

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE SE L'ENSEIGNEMENTS SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHESCIENTIFIQUE



UNIVRSITE MOHAMED BOUDIAF M'SILA



FACULTE DE MATHEMATIQUE ET DE L'INFORMATIQUE

Filière: Mathématiques

Option: Analyse Mathématique et Numérique

Mémoire de fin d'étude

Présenté pour l'obtention du diplôme de Master

PAR

BOUZINA AMIRA

THEME

Écoulement d'un jet devant un obstacle

Soutenu devant le jury composé de:

GASMI ABDELKADER

Prof Université de M'Sila

Président

BLIZAK TAHAR

MAA Université de M'Sila

Encadreur

GAGUI BACHIR

MCA Université de M'Sila

Examineur

Année universitaire :2021/2022

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remerciements

Avant toute considération, je remercie Allah le tout puissant qui nous a donné la santé, le courage, la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

En second lieu Je remercie ma famille pour leur soutien morale et physiques et encouragement tout au long des mon étude.

Je tiens remercier tout particulièrement mon directeur de mémoire, Monsieur **TAHAR BLIZAK** pour tout les efforts qu'il a fourni pour moi pour aider et faciliter a accomplir mon travail je le remerciens pour ses conseils qui ont rendu ce travail possible. Je lui témoigne enfin ma profonde reconnaissance pour m'avoir fait confiance et pour son soutien constant au cours.

Mes remerciements vont aussi aux membres de jury d'avoir accepté d'examiner et évaluer mon travail et pour l'intérêt qu'ils ont porté mon travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Je remercie également tous les enseignants et les étudiants De faculté de mathématique et d'informatique de l'**université Mohamed Boudiaf** de M'SILA et sans oublier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin notre formation dans cette département.

MERCI

DEDICACE

A Mon très cher père : *BOUZINA LAKHDAR*

A qui je dois tout et pour qui aucune dédicace ne saurait exprimer mon Profond amour, ma gratitude, ni mon infinie reconnaissance pour l'ampleur des sacrifices et de souffrances qu'il a endurée pour pouvoir m'éduquer, pour me voir heureuse. Je souhaite que cette thèse t'apporte la joie de voir aboutir tes espoirs et j'espère avoir été digne de ta confiance. Puisse Dieu te garder et te procurer santé et longue vie.

A Ma très chère Mère : *BAKHTI OUMELKHEIR*

C'est pour moi un jour d'une grande importance, car je sais que tu es à la fois fière et heureuse de voir le fruit de ton éducation et de tes efforts inlassables se concrétiser, puisse Allah m'aider pour rendre un peu soit-il de ce que tu m'as donné, puisse Allah t'accorder santé, bonheur et longue vie.

A Mes sœurs : *SAMAH* et son mari *KAMEL*, *ASMA* et son mari *MOHAMED*, *MBARKA* et son mari *BOUBAKAR*, *IMENE* et son mari *FARES*.

A Mes frères : *SOFIANE* et *BADREDDINE*.

A Mes petits bouts de choux : *MOUHAMED*, *FATIMA*, *AMJAD*, *ABDELKADER*, *MERIEM*, *ISMAHANE*, *MOHAMED IYAD* et *OUMAIMA*.

A Ma deuxième famille : mon père *BACHIR*, ma mère *NACHITA*.

A tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin pour réaliser ce travail.

Table des matières

Introduction	1
1 Notion préliminaires sur la mécanique des fluides	3
1.1 Introduction	3
1.2 Fonction à variable complexe	3
1.2.1 Fonction analytique	3
1.2.2 Fonction harmonique	3
1.2.3 Théorème de Schwartz	4
1.2.4 Les Conditions de Cauchy-Riemann	4
1.2.5 Différentielle totale	4
1.3 Notions préliminaires sur la mécanique des fluides	5
1.3.1 L'écoulement fluide est à deux dimensions	5
1.3.2 Le vecteur vitesse dérive d'un potentiel	5
1.3.3 Type des écoulements	5
1.3.4 Lignes de courant	6
1.3.5 Fonction de courant	7
1.3.6 Fonction potentielle complexe	8
1.3.7 Potentiel complexe des vitesses	9
1.3.8 Exemple	9
1.3.9 Équation de Bernoulli	10
2 Transformations conformes	11
2.1 Introduction	11
2.2 Transformations	11
2.3 Forme complexe d'une transformation	12
2.4 Transformations conformes	12
2.5 Quelques transformations	13
2.5.1 Quelques transformations generales	13
2.6 La transformation de Schwartz-Christoffel	14
2.6.1 Exemple	15
2.7 Représentation sur le Demi -Plan	16
2.8 Transformation hodographe	17
2.9 Jet libre	18

TABLE DES MATIÈRES

ii

2.9.1	Exemple	18
3	solution analytique d'un problème du jet bidimensionne	24
3.1	Position du problème	24
3.2	Résolution du problème	27
3.2.1	la fonction de Kirchhoff	27
	Conclusion	35

Notation

- $\overrightarrow{rot}(v) = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{v}$
- $\text{div}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{v}$
- $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}(x, t)$: la vitesse d'une particule de fluide se trouvant au point repère par le vecteur \overrightarrow{x} à l'instant t .
- $\overrightarrow{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$
- $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$
- $\text{grad}(v) = \nabla \cdot v$
- φ la fonction potentiel de vitesse
- ψ la fonction de courant
- p la pression du fluide
- ρ la densité de fluide
- V la vitesse de fluide
- K courbure de la surface libre
- U la vitesse de référence
- θ l'angle que fait le vecteur vitesse avec l'horizontale

Introduction

La mécanique des fluides est une science qui nécessite beaucoup de mathématique. La connaissance de la fonction de la variable complexe, l'analyse vectorielle, la notation tensorielle et la résolution des équations différentielles. Elle a connu un développement intense au cours des dernières décennies, ce qui n'a pas manqué d'accroître considérablement le nombre des publications consacrées à ses différents aspects. Cet intense développement est aussi bien dans les applications et les problèmes théoriques qui sont ardues même lorsqu'on les traite par ordinateurs. Parmi ces problèmes nous citons les écoulements à surface libre.

Dans la mécanique des fluides les écoulements à surface libre de type jet autour des objets de différentes formes sont étudiés pour leurs applications industrielles et scientifiques. La surface libre est l'interface entre deux fluides non miscible, généralement un liquide et un gaz.

Les premiers travaux dans ce secteur sont caractérisés par l'utilisation de la méthode d'hodographe et de la transformation de Schwartz-Christoffel, qui peuvent traiter les écoulements qui ont une géométrie polygonale.

Dans le présent travail, on se propose d'étudier numériquement un écoulement à surface libre d'un fluide devant un obstacle entre deux plaques horizontales semi-infinies.

L'écoulement est supposé potentiel, bidimensionnel et irrotationnel, le plan des variables $(x; y)$ de l'écoulement est identifié au plan de la variable complexe $z = x + iy$ et l'effet des forces de la tension de surface et de la gravité sont négligées.

Le présente mémoire comporte trois chapitres.

Le premier chapitre présente quelques définitions des fonctions à variable complexe, fonction analytique, équation de Cauchy - Riemann, fonctions harmoniques et notions préliminaires sur la mécanique des fluides.

Dans le deuxième chapitre on a étudié les transformations conformes telles que la transformation d'hodographe et la transformation de Schwarz-Christoffel et quelques exemples et on va présenter le jet libre.

Dans le troisième chapitre on traite le problème dans le cas où la tension de surface

et l'effet de gravité sont négligeables. On utilise la méthode hodographe de Kirchhoff et la transformation de conforme pour obtenir une solution exacte.

Enfin on termine ce travail par une conclusion générale.

Chapitre 1

Notion préliminaires sur la mécanique des fluides

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous apprenons quelques concepts importants et fondamentales sur la mécanique des fluides, on fait un présentation sur l'analyse complexe et quelque propriétés de l'écoulement.

1.2 Fonction à variable complexe

1.2.1 Fonction analytique

Définition 1 Soit Ω est un ouvert de \mathbb{C} et $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$. f est dite holomorphe sur Ω si f est dérivable en tout point de Ω .

Définition 2 Soit Ω est un ouvert de \mathbb{C} et $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$. f est dite Analytique si elle développable en série entière en tout point de Ω .

Proposition 3 Toute fonction Analytique sur Ω est holomorphe sur Ω .

1.2.2 Fonction harmonique

Définition 4 Si les dérivée partielles secondes de u et v par rapport x et à y existent et sont continues dans Ω , alors on peut tirer de (1.1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 v}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 v}{\partial^2 y} = 0 \quad (1.1)$$

On déduit de la que , sous ce conditions , les parties réelles et imaginaires d'une fonction analytique que vérifient l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 y} = 0 \quad \text{ou} \quad \nabla^2 \varphi = 0 \quad (1.2)$$

Les fonctions telles que $u(x, y)$ et $v(x, y)$ qui vérifient l'équation de laplace dans Ω sont appelée fonctions harmoniques .

