UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAFDE M'SILA
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse mathématique et numérique
Par

Bourouis Dounya

Sujet

Sur les permutations des fonctions ''couts'' dans un espace vectoriel sur $\mathbb{R}^n$

Devant le jury :

Mr. Selt Omar	M.C.A. Univ de M'sila	Encadreur
Mr. Gagui Bachir	M .C.A. Univ de M'sila	Président
Mr. Dilmi Mustapha	M .C.B. Univ de M'sila	Examinateur

Promotion : 2019 / 2020

Remerciements

En préambule à ce mémoire, j'adresse ces quelques mots pour remercier notre Dieu tout puissant pour exprimer ma reconnaissance envers sa grande générosité. Dieu m'a donné la volonté, la patience, la santé et la confiance durant toutes mes années d'études.

Je tiens à remercier particulièrement mon directeur de thèse Monsieur **SELT Omar**, pour tout l'aide qu'il ma apporté et leur patience, leurs conseils et pour avoir guidé ce travail avec beaucoup d'intérêt.
Je lui suis également reconnaissant
pour la confiance qu'il ma accordée.
Ma sincère reconnaissance à tous les membres du jury pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de présider et examiner ce travail.
Je souhaite aussi adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leurs aides et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire.
En effet, je voudrai remercier ma famille, mon encadreur et tous ceux qui ont participé de prés ou de loin à la réalisation de ce mémoire.
Également, un remerciement à tous mes collègues de promotion 2020 pour les bons moments qui nous avons passé ensemble.
Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, qui m'ont toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.
Merci à tous et à toutes.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

-A mes parents ma mère et mon pére.

- A mes soeurs

-A mes frères.

-A toute la famille.

-A toute mes amies.

- Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion,

En fin je dédie ce mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

Table des matières

Introduction

La notion permutation de groupe joue un rôle fondamental en mathématiques. C'est l'une des principales structures algébriques, avec celles d'anneau, de corps, modules, et espaces vectoriels. Elle formalise les propriétés de plusieurs des opérations bien connues entre des objets mathématiques divers. Bref, c'est l'une des notions les plus intéressantes parmi celles élaborées par les

mathématiciens.

Notre thèse se compose de trois chapitres :

Le premier chapitre aborde des notions sue les espaces vectoriel, défénition et théorèmes.

Le deuxième chapitre nous présentons les permutaions des groupes.

Le troixième chapitre est consacré quelque exemples sur les permutaion de coûts.

Chapitre 1

Espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

1.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'introduire les espaces vectoriels et de revoir en détail les opérations elémentaires associées à l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. La matière dans cette

section est presentée dans le livre Analyse de Stewart. En revanche, notre cadre conceptuel sera un peu plus large.

1.2 Espace $\mathbb{R}^n$

L'ensemble $\mathbb{R}^n$ est défini comme l'ensemble des n-tuplets ordonnés $(x_1, ..., x_n)$ de nombres réels. Ces n-tuplets sont appelés points de $\mathbb{R}^n$. En même temps onpeut interpréter l'ensemble $\mathbb{R}^n$ comme espace vectoriel de dimension n.

1.3 Espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

Notation 1.3.1 *Une autre représentation des éléments de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est donnée par des vecteurs-colonnes á n composantes au lieu des n-tuplets $(x_1, ..., x_n)$. On les note*

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

ou surmontés d'une flèche $x = \overrightarrow{x}$. À chaque n-tuplet correspond un unique vecteur-colonne et vice versa. Pour le calcul nous utilisons généralement des vecteurs-colonnes pour les éléments de $\mathbb{R}^n$ et les deux notations pour les argumentsdes fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ en raison d'une meilleure lisibilité du texte.

Espace vectoriel. L'ensemble $\mathbb{R}^n$ peut également être considéré comme un espace vectoriel réel muni d'une addition

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

et d'une multiplication avec un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ définie par

$$\lambda x = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ . \\ . \\ . \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

1.4 Sous espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

Définition 1.4.1 *Soit $F \subset \mathbb{R}^n$. On dit que F est un sev si :*

$\cdot F$ est non vide.

$\cdot x, y \in F \Rightarrow x + y \in F.$

$\cdot x \in F$ et $\lambda \in R \Rightarrow \lambda x \in F.$

Définition "condensée" equivalente : F sev si

F est non vide.

$x, y \in F$ et $\lambda \in R \Rightarrow x + \lambda y \in F.$

On peut retenir que : F sev si F non vide et F **stable** par addition et multiplication externe.

Dans $\mathbb{R}^2$, les vecteurs portés par une droite ont une structure de sev.

Dans $\mathbb{R}^2$, l'espace entier $\mathbb{R}^2$ est un sev.

Dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs portés par un plan forment un sev.

1.5 Combinaison linéaire

On appelle combinaison linéaire de deux vecteurs u et v, tout vecteur qui s'écrit $\lambda u + \mu v$ avec λ et μ des nombres réels.

Traduction : tout vecteur qui s'écrit "un peu" de u + un "peu" de v est combinaison linéaire de u et v. Cette définition se généralise à une famille finie de vecteurs.

1.5.1 Image d'une application linéaire

Soit f : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire. On rappelle quel'image de f est l'ensemble suivant :

$$Im(f) = f(\mathbb{R}^n) = \{f(x)\ ;\ x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^m.$$

Proposition 1.5.1 *$Im(f)$ est un sev de $\mathbb{R}^m$*

Remarque 1.5.1 *Lorsque $Im(f) = \mathbb{R}^m$, on dit que f est **surjective**.*

1.5.2 Noyau d'une application linéaire

Soit f : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire. On rappelle que le noyau de f est l'ensemble suivant :

$$Ker(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \;;\; f(x) = 0\} \subset \mathbb{R}^n.$$

(Attention ici le 0 est le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$)

Proposition 1.5.2 *$Ker(f)$ est un sev de $\mathbb{R}^n$*

Remarque 1.5.2 *Lorsque $Ker(f) = \{0\}$, on dit que f est* ***injective.***

1.6 Famille libre, génératrice. Base et notion de dimension

Famille Libre (linéairement indépendante) :

Définition 1.6.1 *Une famille de vecteurs $(v_1, v_2, ..., v_p)$ est dite libre (ou linéairement indépendante) si pour tout p-uplets de réels λ_1,λ_2, . . . , λ_p on a :*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_p v_p = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_p = 0$$

Traduction : : une famille de vecteurs est libre si **aucun des vecteurs ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres**.

