

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة محمد بوضياف بالمسيلة

كلية العلوم

رقم: ج/ك/ع/2024



المسيلة في: 2024/01/21

شهادة موافقة علمية على مطبوعة بيداغوجية

للأستاذ ثعلوب جديد - أستاذ محاضر أ -

يشهد رئيس المجلس العلمي لكلية العلوم بجامعة محمد بوضياف بالمسيلة، أنه بعد الإطلاع على تقارير الخبرة الواردة من طرف الخبراء من صف الأستاذية:

- السيد سامي محمد ، أستاذ التعليم العالي بجامعة محمد بوضياف- المسيلة.

- السيد براهيم محفوظ أستاذ التعليم العالي بجامعة البويرة .

والمعينين طرف المجلس العلمي لكلية العلوم في الاجتماع المنعقد في دورته العادية يوم 2023/12/05 لإجراء الخبرة للمطبوعة البيداغوجية الخاصة بالأستاذ ثعلوب جديد - أستاذ محاضر- أ- بقسم الفيزياء والمتعلقة بخبرة للمطبوعة البيداغوجية للمادة المعنونة بـ: «**Mécanique des fluides**» والمقررة في برنامج التكوين ليسانس، تخصص:

«**L3 Physique énergétique**» و المفتوح بقسم الفيزياء،

تمت الموافقة عليها شكلا ومضمونا.

رئيس المجلس العلمي لكلية العلوم



أ. د. بعزیز حليم

Ministère de l'enseignement supérieur
et de la recherche scientifique
Université Mohamed Boudiaf - M'sila
Faculté des sciences



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة محمد بوضياف - المسيلة
كلية العلوم

Département de Physique

Polycopie de cours

Mécanique des fluides -3-

Option : *Physique Energétique*

Par :

Dr. TALOUB Djedid

SOMMAIRE

PREFACE

| | |
|---|-----------|
| Chapitre 1 : Rappels des équations du mouvement et de l'énergie | 1 |
| 1.1.Introduction | 1 |
| 1.2.1.1.1. Quelques concepts fondamentaux en mécanique des fluides | 2 |
| 1.1.2. Ecoulement unidimensionnel | 5 |
| 1.2. Equations du mouvement | 6 |
| 1.2.1. Equation de continuité (conservation de masse) | 6 |
| 1.2.2. Equation de l'énergie | 6 |
| 1.2.3 Equation de mouvement (conservation de quantités de mouvement) | 6 |
| 1.3. Entropie | 7 |
| Exercices d'application | 10 |
| | |
| Chapitre 2 : Ecoulements compressibles | 21 |
| 2.1. Equations générales | 21 |
| 2.1.1. Vitesse du son | 21 |
| 2.1.2. Condition de stagnation | 23 |
| 2.1.3. Différentes forme de l'équation d'énergie | 25 |
| 2.1.4. Ecoulement stationnaire isentropique à travers une conduite à section variable | 29 |
| 2.2. Tuyères convergentes-divergentes | 31 |
| 2.3. Ecoulement de Fanno | 34 |
| 2.3.1 Écoulement compressible dans les conduites avec friction (Théorie de FANNO) | 34 |
| 2.3.2 Équations de l'écoulement de Fanno | 35 |
| 2.3.3 Évolution du fluide en diagramme entropique | 36 |
| 2.4. Ecoulement de Rayleigh | 42 |
| 2.4.1 Écoulement compressible dans les conduites avec transfert de chaleur et sans friction | 42 |

| | |
|--|------------|
| (Théorie de RAYLEIGH) | |
| 2.4.2 Équations de l'écoulement de Rayleigh | 42 |
| 2.4.3 Évolution du fluide en diagramme entropique | 43 |
| Exercices d'application | 49 |
| Chapitre 3 : La turbulence et écoulements turbulents | 66 |
| 3.1 Introduction | 66 |
| 3.2 Caractéristiques d'un écoulement turbulent | 66 |
| 3.3 Aspect macroscopique (expérience de Reynolds) | 69 |
| 3.4 Aspect microscopique (fluctuation des vitesses « l'anémomètre à fil chaud) | 73 |
| 3.5 Equations de Reynolds | 74 |
| Exercices d'application | 78 |
| Chapitre 4 : Notion Physiques élémentaires sur la stabilité des écoulements | 83 |
| 4.1 Exposé du problème | 83 |
| 4.2 Exemples d'instabilités de mouvements de fluides | 83 |
| - Instabilité de Taylor –Couette | 83 |
| - Instabilité de Rayleigh-Bénard | 88 |
| - Instabilité de Kelvin-Helmholtz | 90 |
| - Instabilité de Bénard-Marangoni | 95 |
| ANNEXES | 99 |
| Références | 113 |

PREFACE

Ce document photocopié correspond au support de cours de mécanique des fluides -3- (gazodynamique).

Aujourd'hui, la dynamique des fluides compressibles est un domaine actif de la recherche avec de nombreux problèmes non résolus ou partiellement résolus.

La spécialité énergétique est étroitement liée à la phénoménologie des écoulements visqueux et turbulents observés dans les systèmes énergétiques, leur compréhension et analyse sont indispensables. Ce photocopié est consacré à l'étude des fluides compressibles. Les lois et les équations fondamentales de la dynamique ainsi que le théorème de Barré-Saint-Venant nécessaires pour traiter un problème d'écoulement de gaz sont démontrés. Certaines notions de thermodynamique, jugées indispensables pour introduire quelques paramètres, sont ajoutées.

L'objectif de ce cours est de développer et de présenter un certain nombre de base de la mécanique des fluides de façon à assurer un socle de connaissances permettant d'aborder les autres cours du licence où l'on étudier un certain nombre d'applications liées à la mécanique des fluides.

Chapitre

1

Rappels des équations du mouvement et de l'énergie

1.1.Introduction

Les lois de transport consistent à écrire le taux de variation à l'instant t d'une quantité scalaire ou vectorielle définie sur un volume matériel quelconque $\Omega(t)$ délimité par sa surface $\Gamma(t)$ d'un milieu fluide en écoulement. On appelle $u(t)$ la vitesse localisée sur l'interface $\Gamma(t)$ du volume matériel $\Omega(t)$. Ces théorèmes permettent d'écrire les équations de bilan pour la masse (quantité scalaire), la quantité de mouvement (quantité vectorielle) et l'énergie (quantité scalaire) [1-4].

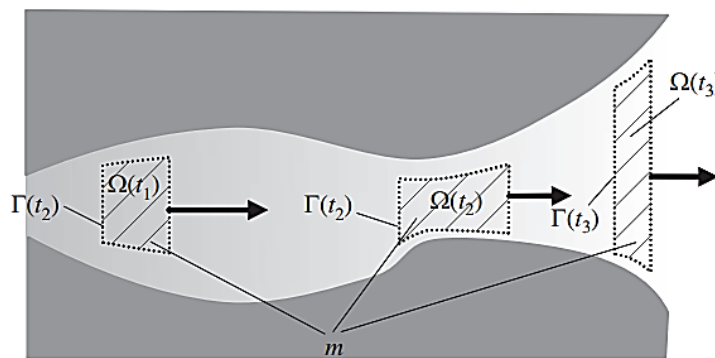


Fig. 1.1 – Évolution d'un volume matériel $\Omega(t)$ entre 3 instants différents au cours de l'écoulement du fluide dans une conduite de section variable en fonction de la longueur.

Le volume matériel « s'adapte » de façon à conserver une masse identique à chaque instant.

1.1.1. Quelques concepts fondamentaux en mécanique des fluides

Ce cours traite quelques concepts de la discipline de l'aérodynamique des écoulements de fluide visqueux compressible. Quand un fluide se meurt à des vitesses comparables à sa vitesse de son, les variations en densités seront considérables et l'écoulement sera nommé compressible.

Ce type d'écoulements est difficile de le réaliser pour les liquides, puisque la génération des vitesses soniques nécessite de hautes pressions de l'ordre de 1000 *atm*. Cependant dans les gaz, un doublement de pression peut causer un écoulement sonique, de ce fait que la science qui étudie l'écoulement compressible des gaz est souvent appelée Gazodynamique.

1.1.1.1. Définitions

La gazodynamique : est la branche de la dynamique qui s'occupe du mouvement de l'air et d'autres fluides gazeux, et des forces réagissant sur un corps en mouvement relatif aux pareils fluides [4]:

De tels écoulements compressibles se rencontrent dans les conduites transportant du gaz naturel, ou à travers le diffuseur d'un turboréacteur d'un avion, aux seins des turbines et des compresseurs. Probablement, les deux effets les plus importants de la compressibilité de l'écoulement sont :

a) La suffocation : où la vitesse de l'écoulement dans la conduite (interne) est étroitement limitée par la condition sonique.

b) Les ondes de choc : qui sont des petites discontinuités dans les propriétés de l'écoulement supersonique.

L'objectif de ce cours est d'expliquer tels phénomènes et les quantifier en utilisant les équations fondamentales suivantes :

- équation de continuité.
- équations de quantité de mouvement (Navier Stokes).
- équation de l'énergie.
- équation d'état des gaz.

Et en les résolvant simultanément pour quatre inconnues ; pression, densité (masse volumique), température et la vitesse d'écoulement (p, ρ, T, V). Toutefois la théorie des

écoulements compressibles est assez compliquée, notamment c'est la raison de supposer la réversibilité et l'adiabaticité de l'écoulement.

Gaz : est un type de fluides qui déplacent sous l'action des contraintes de cisaillement $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$, et l'influence de la compressibilité est plus importante en comparaison avec l'état de repos.

Système : C'est l'ensemble mobile d'une matière, ayant des propriétés bien déterminées et des limites extérieures nommées les frontières du système. La caractéristique fondamentale d'un système au repos ou en écoulement est la quantité de matière (masse) contenue dans ce système.

Volume de contrôle : Un volume fictif et fixe dans l'intervalle du mouvement du système, utilisé essentiellement pour étudier l'écoulement passant à travers lui. Ces frontières se nomment surface de contrôle.

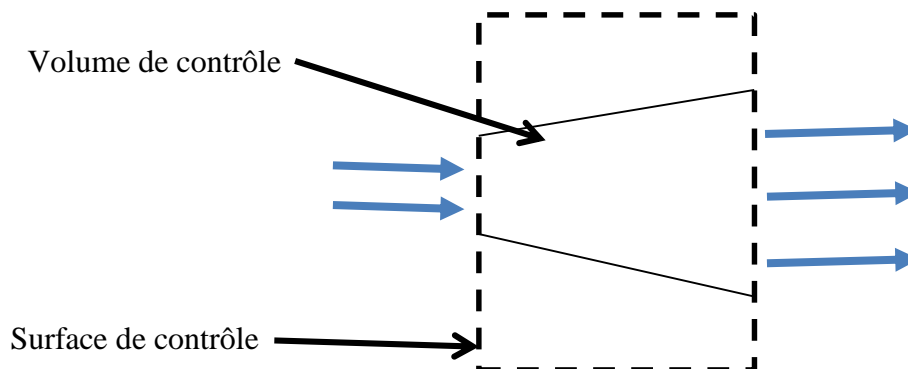
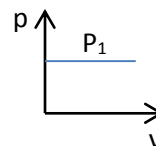


Fig. 1.2 -Volume de contrôle.

Processus (Evolution) : la transformation d'un état à un autre, avec généralement un échange de chaleur et de travail.

Exemples :

- Evolution isobarique : à pression constante



La chaleur récupérée par un gaz parfait à pression constante est :

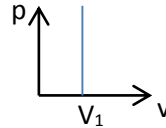
$$\Delta H = C_p \cdot \Delta T$$

Avec :

- ΔH : variation d'enthalpie par unité de masse en (KJ/Kg)
- C_p : chaleur spécifique à pression constante en (KJ/Kg K)

- ΔT : variation de température (K)

➤ Evolution isochore : à volume constant



La chaleur récupérée par un gaz parfait à volume constant est :

$$\Delta U = C_v \cdot \Delta T$$

Avec :

- ΔU : variation d'énergie interne par unité de masse en (KJ/Kg)

- C_v : chaleur spécifique à volume constant en (KJ/Kg.K)

- ΔT : variation de température en (K)

Remarque

$$H = U + \frac{P}{\rho} \text{ Équivaut à } \Delta H = \Delta \left(U + \frac{P}{\rho} \right) = \Delta U + \Delta(rT) = (C_v + r) \cdot \Delta T = C_p \cdot \Delta T$$

Donc : $C_p = C_v + r$: Relation de Mayer

On définit : $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$

Exemple :

- Pour un gaz parfait monoatomique : $C_p = \frac{5}{2} \cdot r$ et $C_v = \frac{3}{2} \cdot r$ donc $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3}$

- Pour un gaz parfait diatomique : $C_p = \frac{7}{2} \cdot r$ et $C_v = \frac{5}{2} \cdot r$ donc $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{7}{5}$

Or $C_p = C_v + r = \frac{C_p}{\gamma} + r$ ou encore $C_p = r \cdot \frac{\gamma}{\gamma-1}$

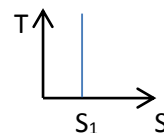
La variation d'enthalpie est par conséquent $\Delta H = C_p \cdot \Delta T = \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right) \cdot \Delta \left(\frac{P}{\rho} \right)$ ou encore $H =$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{P}{\rho}$$

➤ Evolution isentropique : à entropie constante

➤ Evolution isotherme : à température constante

➤ Evolution adiabatique : sans échange de chaleur avec l'extérieur.



Transformation adiabatique : $\frac{P}{\rho^\gamma} = cst$, d'après la loi des gaz parfait : $\frac{P}{\left(\frac{P}{rT}\right)^\gamma} = cst$ donc $\frac{P^{\gamma-1}}{T^\gamma} =$

cst

Cycle : processus qui retourne en son état initial.

Viscosité : est définie par le quotient de la contrainte de cisaillement τ au gradient de vitesse $(\frac{\partial u}{\partial y})$: $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ $[\frac{kg}{m.s}]$, et mesure la résistance du fluide aux cisaillements.

Viscosité cinématique : est définie par $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ $[\frac{m^2}{s}]$, qui mesure la propagation du mouvement au sein du fluide en mouvement.

1.1.2. Écoulement unidimensionnel

Dans certaines applications, les écoulements de fluides compressibles peuvent être étudiés en ne s'attachant qu'à la composante principale v_p des vecteurs vitesse, celle dont la direction est en tous points perpendiculaire au plan normal à la ligne générale de l'écoulement, encore appelée ligne moyenne (figure 1-2). La viscosité de ces fluides étant en général très faible et les écoulements considérés de type turbulent, on peut faire l'hypothèse que cette composante de la vitesse ne varie pas dans une section droite de l'écoulement. La connaissance de l'écoulement, sur le plan cinématique, se réduit alors à la détermination de la valeur v_p de la vitesse en fonction de l'abscisse curviligne s . On a ainsi affaire à un problème d'écoulement monodimensionnel dans lequel on fait l'hypothèse que tous les autres paramètres physiques du fluide ne dépendent que de s .

Les équations générales de l'écoulement monodimensionnel d'un fluide compressible ont pour fondement les équations de continuité, de la quantité de mouvement, de l'énergie, d'une part, l'équation d'état du fluide, d'autre part. On peut y ajouter, pour des écoulements particuliers, des équations traduisant certaines transformations typiques en thermodynamique telles que l'équation de la transformation isentropique d'un gaz parfait ou l'équation liant l'enthalpie aux variables thermodynamiques [5,6].

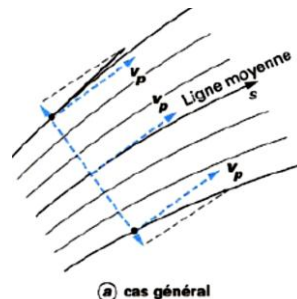


Fig. 1.3 - Écoulements monodimensionnels de gaz

1.2. Équations du mouvement

Pour la forme générale des équations qui régissent les écoulements quelconques, on se reportera à la référence. Nous ne donnons ici que leur forme particulière, applicable au cas étudié, qui est celui d'un écoulement conservatif (sans source ni puits de courant), stationnaire, à l'intérieur d'un tube de courant, c'est-à-dire dans un domaine dont la surface latérale ne peut pas être traversée par le fluide : une canalisation par exemple [5].

1.2.1. Équation de continuité

Cette équation traduit la conservation de la masse. Elle s'écrit :

$$\int \rho_1 V_1 d\Omega_1 = \int \rho_2 V_2 d\Omega_2 \quad (1.1)$$

Où Ω_1 et Ω_2 sont des sections planes perpendiculaires à la ligne moyenne encore appelées sections droites (figure 3) et V_i la composante du vecteur vitesse selon la normale à chacune de ces sections. Compte tenu de l'hypothèse de la constance de cette vitesse sur une section droite et en admettant que la masse volumique ρ soit également constante sur cette section, on peut écrire [7] :

$$\rho_1 V_1 \Omega_1 = \rho_2 V_2 \Omega_2 = \dot{M} \quad (1.2)$$

Où \dot{M} est le débit-masse du fluide dans le tube de courant.

