0^L \gamma_1 w_t^2 + \gamma_2 w_t^4 + \lambda\left(w_x^2 - w_t^2 + \gamma_2 w_t^3 w\right) dx = 0. \tag{3.8}$$

On pose :

$$\begin{aligned} P &:= \frac{1}{2}\int_0^L w_t^2 + w_x^2 + \lambda\left(2w_t w + w^2\right) dx, \\ Q &:= \int_0^L \gamma_1 w_t^2 + \gamma_2 w_t^4 + \lambda\left(w_x^2 - w_t^2 + \gamma_2 w_t^3 w\right) dx dx. \end{aligned}$$

Alors, on écrit ce qui précèdent (3.8) simplement comme :

$$\frac{d}{dt}P + Q = 0. \tag{3.9}$$

Par l'inégalité de Poincaré (1.12), il existe une constante K telle que :

$$\int_0^L w^2 dx \leq K \int_0^L w_x^2 dx. \tag{3.10}$$

On applique l'inégalité de Young (1.11), on trouve :

$$\begin{aligned} P(t) &\leq \frac{1}{2}\int_0^L w_t^2 + w_x^2 + \lambda\left(\frac{1}{\varepsilon}w_t^2 + \varepsilon w^2 + w^2\right) dx, \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^L \left(1+\frac{\lambda}{\varepsilon}\right) w_t^2 + w_x^2 + \lambda(\varepsilon+1)w^2 dx. \end{aligned}$$

On utilise l'inégalité de Poincaré (3.10), on obtient :

$$P(t) \leq \frac{1}{2}\int_0^L \left(1+\frac{\lambda}{\varepsilon}\right) w_t^2 + w_x^2 + \lambda K(\varepsilon+1)w_x^2 dx.$$

On choisie $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et $0 < \lambda \leq \min\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9K}\right)$ de sorte que

$$P(t) \leq \frac{1}{2}\int_0^L \left(1+\frac{2}{3}\right) w_t^2 + w_x^2 + \frac{1}{9K}K(\frac{1}{2}+1)w_x^2 dx \leq \frac{1}{2}\int_0^L \frac{5}{3}w_t^2 + w_x^2 + \frac{1}{6}w_x^2 dx.$$

Alors, par une simplification, on obtient :

$$P(t) \leq \frac{1}{2}\int_0^L \frac{5}{3}w_t^2 + \frac{7}{3}w_x^2 dx \leq \frac{5}{6}\int_0^L w_x^2 + w_t^2 dx.$$

D'autre part, on utilise l'inégalité de Young (1.11), on trouve :

$$2w_t w \geq \frac{-1}{\varepsilon}w_t^2 - \varepsilon w^2.$$

Pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on obtient :

$$P(t) \geq \frac{1}{2}\int_0^L w_t^2 + w_x^2 - 2\lambda w_t^2 + \frac{1}{2}\lambda w^2 dx,$$

Aussi, on applique l'inégalité de Poincaré (3.10) ,on trouve :

$$\begin{aligned} P(t) &\geq \frac{1}{2}\int_0^L (1-2\lambda)\, w_t^2 + w_x^2 - \frac{1}{2}\lambda K w_x^2 dx, \\ &\geq \frac{1}{2}\int_0^L \left(1-\frac{2}{3}\right) w_t^2 + \left(1-\frac{1}{18}\right) w_x^2 dx, \\ &\geq \frac{1}{2}\int_0^L \frac{1}{3}w_t^2 + \frac{17}{18}w_x^2 dx. \end{aligned}$$

Par une simplification, on obtient :

$$P(t) \geq \int_0^L \frac{1}{6}w_t^2 + \frac{17}{36}w_x^2 dx \geq \frac{1}{6}\int_0^L w_t^2 + w_x^2 dx,$$

Donc :

$$\frac{1}{6}\int_0^L w_t^2 + w_x^2 dx \leq P(t) \leq \frac{5}{6}\int_0^L w_x^2 + w_t^2 dx, \tag{3.11}$$

C'est à dire :

$$\frac{1}{6}\left(\|w_x(\cdot,t)\|^2+\|w_t(\cdot,t)\|^2\right)\leq P(t)\leq\frac{5}{6}\left(\|w_x(\cdot,t)\|^2+\|w_t(\cdot,t)\|^2\right). \tag{3.12}$$