Une famille non libre est dite **liée**. Ce qui signifie qu'il existe (au moins) un vecteur qu'on peut écrire comme combinaison linéaire des autres.

Méthodes : Comment montrer dans la pratique la liberté d'une famille $(\mathrm{v}_i)_i$?

- Soit on "voit" une relation de dépendance triviale (famille liée).

- Soit on trouve que tous les λ_i sont nuls, et la famille est donc libre.

- Soit on trouve qu'il existe des solutions au système avec les λ_i non tous nuls et la famille est liée.

Par exemple $\{(1,1,1),(0,1/2,3/2)\}$ est une famille libre car si $\lambda(1,1,1)+\mu(0,1/2,3/2) = (0,0,0)$, ceci entraîne que $\lambda = 0, \lambda+1/2\mu = 0, \lambda+3/2\mu = 0$; les deux premières équations suffisent pour imposer que $\lambda = \mu = 0$. Par contre $\{(1,\ 1,1),(0,1/2,3/2),(1,2,4)\}$ est liée car $1(1,1,1)+2(0,1/2,3/2)+(-1)(1,2,4) = (0,0,0)$ avec des coefficients qui ne sont pas tous nuls (ils sont même tous non nuls).

Noter qu'une famille qui contient $\overrightarrow{0}$ est toujours liée.

Définition d'une famille génératrice :

Définition 1.6.2 *Soit U une partie de $\mathbb{R}^n$ et $(v_1, v_2, ..., v_p)$ une famille de vecteurs. On dit que la famille $(v_1, v_2, ..., v_p)$ est génératrice dans$U$ (ou génére$U$) si tout vecteurs de U s'écrit comme combinaison linéaire des v_i.*

$$ie : \forall u \in U, \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p \in \mathbb{R},\ u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_p v_p.$$

Si on note $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, ..., v_p) = \{\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+...+\lambda_p v_p, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p \in \mathbb{R}\}$, la définition peut alors s'énoncer ainsi : $(v_1, v_2, ..., v_p)$ génére U si $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, ..., v_p) = U$.

Méthodes : Comment montrer dans la pratique qu'une famille (vi)i génére une partie U ?

- On prend un vecteur quelconque $u \in U$ et on cherche à écrire$u$ comme combinaison linéaire des v_i. Pour cela, on résoud lesystème $\sum_i \lambda_i v_i = u$ d'inconnues les λ_i.

- Soit, on trouve des λ_i solutions pour tout u de U et la famille est génératrice de U.

- Soit, il existe un ou (des) u de U pour lequel le système n'admet pas de solutions et la famille n'est pas génératrice.

Par exemple la famille $\{(1,1,1),(1,2,3)\}$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$ car on a vu plus haut que $(1,2,4)$ (entre autres) n'est pas combili de ces vecteurs.

Par contre $\{(1,1,1),(1,2,3),(1,2,4)\}$ est génératrice ca étant donné un vecteur quelconque(a,b,c) $\in \mathbb{R}^3$, on peut trouver des coefficient

λ, μ, ν tels que $(a,b,c) = \lambda(1,1,1) + \mu(1,2,3) + \nu(1,2,4)$. En effet pour obtenir ceci il faut et il suffit que

$$\lambda + \mu + \nu = a$$
$$\lambda + 2\mu + 2\nu = b$$
$$\lambda + 3\mu + 4\nu = c$$

En résolvant ces équations on trouve :

$$\lambda = 2a - b \ \mu = -2a + 3b - c$$

$\nu = a - 2b + c$

Ainsi par exemple le vecteur $(0,1,2)$ est combili de $(1,1,1)$, $(1,2,3)$, $(1,2,4)$ avec les coefficients $\lambda = -1$, $\mu = 1$, $\nu = 0$.

Définition d'une base :

Définition 1.6.3 *Soit U un sev de $\mathbb{R}^n$. Une famille $(v_1, v_2, ..., v_p)$ est une base de U si cette famille est à la fois génératrice dans U et libre.*

Remarque 1.6.1 *Si $U = \mathbb{R}^n$, On va voir que l'on a "forcément" $p = n$.*

Par exemple la famille $\{(1,1,1),(1,2,3),(1,2,4)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Eneffet nous avons déjà vu que c'était une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$; de plus le calcul que nous avons fait des coefficients λ, μ, ν qui permettent d'obtenir (a,b,c) comme combili de ces vecteurs montre en particulier que pour obtenir $(0,0,0)$, il faut que les coefficients soient nuls ; par conséquent cette famille est aussi libre.

Remarquons que d'après nos conventions, la famille vide $\varnothing$ est une base de l'espace vectoriel $\{\overrightarrow{0}\}$ qui ne contient qu'un élément.

Dimension d'un sev :

Définition 1.6.4 *Soit U un sev de $\mathbb{R}^n$ et $B =$ une base de U. Le nombre p s'appelle la dimension de U et on le note $dim(U)$.*

C'est le cardinal (le nombre) de vecteurs d'une base de U.

Remarque 1.6.2 *Cette définition soulève une question de bon sens : est ce que toutes les bases de U ont le même nombre de vecteurs ?*

Réponse : *oui et la définition précédente a donc un sens.*

$\cdot dim(\mathbb{R}^2) = 2$

$\cdot dim(\mathbb{R}^3) = 3$

$\cdot dim(\mathbb{R}) = 1$

$\cdot dim(\mathbb{R}^n) = n$

Quelques propriétés de la dimension :

Proposition 1.6.1 *Soit U un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ dimension d.*

-Toute famille génératrice de U possède au moins d vecteurs.

-Toute famille libre de U possède au plus d vecteurs.

-Toute base est composée de d vecteurs.