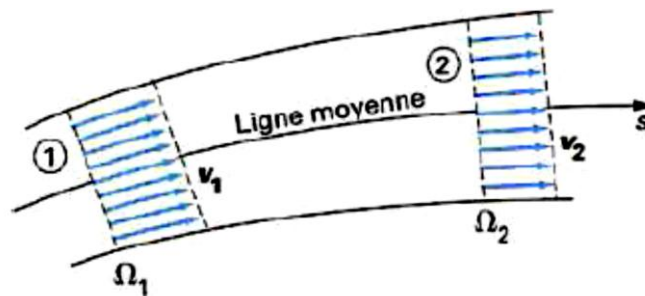


Fig. 1.3 - Écoulements monodimensionnels dans un tube de courant

Cette équation peut encore s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\rho} + \frac{\partial V}{V} + \frac{\partial \Omega}{\Omega} = 0 \quad (1.3)$$

1.2.2. Bilan de la quantité de mouvement

Le bilan de la quantité de mouvement donne lieu à une équation vectorielle qui traduit simplement l'égalité entre les forces d'inertie du fluide et les forces qui lui sont appliquées. Dans le cas classique où on ne considère parmi ces forces que celles qui sont dues à la

pression p , à la pesanteur g et à la viscosité du fluide, cette équation s'écrit de la manière suivante :

$$\rho \frac{DV}{dt} = -\text{grad}P - \rho f - \rho g \text{ grad}z \quad (1.4)$$

Avec : f forces visqueuses par unité de masse,

z abscisse verticale,

$\frac{DV}{dt}$ d'Alembertien de la vitesse, c'est-à-dire sa dérivée totale par rapport au temps.

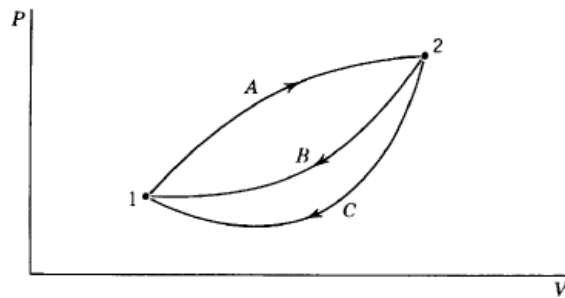
Pour un écoulement monodimensionnel et permanent, on a, en projection sur la tangente à la ligne moyenne [7] :

$$V \frac{dV}{ds} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{ds} + g \frac{dz}{ds} + f = 0 \quad (1.5)$$

Soit
$$VdV + \frac{\partial P}{\rho} + gdz = -fds \quad (1.6)$$

1.3. L'entropie

Considérons deux cycles réversibles composés respectivement des transformations A et B, et A et C [6].



Puisque les deux cycles sont réversibles,

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_A + \int_2^1 \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_B = 0$$

Et
$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_A + \int_2^1 \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_C = 0$$

En soustrayant, on déduit
$$\int_2^1 \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_B = \int_2^1 \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_C = 0$$

Et l'on voit que l'intégrale ne dépend pas du chemin parcouru (pour autant que la transformation soit réversible) et par conséquent que $\left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{\text{rév}}$ est une différentielle exacte.

On désigne par le symbole S la fonction dont la différentielle

$$dS = \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{\text{rév}} \quad (1.7)$$

Et on lui donne le nom d'entropie du système. Par construction, il s'agit d'une variable d'état.

En intégrant de l'état initial 1 jusqu'à l'état final 2 (p. ex. en suivant le chemin A), on aura donc

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{\text{rév}} \quad (1.8)$$

Remarques

- ❖ Bien que pour calculer la variation d'entropie entre deux états 1 et 2, on doive intégrer $\frac{\delta Q}{T}$ le long d'une transformation réversible, l'entropie étant une variable d'état, la différence d'entropie entre deux états est indépendante non seulement du chemin parcouru, mais aussi de la nature (réversible ou non) de la transformation subie.
- ❖ Tout comme l'énergie, l'entropie n'est définie par l'équation (1.8) qu'à une constante près. La valeur absolue de l'entropie n'est fixée que d'après *le troisième principe de la thermodynamique* qui stipule que l'entropie d'une substance pure est nulle au zéro absolu des températures.

La valeur absolue de l'entropie n'est toutefois nécessaire qu'en cas de changement de composition, c.-à-d. en cas de réactions chimiques.

1.3.1 Entropie d'un gaz parfait

L'entropie d'un gaz parfait s'obtient directement des équations de Gibbs (1.9) et (1.10), des expressions de l'énergie interne et de l'enthalpie, et de la loi des gaz parfaits [6].

$$du = Tds - Pdv \quad (1.9)$$

$$dh = Tds + vdP \quad (1.10)$$

$$Tds = du + Pdv = C_v dT + Pdv$$

D'où, en divisant par T

$$ds = C_v \frac{dT}{T} + \frac{P}{T} dv = C_v \frac{dT}{T} + R \frac{dv}{v} \quad (1.11)$$

Et l'on obtient en intégrant

$$s_2 - s_1 = \int_1^2 C_v \frac{dT}{T} + R \ln \frac{v_2}{v_1} \quad (1.12)$$

Semblablement,

$$T ds = dh - v dP = C_p dT - v dP$$

D'où, en divisant par T

$$ds = C_p \frac{dT}{T} - \frac{v}{T} dP = C_p \frac{dT}{T} - R \frac{dP}{P} \quad (1.13)$$

Et l'on obtient en intégrant

$$s_2 - s_1 = \int_1^2 C_p \frac{dT}{T} - R \ln \frac{P_2}{P_1} \quad (1.14)$$

Avec l'approximation de chaleurs massiques constantes, ces deux expressions s'intègrent analytiquement

$$s_2 - s_1 = C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{v_2}{v_1} \quad (1.15)$$

$$s_2 - s_1 = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{P_2}{P_1} \quad (1.16)$$

Si l'on tient compte des variations des chaleurs massiques avec la température, on peut calculer une fois pour toutes les intégrales et les tabuler en fonction de la température.

Exercices d'application**Exercice N°1**

Un volume de 3 m^3 de CO_2 à 10°C et $1,03 \text{ bar}$ est comprimé de façon isotherme jusqu'à un volume de $0,6 \text{ m}^3$.

1. Quelle est la pression résultante ?
2. Quelles seraient la pression et la température si le processus avait été isentropique ?
L'exposant adiabatique γ pour le CO_2 est de $1,28$.

Réponse

1. Cas isotherme : $x = 1 \Rightarrow Pv = cte$ avec $v = \frac{1}{\rho}$. Soit m la masse du CO_2 . On peut donc écrire : $1,03 \frac{3}{m} p_2 \frac{0,6}{m} \Rightarrow p_2 = 5,15 \text{ bar}$
2. Cas isentropique : $x = \gamma = 1,28$ et $(p v)^\gamma = C^{st} \Rightarrow p_2 = 8,08 \text{ bar}$

$$\text{De plus } T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \Rightarrow T_2 = (10 + 273) \left(\frac{5,15}{1,03} \right)^{\frac{1,28-1}{1,28}} \Rightarrow T_2 = 402,4\text{K}$$

Exercice N°2

Un disque de rayon r_0 tourne à une vitesse w dans un bain d'huile de viscosité μ comme illustré sur la figure ci-dessous. En supposant un profil de vitesse linéaire et en négligeant le cisaillement sur les bords du disque, déterminer l'expression du couple visqueux C sur le disque.

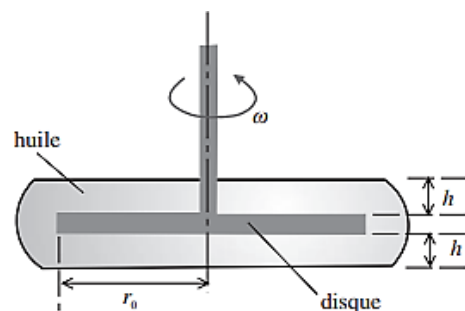


Fig. 1.4 – Schéma de l'installation d'un disque tournant dans un bain d'huile.

Réponse

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \mu \frac{r.w}{h} \text{ sur les deux cotés .}$$

$$\text{Or : } dC = 2(r \tau dA) = 2 \left\{ r \mu \frac{r.w}{h} 2\pi r dr \right\} = 4 \frac{\mu w \pi}{h} (r^3 dr)$$

$$D'où : C = 4 \frac{\mu w \pi}{h} \int_0^{r_0} (r^3 dr) = 4 \frac{\mu w \pi}{h} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{r_0} = \frac{\mu w \pi r_0^4}{h}$$

Exercice N°3

Sur la figure ci-dessous, estimer la dépression h pour le mercure dans le tube de glace capillaire. L'angle θ représenté sur cette figure vaut 40° .

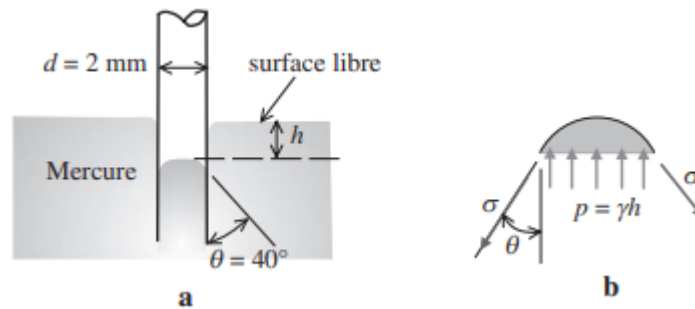


Fig. 1.5 – Tube de glace capillaire dans du mercure.

Réponse

On considère le ménisque du mercure comme un élément solide de poids négligeable. Lorsqu'on ajoute toutes les forces dans la direction verticale, on obtient :

$$-\sigma(\pi d) \cos \theta + p \left(\frac{\pi d^2}{4} \right) = 0$$

$$\text{Et donc } -0,514(\pi \cdot 0,002)(\cos 40^\circ) + 13600 \cdot 9,81 \cdot h \cdot \left(\pi \cdot \frac{0,002^2}{4} \right) = 0$$

Par conséquent : $h = 5,91 \text{ mm}$

Exercice N°4

Un dirigeable ayant un volume de $V = 90\,000 \text{ m}^3$ contient de l'hélium dans les conditions atmosphériques standards (pression de 101 kPa, température de 15°C). Déterminer la masse volumique et le poids total de l'hélium.

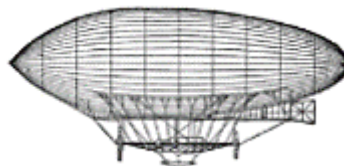


Fig.1.6 – Représentation du dirigeable.

Réponse

À partir de l'équation d'état d'un gaz idéal, on a : $r = \frac{R}{M}$ où R est la constante des gaz parfaits ($R = 8,32 \text{ J/mol K}$) et M est la masse molaire de l'hélium ($M = 4,003 \text{ g/mol}$) et donc $r = 2077 \text{ J/kg K}$. La masse volumique peut alors être calculée :

$$\rho = \frac{P}{rT} = \frac{101.10^3}{2077 \cdot (15 + 273)} = 0,169 \text{ kg/m}^3$$

Ainsi que le poids : $P = \rho \cdot g \cdot V = 0,169 \cdot 9,81 \cdot 9.10^4 = 1,49.10^5 \text{ N}$

Exercice N°5

Un fluide newtonien ayant une densité de $d = 0,92$ et une viscosité cinématique $\nu = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ s'écoule sur plaque plane en régime permanent. Le profil de vitesse près de la surface est montré sur la figure ci-dessous et suit la loi $u(y)/U = \sin(\pi y/2\delta)$.

Déterminer l'amplitude et la direction de la contrainte de cisaillement développée sur la plaque en fonction de U et δ .

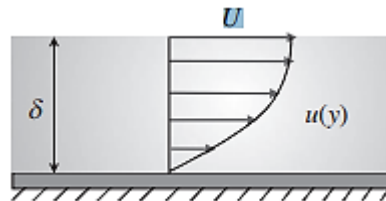


Fig. 1.7 – Représentation de l'écoulement sur une plaque.

Réponse

On a $\tau_{surface} = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)_{y=0}$ où $\mu = \nu \cdot \rho$

Or $\frac{du}{dy} = \frac{\pi U}{2 \delta} \cos\left(\frac{\pi y}{2 \delta}\right)$ et $y = 0$, on a $\left(\frac{du}{dy} \right)_{y=0} = \frac{\pi U}{2 \delta}$

Comme $\rho = d \cdot \rho_{H_2O} = 0,92 \cdot 1000 = 920 \text{ kg/m}^3$

D'où $\tau_{surface} = \rho \cdot \nu \cdot \frac{\pi U}{2 \delta} = 920 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{U}{\delta} = 0,578 \frac{U}{\delta} \text{ N/m}^2$

Exercice N°6

Une grande plaque mobile se trouve entre deux grandes plaques fixes comme illustré sur la figure ci-dessus. Deux fluides newtoniens ayant des viscosités indiquées sur la figure se trouvent de part et d'autre de la plaque mobile, le profil de vitesse étant linéaire. Déterminer

l'amplitude et la direction des contraintes de cisaillement qui agissent sur les murs fixes lorsque la plaque mobile se déplace à une vitesse de $U = 4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. On supposera que la distribution des vitesses entre les parois de part et d'autre de la plaque mobile est linéaire

$$\begin{array}{l} \text{plaq} \\ \text{mobi} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Par conséquent : } \tau_1 = \mu_1 \frac{U}{b_1} = 0,02 \times \frac{4}{6 \times 10^{-3}} = 13,3 \text{ N}\cdot\text{m}^{-2} \\ \text{Et : } \tau_2 = \mu_2 \frac{U}{b_2} = 0,01 \times \frac{4}{3 \times 10^{-3}} = 13,3 \text{ N}\cdot\text{m}^{-2}. \\ \text{Les deux contraintes visqueuses sont égales sur les parois fixes.} \end{array}$$

Réponse

$$\text{On a } \tau = \mu \frac{du}{dy} = \mu \frac{U}{b}$$

$$\text{Par conséquent : } \tau_1 = \mu_1 \frac{U}{b_1} = 0,02 \cdot \frac{4}{6 \cdot 10^{-3}} = 13,3 \text{ N/m}^2$$

$$\text{Et } \tau_2 = \mu_2 \frac{U}{b_2} = 0,01 \cdot \frac{4}{3 \cdot 10^{-3}} = 13,3 \text{ N/m}^2$$

Les deux contraintes visqueuses sont égales sur les parois fixes.

Exercice N°7

Dans un appareillage piston-cylindre, le volume initial d'air est de 90 litres à une pression de 130 kPa et une température de 26 °C. Si la pression est doublée alors que le volume décroît jusqu'à 56 litres, calculer la température finale et la masse volumique de l'air

Réponse

$$\rho_1 = \frac{P_1}{rT_1} = \frac{130 \cdot 10^3}{287 \cdot (26 + 273)} = 1,515 \text{ kg/m}^3$$

Par conséquent, la masse de l'air correspondante est :

$$m = 1,515 \cdot 0,09 = 0,1364 \text{ kg}$$

$$\text{Donc : } \rho_2 = \frac{P_2}{rT_2} \Rightarrow \frac{0,1364}{0,056} = \frac{2 \cdot (130 \cdot 10^3)}{287 \cdot T_2}$$

$$\text{D'où : } T_2 = 372 \text{ K et } \rho_2 = \frac{0,1364}{0,056} = 2,44 \text{ kg/m}^3$$

Exercice N°9

Donner l'expression de la relation de conservation de l'énergie interne sous forme enthalpique.

Réponse

En remplaçant l'enthalpie massique par son expression en fonction de l'énergie massique et de la pression :

$$h = e + \frac{p}{\rho}$$

Et donc $\frac{dh}{dt} = \frac{de}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt}$

En utilisant l'équation de conservation de la masse, cela conduit :

$$\rho \frac{dh}{dt} = \rho \frac{de}{dt} + \frac{dp}{dt} + p \vec{\nabla} \cdot \vec{u}$$

On introduisant dans l'équation conservation de l'énergie interne :

$$\rho \frac{de}{dt} = -p \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \bar{s} : \bar{\varepsilon} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\varphi} = \rho \frac{dh}{dt} - \frac{dp}{dt} - p \vec{\nabla} \cdot \vec{u}$$

Soit :

$$\rho \frac{dh}{dt} = \frac{dp}{dt} - \bar{s} : \bar{\varepsilon} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\varphi}$$

Comme l'enthalpie dépend de la température et de la pression :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial h}{\partial T} \frac{dT}{dt}$$

De plus, on montre que la différentielle totale exacte de l'enthalpie spécifique est (le lecteur est encouragé à se reporter à un ouvrage de thermodynamique pour la démonstration) : $dh =$

$C_p dT + (k + \nu) dp$ avec $C_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p$ qui est la chaleur massique à pression constante et

$k = -T \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T$ où s est l'entropie spécifique et $\nu = \frac{1}{\rho}$ est le volume massique. On a alors :

$$\frac{\partial h}{\partial p} = \nu - T \left(\frac{\partial \nu}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{\rho} T \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{\rho} + \frac{T}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{\rho} (1 - T\beta_p)$$

Où : $\beta_p = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$ est le coefficient de dilatation thermique à pression constante.