1.2.3 Théorème de Schwartz

Théorème 5 Si les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont continues au voisinage de (x_0, y_0) alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \quad (1.3)$$

1.2.4 Les Conditions de Cauchy-Riemann

Définition 6 Une condition nécessaire pour que $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ soit analytique dans un ouvert connex Ω est que, dans Ω , u et v vérifient les conditions de Cauchy -Rimman

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.4)$$

Si les dérivées partielles sont continues dans Ω , alors les conditions de Cauchy-Rimman sont des conditions suffisantes pour que $f(z)$ sont analytique dans Ω . Les fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont souvent appelées fonctions conjuguées, si l'on se donne l'une d'enter elle, on peut déterminer l'autre (à une constante additive prés) de telle manière que $f(z) = u + iv$ soit analytique.

1.2.5 Différentielle totale

On appelle différentielle totale de 1^{er} ordre d'une fonction $f(x, y)$ l'expression

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy \quad (1.5)$$

1.3 Notions préliminaires sur la mécanique des fluides

1.3.1 L'écoulement fluide est à deux dimensions

Le modèle d'écoulement de base et les caractéristiques du mouvement du fluide dans n'importe quel plan sont essentiellement les mêmes que dans n'importe quel plan parallèle. Cela nous permet de limiter notre attention à un seul plan que nous prenons pour le plan z . Les figures construites dans ce plan seront considérées comme les sections droites de cylindres infinis à génératrices perpendiculaires au plan considéré.

1.3.2 Le vecteur vitesse dérive d'un potentiel

Si V_x et V_y désignent les composantes de vitesse du fluide à (x, y) selon les axes des x et y , respectivement. Il existe alors une fonction ϕ appelée potentiel de vitesse. Tel que :

$$V_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (1.6)$$

Une hypothèse équivalente est que si C est une simple courbe fermée dans le plan z et V_t désigne la composante tangentielle de la vitesse sur C , alors,

$$\oint_c V_t ds = \oint_c V_x dy + V_y dx = 0 \quad (1.7)$$

L'une ou l'autre des intégrales (1.7) est appelée la circulation du fluide selon C . Lorsque la circulation est nulle, l'écoulement est dit irrotationnel ou libre de circulation.

1.3.3 Type des écoulements

Écoulement permanent

on dit aussi stationnaire, si ses composantes de vitesse sont indépendantes de la variable temps

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (1.8)$$

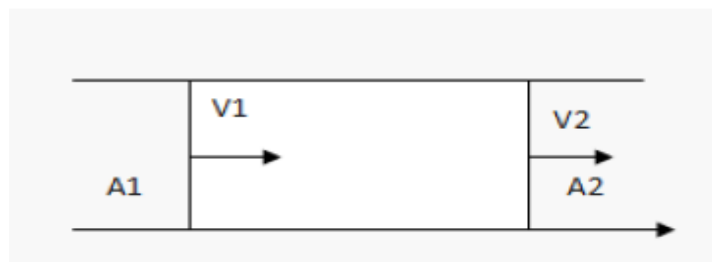
Écoulement incompressible

Un fluide est dit incompressible si le volume de chaque particule fluide ne varie pas au cours de mouvement se traduit par l'équation $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$

Écoulement uniforme

Un écoulement bidimensionnel à surface libre est dit uniforme si l'écoulement de vitesse est constante.

$$A_1 = A_2$$



Représentation de la vitesse dans un écoulement uniforme

Écoulement stationnaire

On appelle écoulement stationnaire ou encore écoulement permanent, un écoulement dont toutes les caractéristiques quantitatives sont indépendantes du temps, en particulier pour la vitesse $\frac{\partial v(x_1, x_2, x_3)}{\partial t} = 0$. Cela signifie simplement que les lignes de courant n'évoluent pas au cours du temps. Il est facile de voir que dans un écoulement stationnaire les lignes de courant sont les mêmes que les trajectoires.

Écoulement irrotationnel

Un écoulement est dit irrotationnel si :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{V}) = 0 \quad (1.9)$$

en tout point du fluide, où $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{V}$ représente le vecteur rotation ou vorticité.

1.3.4 Lignes de courant

Définition 7 La description eulérienne conduit elle aussi à une représentation du champ de vitesse, à un instant t , sous la forme d'une famille de lignes tangentes en chaque point au vecteur vitesse, que l'on appelle lignes de courant. L'équation des

lignes de courant se déduit directement de cette définition en écrivant que : Un petit déplacement \vec{dx} sur la ligne de courant est colinéaire au vecteur vitesse :

$$\vec{V} \wedge \vec{dx} = 0 \text{ soit } \varepsilon_{jk} \vec{V}_j dx_k = 0 \quad (1.10)$$

En explicitant cette relation, on obtient :

$$\begin{cases} V_2 dx_3 - V_3 dx_2 = 0 \\ V_3 dx_1 - V_1 dx_3 = 0 \\ V_1 dx_2 - V_2 dx_1 = 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

Les lignes de courant sont donc les intégrales du système différentiel :

$$\frac{dx_1}{V_1(\vec{x}, t)} = \frac{dx_2}{V_2(\vec{x}, t)} = \frac{dx_3}{V_3(\vec{x}, t)} \quad (1.12)$$

Où t la valeur fixée.

1.3.5 Fonction de courant

Dans un domaine D , on appelle écoulement plan (ou bidimensionnel) si en tout point de ce domaine ,à l'instant t , le vecteur vitesse \vec{V} est parallèle à un plan .

Écrivons

$$\operatorname{div}(\vec{V}) = 0 \quad (1.13)$$

Pour toutes les points de ce domaine

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.14)$$

Cela implique que la forme différentielle $udy - vdx$ est, à t fixé, la différentielle totale d'une certaine fonction ψ :

$$\exists \psi(x, y, t), d(\psi) = udy - vdx \quad (1.15)$$

On a donc immédiatement

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (1.16)$$

ψ s'appelle la fonction de courant, car elle permet un calcul simple des lignes de courant.

les lignes $\psi(x, y, t) = C(t)$ sont les lignes de courant.

De plus, la propriété de l'écoulement irrotationnel pour un écoulement plan entraîne :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \vec{0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u = \partial \psi / \partial y \\ v = -\partial \psi / \partial x \end{pmatrix} = -\partial^2 \psi / \partial^2 x - \partial^2 \psi / \partial^2 y = 0 \quad (1.17)$$

$\Rightarrow \Delta \psi = 0$, ψ vérifie aussi l'équation de Laplace.

1.3.6 Fonction potentielle complexe

Soit un écoulement plan incompressible, irrotationnel d'un fluide parfait. Les fonctions φ et ψ sont reliées dans le domaine de l'écoulement par les relations suivantes :

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (1.18)$$

Si de plus le fluide est incompressible la fonction ϕ vérifie l'équation de Laplace.

Si, en plus, ces deux quantités sont continues, ces relations sont dites de Cauchy Riemann.

Si les dérivées deuxième des fonctions ϕ et ψ existent et continues, on a :

$$\Delta \varphi = \Delta \psi = 0 \quad (1.19)$$

On voit que le potentiel des vitesses est harmonique, i.e. vérifie l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 y} = 0 \quad (1.20)$$

On en déduit qu'il existe une fonction harmonique conjuguée $\psi(x, y)$ tel que

$$\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (1.21)$$

Soit analytique, par dérivation :

$$\frac{d\Omega}{dz} = \Omega'(z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y} = V_x - iV_y \quad (1.22)$$

La vitesse (appelée quelque fois vitesse complexe) est donc donnée par

$$v = V_x - iV_y = \overline{d\Omega/dz} = \overline{\Omega'(z)} \quad (1.23)$$

et a pour module

$$V = |v| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \left| \overline{\Omega'(z)} \right| = |\Omega'(z)| \quad (1.24)$$

Les points pour lesquels la vitesse est nulle, i.e. $\Omega'(z) = 0$, sont appelées points d'arrêt, La fonction $\Omega(z)$ d'importance fondamentale dans la caractérisation d'un écoulement est appelée le potentiel complexe.

1.3.7 Potentiel complexe des vitesses

On introduisons la fonction f telle que :

$$f = \varphi + i\psi \quad (1.25)$$

appelée potentiel complexe des vitesses, qui est reliée à la vitesse complexe par la relation

$$\frac{\partial f}{\partial z} = u - iv \quad (1.26)$$

1.3.8 Exemple

On considère l'écoulement plan défini en variable d'Euler par :

$$u = 2y; v = -2x$$

1) l'écoulement est incompressible car :

$$\operatorname{div}(\vec{U}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

2) l'écoulement n'est pas irrotationnel car :

$$\operatorname{rot}(\vec{U}) = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{e}_z = -4\vec{e}_z \neq \vec{0}$$

donc n'est pas irrotationnel.

3) Fonction de courant ψ est :

$$d\psi = udy - vdx$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v = 2x, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u = 2y$$

On intègre la première équation en x d'où :

$$\psi = x^2 + F(y)$$

avec $F(y)$ fonction arbitraire de y .

On dérive ce résultat par rapport à y et on l'identifie avec la seconde équation : $F'(y) = 2y$ d'où $F(y) = y^2 + k_1$, avec k_1 constante arbitraire.