On applique l'inégalité de Young dans (1.11) de :

$$\int_0^L w_t^3 w dx\leq\frac{1}{2}\int_0^L w_t^6 dx+\frac{1}{2}\int_0^L w^2 dx \tag{3.13}$$

et rappelons qu'on a

$$w_t\in L^6(0,L) \text{ car on a } w_t\in H_0^1(0,L)\subseteq C([0,L])\subseteq L^6(0,L).$$

Donc :

$$\begin{aligned}Q(t) &\geq \int_0^L \gamma_1 w_t^2+\gamma_2 w_t^4+\lambda w_x^2-\lambda w_t^2-\frac{\lambda\gamma_2}{2}w_t^6dx-\frac{\lambda\gamma_2}{2}w^2dx,\\ &\geq \int_0^L \gamma_1 w_t^2+\gamma_2 w_t^4+\lambda w_x^2-\lambda w_t^2-\frac{\lambda\gamma_2}{2}w_t^6dx-\frac{\lambda\gamma_2}{2}Kw_x^2dx.\end{aligned}$$

Alors, on choisit $0<\gamma_2<\frac{2}{K}$, et $0<\lambda<\gamma_1$, on trouve :

$$\begin{aligned}Q(t) &\geq \int_0^L (\gamma_1-\lambda)w_t^2+\left(\lambda-\frac{\lambda\gamma_2}{2}K\right)w_x^2-\frac{\lambda\gamma_2}{2}w_t^6dx,\\ &\geq \min\left\{\gamma_1-\lambda,\lambda-\frac{\lambda\gamma_2}{2}K\right\}\int_0^L w_t^2+w_x^2dx-\frac{\lambda\gamma_2}{2}\int_0^L w_t^6dx.\end{aligned}$$

On pose $\delta=\min\left\{\gamma_1-\lambda,\lambda-\frac{\lambda\gamma_2}{2}K\right\}$,

$$Q(t)\geq\delta\int_0^L w_t^2+w_x^2dx-\frac{\lambda\gamma_2}{2}\int_0^L w_t^6dx. \tag{3.14}$$

Rappelons que de (3.11), on a :

$$\int_0^L w_t^2+w_x^2dx\geq\frac{6}{5}P(t).$$

Alors

$$Q(t)\geq\delta\frac{6}{5}P(t)-\frac{\lambda\gamma_2}{2}\int_0^L w_t^6dx.$$

De (3.10) et (3.14) :

$$\frac{d}{dt}P+Q\geq\frac{d}{dt}P+\delta\frac{6}{5}P-\frac{\lambda\gamma_2}{2}\int_0^L w_t^6dx=0. \tag{3.15}$$

Alors

$$\frac{d}{dt}P+\alpha P-\frac{\lambda\gamma_2}{2}\int_0^L w_t^6dx\leq 0.$$

Où $\alpha=\delta\frac{6}{5}$. On multiple l'équation (3.15) par $e^{\alpha t}$:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\alpha t}P\right)=e^{\alpha t}\frac{d}{dt}P+\alpha e^{\alpha t}P\leq\frac{\lambda\gamma_2}{2}e^{\alpha t}\int_0^L w_t^6dx.$$

On intégre sur $(0,t)$

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau}\left(e^{\alpha\tau}P\right)d\tau \leq \frac{\lambda\gamma_2}{2}\int_0^t e^{\alpha\tau}\int_0^L w_t^6 dx d\tau.$$

Donc :

$$e^{\alpha t}P(t)-P(0) \leq \frac{\lambda\gamma_2}{2}\int_0^t e^{\alpha\tau}\int_0^L w_t^6 dx d\tau,$$

et

$$P(t) \leq P(0)e^{-\alpha t}+\frac{\lambda\gamma_2}{2}\int_0^t e^{\alpha(\tau-t)}\int_0^L w_t^6 dx d\tau.$$

On a

$$\frac{1}{6}\left(\|w_x(\cdot,t)\|^2+\|w_t(\cdot,t)\|^2\right) \leq P(t),$$

Par (3.12) et par les conditions initiales, on obtient :

$$P(0) \leq \frac{5}{6}\left(\|w_x(\cdot,0)\|^2+\|w_t(\cdot,0)\|^2\right).$$

De sorte que :

$$\frac{1}{6}\left(\|w_x(\cdot,t)\|^2+\|w_t(\cdot,t)\|^2\right) \leq P(t) \leq \frac{5}{6}e^{-\alpha t}\left(\|w_x(\cdot,0)\|^2+\|w_t(\cdot,0)\|^2\right) + \frac{\lambda\gamma_2}{2}\int_0^t\int_0^L e^{\alpha(\tau-t)}w_t^6 dx d\tau.$$