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\rho} (1 - \beta_p T) \frac{dp}{dt} + C_p \frac{dT}{dt}$$

Finalement, la relation de conservation de l'énergie interne s'écrit :

$$\rho \frac{dh}{dt} = (1 - \beta_p T) \frac{dp}{dt} + \rho C_p \frac{dT}{dt} = \frac{dp}{dt} + \bar{s} : \bar{\epsilon} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\varphi}$$

$$\text{Soit : } \rho C_p \frac{dT}{dt} = \beta_p T \frac{dp}{dt} + \bar{s} : \bar{\epsilon} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\varphi}$$

Remarque : pour les gaz assimilables à des gaz parfaits on a $\beta_p = \frac{1}{T}$

La densité de flux de chaleur φ est donnée par la loi phénoménologique de Fourier :

$$\vec{\varphi} = -\lambda \vec{\nabla} T$$

En utilisant la dérivée particulière, l'équation de conservation de l'énergie s'écrit alors :

$$\rho C_p \left(\frac{dT}{dt} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T \right) = \beta_p T \frac{dp}{dt} + \bar{s} : \bar{\epsilon} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\varphi}$$

On retrouve dans cette équation les deux modes de transfert de la chaleur :

- la diffusion $\vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T)$
- le transport (ou convection) $\rho C_p \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T$

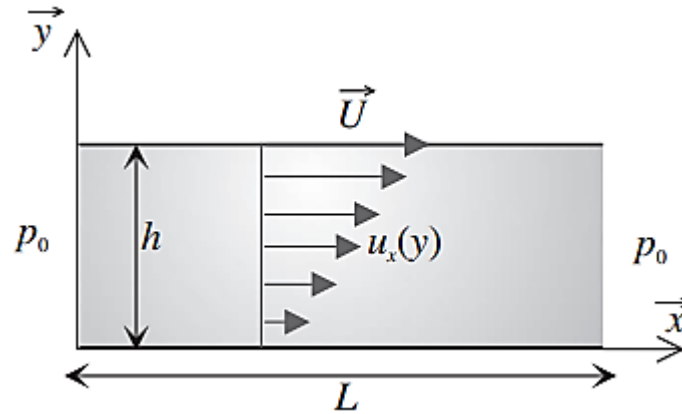
Le terme source $\bar{s} : \bar{\epsilon}$ (produit tensoriel du tenseur de vitesse de déformation par le tenseur déviateur des contraintes) est le terme de dissipation thermique et ne doit pas être considéré comme un mode de transfert de la chaleur mais il constitue un mode de production de la chaleur.

Exercice N°10

On considère l'écoulement plan entre deux plaques distantes de h dont l'une est mobile à la vitesse U et l'autre est fixe. La largeur des parois est grande devant h ainsi que la longueur notée L . Le fluide a un comportement newtonien et l'écoulement est incompressible et permanent. On néglige le poids du fluide devant les forces de viscosité.

1. Montrer que le champ de vitesse est de la forme : $\vec{u} = (u_x(y), 0, 0)$.

2. À partir des équations de Navier-Stokes, montrer que le champ de pression est uniforme en tout point et égal à la pression atmosphérique p_0 et que $u_x(y) = Uy/h$
3. Calculer le débit masse de l'écoulement.



Réponse

1. L'écoulement est dans le plan (xy) et unidirectionnel selon x , on peut donc admettre que les composantes de vitesse selon y et z sont nulles. D'autre part l'écoulement est incompressible donc :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

On en déduit donc que

$$\vec{u} = (u_x(y), 0, 0)$$

2. Les équations de Navier-Stokes se réduisent à :

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \cancel{\rho g_x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \cancel{\rho g_y} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \cancel{\rho g_z} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Soit : } \begin{cases} 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

Les 2 dernières égalités nous disent que la pression ne dépend que de x et comme la vitesse ne dépend que de y , la première égalité nous dit que :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = K, K \text{ est une constant}$$

Ceci conduit à : $p(x) = Kx + C$ (où C est une constante). Comme $p = p_0$ en $x = 0$ et $x = L$, on en déduit donc que $K = 0$ et $p = p_0$ partout. Les conditions d'adhérence du fluide aux parois sont :

$$\begin{cases} u_x(y = 0) = 0 \\ u_x(y = h) = U \end{cases} \quad (1)$$

L'intégration $\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$ sous la forme

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow u_x = ay + b$$

On trouve les constantes a et b avec la relation (1), ce qui conduit à :

$$u_x(y) = Uy/h$$

3. le débit masse par unité de largeur de plaque est :

$$Q_m = \rho \int_0^h u_x(y) dy = \rho U \frac{h}{2}$$

Exercices supplémentaires

Exercice N°11

Déterminer le couple requis pour faire tourner un cylindre vertical de diamètre 50 mm à une vitesse angulaire de $30 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ qui se trouve à l'intérieur d'un autre cylindre de diamètre 50,2 mm. L'entrefer entre les deux cylindres est rempli d'huile SAE (Society of American Engineers) de viscosité $\mu = 0,1 \text{ Pa.s}$ à $20 \text{ }^\circ\text{C}$. La longueur du cylindre interne est de 200 mm. On néglige les effets de bords supérieur et inférieur et on suppose que la distribution de vitesse dans l'entrefer est linéaire dans la direction radiale. Si la température de l'huile augmente jusqu'à la valeur de $80 \text{ }^\circ\text{C}$ pour laquelle la viscosité est égale à $\mu = 8 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s}$, quel serait alors le pourcentage de changement de la valeur du couple ?

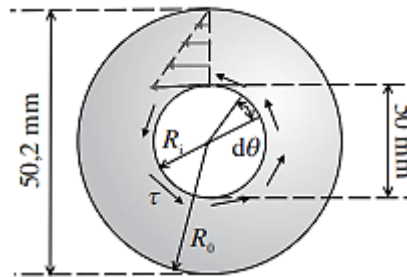


Fig.1.8 – Vue de dessus de l'écoulement entre deux cylindres

(le cylindre intérieur tourne à $30\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$).

Exercice N°12

À une profondeur de 6,4 km dans l'océan la pression spécifique est d'environ 666 bars (voir figure ci-dessous). On suppose que le poids spécifique est de $\gamma_1 = 10\text{ kN}\cdot\text{m}^{-3}$ à la surface libre et le module d'élasticité moyen est de $E = 22\,000\text{ bars}$.

1. Quel est le changement de volume massique entre la surface libre et celle à la profondeur de 6,4 km ?
2. Quel est le volume massique à cette profondeur ?
3. Quel est le poids spécifique à cette profondeur ?
4. Quel est le pourcentage de changement dans la valeur du volume massique et celui du poids spécifique ?

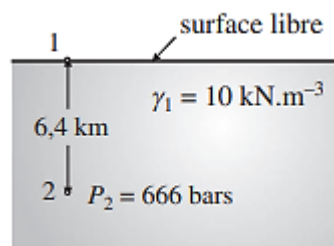


Fig. 1.9 – Schéma qualitatif de l'océan.

Exercice N°13

Une dalle de 18 kg (voir figure ci-dessous) glisse sur un plan incliné de 15° par rapport à l'horizontale et sous 3 mm de film d'huile de viscosité $\mu = 8,14\text{ Pa}\cdot\text{s}$; la surface de contact est de $S = 0,3\text{ m}^2$. Calculer la vitesse terminale U_T de la dalle.

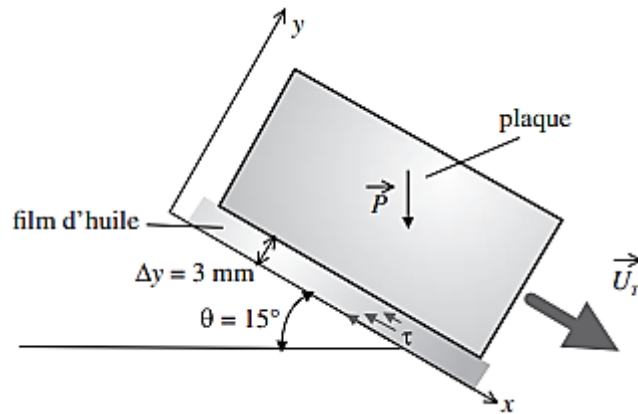
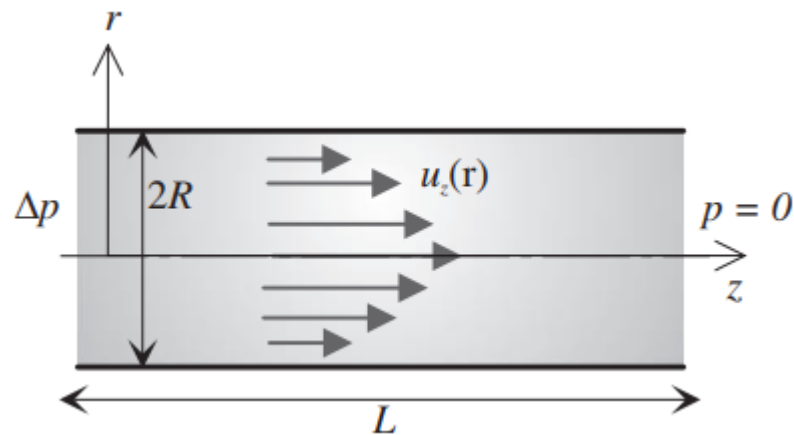


Fig. 1.10 – Glissement d'une dalle sous un film d'huile.

Exercice N°14

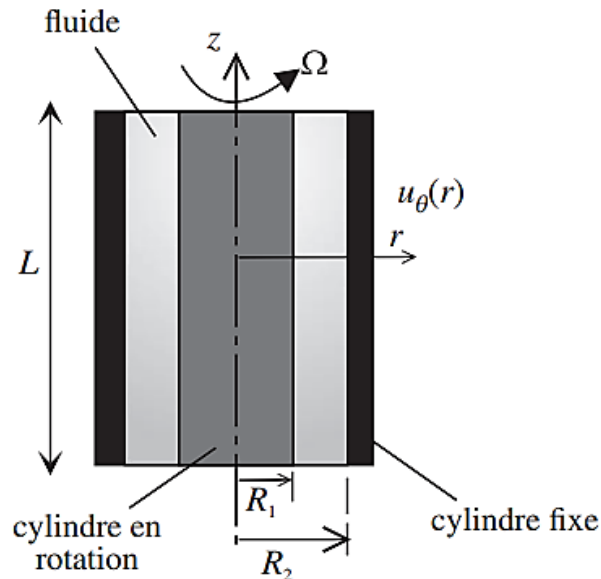
Un fluide est mis en écoulement dans une conduite cylindrique de rayon R sous l'effet d'une surpression Δp entre l'entrée et la sortie de la conduite. On note L la longueur de la conduite. Le fluide est newtonien de viscosité dynamique μ et de masse volumique ρ et l'écoulement est incompressible et permanent. On néglige le poids du fluide devant les forces de viscosité.



1. Montrer que le champ de vitesse est de la forme : $\vec{u} = (0, 0, u_z(r))$.
2. À partir des équations de Navier-Stokes, montrer que le champ de pression est $p = \Delta p(1 - \frac{z}{L})$ et que $u_z(r) = \frac{\Delta p(R^2 - r^2)}{4\mu L}$. Donner l'expression du débit masse de l'écoulement.
4. Donner l'expression de la contrainte à la paroi.

Exercice N°15

Un fluide est mis en écoulement dans l'entrefer de deux cylindres coaxiaux, le cylindre intérieur est de rayon R_1 et le cylindre extérieur est de rayon R_2 . Le cylindre intérieur est en rotation uniforme avec une vitesse angulaire Ω . On note L la hauteur des cylindres. Le fluide a un comportement newtonien (viscosité dynamique μ et masse volumique ρ) et l'écoulement est incompressible et permanent. On néglige le poids du fluide devant les forces de viscosité.



1. Montrer que le champ de vitesse est de la forme : $\vec{u} = (0, u_\theta(r), 0)$
2. À partir des équations de Navier-Stokes, montrer que le champ de pression est uniforme en tout point du fluide et donner l'expression de $u_\theta(r)$.
3. Calculer le couple à appliquer au cylindre extérieur pour le maintenir fixe dans ces conditions.

Chapitre

2

Écoulements compressibles

2.1. Equations générales

On considère un élément de fluide de volume V et la pression exercée sur cet élément fluide est P . La compressibilité est une propriété des fluides. Les liquides ont une très faible valeur de la compressibilité. Il est connu qu'un fort gradient de pression est synonyme d'un écoulement à forte vitesse (cas des gaz). De tels écoulements où la masse volumique est variable sont connus comme des écoulements compressibles [4].

2.1.1. Vitesse du son

Le son est produit par des variations faibles de la pression du milieu dans lequel il se propage. Ainsi, la vitesse du son correspond à la propagation de ces variations de pression. Imaginons un milieu fluide, un gaz par exemple, dans lequel on observe localement une différence de pression dP entre la partie droite 1 et la partie gauche 2 du milieu (figure 2-1) et admettons que la zone de variation soit plane et de dimension infinie. L'onde sonore, se déplace, par définition, à la vitesse du son V_s . Dans le mouvement relatif onde sonore-fluide, le fluide se déplace par rapport à l'onde à la même vitesse. La section Ω de part et d'autre de l'onde de pression étant la même, l'équation (1.3) chapitre 1 s'écrit [4, 8] :

$$\frac{\partial \rho}{\rho} + \frac{\partial V_s}{V_s} = 0 \quad (2.1)$$

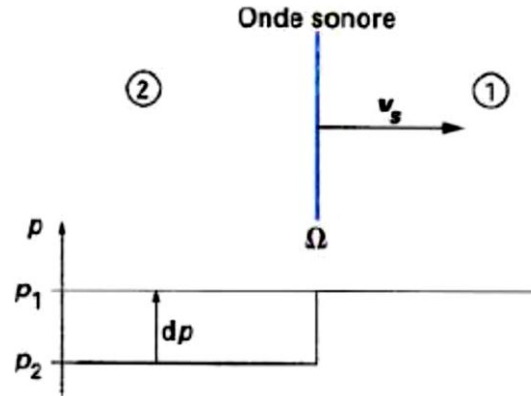


Fig. 2.1 - Propagation d'une onde sonore.

En admettant que la traversée de l'onde de pression se fasse de manière réversible, donc sans frottement compte tenu notamment de la valeur infiniment petite de l'épaisseur du front d'onde, l'équation (1.6) chapitre 1 devient, en négligeant la pesanteur ou en supposant que l'onde se déplace horizontalement [4] :

$$V_s dV_s + \frac{dP}{\rho} = 0 \quad (2.2)$$

La combinaison de ces deux équations [(1) V_s^2 - (2)] donne :

$$V_s = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}} \quad (2.3)$$

Compte tenu que l'on a affaire à un phénomène local rapide, on peut admettre que ce phénomène est adiabatique. Avec l'hypothèse de réversibilité, il est donc isentropique. En admettant que le fluide considéré soit un gaz parfait idéal (*gaz parfait* pour lequel le coefficient $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$, (rapport des capacités thermiques massiques à pression et à volume constants, est constant), l'équation de la transformation isentropique est :

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = cst \quad (2.4)$$

Soit

$$\frac{dP}{d\rho} = \gamma \frac{P}{\rho}$$

Dans ce cas, la vitesse du son a pour expression :

$$V_s = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} \quad (2.5)$$

Ou, en tenant compte de l'équation d'état des gaz parfaits :

$$V_s = \sqrt{\gamma r T} \quad (2.6)$$

Si le fluide n'est pas un gaz parfait, en considérant toujours la transformation isentropique, on peut écrire, d'une manière générale :

$$V_s^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s$$

Or, en notant que le coefficient isentropique vaut, par définition :

$$k_s = -\frac{v}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial v} \right)_s = \frac{\rho}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s$$

Où $v = \frac{1}{\rho}$ est le volume massique

On a
$$V_s^2 = k_s \frac{P}{\rho} \tag{2.7}$$

La vitesse du son peut être reliée au coefficient de compressibilité isentropique K_s du fluide :

$$K_s = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial P} \right)_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_s = \frac{1}{P k_s} \tag{2.8}$$

Soit avec (2.7)
$$V_s^2 = \frac{1}{\rho K_s} = \frac{\bar{v}}{\bar{M}} \frac{1}{K_s}$$

Où \bar{v} et \bar{M} sont respectivement le volume molaire et la masse molaire du fluide.

La vitesse du son est donc d'autant plus faible que la compressibilité du fluide est plus grande.

2.1.2. Condition de stagnation

En supposant que le fluide compressible se décharge d'un réservoir de très grandes dimensions; les conditions dans cet état (générateur) seront appelées les conditions initiales, ce qui entraîne $V = V_0 \approx 0$ (avec les indices 0 ou i marquant les propriétés au réservoir), et si on considère un gaz parfait [9-14]: $C_p = \left. \frac{\partial h}{\partial T} \right|_p$ et $C_p = cst$

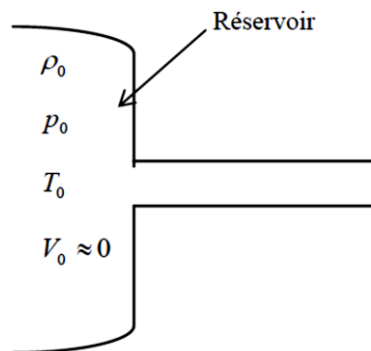


Fig. 2.2 - Conditions initiales.

On aura : $C_p T_i = C_p T_0 = C_p T + \frac{1}{2} V^2$

Sachant que : $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$, $C_p - C_v = r \Rightarrow C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$

Qui donne $\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_0}{\rho_0} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} V^2$

Et puisque la vitesse du son pour un gaz parfait est donnée par :

$a^2 = \gamma R T = \gamma \frac{P}{\rho}$, on obtient :

$$\frac{a_0^2}{\gamma - 1} = \frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} V^2 \quad (2.9)$$

Où a_0 et a dénotent respectivement les vitesses du son aux conditions initiales (au réservoir) et statique.