La fonction de courant est donc

$$\psi = x^2 + y^2 + k_1$$

4) Fonction de potentiel des vitesses ϕ est :

$$d\phi = udx + vdy$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = u = 2y, \frac{\partial\phi}{\partial y} = v = -2x$$

on intègre la première équation en x d'où

$$\phi = 2xy + G(y)$$

avec $G(y)$ fonction arbitraire de y .

On dérive ce résultat par rapport à y et on l'identifie avec la seconde équation : $G'(y) = -2x$ d'où $G'(y) = 0$ et $G(y) = k_2$, avec k_2 constante arbitraire.

La fonction de potentiel est donc

$$\phi = 2xy + k_2$$

1.3.9 Équation de Bernoulli

Le théorème de Bernoulli est une application de la conservation de l'énergie au cas des fluides en mouvement. Dans le cas d'un fluide laminaire visqueux et incompressible, et en négligeant les effets de la gravité, on obtient la relation suivante :

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 \quad (1.27)$$

ou P la pression, $i = 1, 2$

V la vitesse de fluide

ρ la densité de fluide

Si le fluide est non visqueux dans ce cas l'équation de Bernoulli est devenue comme suit :

$$P + \frac{1}{2}\rho V^2 = \text{const} \quad (1.28)$$

Chapitre 2

Transformations conformes

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va présenter une définition sur les transformations conformes et quelques propriétés fondamentales sur elles, qui présente dans des transformations conformes, mention transformation d'holographe et la transformation de Schwarz-Christoffel.

2.2 Transformations

Définition 8 *L'ensemble d'équation*

$$u = u(x, y) \quad v = v(x, y) \tag{2.1}$$

Définit, en général une transformation qui établit une correspondance entre les points du plan et les points du plan uv . Les équations (2.1) sont appelées équation de transformation, si à chaque point du plan xy correspond un et un seul point du plan uv , et inversement on parle d'une transformation biunivoque. Dans un tel cas, un ensemble des points dans le plan xy (tel qu'une courbe ou une région) est mappé dans un ensemble de points dans le plan uv (courbe ou région) et inversement. Les ensembles correspondants de points dans les deux plans sont souvent appelés images l'un de l'autre.

2.3 Forme complexe d'une transformation

Il est particulièrement intéressant de considérer le cas où u et v désignent la partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction analytique de la variable complexe $z = x + iy$ i.e. $w = u + iv = f(z) = f(x + iy)$. dans un tel cas le jacobien de la transformation est :

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = |f'(z)|^2 \quad (2.2)$$

On en déduit que la transformation est conforme dans les domaines où $f'(z) \neq 0$. les points pour lesquels $f'(z) = 0$ sont appelés points critiques.

2.4 Transformations conformes

Supposons que le point $(x_0; y_0)$ d'un plan des xy soit transformé en le point $(u_0; v_0)$ d'un plan des uv [figure2.1 et figure2.2] cependant que les courbes C_1 et C_2 [se coupant en $(x_0; y_0)$] sont respectivement transformées en C'_1 et C'_2 [se coupant en $(u_0; v_0)$]. Une transformation telle que l'angle entre C_1 et C_2 en $(x_0; y_0)$ est égale en grandeur et sens, l'angle entre C'_1 et C'_2 en $(u_0; v_0)$, est dite conforme en $(x_0; y_0)$ une transformation qui conserve les angles en grandeur mais pas nécessairement en sens, est dite isogonale

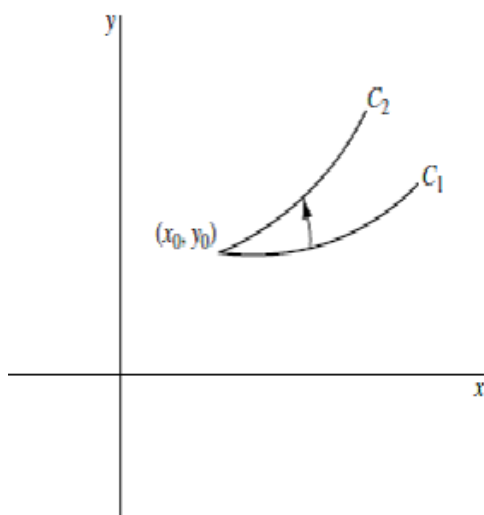


Fig. 2.1 :plan xy

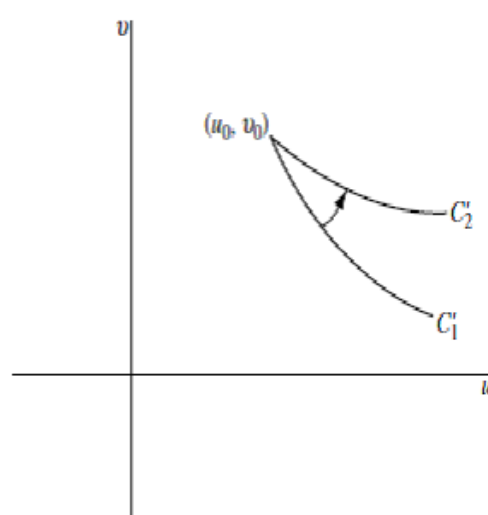


Fig. 2.2 : plan uv

Théorème 9 Si $f(z)$ est analytique et si $f'(z) \neq 0$ en tous les points d'un ouvert connexe Ω , la transformation $w = f(z)$ est conforme en tous points de Ω .

2.5 Quelques transformations

2.5.1 Quelques transformations generales

Dans les exemples suivants α, β, γ sont des constantes complexes, a, θ_0 , étant des constantes réelles.

Translation $w = z + \beta$

Par cette transformation les figures du plan z sont déplacées ou translattées dans la direction du vecteur β .

Rotation $w = e^{i\theta_0} z$

Par cette transformation les figures du plan z subissent une rotation d'angle θ_0 .

Homothétie $w = az$

Par cette transformation les figures sont dilatées (ou contractées) si $a > 1$ (si $0 < a < 1$). On considère la contraction comme un cas particulier de dilatation.

Inversion $w = 1/z$

Pour z non nul transformée les cercles en cercles/droites, les lignes en droites/cercles selon que l'objet passe ou non par l'origine.

Transformation lineaire $w = \alpha z + \beta$

Où α et β sont des constantes complexes est appelée une transformation linéaire. Etant donné que l'on peut écrire $w = \alpha z + \beta$ au moyen des transformations successives $w = \zeta + \beta$, $\zeta = e^{i\theta_0\tau}$, $\tau = \alpha z$ $\alpha = ae^{i\theta_0}$ on voit que la transformation linéaire la plus générale s'exprime sous la forme de produit de transformations telles que translation, rotation, homothétie.

Transformation bilinéaire ou fractionnelle

La transformation

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (2.3)$$

Avec a, b, c, d des complexes. Transformée les cercles en droites est respectivement

2.6 La transformation de Schwartz-Christoffel

Considérons un polygone [figure2.3] dans le plan des w , ayant pour sommets w_1, w_2, \dots, w_n et pour angles intérieurs respectivement $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Soit w_1, w_2, \dots, w_n les points correspondant respectivement x_1, x_2, \dots, x_n de l'axe réel du plan des z [figure2.4].

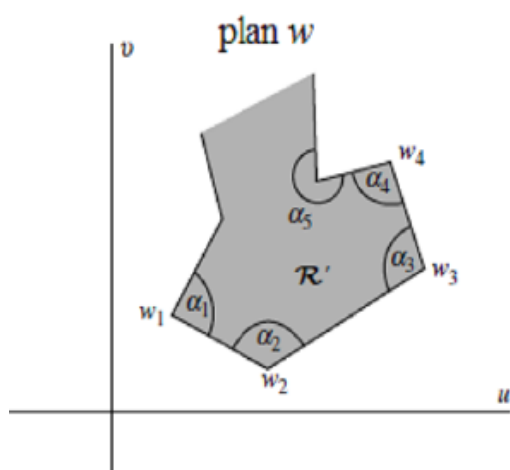


Fig. 2.3

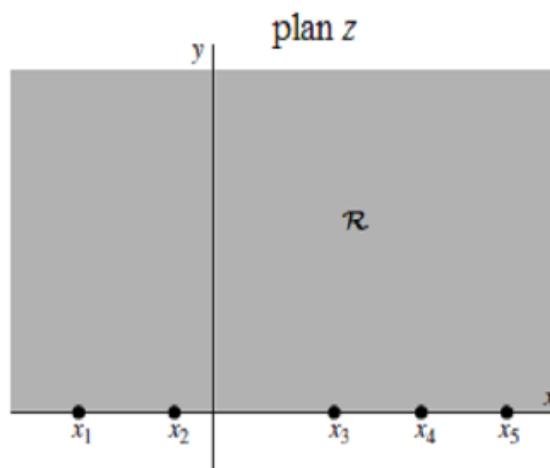


Fig. 2.4

Une transformation qui représente l'intérieur R d'un polygone considéré sur le demi-plan supérieur d'un plan des z , et la frontière d'un polygone sur l'axe réel, est donnée par :

$$\frac{dw}{dz} = A(z - x_1)^{\alpha_1/\pi - 1} (z - x_2)^{\alpha_2/\pi - 1} \dots (z - x_n)^{\alpha_n/\pi - 1} \quad (2.4)$$

Où

$$w = A \int (z - x_1)^{\alpha_1/\pi - 1} (z - x_2)^{\alpha_2/\pi - 1} \dots (z - x_n)^{\alpha_n/\pi - 1} dz + B \quad (2.5)$$

Où A et B sont des constantes complexe .