1.7 Retour sur les applications linéaires, Théorème du rang

1.7.1 Théorème du rang

Théorème (TDR)

Soit U un sev de $\mathbb{R}^n$ et une application linéaire $f : U \to \mathbb{R}^m$.

Alors, on a :

$$dim(U) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f)).$$

-Attention, dans le membre de gauche, c'est la dimension de l'espace de départ qui intervient...

-On appelle **rang** de f le nombre $dim(Im(f))$ et on le note $rg(f)$.

1.7.2 Quelques conséquences, utilité du TDR

Conséquences, utilité :

f une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Alors, on a :

$$f \ injective \Leftrightarrow f \ surjective \Leftrightarrow f \ bijective.$$

1.7.3 Systèmes linéaires et applications linéaires

Définition 1.7.1 *Une application $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ définie par $f(x_1, ..., x_p) = (y_1, ..., y_n)$ est dite une application linéaire si*

$$\left\{ \begin{array}{c} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p \\ ... \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{np}x_p \end{array} \right\}$$

En notation matricielle, on a

$$f = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} \\ & & . & \\ & & . & \\ & & . & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_p \end{pmatrix}$$

ou encore, si on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_p \end{pmatrix}$ et $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$la matrice (a_{ij}),

$$f(X) = AX.$$

Autrement dit, une application linéaire $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ peut s'écrire $X \to AX$. La matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ est appelée la matrice de l'application linéaire f.

• On a toujours $f(0, ..., 0) = (0, ..., 0)$. Si on note 0 pour le vecteur nul dans $\mathbb{R}^p$ et aussi dans $\mathbb{R}^n$, alors une application linéaire vérifie toujours$f(0) = 0$.

• Le nom complet de la matrice A est : la matrice de l'application linéaire f de la base canonique de $\mathbb{R}^p$ vers la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 1.7.1 *La fonction$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par*

$$\left\{ \begin{array}{c} y1 = -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 7x_4 \\ y2 = 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 \\ y_3 = 7x_1 - 3x_2 + 9x_3 \end{array} \right\}$$

s'exprime sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 & -7 \\ 4 & 2 & -3 & 3 \\ 7 & -3 & 9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

• Pour l'application linéaire identité $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,$(x_1, ..., x_n) \to (x_1, ..., x_n)$, sa matrice associée est l'identité I_n (car$I_n X = X$).

• Pour l'application linéaire nulle $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}n$, $(x_1, ..., x_p) \to (0, ..., 0)$, sa matrice associée est la matrice nulle $0_{n,p}$ (car $0_{n,p}X = 0$).

Chapitre 2

Groupe de permutations

2.1 groupes

Définition 2.1.1 *: c'est un ensemble G muni d'une loi de composition interne associative et possédant un élément neutre. de plus, tout élément de G admet un symétrique pour cette loi. La loi d'un groupe est notée, sauf exception, multiplicativement. Le neutre de G est noté en général e_G ou e, le symétrique de x est noté x^{-1} ; il est aussi alors appelé inverse.*

2.2 Sous-groupes

Définition 2.2.1 *Soit G un groupe. On dit qu'un sous-ensemble H de G est un sous-groupe de G lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) L'ensemble H n'est pas vide.

(ii) Pour tous a et b de H, le produit ab est aussi dans H.

(iii) Pour tout a de H, l'inverse a^{-1} de a est aussi dans H.

Proposition 2.2.1 *soit G un groupe. Un sous-ensemble H de G est un sous-groupe de G si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) L'ensemble H n'est pas vide.

(iv) Pour tous a et b de H, le produit ab^{-1} est aussi dans H.

2.3 Le groupe symétrique

2.3.1 Groupe des permutations d'un ensemble

• On rappelle que si E est un ensemble non vide, une permutation de E est une bijection de$E$ sur E et que si l'on note $S(E)$ l'ensemble des permutations de E, alors $(S(E), \circ)$ est un groupe.

• Id_E est une permutation de$E$. La composée de deux permutations de E est une permutation de E. La réciproque d'une permutation de E est une permutation de E. De plus,

$\forall(\sigma\ ,\ \sigma\prime) \in (S(E))^2$, $(\sigma \circ \sigma\prime)^{-1} = \sigma\prime^1 \circ \sigma^{-1}$ et $(\ \sigma - 1)^{-1} = \sigma$.

• On démontrera dans le chapitre « Dénombrement » que si E est un ensemble fini non vide ayant n éléments, il y a un nombre fini de permutations de E et ce nombre de permutations est $n!$. On peut admettre momentanément ce résultat.

2.3.2 Le groupe symétrique

On se place maintenant dans le cas particulier où $E = [1, n]$ n étant un entier naturel non nul donné. Dans ce cas,l'ensemble $S(E)$ se note S_n (S_n est donc l'ensemble des permutations de l'ensemble $[1, n]$). On peut énonce

Théorème 2.3.1 $(S_n, \circ)$ *est un groupe fini de cardinal* n!

Une permutation donnée de $[1, n]$ se note $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}$ ou plus simplement $\sigma = (\ \sigma(1)\ \ \sigma(2)\ \ ...\ \ \sigma(n)\ )$.

Ainsi, $\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 4\,1\,3\,5\,2 \end{pmatrix}$ ou plus simplement $\sigma = (\ 4\ \ 1\ \ 3\ \ 5\ \ 2\ )$ est la permutation $[1, 5]$ définie par :

$\sigma(1) = 4, \sigma(2) = 1, \sigma(3) = 3, \sigma(4) = 5$ et $\sigma(5) = 2$.

Pour composer deux permutations σ etσ', nous écrirons $\sigma \circ \sigma' = (\sigma(1) \quad \sigma(2) \quad ... \quad \sigma(n)) \circ (\ \sigma'(1) \quad \sigma'(2) \quad ... \quad \sigma'(n))$. Ainsi, la deuxième permutation écrite est la première effectuée et la composée (ou le produit) de permutations se lit de droite à gauche. Par exemple, si $\sigma = (4 \ \ 1 \ \ 3 \ \ 2)$ et $\sigma' = (2 \ \ 3 \ \ 4 \ \ 1)$,

$$\sigma \ \circ \ \sigma' \ = \ 4 \ \ 1 \ \ 3 \ \ 2 \ \circ \ 2 \ \ 3 \ \ 4 \ \ 1 = 1 \ \ 3 \ \ 2 \ \ 4$$

car par exemple, $\sigma \circ \sigma'(1) = \sigma(\sigma'(1)) = 1$.