En introduisant le nombre de Mach comme paramètre ($M = \frac{V}{a}$), l'équation (2.9) peut être

réécrite comme suit : $\frac{a_0^2}{a^2} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$

Et avec $a^2 = \gamma R T$ le rapport des températures totale et statique est :

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

Où : T_0 : la température totale

T : la température statique.

M : le nombre de Mach.

Si l'écoulement est isentropique $\frac{P}{\rho^\gamma} = cst$, on peut écrire :

$$\left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\gamma - 1} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

Où P_0 et ρ_0 dénotent respectivement la pression et la densité isentropiques de stagnation.

Pour établir la relation entre les caractéristiques de deux points (1) et (2) d'un même écoulement :

- En (1) $\frac{T_0}{T_1} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2$

- En (2) $\frac{T_0}{T_2} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2$

$$\text{Donc : } \frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}$$

De la même façon on peut établir des relations entre les pressions et les masses volumiques.

Remarque :

Si $M = 1$ ($V = a$), l'état de l'écoulement est appelé état critique.

Il est déterminé en fonction de l'état générateur : $\frac{T_0}{T_c} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} = \frac{\gamma+1}{2}$

2.1.3. Différentes formes de l'équation d'énergie

2.1.3.1. Mouvement permanent d'un fluide compressible non visqueux

2.1.3.1.1. Equation de l'écoulement d'un fluide compressible non visqueux

L'équation générale de l'écoulement d'un fluide non visqueux s'écrit pour une unité de masse [15,16]:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} V^2 + \vec{\nabla} \wedge \vec{V} \wedge \vec{V} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P \quad (2.10)$$

\vec{F} : force volumique, \vec{V} : vitesse, $\vec{\nabla} T = \overrightarrow{grad} T$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \text{div} \vec{V}$,

$\nabla \nabla T = \nabla^2 T = \Delta T$ (la placcien)

Si l'écoulement est permanent $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$ dans un fluide compressible, \vec{F} (force active) due en générale à la pesanteur est négligeable par rapport à la force de pression l'équation (2.10) devient :

$$\frac{1}{2} \vec{\nabla} V^2 + \vec{\nabla} \wedge \vec{V} \wedge \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \quad (2.11)$$

Multipliant scalairement par un déplacement $d\vec{s} = \vec{V} dt$ pris selon la trajectoire du fluide

$$\frac{1}{2} \vec{\nabla} V^2 \cdot d\vec{s} + d\vec{s} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{V} \wedge \vec{V} + \frac{1}{\rho} d\vec{s} \cdot \vec{\nabla} p = 0$$

$d\vec{s} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{V} \wedge \vec{V} = \vec{V} dt (\vec{\nabla} \wedge \vec{V} \wedge \vec{V}) = 0$ car le vecteur $\vec{\nabla} \wedge \vec{V} \wedge \vec{V} \perp \vec{V} \cdot dt$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \vec{\nabla} V^2 \cdot d\vec{s} + \frac{1}{\rho} d\vec{s} \cdot \vec{\nabla} p = 0 \quad (2.12)$$

$\Rightarrow \vec{\nabla} \frac{1}{2} V^2 + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p = 0$ on peut écrire cette équation sous la forme :

$$d \left(\frac{1}{2} V^2 \right) + \frac{1}{\rho} dP = 0 \quad (2.13)$$

$$\Rightarrow \int d\left(\frac{1}{2}V^2\right) + \int \frac{dP}{\rho} = cst \Rightarrow \frac{1}{2}V^2 + \int \frac{dP}{\rho} = cst \quad (I)$$

a) Interprétation énergétique

Intégrant (2.13) entre deux points (1) et (2) d'un fluide

$$\int_{V_1}^{V_2} d\left(\frac{1}{2}V^2\right) + \int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{\rho} = 0 \Rightarrow \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{\rho} = 0$$

$$\rho = \frac{1}{v}, \quad \int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{\rho} = w_T|_1^2 \text{ travail de transvasement par kg de (1) à (2)}$$

Donc l'équation exprime la conservation de l'énergie mécanique pour l'un de masse de fluide, la diminution de l'énergie cinétique entre deux points du même filet fluide $\left(\frac{V_2^2 - V_1^2}{2}\right)$ est égale au travail de transvasement reçu par le fluide.

b) Cas d'un écoulement isentropique de gaz parfait

$$\frac{1}{2}V^2 + \int \frac{dP}{\rho} = cst \text{ Écoulement permanent compressible non visqueux.}$$

$$\frac{P}{\rho} = rT, \quad \frac{P}{\rho^\gamma} = cst, \quad P = A \cdot \rho^\gamma \Rightarrow dP = A\gamma\rho^{\gamma-1}d\rho$$

$$\frac{1}{2}V^2 + \int \frac{A\gamma\rho^{\gamma-1}d\rho}{\rho} = \frac{1}{2}V^2 + \int A\gamma\rho^{\gamma-2}d\rho = cst$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}V^2 + A \frac{\gamma}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1} = \frac{1}{2}V^2 + A \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\rho^\gamma}{\rho} = cst \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}V^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} = cst \quad (II)$$

Dite relation de Barré de Saint-Venant ou (B-S-V) que l'on peut aussi mettre sous la forme :

$$\frac{1}{2}V^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} rT = cst$$

Et comme $C_p = \frac{\gamma r}{\gamma-1}$ chaleur massique spécifique à pression constante.

En intégrant entre deux points 1 et 2 d'un écoulement on peut mettre la relation sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{V_1^2 - V_2^2}{2} &= \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1} \right) = C_p (T_2 - T_1) = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_1}{\rho_1} \left[\frac{P_2 \rho_1}{\rho_2 P_1} - 1 \right] \\ \frac{V_1^2 - V_2^2}{2} &= \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_1}{\rho_1} \left[\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_1}{\rho_1} \left[\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] \end{aligned} \quad (III)$$

2.1.3.1.2. Equation générale d'écoulement adiabatique d'un fluide compressible visqueux

L'expression générale du premier principe de la thermodynamique appliqué à l'unité de masse d'un écoulement est [4, 15,16] :

$$(Q_e)_1^2 = H_2 - H_1 + W_{V_2} - W_{V_1} + W_{z_2} - W_{z_1}$$

Q_e : chaleur échange avec l'extérieur.

H : enthalpie du fluide

W_V : Énergie cinétique du fluide

W_z : Énergie potentielle du fluide due à la pesanteur (négligeable).

Pour un écoulement adiabatique ($Q_e = 0$) cette équation devient :

$$H + \frac{V^2}{2} = cst$$

La somme $H + \frac{V^2}{2}$ est appelée énergie totale du fluide qui est constante dans un écoulement adiabatique. Elle pourra aussi s'appliquer à la vapeur d'eau ou à un fluide frigorigène.

a) Gaz parfait en écoulement adiabatique irréversible

Pour un gaz parfait $H = C_p T = \frac{\gamma}{\gamma-1} rT$ l'équation de l'écoulement adiabatique s'écrit :

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} = C^{st} , \quad C_p T + \frac{V^2}{2} = C^{st}$$

2.1.3.1.3. Equation générale pour l'écoulement non permanent d'un fluide compressible visqueux

L'équation vectorielle de l'écoulement est :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} V^2 + \vec{\nabla} \wedge \vec{V} \wedge \vec{V} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \vec{f}_\eta \quad (V)$$

En multipliant scalairement par un élément de trajectoire $\overrightarrow{ds} = \overrightarrow{V} dt$, on obtient, en négligeant \overrightarrow{F} (due à la pesanteur) [5,15,16] :

$$\overrightarrow{V} \cdot dt \cdot \frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{ds} \cdot \overrightarrow{\nabla} V^2 = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{ds} \cdot \overrightarrow{\nabla} P + \overrightarrow{ds} \cdot \overrightarrow{f}_\eta$$

Le premier terme $\overrightarrow{V} \cdot dt \cdot \frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{V^2}{2} \right) dt$ représente la variation d'énergie cinétique pendant le temps dt .

Le premier membre de l'équation de l'énergie devient donc :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{V^2}{2} \right) dt + \overrightarrow{ds} \cdot \overrightarrow{\nabla} \left(\frac{V^2}{2} \right) = d \left(\frac{V^2}{2} \right) \quad (a)$$

C'est-à-dire $d \left(\frac{V^2}{2} \right)$, différentielle totale de l'énergie cinétique par unité de masse.

- Nous poserons $\overrightarrow{ds} \cdot \overrightarrow{f}_\eta = dW_f = -dQ_f$ (b) : représente le travail des forces de viscosité dans le déplacement ds toujours négatif. L'énergie correspondante apparaît sous forme d'une quantité de chaleur dQ_f .
- Pour le travail des forces de pression $-\frac{1}{\rho} \overrightarrow{ds} \cdot \overrightarrow{\nabla} P$, partant de

$$dP = \frac{\partial P}{\partial t} dt + \overrightarrow{ds} \cdot \overrightarrow{\nabla} P \Rightarrow -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{ds} \cdot \overrightarrow{\nabla} P = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} dt - \frac{dP}{\rho}$$

Compte tenu de l'expression différentielle de l'enthalpie

$$dH = TdS + v dP = TdS + \frac{dP}{\rho}$$

$$\text{On obtient ensuite : } -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{ds} \cdot \overrightarrow{\nabla} P = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} dt + TdS - dH \quad (c)$$

En remplaçant (a), (b) et (c) dans (V) on obtient :

$$d \left(\frac{V^2}{2} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} dt + TdS - dH - dQ_f$$

Mais d'après la définition de l'entropie $dS = \frac{dQ_c + dQ_f}{T}$

$$dQ_c = TdS - dQ_f$$

On obtient donc finalement :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} dt + d \left(H + \frac{V^2}{2} \right) = dQ_c \quad (VII)$$

On vérifie immédiatement que pour un écoulement permanent ($\frac{\partial P}{\partial t} = 0$) et adiabatique ($dQ_c = 0$) on retrouve l'équation $H + \frac{V^2}{2} = C^{st}$

2.1.4. Ecoulement stationnaire isentropique à travers une conduite à section variable

L'écoulement est approximativement unidimensionnel (figure 2.3) avec $V \approx V(x)$, ce qui simplifie la théorie [5,15,16].

Pour l'écoulement unidimensionnel stationnaire, l'équation de continuité informe que le débit massique soit constant : $\dot{m} = \rho VA = C^{st}$

En différenciant logarithmiquement, on obtient :

$$\frac{\partial \rho}{\rho} + \frac{\partial V}{V} + \frac{\partial A}{A} = 0 \quad (2.14)$$

L'équation d'Euler décrivant le mouvement stationnaire le long d'une ligne de courant est :

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\ell} + \frac{d}{d\ell} \left(\frac{1}{2} V^2 \right) = 0 \quad \text{où : } \ell \text{ est l'abscisse curviligne.}$$

Ou bien :

$$\frac{dP}{\rho} + V dV = 0 \quad (2.15)$$

La vitesse du son est $a^2 = \frac{dP}{d\rho}$ d'où $dP = a^2 d\rho$

En éliminant dP dans l'équation (2.15), on obtient : $\frac{a^2 d\rho}{\rho} + V dV = 0 \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{V dV}{a^2}$

Puisque $M^2 = \frac{V^2}{a^2}$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{dV}{V} \quad (2.16)$$

Si on substitue $\frac{d\rho}{\rho}$ dans l'équation (2.14), on aura :

$$\frac{\partial V}{V} = \frac{1}{(M^2-1)} \frac{\partial A}{A} \quad (2.17)$$

Qui est la première équation de la théorie d'Hugoniot donnant la relation entre le changement de la section d'une canalisation et la vitesse de l'écoulement compressible.

Aussi on a d'après l'équation (2.15) :

$$\frac{\partial V}{V} = -\frac{1}{M^2 a^2} \frac{\partial \rho}{\rho}$$

et puisque $a^2 = \frac{\gamma P}{\rho}$

$$\frac{\partial V}{V} = - \frac{1}{\gamma M^2} \frac{\partial P}{P} \quad (2.18)$$

Qui représente la deuxième équation d'Hugoniot.

L'inspection de ces deux équations (2.18) et (2.17) nous révélera un aspect fascinant de l'écoulement compressible : les variations des propriétés ont des sens opposés pour les écoulements subsonique et supersonique à cause du terme $M^2 - 1$. Il y'a quatre combinaisons du changement de section et du nombre de Mach.

1. Si $M = 1$; écoulement sonique, puisque une accélération infinie est physiquement impossible (équation 2. 17), donc $dA = 0$, qui signifie mathématiquement une section minimale (col) ou maximale (figure 2-3), mais ce dernier cas (maximum) n'a pas de sens physique. Par conséquent, si l'écoulement est sonique, il aura lieu dans la section minimale de la canalisation (appelée le col).
2. Si $M < 1$; écoulement subsonique, quand la section A augmente la vitesse V diminue et vice-versa.
3. Si $M > 1$; écoulement supersonique, toute augmentation de la section A implique une augmentation de la vitesse V et vice-versa.

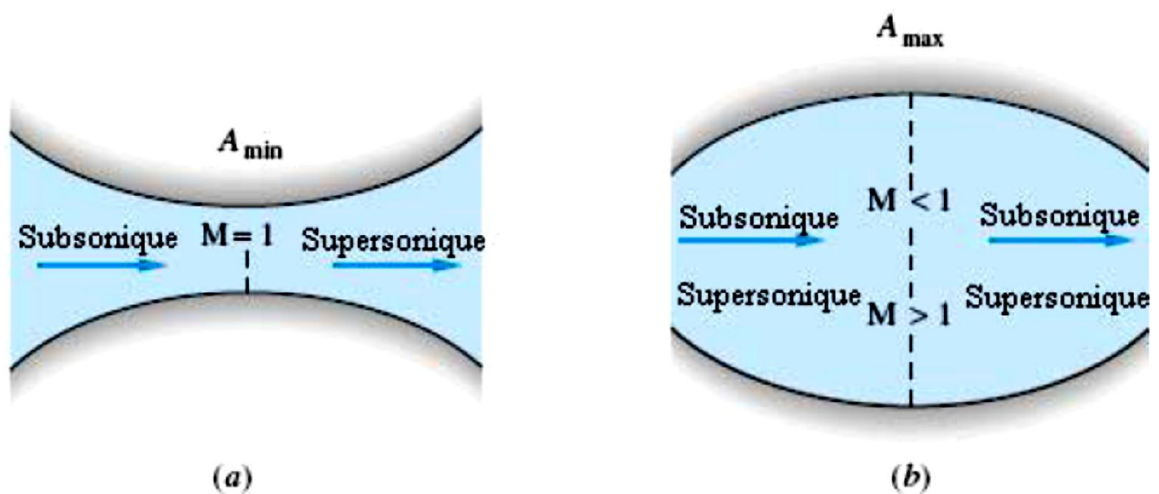
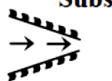
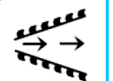
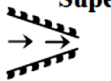



Fig. 2.3 - Ecoulement compressible dans une canalisation de section variable :
 (a) l'écoulement accélère graduellement de l'état subsonique au supersonique;
 (b) l'écoulement dans cette configuration n'est plus sonique de point de vue physique.

4. Ainsi d'après l'équation (2.18), toute variation de la vitesse V entraîne une variation de la pression P dans le sens inverse. La table suivante récapitule les quatre cas déjà cités :

| Écoulement | | | | |
|----------------------------------|---|--|---|---|
| Propriétés | Subsonique | | Supersonique | |
| |  |  |  |  |
| Section | - | + | - | + |
| Vitesse / nombre de Mach | + | - | - | + |
| Densité / pression / température | - | + | + | - |

2.1.4.1. Débit massique d'une canalisation de section variable

Le point essentiel dans l'étude des écoulements compressibles dans les canalisations avec changement de section, est la détermination du débit massique \dot{m} en fonction des autres propriétés de l'écoulement, on a l'équation [4,5]: $\dot{m} = \rho VA$

Substituons V par son expression d'après l'équation de Saint-Venant :

$$\dot{m} = \rho A \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{P_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}$$

Et puisque l'écoulement est isentropique : $\frac{P_0}{\rho_0^\gamma} = \frac{P}{\rho^\gamma} = c^{st} \Rightarrow \rho = \rho_0 \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$

D'où :

$$\dot{m} = \rho_0 A \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{P_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}$$

$$\Rightarrow \dot{m} = \rho_0 A \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{P_0}{\rho_0}} \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{1 - \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

$$\Rightarrow \dot{m} = \rho_0 A \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{P_0}{\rho_0}} \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{1 - \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \tag{2.19}$$

2.5 Tuyère convergente-divergente

Une tuyère convergente-divergente (aussi appelée tuyère de Laval) est représentée dans la figure (2.5a). Si la pression en aval P_b est suffisamment faible, il existera un écoulement supersonique dans la portion divergente de la tuyère aussi qu'une variété de conditions de choc pourra exister [4,5].

- ❖ Pour les cas A et B (figure 2-5b), la pression P_b n'est pas suffisamment faible pour induire un écoulement sonique au col, et l'écoulement est subsonique à travers

l'ensemble de la tuyère (convergente-divergente). La distribution de pression est calculée d'après les relations isentropiques déjà établies. La pression de sortie est $P_e = P_b$ et le jet est subsonique.

- ❖ Pour le cas C, le rapport des sections $\frac{A_e}{A_{col}}$ est exactement égal à $\frac{A_e}{A^*}$ pour un nombre de Mach subsonique à la sortie. Le col devient sonique, et le débit massique atteint son maximum (figure 2-5c). l'écoulement dans le reste de la tuyère est subsonique, le jet inclus et $P_e = P_b$.