On notera que

1. Parmi les point x_1, x_2, \dots, x_n on peut en choisir trois arbitrairement.
2. Les constantes A et B déterminent la taille, l'orientation et la position du polygone.
3. Il est commode de choisir un point, par exemple x_n , à l'infini, cas dans lequel le dernier facteur de 2.4 et 2.5 n'existe pas .
4. Des polygones infinis non fermés peuvent être considérés comme des cas limites de polygones fermés.

2.6.1 Exemple

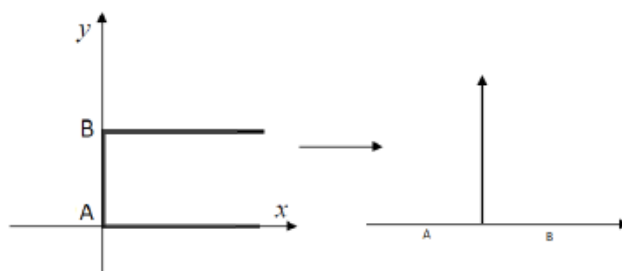


Fig. 2.5 :Source dans un canal

La transformation de Christoffel-Schwartz définie par :

$$\frac{dz}{d\varepsilon} = k (\varepsilon - a)^{\frac{\alpha}{\pi}-1} (\varepsilon - b)^{\frac{\beta}{\pi}-1}$$

On utilise les points $a = -1$ et $b = 1$.

On utilise les angles $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $\beta = \frac{\pi}{2}$.

On a :

$$\frac{dz}{d\varepsilon} = k (\varepsilon - a)^{\frac{\frac{\pi}{2}}{\pi}-1} (\varepsilon - b)^{\frac{\frac{\pi}{2}}{\pi}-1}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{d\varepsilon} = \frac{k}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}$$

par intégration :

$$dz = k \int \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} d\varepsilon$$

$$\Rightarrow z = k \cosh^{-1} \varepsilon + c$$

2.7 Représentation sur le Demi -Plan

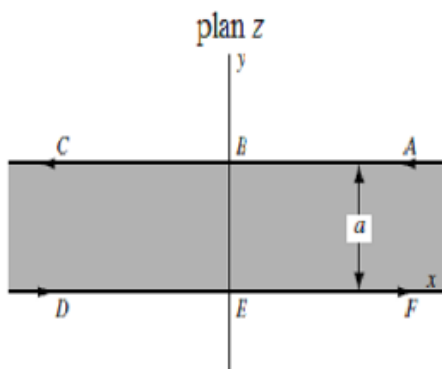


Fig. 2.6

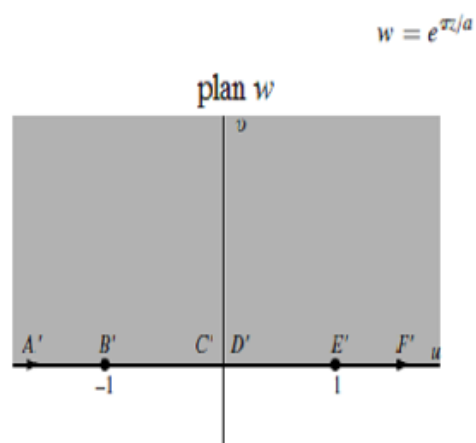


Fig. 2.7

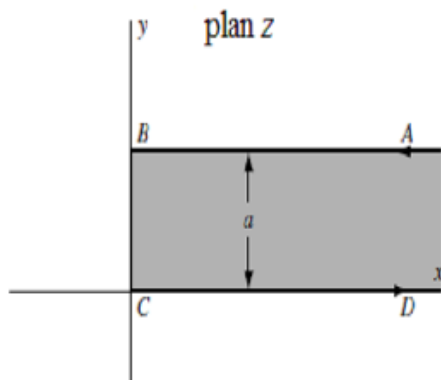


Fig. 2.8

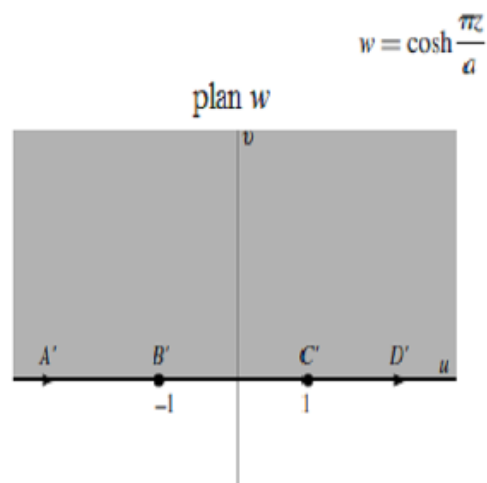


Fig. 2.9

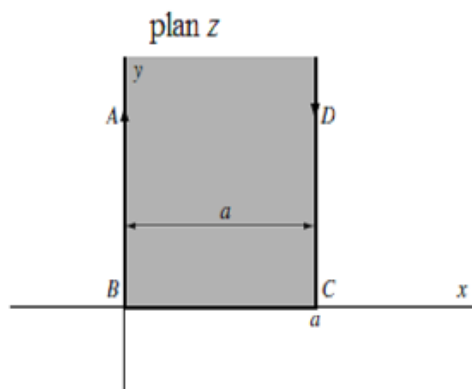


Fig. 2.10

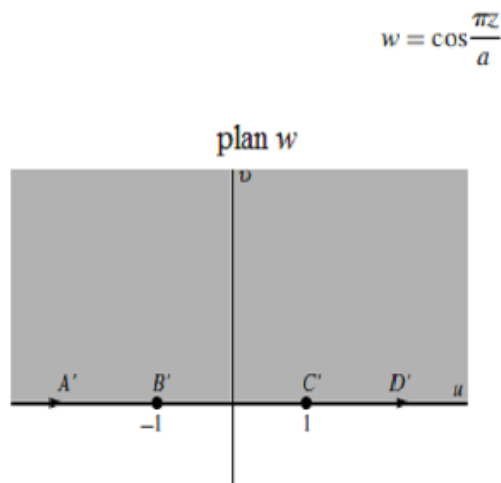


Fig. 2.11

2.8 Transformation hodographe

La théorie des lignes de courant est étudié le problème d'écoulement potentiel et bidimensionnel, bornés par des parois rectilignes et des lignes de courant libre de forme inconnue, sur lesquelles la pression est supposée constante. Cette transformation est utilisée par Kirchhoff 1986 pour trouver la solution exacte. L'idée est d'introduire la fonction complexe Ω définie par :

$$\Omega = \log \left(\frac{U}{df/dz} \right) = \log \left(\frac{U}{u - iv} \right) = \log \left(\frac{U}{q} \right) + i\theta \quad (2.6)$$

Où U la vitesse de référence

θ l'angle que fait le vecteur vitesse avec l'horizontale

et $f = \phi + i\psi$, $\frac{df}{dz} = u - iv$ et $q = \sqrt{u^2 + v^2}$

(u, v) sont les composantes du vecteur vitesse suivant les directions de l'axe des x et l'axe des y , respectivement.

On note que La fonction Ω possède les propriétés suivantes :

·La partie réelle de Ω est constante sur chaque ligne de courant libre, i.e., $\log\left(\frac{U}{q}\right) = \text{const.}$

·La partie imaginaire de Ω est constante sur chaque paroi rigide rectiligne, i.e., $\theta = \text{const.}$

2.9 Jet libre

Nous nous intéressons des écoulements potentiels irrotationnels . De l'équation de continuité $\nabla u = 0$, on tire que quel que soit l'écoulement d'un fluide incompressible , il existe toujours une fonction dite fonction de courant qui vérifié :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ et } v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.7)$$

Avec $u = (u; v)$ dans un repère cartésien $x - y$. Si de plus l'écoulement est irrotationnel, alors sa vorticité est nulle : $\nabla u = 0$ et donc il existe une fonction dite potentiel de vitesse telle que : $u = -\nabla \phi$ Nous plaçons aussi en régime permanent de telle sorte que le théorème de Bernoulli soit vérifié le long des lignes de courant $\psi = cte$. On a négligé en première approximation l'effet du champ de pesanteur. On peut définir un potentiel complexe : $\omega = \phi + i\psi$: La dérivée de ce potentiel par rapport $z = x + iy$ fournit la vitesse complexe :

$$\frac{d\omega}{dz} = u - iv \quad (2.8)$$

2.9.1 Exemple

Par exemple de l'application de la théorie de la lignes de courant, calculons la Rapport de contraction d'un jet bidimensionnel de liquide sortant d'un orifice. Supposons que l'orifice est une fente mince et longue dans une paroi plane de faible épaisseur et que le mur fait partie d'un grand vaisseau contenant du liquide. La vitesse du liquide sur les lignes de rayonnement libres qui émergent des bords de l'orifice est uniforme et égale à v , disons. C'est aussi la vitesse de l'intérieur du jet en aval de l'orifice, où (négligeant les effets de la gravité), les raides sont droites et parallèles. (Voir la figure 2.12). Laissez les deux lignes de courant délimiter le débit, sur lequel $\psi = +\psi_1$ et $\psi = -\psi_1$, Dire-êtré ABC et $A'B'C'$, respectivement, où A, A', C et C' Tous représentent des points l'infini. La figure 2.12 montre la ligne droite correspondante Limites dans les plans ω et Ω ,où Ω est maintenant défini de manière plus pratique Manière comme

$$\Omega = \ln\left(U \frac{dz}{d\omega}\right) = \ln\left(\frac{u}{v}\right) + i\theta \quad (2.9)$$