- $S1 = S([1, 1])$ est un singleton : $S1 = (Id_1)$.

- $S2 = S([1, 2])$ est constitué de deux éléments : l'identité et la permutation (2 1). La permutation (2 1) échange de position les deux éléments 1 et 2 et est appelée la transposition 2 1 . Elle se note $\tau_{1,2}$ (ou aussi $\tau_{2,1}$). les transpositions seront étudiées à la section suivante.

Ainsi, $S2 = \left(Id_{\{1,2\}}, \tau_{1,2}\right)$ ou plus simplement $S2 = \{Id, \tau_{1,2}\}$. On peut donner la « table de Pythagore » du groupe $(S_2, \circ)$:

$\curvearrowright \circ$	Id	$\tau_{1,2}$
Id	Id	$\tau_{1,2}$
$\tau_{1,2}$	$\tau_{1,2}$	Id

Ligne 3, colonne 2, du tableau, on a écrit la composée de la permutation$\sigma = \tau_{1,2}$ écrite dans la ligne 3, colonne 1, par la permutation $\sigma' = Id$ écrite à la ligne 1, colonne 2 ou encore ligne 3, colonne2, du tableau, on a écrit $\sigma \circ \sigma' = \tau_{1,2} \circ Id = \tau_{1,2}$. On note que le groupe $(S_2, \circ)$ est un groupe commutatif.

- $S3 = S([1, 1])$est constitué de six éléments. Il y a déjà l'identité et les trois transpositions$\tau_{1,2}, \tau_{1,3}$ et $\tau_{2,3}$. Il faut ajouter les deux **permutations circulaires** $c1 = (2\ 3\ 1)$ et $c2 = (3\ 1\ 2)$. Les permutations circulaires seront étudiées plus loin.

Ainsi, $S3 = \{Id, \tau_{1,2}, \tau_{1,3}, \tau_{2,3}, c_1, c_2\}$. Pour dresser la table de Pythagore du groupe$(S_3, \circ)$, ce qui nécessite à priori$6 \times 6 = 36$ calculs, un petit nombre de calculs explicites sont suffisants pour remplir cette table.

- Déjà, Id est élément neutre ce qui permet déjà de remplir 11 cases. - La réciproque d'une transposition est elle même et d'autre part $c_2 = (c_1)^{-1}$, ce qui permet de remplir 5 cases de plus.

- Ensuite, dans une ligne donnée (ou une colonne donnée) un même élément de $S3$ ne peut se répéter deux fois car $\sigma \circ \sigma\prime = \sigma \circ \sigma\prime\prime \Rightarrow \sigma\prime = \sigma\prime\prime$ (ou $\sigma\prime \circ \sigma = \sigma\prime\prime \circ \sigma \Rightarrow \sigma\prime = \sigma\prime\prime$). Dans une ligne d'une permutation σ du tableau (ou dans une colonne), on retrouve donc une fois et une seule chaque élément de S_3. On dit que la table du groupe fini $(S_3, \circ)$ est un « carré latin ».

- Il ne reste donc à calculer explicitement que deux produits de deux transpositions distinctes et deux produits d'une transposition par une permutation circulaire.

$\tau_{1,2} \circ \tau_{1,3} = (2\ \ 1\ \ 3) \circ (3\ \ 2\ \ 1) = (3\ \ 1\ \ 2) = c2$, $\tau_{1,3} \circ \tau_{1,2} = (3\ \ 2\ \ 1) \circ (2\ \ 1\ \ 3) = (2\ \ 3\ \ 1) = c1$, en composant à gauche par $\tau_{1,2}$, on obtient $\tau_{1,2} \circ \tau_{1,3} = c2 \Rightarrow \tau_{1,2} \circ c2 = \tau_{1,3}$ et en composant à droite par $\tau_{1,3}$, on obtient $c2 \circ \tau_{1,3} = \tau_{1,2}$. Tout le reste s'en déduit.

$\curvearrowright \circ$	Id	$\tau_{1,2}$	$\tau_{1,3}$	$\tau_{2,3}$	$c1$	$c2$
Id	Id	$\tau_{1,2}$	$\tau_{1,3}$	$\tau_{2,3}$	$c1$	$c2$
$\tau_{1,2}$	$\tau_{1,2}$	Id	$c2$	$c1$	$\tau_{2,3}$	$\tau_{1,3}$
$\tau_{1,3}$	$\tau_{1,3}$	$c1$	Id	$c2$	$\tau_{1,2}$	$\tau_{2,3}$
$\tau_{2,3}$	$\tau_{2,3}$	$c2$	$c1$	Id	$\tau_{1,3}$	$\tau_{1,2}$
$c1$	$c1$	$\tau_{1,3}$	$\tau_{2,3}$	$\tau_{1,2}$	$c2$	Id
$c2$	$c2$	$\tau_{2,3}$	$\tau_{1,2}$	$\tau_{1,3}$	Id	$c1$

On note que le groupe (S_3,$\circ$) n'est pas commutatif. De manière générale, si $n > 3$, le groupe (S_n,$\circ$) n'est pas commutatif.

En effet, $\tau_{1,2} \circ \tau_{1,3} = (2\ 134\ ...n) \circ (3\ 214...n) = (3124...n)$et $\tau_{_{1,3}} \circ \tau_{_{1,2}} = (3\ \ 2\ \ 1\ \ 4\ ...\ n) \circ (2\ \ 1\ \ 3\ \ 4\ ...\ n) = (2\ \ 3\ \ 1\ \ 4\ ...\ n)$. Donc,$\tau_{1,2} \circ \tau_{_{1,3}} \neq \tau_{1,3} \circ \tau_{1,2}$.