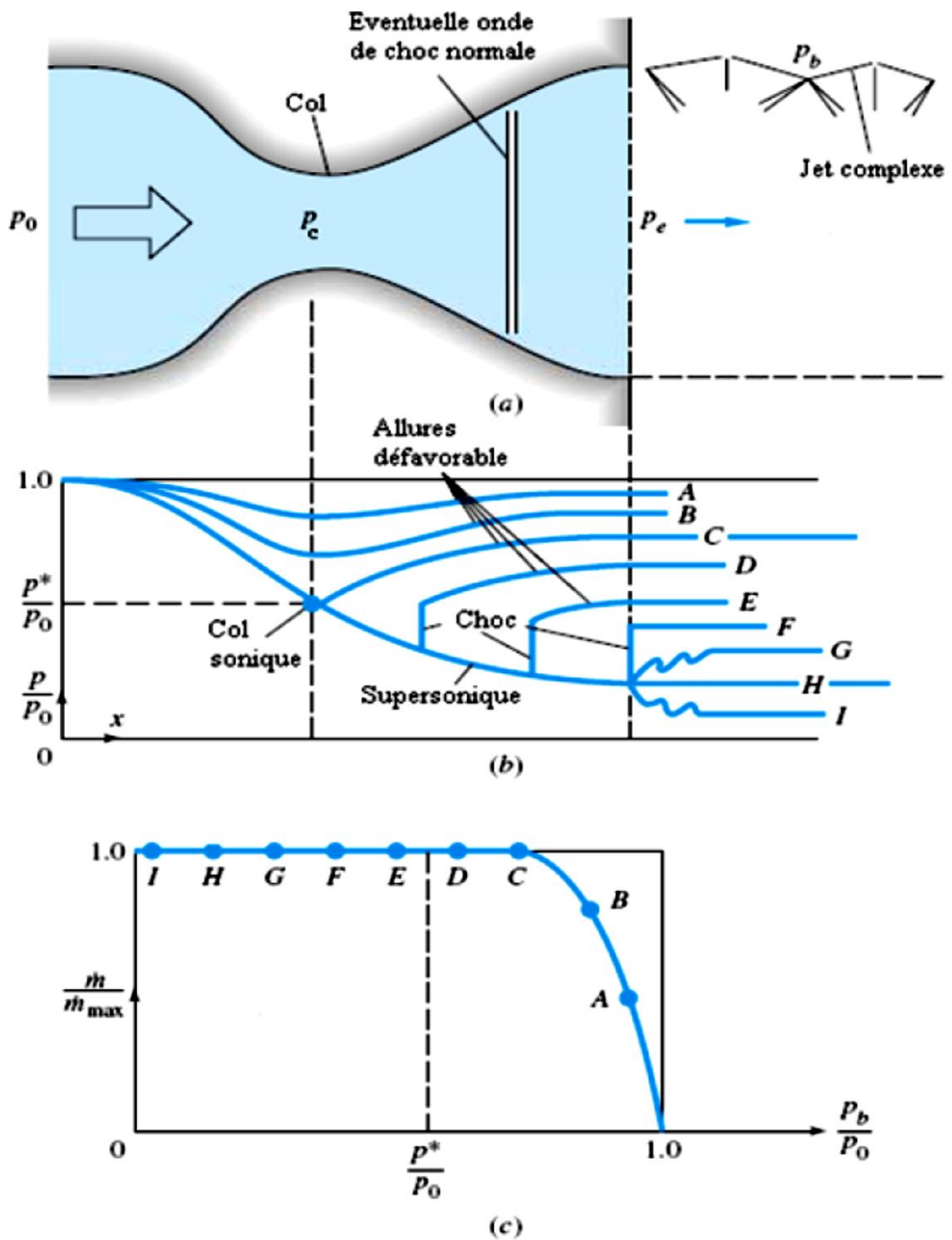


Fig. 2.5 - Tuyère convergente-divergente :

(a) Géométrie de la tuyère et configurations possibles;

(b) distribution des pressions causée par divers pressions aval P_b ;

(c) débit massique [5].

- ❖ Supposons dans ce cas que P_b se trouve entre les cas C et H, qui est impossible d'après les relations de l'écoulement isentropique. Alors, les pressions P_b des cas D à F ont lieu (figure 2-5b). le col reste suffoqué à la valeur sonique. Le débit massique garde sa valeur maximale (figure 2-5c). A la pression en aval du cas F l'onde de choc normale apparaîtra à la sortie de la tuyère. Dans le cas G, l'écoulement présentera des séries complexes d'ondes de choc obliques jusqu'il atteint la pression P_b .
- ❖ Finalement dans le cas I, P_b est inférieure à celle du cas H, mais la tuyère est suffoquée et ne répond plus. L'écoulement à la sortie s'étend en de complexes séries d'ondes supersoniques.

2.3. Ecoulement de Fanno

Cet écoulement adiabatique qui ne respecte pas l'évolution de la section S d'un écoulement isentropique, est essentiellement irréversible. Il est extrêmement fréquent en pratique et est appelé écoulement de Fanno [4]

2.3.1. Ecoulement compressible dans les conduites avec friction (Théorie de FANNO)

Le chapitre (II) a montré l'effet de changement de section sur un écoulement compressible en négligeant le transfert de chaleur et (le frottement) la friction. Nous pourrions maintenant ajouter la friction et le transfert de chaleur au changement de section et considérer les effets couplés, qui sont faits dans des textes avancés. Au lieu de cela, comme une introduction élémentaire, cette section traite seulement l'effet de la friction, en négligeant le changement de section et le transfert de chaleur. Les suppositions de base sont :

1. Ecoulement unidimensionnel, stationnaire et adiabatique
2. Gaz parfait avec des chaleurs spécifiques constantes
3. Conduite à section droite constante
4. Travail mécanique et changements d'énergie potentielle négligeables
5. Contrainte de cisaillement pariétale corrélée par un facteur de friction de Darcy En effet, nous étudions un problème de friction des tuyauteries de type Moody, mais avec de grands changements de l'énergie cinétique, l'enthalpie et la pression dans le courant fluide.

Considérons le volume de contrôle élémentaire de la conduite de section A et la longueur dx dans la figure (5-1). La section est constante, mais d'autres propriétés de flux (P, ρ, T, h, V) peuvent varier avec x .

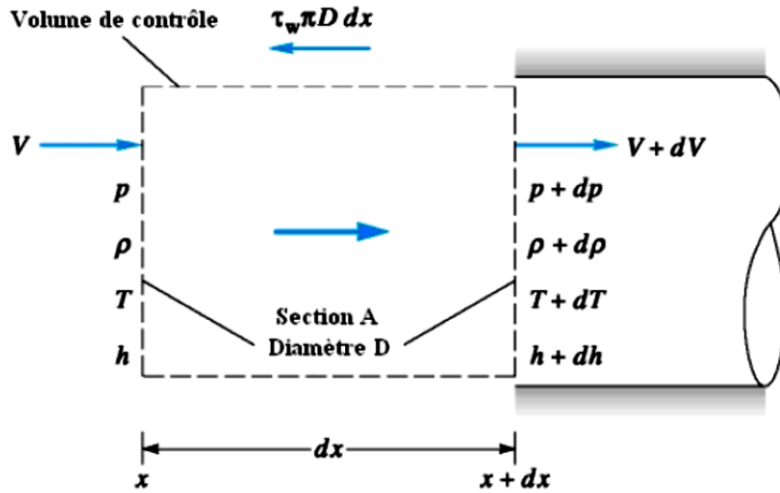


Fig. 2.6 - Volume de contrôle élémentaire pour un écoulement avec friction dans une conduite de section constante.

2.3.2. Équations de l'écoulement de Fanno

Les équations générales, appliquées à ce cas particulier, s'écrivent comme suit.

❖ Continuité :

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = \frac{\dot{M}}{A} = \dot{m} = C^{st} \tag{2.20}$$

Où \dot{m} est le débit-masse par unité de surface encore appelé vitesse massique ou densité de flux massique. C 'est une constante puisque $\dot{M}_1 = \dot{M}_2$ et $A_1 = A_2$. Cette équation peut encore s'écrire :

$$\frac{\partial \rho}{\rho} + \frac{\partial V}{V} = 0 \tag{2.21}$$

❖ Bilan de quantité de mouvement

$$VdV + \frac{dP}{\rho} = -fdA \tag{2.22}$$

❖ Bilan de l'énergie

$$dh + VdV = 0 \tag{2.23}$$

❖ Équations d'état du fluide

$$dh = C_p dT, \quad h = C_p T + C^{st} \quad (2.24)$$

$$\frac{P}{\rho} = rT \quad \Rightarrow \quad \frac{dP}{P} - \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dT}{T} \quad (2.25)$$

2.3.3. Évolution du fluide en diagramme entropique

L'expression de la variation d'entropie d'un gaz parfait idéal est donnée par

$$s - s_1 = C_p \ln \frac{T}{T_1} - r \ln \frac{P}{P_1} \quad (2.26)$$

L'indice 1 est relatif à une section de référence amont. En combinant les équations d'état (2.25) et (2.26), l'équation (2.24) et l'équation de continuité (2.20), on peut écrire successivement :

$$\frac{P}{P_1} = \frac{\rho T}{\rho_1 T_1} = \frac{V_1}{V} \frac{T}{T_1} \quad (2.27)$$

$$\frac{V^2 - V_1^2}{2} = h_1 - h = C_p (T_1 - T)$$

$$\text{Soit :} \quad \frac{V}{V_1} = \left[1 + \frac{2C_p}{V_1^2} (T_1 - T) \right]^{1/2} \quad (2.28)$$

Ou encore, en notant que : $V_1 = \frac{\dot{m}}{\rho_1}$

$$\frac{V}{V_1} = \left[1 + \frac{2C_p}{\dot{m}^2} \rho_1^2 (T_1 - T) \right]^{1/2} \quad (2.29)$$

En combinant les équations (2.27), (2.28), (2.29) et la relation de Mayer pour les gaz parfaits, on obtient :

$$s - s_1 = C_v \ln \frac{T}{T_1} + \frac{r}{2} \ln \left[1 + \frac{2C_p}{\dot{m}^2} \rho_1^2 (T_1 - T) \right] \quad (2.30)$$

C'est l'équation de la courbe $s(T)$ à conditions amont données T_1 et P_1 (ou T_1 et ρ_1) pour une valeur \dot{m} de la vitesse massique. La figure 5-2 représente de telles courbes caractérisant l'évolution du fluide en écoulement de Fanno pour diverses valeurs de la densité de flux massique et une température génératrice $T_0 = T_{01}$ donnée.

Outre cette température génératrice, constante pour tout l'écoulement, ont été portées, sur cette figure, l'enthalpie génératrice de tout l'écoulement $h_{01} = h_0$ et la pression génératrice P_{01} du point 1. On rappelle que, l'écoulement étant irréversible, les pressions génératrices des divers points de l'écoulement évoluent avec le point considéré.

La famille de courbes de la figure 5-2 peut être tracée à partir des considérations suivantes. La température génératrice étant fixée, il existe un lien entre la température et la pression de référence 1 pour chaque valeur de la vitesse massique \dot{m} . Cette relation s'obtient en combinant les équations d'un écoulement monodimensionnel, l'équation d'état (2.27) et l'équation de conservation de la masse (2.20) :

$$T_0 = T_1 + \frac{r^2}{2c_p} \frac{\dot{m}^2}{P_1^2} T_1^2$$

$$T_1 = \frac{c_p}{r^2} \frac{P_1^2}{\dot{m}^2} \left(\sqrt{1 + 2 \frac{r^2 \dot{m}^2}{c_p P_1^2} T_0} - 1 \right) \quad (2.31)$$

C'est cette température qui doit être introduite dans la relation (2.30), en prenant soin, pour tout changement de \dot{m} , de prendre une nouvelle valeur de s_1 correspondant, à la pression de référence P_1 (dont la valeur, au départ du tracé n'a aucune importance, mais qui sera ensuite conservée constante pour l'ensemble du tracé) et à la nouvelle température T_1 .

Notons enfin que, selon la relation (2.31), à T_1 constante, si P_1 augmente, \dot{m} doit augmenter. Ainsi, les courbes à forte valeur de \dot{m} sont situées dans la partie gauche du diagramme.

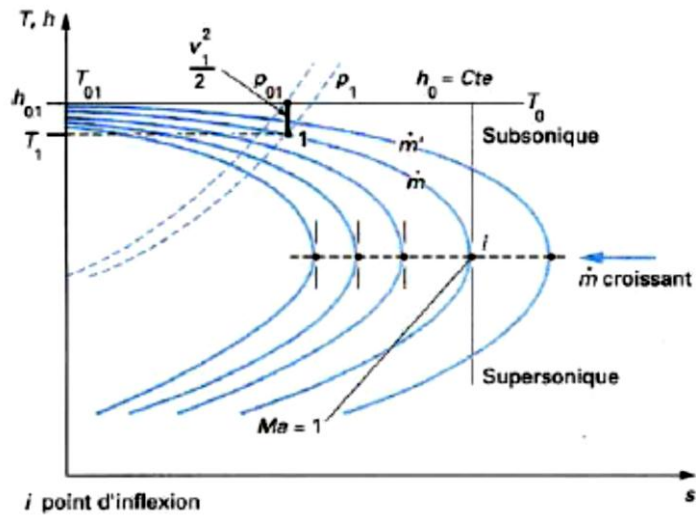


Fig. 2.7 - Évolution du fluide en écoulement de Fanno pour une température génératrice donnée.

TABLE I : Ecoulement adiabatique d'un fluide visqueux dans une canalisation de section constante, gaz parfait ($\gamma = 1.4$). (Courbes de Fanno).

| M | $\bar{f}L^* / D$ | p / p^* | T / T^* | ρ / ρ^* V^* / V | p_0 / p_0^* |
|------|------------------|-----------|-----------|------------------------------|---------------|
| 0.00 | ∞ | ∞ | 1.2000 | ∞ | ∞ |
| 0.02 | 1778.4500 | 54.7701 | 1.1999 | 45.6454 | 28.9421 |
| 0.04 | 440.3523 | 27.3817 | 1.1996 | 22.8254 | 14.4815 |
| 0.06 | 193.0311 | 18.2509 | 1.1991 | 15.2200 | 9.6659 |
| 0.08 | 106.7182 | 13.6843 | 1.1985 | 11.4182 | 7.2616 |
| 0.10 | 66.9216 | 10.9435 | 1.1976 | 9.1378 | 5.8218 |
| 0.12 | 45.4080 | 9.1156 | 1.1966 | 7.6182 | 4.8643 |
| 0.14 | 32.5113 | 7.8093 | 1.1953 | 6.5333 | 4.1824 |
| 0.16 | 24.1978 | 6.8291 | 1.1939 | 5.7200 | 3.6727 |
| 0.18 | 18.5427 | 6.0662 | 1.1923 | 5.0879 | 3.2779 |
| 0.20 | 14.5333 | 5.4554 | 1.1905 | 4.5826 | 2.9635 |
| 0.22 | 11.5961 | 4.9554 | 1.1885 | 4.1694 | 2.7076 |
| 0.24 | 9.3865 | 4.5383 | 1.1863 | 3.8255 | 2.4956 |
| 0.26 | 7.6876 | 4.1851 | 1.1840 | 3.5347 | 2.3173 |
| 0.28 | 6.3572 | 3.8820 | 1.1815 | 3.2857 | 2.1656 |
| 0.30 | 5.2993 | 3.6191 | 1.1788 | 3.0702 | 2.0351 |
| 0.32 | 4.4467 | 3.3887 | 1.1759 | 2.8818 | 1.9219 |
| 0.34 | 3.7520 | 3.1853 | 1.1729 | 2.7158 | 1.8229 |
| 0.36 | 3.1801 | 3.0042 | 1.1697 | 2.5684 | 1.7358 |
| 0.38 | 2.7054 | 2.8420 | 1.1663 | 2.4367 | 1.6587 |
| 0.40 | 2.3085 | 2.6958 | 1.1628 | 2.3184 | 1.5901 |
| 0.42 | 1.9744 | 2.5634 | 1.1591 | 2.2115 | 1.5289 |
| 0.44 | 1.6915 | 2.4428 | 1.1553 | 2.1145 | 1.4740 |
| 0.46 | 1.4509 | 2.3326 | 1.1513 | 2.0261 | 1.4246 |
| 0.48 | 1.2453 | 2.2313 | 1.1471 | 1.9451 | 1.3801 |
| 0.50 | 1.0691 | 2.1381 | 1.1429 | 1.8708 | 1.3398 |
| 0.52 | 0.9174 | 2.0519 | 1.1384 | 1.8024 | 1.3034 |
| 0.54 | 0.7866 | 1.9719 | 1.1339 | 1.7391 | 1.2703 |
| 0.56 | 0.6736 | 1.8975 | 1.1292 | 1.6805 | 1.2403 |
| 0.58 | 0.5757 | 1.8282 | 1.1244 | 1.6260 | 1.2130 |
| 0.60 | 0.4908 | 1.7634 | 1.1194 | 1.5753 | 1.1882 |
| 0.62 | 0.4172 | 1.7026 | 1.1143 | 1.5279 | 1.1656 |
| 0.64 | 0.3533 | 1.6456 | 1.1091 | 1.4836 | 1.1451 |
| 0.66 | 0.2979 | 1.5919 | 1.1038 | 1.4421 | 1.1265 |
| 0.68 | 0.2498 | 1.5413 | 1.0984 | 1.4032 | 1.1097 |
| 0.70 | 0.2081 | 1.4935 | 1.0929 | 1.3665 | 1.0944 |
| 0.72 | 0.1721 | 1.4482 | 1.0873 | 1.3320 | 1.0806 |
| 0.74 | 0.1411 | 1.4054 | 1.0815 | 1.2994 | 1.0681 |
| 0.76 | 0.1145 | 1.3647 | 1.0757 | 1.2686 | 1.0570 |
| 0.78 | 0.0917 | 1.3261 | 1.0698 | 1.2395 | 1.0471 |
| 0.80 | 0.0723 | 1.2893 | 1.0638 | 1.2119 | 1.0382 |
| 0.82 | 0.0559 | 1.2542 | 1.0578 | 1.1858 | 1.0305 |
| 0.84 | 0.0423 | 1.2208 | 1.0516 | 1.1609 | 1.0237 |
| 0.86 | 0.0310 | 1.1889 | 1.0454 | 1.1373 | 1.0179 |