Alors :

$$\|w_x(\cdot,t)\|^2+\|w_t(\cdot,t)\|^2 \leq 5e^{-\alpha t}\left(\|w_x(\cdot,0)\|^2+\|w_t(\cdot,0)\|^2\right)+3\lambda\gamma_2\int_0^t\int_0^L e^{\alpha(\tau-t)}w_t^6 dx d\tau.$$

Si on pose $K_1=\max\left(5,3\lambda\gamma_2\right)$, on obtient :

$$\|w_x(\cdot,t)\|^2+\|w_t(\cdot,t)\|^2 \leq K_1\left\{e^{-\alpha t}\left(\|w(\cdot,0)\|^2+\|w_t(\cdot,0)\|^2\right)+\int_0^t\int_0^L e^{\alpha(\tau-t)}w_t^6 dx d\tau\right\}.$$

Finalement :

$$\|w_x(\cdot,t)\|^2+\|w_t(\cdot,t)\|^2 \leq K_1\left\{e^{-\alpha t}\left(\|w^0\|^2+\|w^1\|^2\right)+\int_0^t\int_0^L e^{\alpha(\tau-t)}w_t^6 dx d\tau\right\}.$$

Pour établir (3.10), on commence par appliquer l'inégalité de Young (1.11) pour $\frac{1}{P}=\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{P'}=\frac{1}{4}$ et $\varepsilon=1$, on trouve

$$\int_0^L (w_t)^3 w dx \leq \frac{3}{4}\int_0^L w_t^4 dx+\frac{1}{4}\int_0^L w^4 dx, \tag{3.16}$$

De la même manière, on trouve

$$\frac{d}{dt}P+Q \geq \frac{d}{dt}P+\delta\frac{6}{5}P-\frac{\lambda\gamma_2}{4}\int_0^L w^4 dx=0.$$

Posons $\alpha = \delta\frac{6}{5}$, alors :

$$\frac{d}{dt}P + \alpha P - \frac{\lambda\gamma_2}{4}\int_0^L w^4 dx \leq 0. \tag{3.17}$$

On multiple l'équation (3.17) par $e^{\alpha t}$:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\alpha t}P\right) = e^{\alpha t}\frac{d}{dt}P + \alpha e^{\alpha t}P \leq \frac{\lambda\gamma_2}{4}e^{\alpha t}\int_0^L w^4 dx.$$

On intègre sur $(0,t)$

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau}\left(e^{\alpha\tau}P\right)d\tau \leq \frac{\lambda\gamma_2}{4}\int_0^t e^{\alpha\tau}\int_0^L w^4 dx d\tau.$$

Donc :

$$e^{\alpha t}P(t) \leq P(0) + \frac{\lambda\gamma_2}{4}\int_0^t e^{\alpha\tau}\int_0^L w^4 dx d\tau,$$

et

$$P(t) \leq e^{-\alpha t}P(0) + \frac{\lambda\gamma_2}{4}\int_0^t e^{\alpha(\tau-t)}\int_0^L w^4 dx d\tau.$$

On a

$$\frac{1}{6}\left(\|w_x(\cdot,t)\|^2 + \|w_t(\cdot,t)\|^2\right) \leq P(t).$$

Par (3.12) et les conditions initiales, on trouve :

$$P(0) \leq \frac{5}{6}\left(\|w_x(\cdot,0)\|^2 + \|w_t(\cdot,0)\|^2\right).$$

Alors :

$$\frac{1}{6}\left(\|w_x(\cdot,t)\|^2 + \|w_t(\cdot,t)\|^2\right) \leq \frac{5}{6}e^{-\alpha t}\left(\|w_x^0\|^2 + \|w^1\|^2\right) + \frac{\lambda\gamma_2}{4}\int_0^t e^{\alpha(\tau-t)}\int_0^L w^4 dx d\tau. \tag{3.18}$$

Si on pose $K_2 = \max\left(5, \frac{3}{2}\lambda\gamma_2\right)$, on trouve :

$$\|w_x(\cdot,t)\|^2 + \|w_t(\cdot,t)\|^2 \leq K_2\left\{e^{-\alpha t}\left(\|w_x^0\|^2 + \|w^1\|^2\right) + \int_0^t e^{\alpha(\tau-t)}\int_0^L w^4 dx d\tau\right\}. \tag{3.19}$$