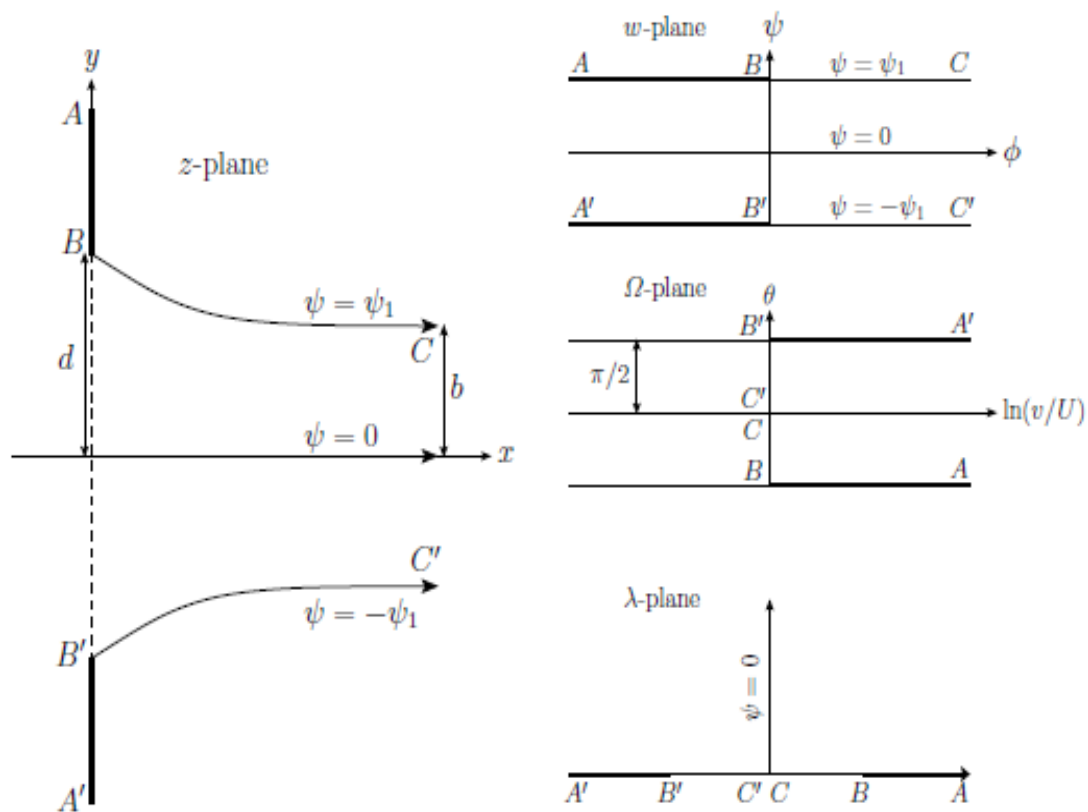


Fig. 2.12 :transformations conformes nécessaires la dtermination de l'coulement partir d'un orifice dans une paroi plane en deux dimensions

Pour trouver la solution analytique on utilise une transformation de Schwarz-Christoffel pour transformer chacun des polygones à un même polygone d'un nouvel espace que l'on va appeler λ .

nous devons cartographier la bande infinie $A'B'C'CB A$ Dans le plan ω vers la moitié supérieure du plan λ . La transformation conforme d'une bande semi-infinie sur la moitié supérieure d'un autre plan complexe.

la transformation de Schwartz-Christoffel donne :

$$\omega = \alpha \int (\lambda - 1)^{\frac{\pi}{\alpha} - 1} (\lambda + 1)^{\frac{\pi}{\alpha} - 1} (\lambda - 0)^{\frac{\pi}{\alpha} - 1} d\lambda$$

$$\implies \omega = \alpha \ln(\lambda) + \beta \quad (2.10)$$

Pour déterminer les constantes α et β , on utilise en particulier, cette transformation mappe les points $B' = -i\psi_1$ et $B = i\psi_1$ dans le plan ω vers les points $B = 1$ et $B' = -1$; respectivement, Dans le plan λ .

$$\begin{cases} -i\psi_1 = \alpha \ln(-1) + \beta \\ i\psi_1 = \alpha \ln(1) + \beta \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} \alpha = -\frac{2\psi_1}{\pi} \\ \beta = i\psi_1 \end{cases}$$

On remplace dans (2.10) on trouve :

$$\lambda = i \exp\left(-\frac{\pi \omega}{2 \psi_1}\right) \quad (2.11)$$

Ensuite, nous devons cartographier la bande infinie $ABCA'B'C'$ dans le plan Ω vers le haut moitié du plan λ . La transformation conforme d'une bande semi-infinie sur la moitié supérieur d'un autre plan complexe.

la transformation de Schwartz-Christoffel donne :

$$\Omega = \alpha \int (\lambda - 1)^{\frac{\pi}{\alpha} - 1} (\lambda + 1)^{\frac{\pi}{\alpha} - 1} d\lambda$$

$$\implies \Omega = -i\alpha \arcsin(\lambda) + \beta$$

Cette transformation mappe les points $B' = i\frac{\pi}{2}$ et $B = -i\frac{\pi}{2}$ dans le plan Ω vers les points $B = 1$ et $B' = -1$; respectivement, Dans le plan λ .

On trouve $\alpha = 1, \beta = -i\frac{\pi}{2}$.

Par calcul on trouve :

$$\lambda = i \sinh \Omega \quad (2.12)$$

Le champ d'écoulement a maintenant été cartographié sur la moitié supérieure du plan λ de deux manières coïncidentes.

$$\lambda = i \exp\left(-\frac{\pi}{2} \frac{\omega}{\psi_1}\right) = i \sinh \Omega = \frac{i}{2} \left(U \frac{dz}{d\omega} - \frac{1}{U} \frac{d\omega}{dz} \right) \quad (2.13)$$

Par conséquent :

$$U \frac{dz}{d\omega} = -i\lambda + (1 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.14)$$

Où, avec des coupes dans le plan Z à AB et $A'B'$, la branche correcte de $(1 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}}$ est réel et positif quand $\psi = 0$. L'intégration, à l'aide de l'équation (2.11), des rendements

$$\frac{\pi}{2} \frac{U}{\psi_1} (z - z_1) = i(\lambda - 1) - (1 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}} + \tanh^{-1} \left[(1 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}} \right]$$

Où z_1 est une constante. Cependant, $\lambda = 1$ au point B , où $z = id$ ($2d$ étant le Largeur de l'orifice), donc $z_1 = id$, et

$$\frac{\pi}{2} \frac{U}{\psi_1} (z - id) = i(\lambda - 1) - (1 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}} + \tanh^{-1} \left[(1 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (2.15)$$

$$\Rightarrow z = -\frac{2}{\pi} \frac{\psi_1}{U} (1 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}} - \tanh^{-1} \left[(1 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}} \right] + i \left(\frac{2}{\pi} \frac{\psi_1}{U} (\lambda - 1) + d \right)$$

Enfin, la relation requise entre z est ω obtenue en éliminant λ entre les équations (2.11) et (2.15). Sur la surface libre BC , nous avons

$$\psi = \psi_1, \quad \phi = U_s, \quad \Omega = i\theta$$

Où s désigne la distance mesurée le long de la ligne de calcul de B. Il résulte de Les équations (2.11) et (2.12) que

$$\lambda = -\sin \theta = \exp\left(-\frac{\pi}{2} \frac{U}{\psi_1} s\right)$$

Ainsi, en utilisant l'équation (2.15), l'équation de rationalisation BC peut être écrite, sous forme paramétrique, comme

$$x = \frac{2\psi_1}{\pi U} [\tanh^{-1}(\cos \theta) - \cos \theta] \quad (2.16)$$

$$y = d - \frac{2\psi_1}{\pi U} (1 + \sin \theta) \quad (2.17)$$

Ainsi, la demi-largeur asymptotique du jet est

$$b = \lim_{s \rightarrow \infty} y(s) = d - \frac{2\psi_1}{\pi U} \quad (2.18)$$

Loin de l'orifice, qui correspond à $\lambda \rightarrow 0$, l'équation 2.14 produit

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{1}{u_x - iu_y} \simeq \frac{1}{U} \quad (2.19)$$