TABLE I (Suite) : Ecoulement adiabatique d'un fluide visqueux dans une canalisation de section constante, gaz parfait ($\gamma=1.4$). (Courbes de Fanno)

| M | $\bar{f}L^*/D$ | p/p^* | T/T^* | ρ/ρ^* V^*/V | p_0/p_0^* |
|------|----------------|---------|---------|--------------------------|-------------|
| 0.88 | 0.0218 | 1.1583 | 1.0391 | 1.1148 | 1.0129 |
| 0.90 | 0.0145 | 1.1291 | 1.0327 | 1.0934 | 1.0089 |
| 0.92 | 0.0089 | 1.1011 | 1.0263 | 1.0730 | 1.0056 |
| 0.94 | 0.0048 | 1.0743 | 1.0198 | 1.0535 | 1.0031 |
| 0.96 | 0.0021 | 1.0485 | 1.0132 | 1.0348 | 1.0014 |
| 0.98 | 0.0005 | 1.0238 | 1.0066 | 1.0170 | 1.0003 |
| 1.00 | 0.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 1.02 | 0.0005 | 0.9771 | 0.9933 | 0.9837 | 1.0003 |
| 1.04 | 0.0018 | 0.9551 | 0.9866 | 0.9681 | 1.0013 |
| 1.06 | 0.0038 | 0.9338 | 0.9798 | 0.9531 | 1.0029 |
| 1.08 | 0.0066 | 0.9133 | 0.9730 | 0.9387 | 1.0051 |
| 1.10 | 0.0099 | 0.8936 | 0.9662 | 0.9249 | 1.0079 |
| 1.12 | 0.0138 | 0.8745 | 0.9593 | 0.9116 | 1.0113 |
| 1.14 | 0.0182 | 0.8561 | 0.9524 | 0.8988 | 1.0153 |
| 1.16 | 0.0230 | 0.8383 | 0.9455 | 0.8865 | 1.0198 |
| 1.18 | 0.0281 | 0.8210 | 0.9386 | 0.8747 | 1.0248 |
| 1.20 | 0.0336 | 0.8044 | 0.9317 | 0.8633 | 1.0304 |
| 1.22 | 0.0394 | 0.7882 | 0.9247 | 0.8524 | 1.0366 |
| 1.24 | 0.0455 | 0.7726 | 0.9178 | 0.8418 | 1.0432 |
| 1.26 | 0.0517 | 0.7574 | 0.9108 | 0.8316 | 1.0504 |
| 1.28 | 0.0582 | 0.7427 | 0.9038 | 0.8218 | 1.0581 |
| 1.30 | 0.0648 | 0.7285 | 0.8969 | 0.8123 | 1.0663 |
| 1.32 | 0.0716 | 0.7147 | 0.8899 | 0.8031 | 1.0750 |
| 1.34 | 0.0785 | 0.7012 | 0.8829 | 0.7942 | 1.0842 |
| 1.36 | 0.0855 | 0.6882 | 0.8760 | 0.7856 | 1.0940 |
| 1.38 | 0.0926 | 0.6755 | 0.8690 | 0.7773 | 1.1042 |
| 1.40 | 0.0997 | 0.6632 | 0.8621 | 0.7693 | 1.1149 |
| 1.42 | 0.1069 | 0.6512 | 0.8551 | 0.7615 | 1.1262 |
| 1.44 | 0.1142 | 0.6396 | 0.8482 | 0.7540 | 1.1379 |
| 1.46 | 0.1215 | 0.6282 | 0.8413 | 0.7467 | 1.1501 |
| 1.48 | 0.1288 | 0.6172 | 0.8344 | 0.7397 | 1.1629 |
| 1.50 | 0.1360 | 0.6065 | 0.8276 | 0.7328 | 1.1762 |
| 1.52 | 0.1433 | 0.5960 | 0.8207 | 0.7262 | 1.1899 |
| 1.54 | 0.1506 | 0.5858 | 0.8139 | 0.7198 | 1.2042 |
| 1.56 | 0.1579 | 0.5759 | 0.8071 | 0.7135 | 1.2190 |
| 1.58 | 0.1651 | 0.5662 | 0.8004 | 0.7074 | 1.2344 |
| 1.60 | 0.1724 | 0.5568 | 0.7937 | 0.7016 | 1.2502 |
| 1.62 | 0.1795 | 0.5476 | 0.7869 | 0.6958 | 1.2666 |
| 1.64 | 0.1867 | 0.5386 | 0.7803 | 0.6903 | 1.2836 |
| 1.66 | 0.1938 | 0.5299 | 0.7736 | 0.6849 | 1.3010 |
| 1.68 | 0.2008 | 0.5213 | 0.7670 | 0.6796 | 1.3190 |
| 1.70 | 0.2078 | 0.5130 | 0.7605 | 0.6745 | 1.3376 |
| 1.72 | 0.2147 | 0.5048 | 0.7539 | 0.6696 | 1.3567 |
| 1.74 | 0.2216 | 0.4969 | 0.7474 | 0.6648 | 1.3764 |
| 1.76 | 0.2284 | 0.4891 | 0.7410 | 0.6601 | 1.3967 |
| 1.78 | 0.2352 | 0.4815 | 0.7345 | 0.6555 | 1.4175 |
| 1.80 | 0.2419 | 0.4741 | 0.7282 | 0.6511 | 1.4390 |
| 1.82 | 0.2485 | 0.4668 | 0.7218 | 0.6467 | 1.4610 |
| 1.84 | 0.2551 | 0.4597 | 0.7155 | 0.6425 | 1.4836 |
| 1.86 | 0.2616 | 0.4528 | 0.7093 | 0.6384 | 1.5069 |
| 1.88 | 0.2680 | 0.4460 | 0.7030 | 0.6344 | 1.5308 |
| 1.90 | 0.2743 | 0.4394 | 0.6969 | 0.6305 | 1.5553 |
| 1.92 | 0.2806 | 0.4329 | 0.6907 | 0.6267 | 1.5804 |

TABLE I (Suite): Ecoulement adiabatique d'un fluide visqueux dans une canalisation de section constante, gaz parfait ($\gamma=1.4$). (Courbes de Fanno)

| M | $\bar{f}L^*/D$ | p/p^* | T/T^* | ρ/ρ^* V^*/V | p_0/p_0^* |
|------|----------------|---------|---------|--------------------------|-------------|
| 1.94 | 0.2868 | 0.4265 | 0.6847 | 0.6230 | 1.6062 |
| 1.96 | 0.2929 | 0.4203 | 0.6786 | 0.6193 | 1.6326 |
| 1.98 | 0.2990 | 0.4142 | 0.6726 | 0.6158 | 1.6597 |
| 2.00 | 0.3050 | 0.4082 | 0.6667 | 0.6124 | 1.6875 |
| 2.02 | 0.3109 | 0.4024 | 0.6608 | 0.6090 | 1.7160 |
| 2.04 | 0.3168 | 0.3967 | 0.6549 | 0.6057 | 1.7451 |
| 2.06 | 0.3225 | 0.3911 | 0.6491 | 0.6025 | 1.7750 |
| 2.08 | 0.3282 | 0.3856 | 0.6433 | 0.5994 | 1.8056 |
| 2.10 | 0.3339 | 0.3802 | 0.6376 | 0.5963 | 1.8369 |
| 2.12 | 0.3394 | 0.3750 | 0.6320 | 0.5934 | 1.8690 |
| 2.14 | 0.3449 | 0.3698 | 0.6263 | 0.5905 | 1.9018 |
| 2.16 | 0.3503 | 0.3648 | 0.6208 | 0.5876 | 1.9354 |
| 2.18 | 0.3556 | 0.3598 | 0.6152 | 0.5848 | 1.9698 |
| 2.20 | 0.3609 | 0.3549 | 0.6098 | 0.5821 | 2.0050 |
| 2.22 | 0.3661 | 0.3502 | 0.6043 | 0.5794 | 2.0409 |
| 2.24 | 0.3712 | 0.3455 | 0.5989 | 0.5768 | 2.0777 |
| 2.26 | 0.3763 | 0.3409 | 0.5936 | 0.5743 | 2.1153 |
| 2.28 | 0.3813 | 0.3364 | 0.5883 | 0.5718 | 2.1538 |
| 2.30 | 0.3862 | 0.3320 | 0.5831 | 0.5694 | 2.1931 |
| 2.32 | 0.3911 | 0.3277 | 0.5779 | 0.5670 | 2.2333 |
| 2.34 | 0.3959 | 0.3234 | 0.5728 | 0.5647 | 2.2744 |
| 2.36 | 0.4006 | 0.3193 | 0.5677 | 0.5624 | 2.3164 |
| 2.38 | 0.4053 | 0.3152 | 0.5626 | 0.5602 | 2.3593 |
| 2.40 | 0.4099 | 0.3111 | 0.5576 | 0.5580 | 2.4031 |
| 2.42 | 0.4144 | 0.3072 | 0.5527 | 0.5558 | 2.4479 |
| 2.44 | 0.4189 | 0.3033 | 0.5478 | 0.5537 | 2.4936 |
| 2.46 | 0.4233 | 0.2995 | 0.5429 | 0.5517 | 2.5403 |
| 2.48 | 0.4277 | 0.2958 | 0.5381 | 0.5497 | 2.5880 |
| 2.50 | 0.4320 | 0.2921 | 0.5333 | 0.5477 | 2.6367 |
| 2.52 | 0.4362 | 0.2885 | 0.5286 | 0.5458 | 2.6864 |
| 2.54 | 0.4404 | 0.2850 | 0.5239 | 0.5439 | 2.7372 |
| 2.56 | 0.4445 | 0.2815 | 0.5193 | 0.5421 | 2.7891 |
| 2.58 | 0.4486 | 0.2781 | 0.5147 | 0.5402 | 2.8420 |
| 2.60 | 0.4526 | 0.2747 | 0.5102 | 0.5385 | 2.8960 |
| 2.62 | 0.4565 | 0.2714 | 0.5057 | 0.5367 | 2.9511 |
| 2.64 | 0.4604 | 0.2682 | 0.5013 | 0.5350 | 3.0073 |
| 2.66 | 0.4643 | 0.2650 | 0.4969 | 0.5333 | 3.0647 |
| 2.68 | 0.4681 | 0.2619 | 0.4925 | 0.5317 | 3.1233 |
| 2.70 | 0.4718 | 0.2588 | 0.4882 | 0.5301 | 3.1830 |
| 2.72 | 0.4755 | 0.2558 | 0.4839 | 0.5285 | 3.2439 |
| 2.74 | 0.4791 | 0.2528 | 0.4797 | 0.5269 | 3.3061 |
| 2.76 | 0.4827 | 0.2498 | 0.4755 | 0.5254 | 3.3695 |
| 2.78 | 0.4863 | 0.2470 | 0.4714 | 0.5239 | 3.4342 |
| 2.80 | 0.4898 | 0.2441 | 0.4673 | 0.5225 | 3.5001 |
| 2.82 | 0.4932 | 0.2414 | 0.4632 | 0.5210 | 3.5674 |
| 2.84 | 0.4966 | 0.2386 | 0.4592 | 0.5196 | 3.6359 |
| 2.86 | 0.5000 | 0.2359 | 0.4552 | 0.5182 | 3.7058 |
| 2.88 | 0.5033 | 0.2333 | 0.4513 | 0.5169 | 3.7771 |
| 2.90 | 0.5065 | 0.2307 | 0.4474 | 0.5155 | 3.8498 |
| 2.92 | 0.5097 | 0.2281 | 0.4436 | 0.5142 | 3.9238 |
| 2.94 | 0.5129 | 0.2256 | 0.4398 | 0.5129 | 3.9993 |
| 2.96 | 0.5160 | 0.2231 | 0.4360 | 0.5116 | 4.0762 |
| 2.98 | 0.5191 | 0.2206 | 0.4323 | 0.5104 | 4.1547 |

TABLE I (Suite): Écoulement adiabatique d'un fluide visqueux dans une canalisation de section constante, gaz parfait ($\gamma=1.4$). (Courbes de Fanno)

| M | $\bar{f}L^*/D$ | p/p^* | T/T^* | ρ/ρ^* V^*/V | P_0/P_0^* |
|----------|----------------|---------|---------|--------------------------|-------------|
| 3.00 | 0.5222 | 0.2182 | 0.4286 | 0.5092 | 4.2346 |
| 3.02 | 0.5252 | 0.2158 | 0.4249 | 0.5080 | 4.3160 |
| 3.04 | 0.5281 | 0.2135 | 0.4213 | 0.5068 | 4.3989 |
| 3.06 | 0.5310 | 0.2112 | 0.4177 | 0.5056 | 4.4835 |
| 3.08 | 0.5339 | 0.2090 | 0.4142 | 0.5045 | 4.5696 |
| 3.10 | 0.5368 | 0.2067 | 0.4107 | 0.5034 | 4.6573 |
| 3.12 | 0.5396 | 0.2045 | 0.4072 | 0.5023 | 4.7467 |
| 3.14 | 0.5424 | 0.2024 | 0.4038 | 0.5012 | 4.8377 |
| 3.16 | 0.5451 | 0.2002 | 0.4004 | 0.5001 | 4.9304 |
| 3.18 | 0.5478 | 0.1981 | 0.3970 | 0.4991 | 5.0248 |
| 3.20 | 0.5504 | 0.1961 | 0.3937 | 0.4980 | 5.1209 |
| 3.22 | 0.5531 | 0.1940 | 0.3904 | 0.4970 | 5.2189 |
| 3.24 | 0.5557 | 0.1920 | 0.3872 | 0.4960 | 5.3186 |
| 3.26 | 0.5582 | 0.1901 | 0.3839 | 0.4951 | 5.4201 |
| 3.28 | 0.5607 | 0.1881 | 0.3807 | 0.4941 | 5.5234 |
| 3.30 | 0.5632 | 0.1862 | 0.3776 | 0.4931 | 5.6286 |
| 3.32 | 0.5657 | 0.1843 | 0.3745 | 0.4922 | 5.7357 |
| 3.34 | 0.5681 | 0.1825 | 0.3714 | 0.4913 | 5.8448 |
| 3.36 | 0.5705 | 0.1806 | 0.3683 | 0.4904 | 5.9558 |
| 3.38 | 0.5729 | 0.1788 | 0.3653 | 0.4895 | 6.0687 |
| 3.40 | 0.5752 | 0.1770 | 0.3623 | 0.4886 | 6.1837 |
| 3.42 | 0.5775 | 0.1753 | 0.3594 | 0.4878 | 6.3007 |
| 3.44 | 0.5798 | 0.1736 | 0.3564 | 0.4869 | 6.4197 |
| 3.46 | 0.5820 | 0.1718 | 0.3535 | 0.4861 | 6.5409 |
| 3.48 | 0.5842 | 0.1702 | 0.3507 | 0.4853 | 6.6642 |
| 3.50 | 0.5864 | 0.1685 | 0.3478 | 0.4845 | 6.7896 |
| 3.52 | 0.5886 | 0.1669 | 0.3450 | 0.4837 | 6.9172 |
| 3.54 | 0.5907 | 0.1653 | 0.3422 | 0.4829 | 7.0470 |
| 3.56 | 0.5928 | 0.1637 | 0.3395 | 0.4821 | 7.1791 |
| 3.58 | 0.5949 | 0.1621 | 0.3368 | 0.4813 | 7.3134 |
| 3.60 | 0.5970 | 0.1606 | 0.3341 | 0.4806 | 7.4501 |
| 3.62 | 0.5990 | 0.1590 | 0.3314 | 0.4799 | 7.5891 |
| 3.64 | 0.6010 | 0.1575 | 0.3288 | 0.4791 | 7.7304 |
| 3.66 | 0.6030 | 0.1560 | 0.3262 | 0.4784 | 7.8742 |
| 3.68 | 0.6049 | 0.1546 | 0.3236 | 0.4777 | 8.0204 |
| 3.70 | 0.6068 | 0.1531 | 0.3210 | 0.4770 | 8.1690 |
| 3.72 | 0.6087 | 0.1517 | 0.3185 | 0.4763 | 8.3202 |
| 3.74 | 0.6106 | 0.1503 | 0.3160 | 0.4757 | 8.4739 |
| 3.76 | 0.6125 | 0.1489 | 0.3135 | 0.4750 | 8.6302 |
| 3.78 | 0.6143 | 0.1475 | 0.3111 | 0.4743 | 8.7891 |
| 3.80 | 0.6161 | 0.1462 | 0.3086 | 0.4737 | 8.9506 |
| 3.82 | 0.6179 | 0.1449 | 0.3062 | 0.4730 | 9.1147 |
| 3.84 | 0.6197 | 0.1436 | 0.3039 | 0.4724 | 9.2816 |
| 3.86 | 0.6214 | 0.1423 | 0.3015 | 0.4718 | 9.4513 |
| 3.88 | 0.6231 | 0.1410 | 0.2992 | 0.4712 | 9.6237 |
| 3.90 | 0.6248 | 0.1397 | 0.2969 | 0.4706 | 9.7989 |
| 3.92 | 0.6265 | 0.1385 | 0.2946 | 0.4700 | 9.9770 |
| 3.94 | 0.6282 | 0.1372 | 0.2923 | 0.4694 | 10.1580 |
| 3.96 | 0.6298 | 0.1360 | 0.2901 | 0.4688 | 10.3419 |
| 3.98 | 0.6315 | 0.1348 | 0.2879 | 0.4683 | 10.5288 |
| 4.00 | 0.6331 | 0.1336 | 0.2857 | 0.4677 | 10.7187 |
| ∞ | 0.8215 | 0 | 0 | 0.4082 | ∞ |

2.4. Écoulement de Rayleigh

Cet écoulement, appelé écoulement de Rayleigh, qui a lieu à $A = C^{te}$ en respectant la réversibilité, ne peut se développer qu'avec un échange thermique q contrôlé. Cette nécessité le rend peu fréquent en pratique [4].