2.4 Décomposition d'une permutation en produit de transpositions

2.4.1 Transpositions

Définition 2.4.1 *Soit $n \geq 2$. Une transposition de $[1, n]$ est une permutation de $[1, n]$ qui échange deux éléments distincts de $[1, n]$ en fixant les autres éléments de $[1, n]$.*

Critère 2.4.1 ***Définition 2.4.2*** *Soit $(i, j) \in [1, n]^2$ tel que $i \neq j$. La transposition qui échange i et j se note $\tau_{i,j}$. Elle est définie par :*

$$\tau_{i,j}(i) = j,\ \tau_{i,j}(j) = i \quad et \quad \forall\ k \notin \{i, j\},\ \tau_{i,j}(k) = k.$$

Définition 2.4.3 *Un premier résultat immédiat est :*

Théorème 2.4.1 *Soit $n \geq 2$. Pour toute transposition τ de $[1, n]$, $\tau \circ \tau = Id_{[1,n]}$ ou encore $\tau^{-1} = \tau$.*

2.4.2 Décomposition d'une permutation en produit de transpositions

Le principal intérêt des transpositions est que toute permutation est une composée de transpositions. On peut parvenir à une permutation quelconque donnée par échanges de positions successifs de deux éléments :

Théorème 2.4.2 *Soit $n \geq 2$. Toute permutation σ de $[1, n]$peut s'écrire comme un produit de transpositions.*

Preuve. On montre le résultat par récurrence. ■

• $S2 = \{Id, \tau_{1,2}\}.Id = \tau_{1,2} \circ \tau_{1,2}$ et $\tau_{1,2}$ est une transposition et donc un produit de une transposition.

• Soit $n \geq 2$. Supposons le résultat pour n. Soit $\sigma \in S_{n+1}$.

- Si $\sigma(n+1) = n+1$, la restriction de σ à $[1, n]$ réalise une permutation de $[1, n]$ que l'on note $\widetilde{\sigma}$. Vérifions le. L'image par $\widetilde{\sigma}$ d'un élément de $[1, n]$ est un élément de $[1, n+1]$ qui n'est pas $n+1$. Donc, $\widetilde{\sigma}$ est bien une application de $[1, n]$ dans lui-même. $\widetilde{\sigma}$ est injective car σ l'est. Enfin, tout élément de $[1, n]$ a un antécédent par σ dans $[1, n+1]$ qui n'est pas $n+1$ ou encore tout élément de $[1, n]$ a un antécédent par $\widetilde{\delta}$ dans $[1, n]$ et $\widetilde{\delta}$ est surjective. Finalement, $\widetilde{\delta}$ est une permutation de $[1, n]$.

Par hypothèse de récurrence, $\widetilde{\delta}$ est un produit de transpositions $\widetilde{\tau}_1, ..., \tau_k$ de $[1, n]$. On prolonge ces transpositions à $[1, n+1]$ en posant pour tout $i \in [1, k]$, $\tau_i(n+1) = n+1$ et on obtient des transpositions $\tau_1, ..., \tau_k$ de $[1, n+1]$ telles que $\sigma = \tau_1 \circ ... \circ \tau_k$.

- Si $\sigma(n+1) \neq n+1$, soit $i = \sigma(n+1) \in [1, n]$ puis $\sigma\prime = \tau_{i,n+1} \circ \sigma$. $\sigma\prime$ est une permutation de$[1, n+1]$ qui fixe $n+1$. D'après le cas précédent, il existe des transpositions$\tau_1, ..., \tau_k$ telles que $\tau_{i,n+1} \circ \sigma = \sigma\prime = \tau_1 \circ ... \tau_k$. Mais alors, $\sigma = \tau_{i,n+1} \circ \tau_1 \circ ... \tau_k$.

Le résultat est démontré par récurrence.

La démonstration précédente fournit une démarche pratique pour décomposer une permutation en produit de transpositions. On fixe petit à petit les éléments de $[1, n]$, en commençant par n puis en descendant, en composant à gauche par des transpositions.

Considérons par exemple $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 1 & 7 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

• $\sigma(7) = 4$ et donc $\tau_{4,7} \circ \sigma(7) = \tau_{4,7}(4) = 7$.

Plus précisément, $\tau_{4,7} \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 1 & 7 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 6 & 3 & \mathbf{7}\end{pmatrix}$

• $\tau_{3,6} \circ \tau_{4,7} \circ \delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 6 & 4 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

• $\tau_{3,5} \circ \tau_{3,6} \circ \tau_{4,7} \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} =$
$\tau_{1,3}$.

Ainsi, $v_{3,5} \circ \tau_{3,6} \circ \tau_{4,7} \circ \sigma = v_{1,3}$. On en déduit que $\tau_{4,7} \circ \tau_{3,6} \circ \tau_{3,5} \circ \tau_{3,5} \circ \tau_{3,6} \circ \tau_{4,7} \circ \sigma = \tau_{4,7} \circ \tau_{3,6} \circ \tau_{3,5} \circ \tau_{1,3}$ et donc

$$\sigma = \tau_{4,7} \circ \tau_{3,6} \circ \tau_{3,5} \circ \tau_{1,3}.$$

2.5 Signature d'une permutation

2.5.1 Définition de la signature

Définition 2.5.1 *Soient $n \geq 2$ puis $\sigma \in S_n$.*

La signature de δest $\varepsilon(\sigma) = \pi_{\ 1\leq i<j\leq n}\ \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$.

Convention. Si $n = 1$, $S1 = \{Id_{\{1\}}\}$ et on pose $\varepsilon(Id_{\{1\}}) = 1$.