En d'autres termes, comme prévu, le profil de vitesse devient uniforme à travers le jet en aval de l'orifice, ce qui implique que $\psi_1 = bU$. Il découle, à partir de l'équation 2.18, que le rapport de contraction du jet de liquide bidimensionnel émergent d'un orifice dans une paroi plane prend la valeur

$$\frac{b}{d} = \frac{\pi}{\pi + 2} = 0,61 \quad (2.20)$$

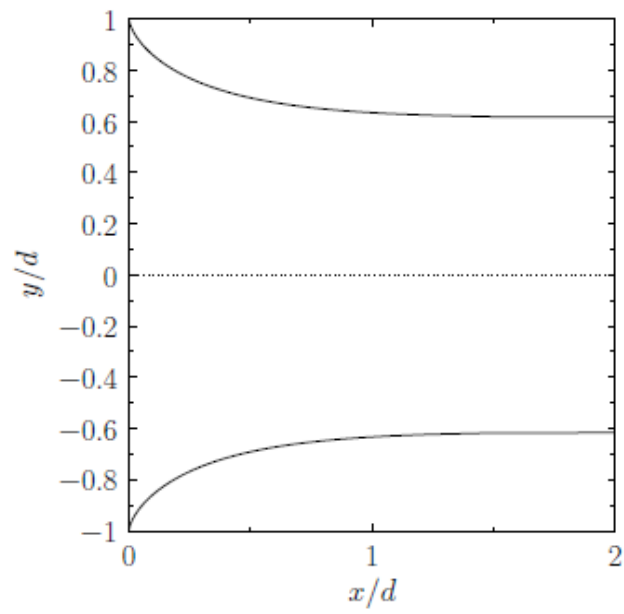


Fig. 2.13 :Fome de la surface libre de l'coulement

Chapitre 3

solution analytique d'un problème du jet bidimensionne

Résumé

Dans ce chapitre, on étudie un problème d'écoulement potentiel, bidimensionnel, d'un fluide incompressible et non visqueux, passant au-dessus d'un obstacle de hauteur $2h$ et de largeur H , on peut restreindre l'étude du problème au demi-plan supérieur. Dans ce cas en négligeant les effets de la gravité et de la tension de surface, le problème admet une solution exacte qu'on peut la calculer en utilisant la théorie des lignes de courant libres et la transformation de Schwarz-Christoffel.

3.1 Position du problème

on étudie un écoulement potentiel et bidimensionnel d'un fluide incompressible et non visqueux et irrotationnel dans un canal rectangulaire et semi infini d'épaisseur $2h$ et se déplaçant vers la droite à la vitesse 1, pénètre dans une cavité rectangulaire semi-infinie avec des parois à $y = 1$ et $x = L$, comme indiqué sur la figure (3.1), l'axe y est tangent à la surface libre.

on peut restreindre l'étude du problème au demi-plan supérieur on raison de la symétrie de l'écoulement on peut restreindre l'étude du problème au demi-plan supérieur.

En ignorant les effets de la gravité et de la tensions de surface, on montre que le problème des valeurs limites pour le potentiel complexe $f(z) = \phi + i\psi$ pour la moitié supérieure de l'écoulement (dans la bande $0 < y < 1, -\infty < x < L$) est que $f(z)$ est holomorphe dans la région fluide,avec :

$$\psi = 0 \text{ on } ABCDE, \quad \psi = h, \quad |f'| = 1 \text{ on } A'E'$$

où $f'(z) = \phi + i\psi$ est la vitesse complexe. de plus, prendre le point de référence pour ϕ tel que $f = 0$ en C.

le domaine d'écoulement dans les plans potentiel et hodographe.

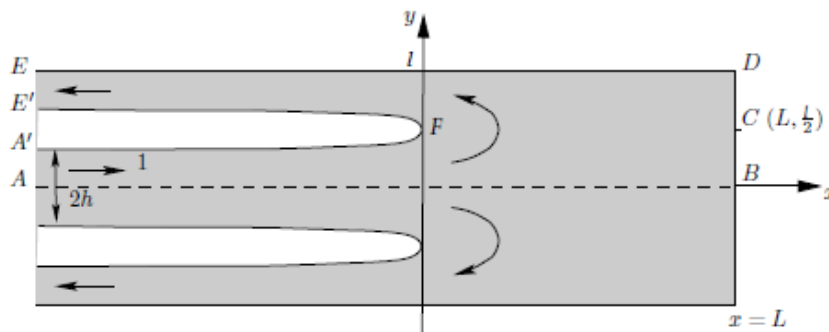


Fig 3.1 : Un jet entrant dans une boite. La profondeur du fluide est $2h$.

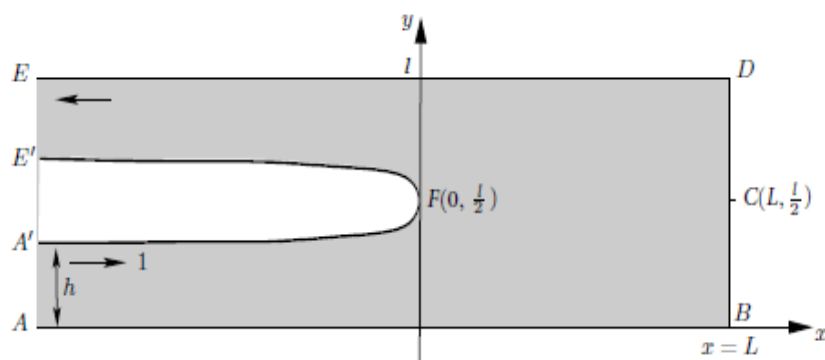


Fig 3.2 : Schéma d'un écoulement bidimensionnel dans un canal de la forme U

Les écoulements bidimensionnelle, potentiel et irrotationnels ces sont nos intérêts, nous pouvons définir un potentiel complexe

$$f = \varphi + i\psi$$

Où : φ représente la fonction potentiel

ψ représente la fonction de courant.

la dérivée de ce potentiel par rapport a $z = x + iy$ fournit la vitesse complexe

$$\frac{df}{dz} = u - iv$$

Puisque nous néglige les effets de la gravité et de la tensions de surface, on peut écrire l'équation de Bernouli comme suite :

$$\frac{1}{2}q^2 + \frac{p}{\rho} = c^{te} \quad (3.1)$$

ou : q est le vecteur vitesse.

p est la pression.

ρ la densité de fluide.

car la pression et la densité sont des constantes sur la surface libre, l'équation de bernouli devient sous forme comme suite :

$$q = c^{te} \quad (3.2)$$

3.2 Résolution du problème

Dans cette partie nous allons utiliser la méthode de ligne de courant libre et la transformation de de Schwartz -Christoffel pour obtenir la solution exacte du problème.

D'abord il faut présenter la transformation suivant :

3.2.1 la fonction de Kirchhoff

la fonction de kirchoff définie par :

$$\Omega = \log \left(U \frac{dz}{df} \right) \quad (3.3)$$

- Pour trouver la solution exacte nous utilisons les étapes suivantes :

1^{ère} étape : (La transformation de z à f .)

Le domaine d'écoulement réel (x, y) dans le plan z est transformé à une bande de largeur HU dans le plan de la variable $f = \varphi + i\psi$ figure (3.3). puis que ψ est constante pour chaque ligne de courant.

on a $f = \varphi + i\psi$

et $\psi = 0$ on ABCDE.

lorsque $\varphi \rightarrow \infty \implies \psi = h$.

la transformation est donnée par le tableau suivant

Les points	plan z	plan f
A	$x = -\infty, y = 0$	$\phi = -\infty, \psi = 0$
B	$x = +\infty, y = 0$	$\phi = -\phi_B, \psi = 0$
C	$x = +\infty, y = \frac{l}{2}$	$\phi = 0, \psi = 0$
D	$x = +\infty, y = l$	$\phi = \phi_D, \psi = 0$
E	$x = -\infty, y = l$	$\phi = +\infty, \psi = 0$
F	$x = 0, y = \frac{l}{2}$	$\phi = 0, \psi = h$
A'	$x = -\infty, y = l - h$	$\phi = -\infty, \psi = h$
E'	$x = -\infty, y = l - h$	$\phi = +\infty, \psi = h$

2^{ème} étape

oEn utilisant la transformation pour transformé le domaine d'écoulement réel (x, y) figure(3.2) .

par cette transformation la bande (figure (3.2)) se transforme en un demi disque unitaire inférieur dans la plan de variable $\frac{df}{dz}$.

Les points	plan z	plan $\frac{df}{dz}$
A	$x = -\infty, y = 0$	$u = 1, -v = 0$
B	$x = +\infty, y = 0$	$u = 0, -v = 0$
C	$x = +\infty, y = \frac{l}{2}$	$u = 0, -v = v_c$
D	$x = +\infty, y = l$	$u = 0, -v = 0$
E	$x = -\infty, y = l$	$u = -1, -v = 0$
F	$x = 0, y = \frac{l}{2}$	$u = 0, -v = i$
A'	$x = -\infty, y = l - h$	$u = 1, -v = 0$
E'	$x = -\infty, y = l - h$	$u = -1, -v = 0$

3^{ème} étape (La transformation de f à λ)

En utilisant la transformation de Christoffel-Schwarz pour transformer la bane de largeur HU du plan f en demi plan supérieur de la variable λ .