2.4.1. Écoulement compressible dans les conduites avec transfert de chaleur et sans friction (Théorie de RAYLEIGH)

L'addition ou l'enlèvement de chaleur ont un effet intéressant sur un écoulement compressible. Ici nous limitons l'analyse pour l'écoulement avec transfert de chaleur sans friction dans un conduit de section constante.

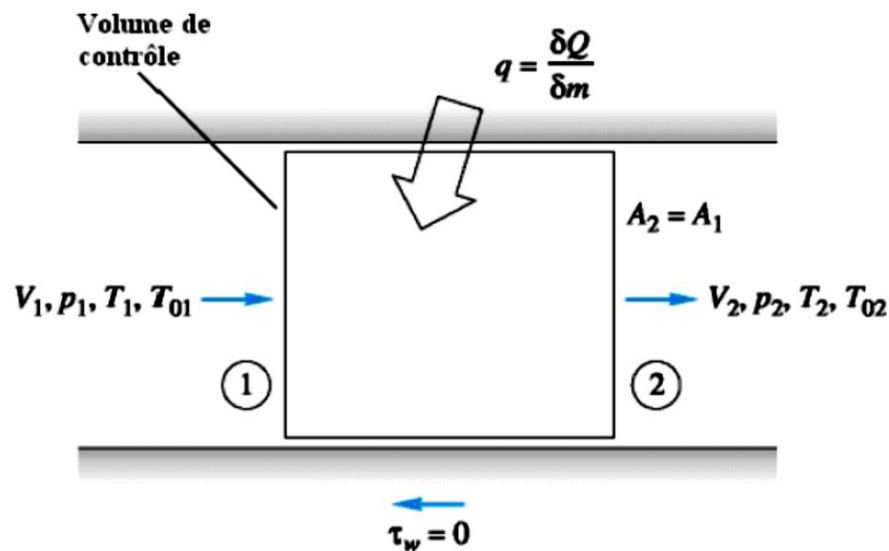


Fig. 2.8 - Volume de contrôle élémentaire pour un écoulement sans friction dans une conduite de section constante avec transfert de chaleur.

Considérez le volume de contrôle élémentaire de la conduite dans la figure 2.8. Entre des sections 1 et 2 une quantité de chaleur δQ est ajoutée (ou enlevée) à chaque masse élémentaire δm passant. Sans friction ou changement de section,

2.4.2. Équations de l'écoulement de Rayleigh

Les équations générales appliquées à ce cas particulier s'écrivent :

— continuité

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = \dot{m} = C^{st} \quad (2.32)$$

Ou encore :

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} = 0 \quad (2.32a)$$

— bilan de la quantité de mouvement :

$$VdV + \frac{dP}{\rho} = 0 \quad (2.33)$$

— bilan de l'énergie :

$$q_{12} = \Delta h_{12} + \Delta E_{c12} \quad (2.43)$$

Ou :

$$\delta q = dh + VdV \quad (2.35)$$

— équation d'état du fluide :

$$dh = C_p dT \quad (2.36)$$

$$\frac{dP}{P} - \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dT}{T} \quad (2.37)$$

2.4.3. Évolution du fluide en diagramme entropique

La variation d'entropie d'un gaz parfait idéal s'écrit :

$$s - s_1 = C_p \ln \frac{T}{T_1} - r \ln \frac{P}{P_1} \quad (2.38)$$

Où la référence 1 concerne l'état du fluide dans la section 1 de référence.

Dans cette expression, pour exprimer le rapport de pression $\frac{P}{P_1}$ en fonction de \dot{m} , de T_1 , de P_1 et de T , on combine les relations (2.33) et (2.31a), ce qui donne :

$$\frac{d\rho}{\rho} - \frac{dP}{\rho V^2} = 0 \quad (2.39)$$

Soit, avec l'équation (2.32) : $\dot{m}^2 \frac{d\rho}{\rho^2} - dP = 0$

L'intégration de cette relation donne :

$$P + \frac{\dot{m}^2}{\rho} = C^{st} \quad (2.40)$$

Ou :

$$P + \frac{\dot{m}^2}{\rho} = P_1 + \frac{\dot{m}^2}{\rho_1} \quad (2.41)$$

En utilisant l'équation d'état, on obtient : $P + \frac{\dot{m}^2 r T}{P} = P_1 + \frac{\dot{m}^2 r T_1}{P_1}$

Soit : $\left(\frac{P}{P_1}\right)^2 - \frac{P}{P_1} \left(1 + \frac{\dot{m}^2 r T_1}{P_1^2}\right) + \frac{\dot{m}^2 r T}{P_1^2} = 0$

Ainsi, le rapport $\frac{P}{P_1}$ est donné par la relation :

$$\frac{P}{P_1} = \frac{1 + \frac{m^2 r T_1}{P_1^2} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{m^2 r T_1}{P_1^2}\right)^2 - 4 \frac{m^2 r T}{P_1^2}}}{2} \quad (2.42)$$

En posant $\alpha = \frac{m^2 r T_1}{P_1^2}$, l'équation de l'écoulement est :

$$s - s_1 = C_p \ln \frac{T}{T_1} + r \ln 2 - r \ln \left[1 + \alpha \pm \sqrt{(1 + \alpha)^2 - 4 \alpha \frac{T}{T_1}} \right] \quad (2.43)$$

La courbe correspondante est représentée par l'évolution des caractéristiques thermodynamiques du fluide lors d'un écoulement de Rayleigh pour une valeur de α .

TABLE II : Ecoulement compressible non visqueux avec transfert de chaleur dans une canalisation de section constante, gaz parfait ($\gamma = 1.4$). (Courbes de Rayleigh).

| M | T_0/T_0^* | p/p^* | T/T^* | ρ/ρ^* V^*/V | p_0/p_0^* |
|------|-------------|---------|---------|--------------------------|-------------|
| 0.00 | 0.0000 | 2.4000 | 0.0000 | ∞ | 1.2679 |
| 0.02 | 0.0019 | 2.3987 | 0.0023 | 1042.2500 | 1.2675 |
| 0.04 | 0.0076 | 2.3946 | 0.0092 | 261.0000 | 1.2665 |
| 0.06 | 0.0171 | 2.3880 | 0.0205 | 116.3241 | 1.2647 |
| 0.08 | 0.0302 | 2.3787 | 0.0362 | 65.6875 | 1.2623 |
| 0.10 | 0.0468 | 2.3669 | 0.0560 | 42.2500 | 1.2591 |
| 0.12 | 0.0666 | 2.3526 | 0.0797 | 29.5185 | 1.2554 |
| 0.14 | 0.0895 | 2.3359 | 0.1069 | 21.8418 | 1.2510 |
| 0.16 | 0.1151 | 2.3170 | 0.1374 | 16.8594 | 1.2461 |
| 0.18 | 0.1432 | 2.2959 | 0.1708 | 13.4434 | 1.2406 |
| 0.20 | 0.1736 | 2.2727 | 0.2066 | 11.0000 | 1.2346 |
| 0.22 | 0.2057 | 2.2477 | 0.2445 | 9.1922 | 1.2281 |
| 0.24 | 0.2395 | 2.2209 | 0.2841 | 7.8171 | 1.2213 |
| 0.26 | 0.2745 | 2.1925 | 0.3250 | 6.7470 | 1.2140 |
| 0.28 | 0.3104 | 2.1626 | 0.3667 | 5.8980 | 1.2064 |
| 0.30 | 0.3469 | 2.1314 | 0.4089 | 5.2130 | 1.1985 |
| 0.32 | 0.3837 | 2.0991 | 0.4512 | 4.6523 | 1.1904 |
| 0.34 | 0.4206 | 2.0657 | 0.4933 | 4.1877 | 1.1822 |
| 0.36 | 0.4572 | 2.0314 | 0.5348 | 3.7984 | 1.1737 |
| 0.38 | 0.4935 | 1.9964 | 0.5755 | 3.4688 | 1.1652 |
| 0.40 | 0.5290 | 1.9608 | 0.6151 | 3.1875 | 1.1566 |
| 0.42 | 0.5638 | 1.9247 | 0.6535 | 2.9454 | 1.1480 |
| 0.44 | 0.5975 | 1.8882 | 0.6903 | 2.7355 | 1.1394 |
| 0.46 | 0.6301 | 1.8515 | 0.7254 | 2.5525 | 1.1308 |
| 0.48 | 0.6614 | 1.8147 | 0.7587 | 2.3918 | 1.1224 |
| 0.50 | 0.6914 | 1.7778 | 0.7901 | 2.2500 | 1.1141 |
| 0.52 | 0.7199 | 1.7409 | 0.8196 | 2.1243 | 1.1059 |
| 0.54 | 0.7470 | 1.7043 | 0.8469 | 2.0122 | 1.0979 |
| 0.56 | 0.7725 | 1.6678 | 0.8723 | 1.9120 | 1.0901 |
| 0.58 | 0.7965 | 1.6316 | 0.8955 | 1.8219 | 1.0826 |
| 0.60 | 0.8189 | 1.5957 | 0.9167 | 1.7407 | 1.0753 |
| 0.62 | 0.8398 | 1.5603 | 0.9358 | 1.6673 | 1.0682 |
| 0.64 | 0.8592 | 1.5253 | 0.9530 | 1.6006 | 1.0615 |
| 0.66 | 0.8771 | 1.4908 | 0.9682 | 1.5399 | 1.0550 |
| 0.68 | 0.8935 | 1.4569 | 0.9814 | 1.4844 | 1.0489 |
| 0.70 | 0.9085 | 1.4235 | 0.9929 | 1.4337 | 1.0431 |
| 0.72 | 0.9221 | 1.3907 | 1.0026 | 1.3871 | 1.0376 |
| 0.74 | 0.9344 | 1.3585 | 1.0106 | 1.3442 | 1.0325 |
| 0.76 | 0.9455 | 1.3270 | 1.0171 | 1.3047 | 1.0278 |
| 0.78 | 0.9553 | 1.2961 | 1.0220 | 1.2682 | 1.0234 |
| 0.80 | 0.9639 | 1.2658 | 1.0255 | 1.2344 | 1.0193 |
| 0.82 | 0.9715 | 1.2362 | 1.0276 | 1.2030 | 1.0157 |
| 0.84 | 0.9781 | 1.2073 | 1.0285 | 1.1738 | 1.0124 |

TABLE II : Ecoulement compressible non visqueux avec transfert de chaleur dans une canalisation de section constante, gaz parfait ($\gamma = 1.4$). (Courbes de Rayleigh).

| M | T_0 / T_0^* | p / p^* | T / T^* | ρ / ρ^* V^* / V | p_0 / p_0^* |
|------|---------------|-----------|-----------|------------------------------|---------------|
| 0.86 | 0.9836 | 1.1791 | 1.0283 | 1.1467 | 1.0095 |
| 0.88 | 0.9883 | 1.1515 | 1.0269 | 1.1214 | 1.0070 |
| 0.90 | 0.9921 | 1.1246 | 1.0245 | 1.0977 | 1.0049 |
| 0.92 | 0.9951 | 1.0984 | 1.0212 | 1.0756 | 1.0031 |
| 0.94 | 0.9973 | 1.0728 | 1.0170 | 1.0549 | 1.0017 |
| 0.96 | 0.9988 | 1.0479 | 1.0121 | 1.0354 | 1.0008 |
| 0.98 | 0.9997 | 1.0236 | 1.0064 | 1.0172 | 1.0002 |
| 1.00 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 1.02 | 0.9997 | 0.9770 | 0.9930 | 0.9838 | 1.0002 |
| 1.04 | 0.9989 | 0.9546 | 0.9855 | 0.9686 | 1.0008 |
| 1.06 | 0.9977 | 0.9327 | 0.9776 | 0.9542 | 1.0017 |
| 1.08 | 0.9960 | 0.9115 | 0.9691 | 0.9406 | 1.0031 |
| 1.10 | 0.9939 | 0.8909 | 0.9603 | 0.9277 | 1.0049 |
| 1.12 | 0.9915 | 0.8708 | 0.9512 | 0.9155 | 1.0070 |
| 1.14 | 0.9887 | 0.8512 | 0.9417 | 0.9039 | 1.0095 |
| 1.16 | 0.9856 | 0.8322 | 0.9320 | 0.8930 | 1.0124 |
| 1.18 | 0.9823 | 0.8137 | 0.9220 | 0.8826 | 1.0157 |
| 1.20 | 0.9787 | 0.7958 | 0.9118 | 0.8727 | 1.0194 |
| 1.22 | 0.9749 | 0.7783 | 0.9015 | 0.8633 | 1.0235 |
| 1.24 | 0.9709 | 0.7613 | 0.8911 | 0.8543 | 1.0279 |
| 1.26 | 0.9668 | 0.7447 | 0.8805 | 0.8458 | 1.0328 |
| 1.28 | 0.9624 | 0.7287 | 0.8699 | 0.8376 | 1.0380 |
| 1.30 | 0.9580 | 0.7130 | 0.8592 | 0.8299 | 1.0437 |
| 1.32 | 0.9534 | 0.6978 | 0.8484 | 0.8225 | 1.0497 |
| 1.34 | 0.9487 | 0.6830 | 0.8377 | 0.8154 | 1.0561 |
| 1.36 | 0.9440 | 0.6686 | 0.8269 | 0.8086 | 1.0629 |
| 1.38 | 0.9391 | 0.6546 | 0.8161 | 0.8021 | 1.0701 |
| 1.40 | 0.9343 | 0.6410 | 0.8054 | 0.7959 | 1.0777 |
| 1.42 | 0.9293 | 0.6278 | 0.7947 | 0.7900 | 1.0856 |
| 1.44 | 0.9243 | 0.6149 | 0.7840 | 0.7843 | 1.0940 |
| 1.46 | 0.9193 | 0.6024 | 0.7735 | 0.7788 | 1.1028 |
| 1.48 | 0.9143 | 0.5902 | 0.7629 | 0.7736 | 1.1120 |
| 1.50 | 0.9093 | 0.5783 | 0.7525 | 0.7685 | 1.1215 |
| 1.52 | 0.9042 | 0.5668 | 0.7422 | 0.7637 | 1.1315 |
| 1.54 | 0.8992 | 0.5555 | 0.7319 | 0.7590 | 1.1419 |
| 1.56 | 0.8942 | 0.5446 | 0.7217 | 0.7545 | 1.1527 |
| 1.58 | 0.8892 | 0.5339 | 0.7117 | 0.7502 | 1.1640 |
| 1.60 | 0.8842 | 0.5236 | 0.7017 | 0.7461 | 1.1756 |
| 1.62 | 0.8792 | 0.5135 | 0.6919 | 0.7421 | 1.1877 |
| 1.64 | 0.8743 | 0.5036 | 0.6822 | 0.7383 | 1.2002 |
| 1.66 | 0.8694 | 0.4940 | 0.6726 | 0.7345 | 1.2131 |
| 1.68 | 0.8645 | 0.4847 | 0.6631 | 0.7310 | 1.2264 |
| 1.70 | 0.8597 | 0.4756 | 0.6538 | 0.7275 | 1.2402 |
| 1.72 | 0.8549 | 0.4668 | 0.6445 | 0.7242 | 1.2545 |
| 1.74 | 0.8502 | 0.4581 | 0.6355 | 0.7210 | 1.2692 |
| 1.76 | 0.8455 | 0.4497 | 0.6265 | 0.7178 | 1.2843 |
| 1.78 | 0.8409 | 0.4415 | 0.6176 | 0.7148 | 1.2999 |
| 1.80 | 0.8363 | 0.4335 | 0.6089 | 0.7119 | 1.3159 |
| 1.82 | 0.8317 | 0.4257 | 0.6004 | 0.7091 | 1.3324 |
| 1.84 | 0.8273 | 0.4181 | 0.5919 | 0.7064 | 1.3494 |
| 1.86 | 0.8228 | 0.4107 | 0.5836 | 0.7038 | 1.3669 |
| 1.88 | 0.8185 | 0.4035 | 0.5754 | 0.7012 | 1.3849 |
| 1.90 | 0.8141 | 0.3964 | 0.5673 | 0.6988 | 1.4033 |