Exemple 2.5.1 *Si* $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ *,alors*

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma) &= \tfrac{2-4}{1-2} * \tfrac{2-3}{1-3} * \tfrac{2-1}{1-4} * \tfrac{4-3}{2-3} * \tfrac{4-1}{2-4} * \tfrac{3-1}{3-4} \\ &= (-1)^4 \tfrac{(1-2)(1-3)(1-4)(2-3)(2-4)(3-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)(2-3)(2-4)(3-4)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

2.5.2 Inversions d'une permutation. Calcul de la signature

Définition 2.5.2 *Soient $n \geq 2$ puis $\sigma \in S_n$.*

Une inversion de σ est une paire $\{i, j\}$ d'éléments de $[1, n]$ telle que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Exemple 2.5.2 *si* $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ *, alors σ a 4 inversions, les paires*$\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$ *et* $\{3, 4\}$*. Pour obtenir rapidement ces inversions, on a regardé les nombres de la* *deuxième ligne en commençant par la gauche.* $2 = \delta(1)$ *est strictement plus petit que* $4 = \delta(2)$ *et* $3 = \delta(3)$ *et donc les paires* $\{1, 2\}$*et* $\{1, 3\}$ *ne sont pas des inversions. Par contre,* $2 > 1 = \sigma(4)$ *et* $\{1, 4\}$ *est une inversion de* σ*. Puis on passe à* $4 = \sigma(2)$ *en regardant toujours à droite.* $\sigma(2) = 4 > 3 = \delta(3)$*et donc* $\{2, 4\}$ *est une inversion ...*

Théorème 2.5.1 *Soient* $n \geq 2$ *puis* $\sigma \in S_n$*.*

La signature de δ *est :* $\varepsilon(\sigma) = (-1)^N$ *où* N *est le nombre d'inversions de* σ*.*

2.5.3 Signature d'une transposition

Théorème 2.5.2 *La signature d'une transposition est* -1

2.5.4 Permutations paires, permutations impaires

Théorème 2.5.3 *Soit* $n \geq 2$*.*

$$\forall (\sigma, \sigma\prime) \in (S_n)^2 \ , \varepsilon(\sigma \circ \sigma\prime) = \varepsilon(\sigma) \times \varepsilon(\sigma\prime).$$

Théorème 2.5.4 *Soient* $n \in N^*$ *puis* $\delta \in S_n$*.*

Si $\sigma = \tau_1 \circ ... \circ \tau_k$, $k \in N^*$, alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^k$. La décomposition de σ en produit de transpositions n'est pas unique mais la parité du nombre de transpositions utilisé est uniquement définie par δ.

Preuve. Soient $n \in N^*$ puis $\sigma \in S_n$. D'après le théorème 2, σ se décompose en un produit de transpositions. Posons donc $\delta = \tau_1 \circ ... \circ \tau_k$ où les τ_i, $1 \leq$ i $\leq$ k, sont des transpositions. ∎

D'après les théorèmes 4 et 5, $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\tau_1 \circ ... \circ \tau_k) = \pi_{i=1}^{k} \varepsilon(\tau_i) = (-1)^k$.

De plus, si $\delta = \tau\prime_1 \circ ... \circ \tau\prime$ l où les $\tau\prime_j$, $1 \leq$ j $\leq$ l, sont des transpositions, alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^l$. Puisque $(-1)^k = (-1)^l$, k et l ont même parité.

Définition 2.5.3 *Soit* $n \geq 1$*.*

Une permutation **paire** (resp. **impaire**) est une permutation de signature 1 (resp. -1).

L'ensemble des permutations paires se note A_n (groupe **alterné**).

Théorème 2.5.5 $\forall n \geq 2, card(A_n) = card(S_n \backslash A_n) = \frac{n!}{2} n!.$

■ **Commentaire.**

■ Par exemple, S_3 est constitué de 6 permutations : Id, les trois transpositions $\tau_{1,2}$, $\tau_{1,3}$ et $\tau_{2,3}$ et les deux permutations circulaires $c1 = (2 \;\; 3 \;\; 1)$ et $c2 = (3 \;\; 1 \;\; 2)$. Il y a trois permutations impaires à savoir les trois transpositions : $S_3 \backslash A_3 = \{\tau_{1,2}, \tau_{1,3}, \tau_{2,3}\}$.

Les trois autres sont donc des permutations paires $A_3 = \{Id, c1, c2\}$.

2.6 Décomposition d'une permutation en produit de cycles à support disjoints

2.6.1 Orbite d'un élément. Cycles. Permutations circulaires

Théorème 2.6.1 *Soit $n \geq \in N^*$. Soit $\sigma \in S_n$.*

Sur $[1, n]$, on définit le relation $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (i, j) \in [1, n]^2, (i \mathbb{R} j \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Z} / j = \sigma^p(i)).$$

$\mathbb{R}$ est une relation d'équivalence sur $[1, n]$.

On sait que les classes d'équivalences modulo une relation d'équivalence sur un ensemble non vide E forment une partition de E. Ici, les classes d'équivalence pour la relation $\mathbb{R}$ du théorème 8 s'appellent les orbites de la permutation σ. Plus précisément,

Définition 2.6.1 *Soit $n \in N^*$. Soit $\sigma \in S_n$.*

Pour $x \in [1, n]$, l'orbite de x sous δ est $O(x) = \left\{\sigma^k(x), k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Un résultat immédiat est :

Théorème 2.6.2 *Soit $n \geq \in N^*$. Soit $\sigma \in S_n$.*

Tout x de $[1, n]$ appartient à une orbite et une seule. Les orbites sous σ forment une partition de $[1, n]$.

Théorème 2.6.3 *Soit $n \geq \in N^*$. Soit $\sigma \in S_n$.*

Pour tout x de $[1, n]$, il existe $p \in N^*$ unique tel que $O(x) = \left\{\sigma^k(x), 0 \leq k \leq p-1\right\}$ et de plus, $\forall (k, l) \in [0, p-1]^2, k \neq l \Rightarrow \sigma^k(x) \neq \sigma^l(x)$.

Exemple 2.6.1 *Reprenons la permutation* $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 1 & 7 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

. Dans l'orbite de l'élément 1, on trouve $\sigma(1) = 5$, puis $\sigma(\sigma(1)) = \sigma(5) = 6$ puis $\sigma^3(1) = \sigma(6) = 3$. On note alors que $\sigma^4(1) = \sigma(3) = 1$. On en déduit que

$$O(1) = \left\{\sigma^k(1), k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{1, \sigma(1), \sigma^2(1), \sigma^3(1)\right\} = \{1, 3, 5, 6\} = O(3) = O(5) = O(6).$$

Ensuite, $\sigma(2) = 2$ et donc pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\sigma^k(2) = 2$. L'orbite de 2 est un singleton : $O(2) = \{2\}$.