Pour transformer le plan f en plan λ on utilise la transformation conforme suivant :

$$\lambda = e^{\frac{\pi f}{h}} \quad (3.4)$$

4^{ème} étape (La transformation de $\frac{df}{dz}$ à λ)

Pour transformer le plan $\frac{df}{dz}$ en plan λ on utilise la transformation conforme suivant :

$$\lambda = \left(\frac{1 - \frac{df}{dz}}{1 + \frac{df}{dz}} \right)^2 \quad (3.5)$$

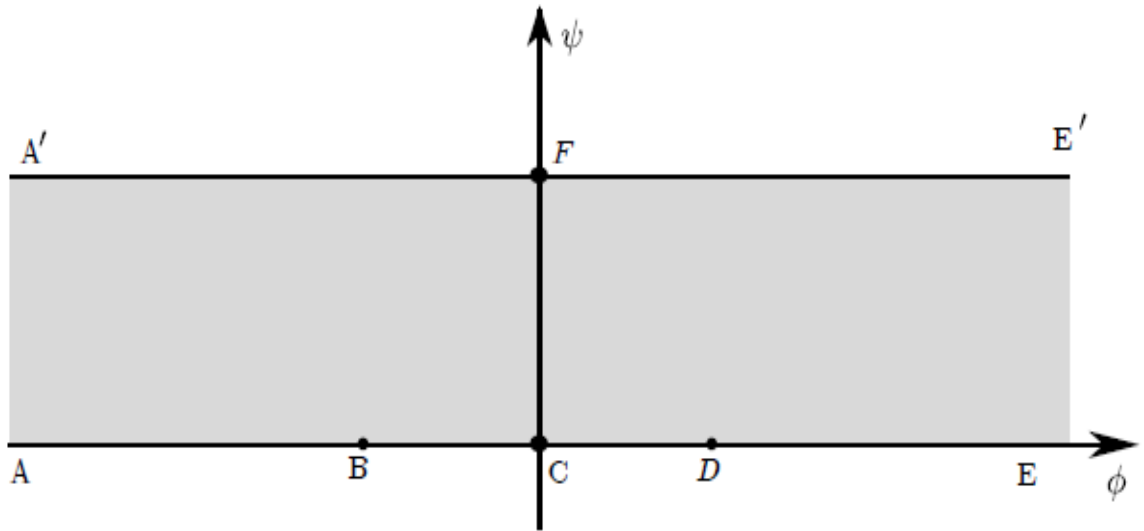


Fig 3.3 : plan f

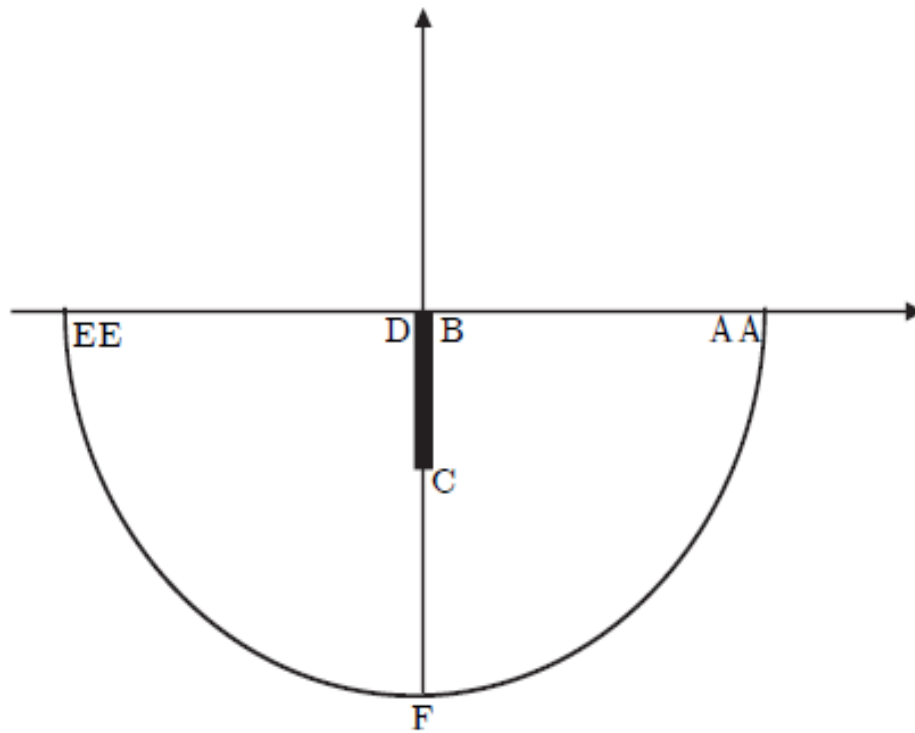


Fig 3.4 : plan $\frac{df}{dz}$

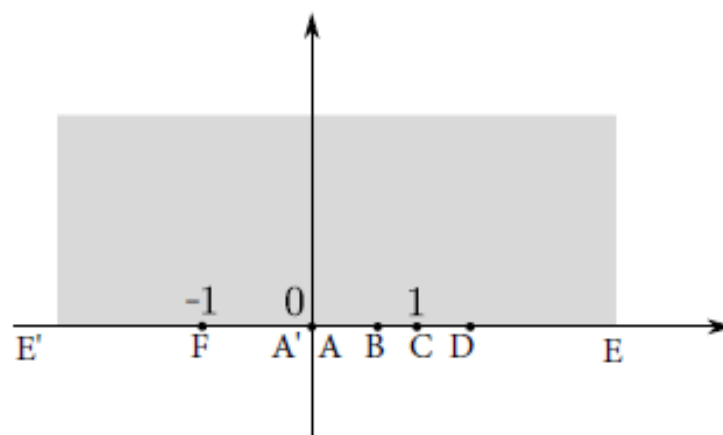


Fig 3.5 : plan λ

On prend le point de référence pour ϕ tel que $\varphi = 0$ en C , on montre que les plans potentiel et hodographe $\left(\frac{d\varphi}{dz} = u - iv\right)$. Lorsque ces deux plans sont mappés l'un sur l'autre.

La solution de cette équation différentielle contraint une constante arbitraire. En notant que les positions de A ou par symétrie E et B sont spécifiées.

On considérons le cas $l = \infty$ avec un fluide stagnant loin à l'intérieur de la cavité. BC et D coïncident à l'origine dans le plan de l'hodographe et le domaine d'écoulement est tout l'intérieur du demi-cercle représenté.

On trouve la solution analytique du problème :

on a d'après l'équation (3.4) et l'équation (3.5) on obtient :

$$\lambda = e^{\frac{\pi f}{h}} = \left(\frac{1 - \frac{df}{dz}}{1 + \frac{df}{dz}}\right)^2 \quad (3.6)$$

$$\implies \left(e^{\frac{\pi f}{h}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1 - \frac{df}{dz}}{1 + \frac{df}{dz}}\right)$$

$$\implies \left(e^{\frac{\pi f}{2h}}\right) = \left(\frac{1 - \frac{df}{dz}}{1 + \frac{df}{dz}}\right)$$

par calcul simple on trouve :

$$1 - \frac{df}{dz} = e^{\frac{\pi f}{2h}} \left(1 + \frac{df}{dz}\right)$$

$$\implies 1 - \frac{df}{dz} = e^{\frac{\pi f}{2h}} + e^{\frac{\pi f}{2h}} \frac{df}{dz}$$

$$\implies 1 - e^{\frac{\pi f}{2h}} = \frac{df}{dz} (1 + e^{\frac{\pi f}{2h}})$$

Alors,

$$\frac{df}{dz} = \frac{1 - e^{\frac{\pi f}{2h}}}{1 + e^{\frac{\pi f}{2h}}} \quad (3.7)$$

d'autre part la fonction da potentiel à surface libre donnée par

$$f = \varphi + ih \quad (3.8)$$

$$\implies \frac{df}{dz} = \frac{d\varphi}{dz} \quad (3.9)$$

par l'équation (3.9) on déduit que :

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{1 - e^{\frac{\pi f}{2h}}}{1 + e^{\frac{\pi f}{2h}}} \quad (3.10)$$

par l'inverse de l'équation (3.10) on obtient :

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{1 + e^{\frac{\pi f}{2h}}}{1 - e^{\frac{\pi f}{2h}}} \quad (3.11)$$

en remplaçant l'équation (3.8) dans l'équation (3.11) on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\varphi} &= \frac{1 + e^{\frac{\pi(\varphi+ih)}{2h}}}{1 - e^{\frac{\pi(\varphi+ih)}{2h}}} \\ \implies \frac{dz}{d\varphi} &= \frac{1 + e^{\frac{\pi\varphi}{2h}} \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}}{1 - e^{\frac{\pi\varphi}{2h}} \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}} \end{aligned} \quad (3.12)$$

d'après Euler : $e^{\frac{i\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$
 $(\cos \frac{\pi}{2} \rightarrow 0, i \sin \frac{\pi}{2} \rightarrow i)$