Rappelons qu'on a $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ par l'injection de Sobolev, et il existe une constante C telle que :

$$\left(\int_0^L w^4 dx\right)^{\frac{1}{4}} \leq C\left(\int_0^L w_x^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Alors, l'énergie

$$\int_0^L w^4 dx \leq C^4\left(\int_0^L w_x^2 dx\right)^2 \leq C^4\left(\int_0^L w_t^2 + w_x^2 dx\right)^2 \tag{3.20}$$

Comme l'énergie est décroissante, on obtient :

$$\int_0^L w^4(\cdot,t)dx \leq C^4\left(\int_0^L \left(w^1\right)^2 + \left(w_x^0\right)^2 dx\right)^2. \tag{3.21}$$

Par la relation (3.21), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\|w_x(\cdot,t)\|^2 + \|w_t(\cdot,t)\|^2 \\
&\qquad \le K_3 \left\{ e^{-\alpha t} \left(\|w_x^0\|^2 + \|w^1\|^2 \right) + C^4 \left(\|w_x^0\|^2 + \|w^1\|^2 \right)^2 e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha \tau} d\tau \right\} \\
&\qquad\quad \le K_3 \left\{ e^{-\alpha t} \left(\|w_x^0\|^2 + \|w^1\|^2 \right) + C^4 \left(\|w_x^0\|^2 + \|w^1\|^2 \right)^2 \frac{1}{\alpha} \left(e^{\alpha t} - 1 \right) e^{-\alpha t} \right\}.
\end{aligned}$$

Finalement, on trouve :

$$\|w_x(\cdot,t)\|^2 + \|w_t(\cdot,t)\|^2 \le K_3 \left\{ e^{-\alpha t} \left(\|w_x^0\|^2 + \|w^1\|^2 \right) + \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} \left(\|w_x^0\|^2 + \|w^1\|^2 \right)^2 \right\}.$$

On a le théorème si on prend

$$K = \max\left(K_1, K_2, K_3 \right).$$

■

Bibliographie

[1] G. Allaire, S. Gaubert, O. Pantz, *Analyse numerique et optimisation, Une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique : Exercices Corriges*, Ecole Polytechnique ; 2006. Link : http ://www.cmap.polytechnique.fr/~allaire/map431/corrections.

[2] G. Chen. 1979 .*Controle and stabilisation for the wave aquation in a bounded domain* SIAM J .Control Optim.,17 :66-81.

[3] L.C. Evans. 1998, *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[4] M. Gugat, *Optimal boundary control and boundary stabilization of hyperbolic systems.* Birkhäuser ; 2015.

[5] M. Hancock. *Linear Partial Differential Equations.* MIT OpenCourseWare. Link : https ://ocw.mit.edu/courses/18-303-linear-partial-differential-equations-fall-2006/

[6] J. L. Lions. 1968. *Contrôle Optimale des Systèmes Gouvernés par les Equations aux Dérivées Partielles.* Dunod, Gauthiers-villars, Paris.

[7] J. L. Lions et E. Magenes. 1968. *Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications.* Vol. *1.* Dunod, Paris.

[8] S. Salsa (2008), *Partial Differential Equations in Action.* From Modelling to Theory, Springer Verlag Italy.

ملخــص:

في هذا العمل، قمنا بدراسة استقرار خيط مهتز بواسطة تخميد داخلي، خطي أو غير خطي. لنبرهن الاستقرار، استخدمنا عدة طرق مثل: تكاملات الطاقة، سلاسل فورييه، وطريقة تعتمد على توطئة Gronwal، وتقنية تكرارية.

الكلمات المفتاحية: معادلة الموجة المخمدة، تقديرات الطاقة، التخامد الأسي.

Abstract:

In this work, we study the stabilization of a vibrating string a linear or a nonlinear internal damping. To show the stability, we use several techniques such as the energy integrals, Fourier series, a method based on Gronwal's lemma, and an iteration technique.

Keywords: Damped wave equation, energy estimates, exponential stability.

Résumé:

Dans ce travail, nous étudions la stabilisation d'une corde vibrante par un amortissement interne linéaire ou non linéaire. Pour montrer la stabilité, nous utilisons plusieurs techniques telles que les intégrales d'énergie, les séries de Fourier, une méthode basée sur le lemme de Gronwal et une technique d'itération.

Mots clés : équation d'onde amortie, estimations d'énergie, stabilité exponentielle.