Enfin, $\sigma(4) = 7$ et $\sigma^2(4) = 4$. L'orbite de 4 (ou de 7) est $O(4) = \{4, 7\}$.

La permutation σ admet donc trois orbites : $O(1) = \{1, 3, 5, 6\}$, $O(2) = \{2\}$ et $O(4) = \{4, 7\}$. La permutation σ peut alors se décomposer « en trois morceaux» que l'on peut visualiser sur le graphique ci-dessous, graphique qui concrétise l'utilisation du mot orbite :

Dans le cas général, si l'orbite d'un élément x de $[1, n]$ est un singleton, alors $\delta(x) = x$ et réciproquement, si $\delta(x) = x$, alors $O(x) = \{x\}$. Les éléments x de $[1, n]$ tels que

$\delta(x) = x$ sont les points fixes de la permutation δ. Les points fixes de δ sont les éléments de $[1, n]$ dont l'orbite est un singleton.

Définition 2.6.2 *Soit $n \geq 2$.*

Un cycle de $[1, n]$ est une permutation de $[1, n]$ qui admet une orbite et une seule non réduite à un singleton. Le support de ce cycle est son orbite non réduite à un singleton et **la longueur** de ce cycle est le cardinal de son support.

Une permutation circulaire de $[1, n]$ est une permutation de $[1, n]$ qui admet une orbite et une seule ou encore une permutation circulaire de $[1, n]$ est un cycle de longueur n ou encore une permutation circulaire de $[1, n]$ est un cycle de $[1, n]$ sans point fixe.

Remarque 2.6.1 *Les transpositions sont les cycles de longueur 2.*

Exemple 2.6.2 *La permutation $\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est un cycle de support $\{1, 3, 4\}$ et donc de longueur 3, mais n'est pas une permutation circulaire car δ admet 2 pour point fixe. Une permutation circulaire est par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.*

Théorème 2.6.4 *Deux cycles à supports disjoints commutent.*

Par contre, si les supports ne sont pas disjoints, les cycles peuvent ne pas commuter. Par exemple, pour $n \geq 3$, $\tau_{1,2}$ et $\tau_{1,3}$ sont deux cycles de longueur 2 dont les supports $\{1, 2\}$ et $\{1, 3\}$ ne sont pas disjoints. On a $\tau_{1,2} \circ \tau_{1,3} = 312...$ et $\tau_{1,3} \circ \tau_{1,2} = (2 \;\; 3 \;\; 1...)$. Donc, $\tau_{1,2} \circ \tau_{1,3} \neq \tau_{1,3} \circ \tau_{1,2}$.

2.6.2 Décomposition d'une permutation en produit de cycles à support disjoints

On admettra le théorème suivant (qui n'est pas si difficile que ça à démontrer mais dont la démonstration n'est pas exigible) :

Théorème 2.6.5 *Toute permutation distincte de l'identité se décompose de manière unique, à l'ordre près des facteurs, en produit de cycles à supports deux à deux disjoints.*

La décomposition s'obtient en déterminant les orbites. Si on reprend l'exemple de la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 1 & 7 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$,on a $\sigma = c_1 \circ c_2 (= c_2 \circ c_1)$ où c1 est le cycle $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$et c_2 est le cycle $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ (par commodité d'écriture, on n'a pas écrit tous les points fixes).

Une première utilisation de la décomposition d'une permutation σ distincte de l'identité en produit de cycles à supports deux à deux disjoints est le calcul des puissances de σ. A titre d'exemple, si σ est la permutation ci-dessus, calculons σ^{3146}. Puisque c_1 et c_2 commutent, $\sigma^{3146} = c_1^{3146}\, c_2^{3146}$.

Ensuite, l'ordre d'un cycle est sa longueur et donc $c_1^4 = Id$ puis $\forall k \in \mathbb{Z}$, $c_1^{4k} = Id$. De même, $c_2^2 = Id$ et plus généralement, $\forall k \in \mathbb{Z}, c_2^{2k} = Id$. Déjà, $c_2^{3146} = Id$.

Ensuite, $c_1^{3146} = c^{4\times 786+21} = c_1^2$ et finalement,

$$\sigma^{3146} = c_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 2 & 5 & 4 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} .$$

Chapitre 3

Quelque exemples sur les permutations coûts

Dans ce chapitre, nous allons présenté l'étude d'un problème d'ordonnancement sur une machine à n tâches, avec toutes les tâches i sont disponibles au début de l'ordonnanceme.

3.1 Représentation du problème :

Le problème d'ordonnancement des tâches avec contraintes d'indisponibilité de machine se définit de la manière suivante :

- Une machine qui n'est pas disponible pendant M périodes $[s_i\ , t_i]$ tel que $s_i < t_i$ et $t_i < s_{i+1}$ pour $i = 1, 2, 3 \ldots, M-1$ dont les dates et les durées sont fixées et connues à priori.
- La machine ne peut réaliser qu'une tâche à la fois et chaque tâche nécessite une seule machine.
- Toutes les tâches i sont disponibles au début de l'ordonnancement$(r_i = 0)$.
- Les tâches sont caractérisées par :

- Leurs temps de traitement p_i.

- Leurs poids w_i.

- La collection de n taches indépendentes : $J = (1, 2, \ldots\ldots, n)$ où chaque tâche i ne s'exécute qu'une seule fois.

- Les tâches à ordonnancer sont strictement non préemptives, ce qui signifie que l'exécution de toute opération ne peut être interrompue ni par une période d'indisponibilité, ni par la réalisation d'une autre tâche.

L'objectif est de déterminer la séquence d'entrée des tâches sur la machine tel que la somme pondérée des dates de fin des tâches ($\sum w_i C_i$) soit minimale.

le

problème considéré se décrit par le shéma suivant :

3.2 Structure de permutation

La connaissance de l'ensemble des voisins d'une séquence $\delta = (j_1, j_2 \ldots\ldots j_{n-1}, j_n)$ permet d'en sélectionner le meilleur qui apporte une amélioration de la solution.