Donc $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$

Par substitution, on trouve :

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{1 + ie^{\frac{\pi\varphi}{2h}}}{1 - ie^{\frac{\pi\varphi}{2h}}} \quad (3.13)$$

donc

$$dz = \frac{1 + ie^{\frac{\pi\varphi}{2h}}}{1 - ie^{\frac{\pi\varphi}{2h}}} d\varphi \quad (3.14)$$

On trouve f satisfaisant $f = ih$ à $z = i\frac{l}{2}$.

on a $z(0) = i\frac{l}{2}$

par l'intégration de l'équation (3.14) on obtient :

$$z = -\frac{2h \ln \left(1 + \left(e^{\frac{1}{2} \frac{\pi\varphi}{h}} \right)^2 \right)}{\pi} + \varphi + \frac{2h \ln(2)}{\pi} + i \left(-\frac{4h \left(-\arctan \left(e^{\frac{1}{2} \frac{\pi\varphi}{h}} \right) + \pi \right)}{\pi} + 3h + \frac{1}{2}l \right) \quad (3.15)$$

Alors

$$x = -\frac{2h \ln \left(1 + \left(e^{\frac{1}{2} \frac{\pi\varphi}{h}} \right)^2 \right)}{\pi} + \varphi + \frac{2h \ln(2)}{\pi} \quad (3.16)$$

$$y = -\frac{4h \left(-\arctan \left(e^{\frac{1}{2} \frac{\pi\varphi}{h}} \right) + \pi \right)}{\pi} + 3h + \frac{1}{2}l \quad (3.17)$$

on a $z = x + iy$

lorsque $\varphi \rightarrow -\infty \implies x \rightarrow -\infty$

$$\begin{aligned} \varphi \rightarrow -\infty &\implies y \rightarrow -4h + 3h + \frac{l}{2} \\ &\implies y \rightarrow -h + \frac{l}{2} = h \\ &\implies 2h = \frac{l}{2} \implies h = \frac{l}{4} \end{aligned}$$

Donc $h = \frac{l}{4}$

on prend $l = 4$ on obtient $h = 1$

Alors par substitution, on trouve :

$$x = -\frac{2 \ln(1 + e^{\pi\varphi})}{\pi} + \varphi + \frac{2 \ln(2)}{\pi} \quad (3.18)$$

$$y = -\frac{4 \left(-\arctan \left(e^{\frac{1}{2}\pi\varphi} \right) + \pi \right)}{\pi} + 5 \quad (3.19)$$

Mainenant, nous traçons la courbe

ona

$$\begin{aligned} x &= -\frac{2 \ln(1 + e^{\pi\varphi})}{\pi} + \varphi + \frac{2 \ln(2)}{\pi} \\ y &= -\frac{4 \left(-\arctan \left(e^{\frac{1}{2}\pi\varphi} \right) + \pi \right)}{\pi} + 5 \end{aligned}$$

Alors, pour tracer la courbe on peut écrire

$$\left(-\frac{2 \ln(1 + e^{\pi\varphi})}{\pi} + \varphi + \frac{2 \ln(2)}{\pi}, -\frac{4 \left(-\arctan \left(e^{\frac{1}{2}\pi\varphi} \right) + \pi \right)}{\pi} + 5 \right)$$

Dont le graphe est donné dans la figure (3, 6)

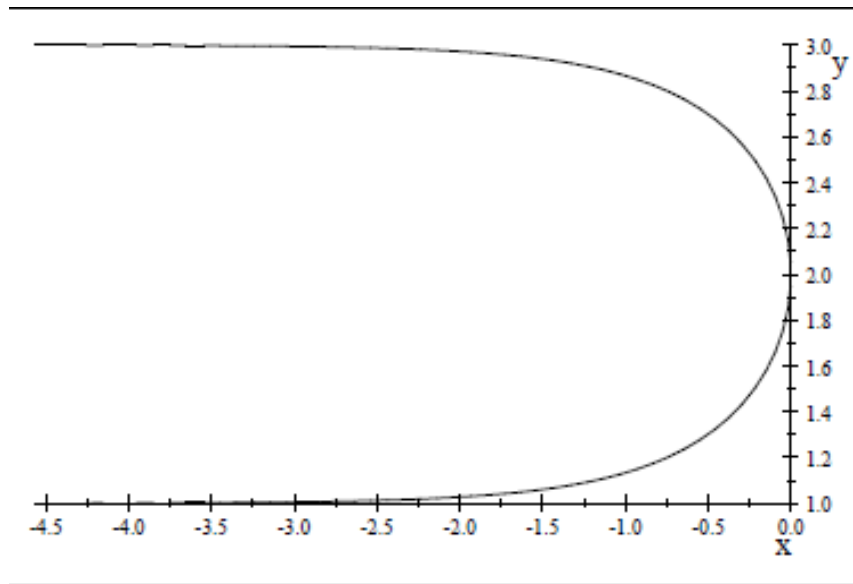


Fig 3.6 : Forme de surface libre

Conclusion

L'analyse d'un écoulement plan avec une surface libre a été l'objet d'intérêt pour beaucoup de scientifiques et d'industriels pour une longue période. La détermination de certains caractéristique de l'écoulement tel que le coefficient de décharge, le coefficient de contraction et la position de la surface libre sont d'un intérêt particuliers aux ingénieurs à nos jours, très peu de problème ont été résolus d'une façon explicite. Même les méthodes numériques sont assez difficiles à élaborer à cause de la condition aux limites imposée sur la frontière "libre", inconnue à priori.

Dans ce mémoire on a étudié numériquement un problème d'écoulement potentiel bidimensionnel à surface libre entre deux plaques horizontales semi-infinies et d'un fluide incompressible et non visqueux avec négligence les effets de la gravité et de la tensions de surface. on a appliqué la transformation de Schwarz-Christoffel et la transformation d'hodographe pour trouver la forme de la surface libre et la solution analytique de cet problème.

Bibliographie

- [1] -**Murry Spiegel, Seymour Lipschutz, John Schiller, Denis Spellman-** Schaum's outlines_ Complex variables-McGraw-Hill (2009).
- [2] -**Stephen Childress**, An introduction to Theoretical Fluid Dynamics (2008).
- [3] -**Amara Abdelkader**, calcul numérique d'un jet bidimensionnel d'un fluide devant un mur de forme quelconque ,thèse de doctorat de universite de M'sila(2018).
- [4] -**Richard Fitzpatrick**, Theoretical Fluid Mechanics (2017).
- [5] -**J.R. Ockendon, S. D. Howison, A. A. Lacey and A. B. Movichan ;** Applied Partial Differential Equations, Revised Edition Oxford University Press, 2003.
- [6] -**Hamidi Asma** ,Traitement analytique de problème d'écoulement par la méthode de Kirchhoff ,UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA 18 juin2017
- [7] -**Sakir Amiroudine et Jean-Luc Battaglia**, Mécanique des fluides, Dunod, Paris, (2011) ISBN 978-2-10-056922-9..
- [8] -**Abdelkader Gasmi, H. Mekias** A Jet from Container and Flow past a Vertical Flat Plate in a Channel With the Surface Tension Effects, Applied Math Sciences,vol.1, 2007, no. 54, 26-87.
- [9] -**Abdelkader Gasmi, H. Mekias**, The effect of surface tension on the contraction coefficient of a jet, J.Phys 2003. Applied Math. Gen, 36, 851-862.
- [10] -**Abdelkader Gasmi , Abdelkader Amara**, Free-surface profile of a jet flow in U-shaped channel without gravity effects, ASCM (Kyungshang) 2018, 118(3), 393-400.
- [11] -**Abdelkader Gasmi**, Two dimensional cavitating flow past an oblique plate in a channel, J. Compute 2014. Applied Math, 259,851-862.

ملخص

في هذا العمل، قمنا بدراسة تدفق مائع غير قابل للانضغاط وغير لزج في فضاء ذو بعدين لإيجاد الحل الدقيق لمسألة ثنائية الأبعاد مع إهمال تأثير الجاذبية وقوى التوتر السطحي. استعملنا في هذا العمل التحويلات المطابقة لشوارتز كريستوفيل وتحويل هودو غراف.

الكلمات المفتاحية: سطح حر ، تدفق ، مائع غير قابل للانضغاط ، دالة الكمون.

Résumé

Dans ce travail, nous étudions un écoulement de fluide incompressible et non visqueux dans un espace bidimensionnel pour trouver la solution exacte à un problème bidimensionnel où la gravité et la surface tension sont négligées. Dans ce travail, nous avons utilisé les transformations de Schwartz-Christoffel et la méthode de l'hodographe .

Mot clé : surface libre, Ecoulement, Fluide incompressible , fonction potentielle.

Abstract

In This Work, we study the flow of incompressible and non-viscous fluid in a two-dimensional space to find the exact solution to a two-dimensional problem where gravity and surface tension are neglected. In this work , we used the Schwartz-Christoffel transformations and the hodograph transformation .

Key words: Free surface, Flow, Incompressible fluid, Potential function.