Parmi les techniques les plus connues on peut citer :

3.2.1 Voisinage par swapping (permutation simple de deux tâches) :

Cette technique est basée sur les deux stratégies suivantes.

a/ La permutation simple de tâches adjacentes : ce type de voisinage consiste à générer $(n-1)$ séquences obtenues par la permutation de l'ordre de traitement de chaque paire de tâches adjacentes dans la séquence initiale.

b/ La permutation simple de deux tâches : cette stratégie consiste à générer $\frac{n(n-1)}{2}$ séquences obtenues par la permutation entre chaque paire de tâches (non nécessairement adjacents) dans la séquence initiale.

Illustration :

Soit : $\delta = (j_1, j_2, j_3......j_n)$ séquence initiale.

Alors la permutation simple deux tâches (adjacentes)

$(j_2, j_1, j_3.......j_{n-1}, j_n)$

$(j_1, j_3, j_2.......j_{n-1}, j_n)$

$(j_1, j_2, j_4.......j_{n-1}, j_n)$

.

.

.

$(j_1, j_{2,}j_3.......j_{n-1}, j_n)$

et la permutation simple de deux tâches (non nécessairement adjacentes).

$(j_2, j_1, j_3.......j_{n-1}, j_n)$

$(j_3, j_2, j_1.......j_{n-1}, j_n)$

$(j_4, j_2, j_3.......j_{n-1}, j_n)$

.

.

.

$(j_1, j_{2,}j_3.......j_{n-1}, j_n)$

Exemple 1 :

Soit une séquence $\delta = (1, 2, 3, 4)$, le voisinage N(δ) est :

$N(\delta) = \{(2, 1, 3, 4), (3, 2, 1, 4), (4, 2, 3, 1), (1, 3, 2, 4), (1, 4, 3, 2), (1, 2, 4, 3)\}$.

Le voisinage par swapping (voir tabeau 01)

tâche i	tâche j	séqeunce obtenu
1	2	$(2, 1, 3, 4)$
1	3	$(3, 2, 1, 4)$
1	4	$(4, 2, 3, 1)$
1	3	$(1, 3, 2, 4)$
2	4	$(1, 4, 3, 2)$
3	4	$(1, 2, 4, 3)$

3.2.2 Le voisinage par insertion de tâche :

on choisi deux positions i et j tel que $i \neq j$ à partir de la séquence courante et déplacer la tâche de la position i et l'insérer dans la position j, et on peut distinguer deux cas possibles : $i < j$ ou $i > j$ (cette stratégie consiste a générer $(n-1)^2$ séquences).

ILLUSTRATION

1^{er} cas $i < j$

$(...., j_i, j_k, j_1, j_m, j_j, ...)$

Après le changement

$(...., j_k, j_1, j_m, j_j, j_i, ...)$

2^{eme} cas $i > j$

séquence courante :

$(...., j_j, j_k, j_1, j_m, j_i, ...)$

après le chargement

$(...., j_i, j_j, j_k, j_1, j_m, ...)$

Exemple 2 :

Soit une séquence $\delta = (1, 2, 3, 4)$

$N(\delta) = \{(2, 1, 3, 4), (2, 3, 1, 4), (2, 3, 4, 1), (1, 3, 2, 4), (1, 3, 4, 2), (3, 1, 2, 4), (1, 2, 4, 3), (4, 1, 2, 3), (1, 4, 2$

Le voisinage par insertion : (voir tableau 02)

$Positiontache$	1	2	3	4
1	$-$	$(2,1,3,4)$	$(2,3,1,4)$	$(2,3,4,1$
2	$(2,1,3,4)$	$-$	$(1,3,2,4)$	$(1,3,4,2)$
3	$(3,1,2,4)$	$(1,3,2,4)$	$-$	$(1,2,4,3)$
4	$(4,1,2,3)$	$(1,4,2,3)$	$(1,4,4,3)$	$-$

Conclusion générale et perspectives

Dans ce travail nous avons exposé plusieurs résultats pour avoir la relation entre permutation et fonction de coût en utilisant espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

Cette combinaison nous a parmis de construire permutation de swapping et permutation de insertion.

Notre but est compredre la permutation dans les fonction de coût.

Bibliographie

[1] **N. BOURBAKI** *: Espace vectoriel topologique, Paris - New York - Barcelone - Mexico - Rio de Janeiro.*

[2] **OURAGH YOUCEF** : Calcul vectoriel, Place centrale de Ben-Aknoun (Alger).

[3] **GEORGES ZAFINDRATAFA, JEAN-MARIE MORVAN** : Espaces vectoriels, Matrices.

[4] **JEAN DELCOURT** : Théorie des groupes

[5] **N. BOURBAKI :** Groupe et algèbre de lie.

[6] **EDMOND BAUER** : Introduction à la théorie des groupes, Annales de L'I. H. P., tome 4, n 1 (1933),p.1 - 170.

[7] **MICHEL COUCOUREUX et THIERRY CUYAUBÉRE** : Calcul et analyse de coûts.

ملخص :

في هذه المذكرة قمنا بدراسة التباديل المذكورة بدالة التكلفة و كمثال على ذلك اقترحنا بعض التباديل) التباديل بالقفز والتباديل باللفق (واعتبرنا صف انتظار الأعمال مثال على ذلك

كلمات مفتاحية :

ناقلات الفضاء , التباديل , التباديل بالقفز, التباديل باللفق

Résumé :

Dans cette mémoire nous avons étude les permutations mentionnées par la fonction de cout et à titre d'exemple nous avons suggéré quelques permutation (permutation par swapping et permutation par insertion) et considère comme exemple l'activité file d'attente

Les mots clé :

Espace vectoriel, permutation, permutation par swapping, permutation par insertion.

Abstract:

In this paper we studied the permutations by the cost function as an example we have suggested some permutation (permutation by swapping and permutation by insertion) and considered the waiting row business an example

Key word:

Vector space , permutation, permutation by swapping , permutation by insertion.