TABLE II : Ecoulement compressible non visqueux avec transfert de chaleur dans une canalisation de section constante, gaz parfait ($\gamma = 1.4$). (Courbes de Rayleigh).

| M | T_0 / T_0^* | p / p^* | T / T^* | ρ / ρ^* V^* / V | P_0 / P_0^* |
|------|---------------|-----------|-----------|------------------------------|---------------|
| 1.92 | 0.8099 | 0.3896 | 0.5594 | 0.6964 | 1.4222 |
| 1.94 | 0.8057 | 0.3828 | 0.5516 | 0.6940 | 1.4417 |
| 1.96 | 0.8015 | 0.3763 | 0.5439 | 0.6918 | 1.4616 |
| 1.98 | 0.7974 | 0.3699 | 0.5364 | 0.6896 | 1.4821 |
| 2.00 | 0.7934 | 0.3636 | 0.5289 | 0.6875 | 1.5031 |
| 2.02 | 0.7894 | 0.3575 | 0.5216 | 0.6854 | 1.5246 |
| 2.04 | 0.7855 | 0.3516 | 0.5144 | 0.6835 | 1.5467 |
| 2.06 | 0.7816 | 0.3458 | 0.5074 | 0.6815 | 1.5693 |
| 2.08 | 0.7778 | 0.3401 | 0.5004 | 0.6796 | 1.5924 |
| 2.10 | 0.7741 | 0.3345 | 0.4936 | 0.6778 | 1.6162 |
| 2.12 | 0.7704 | 0.3291 | 0.4868 | 0.6760 | 1.6404 |
| 2.14 | 0.7667 | 0.3238 | 0.4802 | 0.6743 | 1.6653 |
| 2.16 | 0.7631 | 0.3186 | 0.4737 | 0.6726 | 1.6908 |
| 2.18 | 0.7596 | 0.3136 | 0.4673 | 0.6710 | 1.7168 |
| 2.20 | 0.7561 | 0.3086 | 0.4611 | 0.6694 | 1.7434 |
| 2.22 | 0.7527 | 0.3038 | 0.4549 | 0.6679 | 1.7707 |
| 2.24 | 0.7493 | 0.2991 | 0.4488 | 0.6664 | 1.7986 |
| 2.26 | 0.7460 | 0.2945 | 0.4428 | 0.6649 | 1.8271 |
| 2.28 | 0.7428 | 0.2899 | 0.4370 | 0.6635 | 1.8562 |
| 2.30 | 0.7395 | 0.2855 | 0.4312 | 0.6621 | 1.8860 |
| 2.32 | 0.7364 | 0.2812 | 0.4256 | 0.6607 | 1.9165 |
| 2.34 | 0.7333 | 0.2769 | 0.4200 | 0.6594 | 1.9476 |
| 2.36 | 0.7302 | 0.2728 | 0.4145 | 0.6581 | 1.9794 |
| 2.38 | 0.7272 | 0.2688 | 0.4091 | 0.6569 | 2.0119 |
| 2.40 | 0.7242 | 0.2648 | 0.4038 | 0.6557 | 2.0451 |
| 2.42 | 0.7213 | 0.2609 | 0.3986 | 0.6545 | 2.0789 |
| 2.44 | 0.7184 | 0.2571 | 0.3935 | 0.6533 | 2.1136 |
| 2.46 | 0.7156 | 0.2534 | 0.3885 | 0.6522 | 2.1489 |
| 2.48 | 0.7128 | 0.2497 | 0.3836 | 0.6511 | 2.1850 |
| 2.50 | 0.7101 | 0.2462 | 0.3787 | 0.6500 | 2.2218 |
| 2.52 | 0.7074 | 0.2427 | 0.3739 | 0.6489 | 2.2594 |
| 2.54 | 0.7047 | 0.2392 | 0.3692 | 0.6479 | 2.2978 |
| 2.56 | 0.7021 | 0.2359 | 0.3646 | 0.6469 | 2.3370 |
| 2.58 | 0.6995 | 0.2326 | 0.3601 | 0.6459 | 2.3770 |
| 2.60 | 0.6970 | 0.2294 | 0.3556 | 0.6450 | 2.4177 |
| 2.62 | 0.6945 | 0.2262 | 0.3512 | 0.6440 | 2.4593 |
| 2.64 | 0.6921 | 0.2231 | 0.3469 | 0.6431 | 2.5018 |
| 2.66 | 0.6896 | 0.2201 | 0.3427 | 0.6422 | 2.5451 |
| 2.68 | 0.6873 | 0.2171 | 0.3385 | 0.6413 | 2.5892 |
| 2.70 | 0.6849 | 0.2142 | 0.3344 | 0.6405 | 2.6343 |
| 2.72 | 0.6826 | 0.2113 | 0.3304 | 0.6397 | 2.6802 |
| 2.74 | 0.6804 | 0.2085 | 0.3264 | 0.6388 | 2.7270 |
| 2.76 | 0.6781 | 0.2058 | 0.3225 | 0.6380 | 2.7748 |
| 2.78 | 0.6760 | 0.2031 | 0.3186 | 0.6372 | 2.8235 |
| 2.80 | 0.6738 | 0.2004 | 0.3149 | 0.6365 | 2.8731 |
| 2.82 | 0.6717 | 0.1978 | 0.3111 | 0.6357 | 2.9237 |
| 2.84 | 0.6696 | 0.1953 | 0.3075 | 0.6350 | 2.9752 |
| 2.86 | 0.6675 | 0.1927 | 0.3039 | 0.6343 | 3.0277 |
| 2.88 | 0.6655 | 0.1903 | 0.3004 | 0.6336 | 3.0813 |
| 2.90 | 0.6635 | 0.1879 | 0.2969 | 0.6329 | 3.1358 |
| 2.92 | 0.6615 | 0.1855 | 0.2934 | 0.6322 | 3.1914 |
| 2.94 | 0.6596 | 0.1832 | 0.2901 | 0.6315 | 3.2481 |
| 2.96 | 0.6577 | 0.1809 | 0.2868 | 0.6309 | 3.3058 |

TABLE II : Ecoulement compressible non visqueux avec transfert de chaleur dans une canalisation de section constante, gaz parfait ($\gamma = 1.4$). (Courbes de Rayleigh).

| M | T_0/T_0^* | p/p^* | T/T^* | ρ/ρ^* V^*/V | p_0/p_0^* |
|----------|-------------|---------|---------|--------------------------|-------------|
| 2.98 | 0.6558 | 0.1787 | 0.2835 | 0.6303 | 3.3646 |
| 3.00 | 0.6540 | 0.1765 | 0.2803 | 0.6296 | 3.4244 |
| 3.02 | 0.6522 | 0.1743 | 0.2771 | 0.6290 | 3.4854 |
| 3.04 | 0.6504 | 0.1722 | 0.2740 | 0.6284 | 3.5476 |
| 3.06 | 0.6486 | 0.1701 | 0.2709 | 0.6278 | 3.6108 |
| 3.08 | 0.6469 | 0.1681 | 0.2679 | 0.6273 | 3.6752 |
| 3.10 | 0.6452 | 0.1660 | 0.2650 | 0.6267 | 3.7408 |
| 3.12 | 0.6435 | 0.1641 | 0.2620 | 0.6261 | 3.8076 |
| 3.14 | 0.6418 | 0.1621 | 0.2592 | 0.6256 | 3.8756 |
| 3.16 | 0.6402 | 0.1602 | 0.2563 | 0.6251 | 3.9449 |
| 3.18 | 0.6386 | 0.1583 | 0.2535 | 0.6245 | 4.0154 |
| 3.20 | 0.6370 | 0.1565 | 0.2508 | 0.6240 | 4.0871 |
| 3.22 | 0.6354 | 0.1547 | 0.2481 | 0.6235 | 4.1601 |
| 3.24 | 0.6339 | 0.1529 | 0.2454 | 0.6230 | 4.2345 |
| 3.26 | 0.6324 | 0.1511 | 0.2428 | 0.6225 | 4.3101 |
| 3.28 | 0.6309 | 0.1494 | 0.2402 | 0.6221 | 4.3871 |
| 3.30 | 0.6294 | 0.1477 | 0.2377 | 0.6216 | 4.4655 |
| 3.32 | 0.6280 | 0.1461 | 0.2352 | 0.6211 | 4.5452 |
| 3.34 | 0.6265 | 0.1444 | 0.2327 | 0.6207 | 4.6263 |
| 3.36 | 0.6251 | 0.1428 | 0.2303 | 0.6202 | 4.7089 |
| 3.38 | 0.6237 | 0.1412 | 0.2279 | 0.6198 | 4.7929 |
| 3.40 | 0.6224 | 0.1397 | 0.2255 | 0.6194 | 4.8783 |
| 3.42 | 0.6210 | 0.1381 | 0.2232 | 0.6190 | 4.9652 |
| 3.44 | 0.6197 | 0.1366 | 0.2209 | 0.6185 | 5.0536 |
| 3.46 | 0.6184 | 0.1351 | 0.2186 | 0.6181 | 5.1435 |
| 3.48 | 0.6171 | 0.1337 | 0.2164 | 0.6177 | 5.2350 |
| 3.50 | 0.6158 | 0.1322 | 0.2142 | 0.6173 | 5.3280 |
| 3.52 | 0.6145 | 0.1308 | 0.2120 | 0.6170 | 5.4226 |
| 3.54 | 0.6133 | 0.1294 | 0.2099 | 0.6166 | 5.5188 |
| 3.56 | 0.6121 | 0.1280 | 0.2078 | 0.6162 | 5.6167 |
| 3.58 | 0.6109 | 0.1267 | 0.2057 | 0.6158 | 5.7161 |
| 3.60 | 0.6097 | 0.1254 | 0.2037 | 0.6155 | 5.8173 |
| 3.62 | 0.6085 | 0.1241 | 0.2017 | 0.6151 | 5.9201 |
| 3.64 | 0.6074 | 0.1228 | 0.1997 | 0.6148 | 6.0247 |
| 3.66 | 0.6062 | 0.1215 | 0.1977 | 0.6144 | 6.1310 |
| 3.68 | 0.6051 | 0.1202 | 0.1958 | 0.6141 | 6.2390 |
| 3.70 | 0.6040 | 0.1190 | 0.1939 | 0.6138 | 6.3488 |
| 3.72 | 0.6029 | 0.1178 | 0.1920 | 0.6134 | 6.4605 |
| 3.74 | 0.6018 | 0.1166 | 0.1902 | 0.6131 | 6.5739 |
| 3.76 | 0.6008 | 0.1154 | 0.1884 | 0.6128 | 6.6892 |
| 3.78 | 0.5997 | 0.1143 | 0.1866 | 0.6125 | 6.8064 |
| 3.80 | 0.5987 | 0.1131 | 0.1848 | 0.6122 | 6.9255 |
| 3.82 | 0.5977 | 0.1120 | 0.1830 | 0.6119 | 7.0466 |
| 3.84 | 0.5967 | 0.1109 | 0.1813 | 0.6116 | 7.1696 |
| 3.86 | 0.5957 | 0.1098 | 0.1796 | 0.6113 | 7.2945 |
| 3.88 | 0.5947 | 0.1087 | 0.1779 | 0.6110 | 7.4215 |
| 3.90 | 0.5937 | 0.1077 | 0.1763 | 0.6107 | 7.5505 |
| 3.92 | 0.5928 | 0.1066 | 0.1746 | 0.6104 | 7.6815 |
| 3.94 | 0.5918 | 0.1056 | 0.1730 | 0.6102 | 7.8147 |
| 3.96 | 0.5909 | 0.1046 | 0.1714 | 0.6099 | 7.9499 |
| 3.98 | 0.5900 | 0.1036 | 0.1699 | 0.6096 | 8.0873 |
| 4.00 | 0.5891 | 0.1026 | 0.1683 | 0.6094 | 8.2268 |
| ∞ | 0.4898 | 0 | 0 | 0.5833 | ∞ |

Exercices d'applications**Exercice N°1**

Déterminer la vitesse du son dans l'air pour un jour chaud d'été lorsque la température est de 38 °C et pour un jour froid d'hiver lorsque la température est de -30 °C.

Réponse

Pour un gaz parfait, la vitesse du son s'écrit $C = \sqrt{\gamma \cdot r \cdot T}$ où pour l'air $\gamma = 1,4$ et $r = \frac{R}{M} =$

$$r = \frac{8,32}{29 \cdot 10^{-3}} = 287 \text{ J/KgK}$$

$$\text{Donc } C_{38^\circ\text{C}} = \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot (273 + 38)} = 353,5 \text{ m/s}$$

$$C_{-30^\circ\text{C}} = \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot (273 - 30)} = 318,8 \text{ m/s}$$

Exercice N°2

Dans un écoulement d'air les caractéristiques en un point sont les suivantes :

- vitesse d'écoulement : $V = 100 \text{ m/s}$
- pression $P = 1,013 \text{ bar}$
- température : $T = 15^\circ\text{C}$;
- Masse volumique $\rho = 0,349 \text{ Kg/m}^3$
- $\gamma = 1,4$

On demande de calculer la pression d'arrêt P_i .

- 1) en négligeant la compressibilité de l'air.
- 2) en tenant compte de sa compressibilité.

Réponse

- 1) En négligeant la compressibilité de l'air, on peut appliquer le théorème de Bernoulli :

$$\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + g \cdot Z = \frac{V_i^2}{2} + \frac{P_i}{\rho} + g \cdot Z_i, \text{ sachant que } V_i = 0 \text{ (point d'arrêt) et } Z = Z_i$$

$$\text{Donc : } P_i = P + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2$$

$$\text{A.N: } P_i = 1.030 \text{ bar}$$

2) En tenant compte de sa compressibilité, on peut appliquer le théorème de Saint-Venant :

$$P_i = P. \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \text{ avec : } a = C = \sqrt{\frac{\gamma \cdot P}{\rho}} = \sqrt{1,4 \frac{1,013 \cdot 10^5}{0,349}} = 673,46 \text{ m/s}$$

$$M = \frac{V}{a} = \frac{100}{673,46} = 0,156$$

$$\text{Donc } P_i = 1,013. \left(1 + \frac{1,4-1}{2} 0,156^2\right)^{\frac{1,4}{1,4-1}} = \mathbf{1.030 \text{ bar}}$$

Exercice N°3

Un avion vole à un nombre de Mach $M=0,95$ et à une altitude où la pression atmosphérique est $P_{atm} = 0,2332 \text{ bar}$ et la masse volumique $\rho = 0,349 \text{ Kg/m}^3$.

1) Calculer la vitesse de l'avion en Km/h .

2) Calculer la pression et la température du point d'arrêt sur le bord d'attaque de l'aile.

L'air est assimilé à un gaz parfait : $\gamma = 1,4$ et $r = 287 \text{ J/kg.K}$

Réponse

$$1- V = M. a = M \sqrt{\gamma \cdot r \cdot T}$$

$$\text{A.N : } V = 290.56 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1046.02 \text{ Km/h.}$$

$$2- P_i = P. \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$\text{A.N : } P_i = 0,2332. \left(1 + \frac{1,4-1}{2} 0,95^2\right)^{\frac{1,4}{1,4-1}} = \mathbf{0,416 \text{ bar}}$$

$$T_i = T. \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right) \text{ or } r \cdot T = \frac{P}{\rho} \text{ (air considéré gaz parfait)} \Rightarrow T = \frac{P}{\rho \cdot r} = \frac{0,2332 \cdot 10^5}{0,349 \cdot 287} =$$

$$232,82 \text{ K}$$

$$\text{Donc : } T_i = 232.82. \left(1 + \frac{1,4-1}{2} 0,95^2\right) = 274.84 \text{ K}$$

Exercice N°4

Un corps céleste en chute libre, freiné par les couches d'air de la haute atmosphère tombe sur terre. A une altitude de 10 km :

- la vitesse du corps $V=3000 \text{ m/s}$,

- la température de l'air $T=2230 \text{ K}$,

- la masse volumique de l'air $\rho = 0,412 \text{ kg / m}^3$

- la pression de l'air $P=0,265$ bar.

On donne $\gamma = 1,4$.

Travail demandé :

- 1) Calculer la vitesse du son a .
- 2) Déterminer le nombre de Mach M .
- 3) Quelle est la nature de l'écoulement d'air autour du corps ?
- 4) Appliquer le théorème de Saint-Venant pour calculer la température T_i et la pression P_i de l'air au point d'arrêt.

Réponse

$$1- \text{Célérité du son : } C = a = \sqrt{\gamma \cdot \frac{P}{\rho}} \text{ A.N : } C = a = \sqrt{1,4 \cdot \frac{26500}{0,412}} = 300 \text{ m/s}$$

$$2- \text{Nombre de Mach : } M = \frac{V}{a} \text{ A.N : } M = \frac{3000}{300} = 10$$

3- $M > 1$ donc l'écoulement est supersonique.

$$4- \text{Température d'arrêt } T_i = T \cdot \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right) \text{ A.N : } T_i = 223 \cdot \left(1 + \frac{1,4-1}{2} 10^2\right) = 4683 \text{ K}$$

5- Pression d'arrêt :

$$P_i = P \cdot \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \text{ A.N : } P_i = 26500 \cdot \left(1 + \frac{1,4-1}{2} 10^2\right)^{\frac{1,4}{1,4-1}} = 11246 \text{ Pa}$$

Exercice N°5

Un réservoir contient de l'air comprimé à une pression $P_i = 4$ bar, supposée pression d'arrêt à l'état initial. L'ouverture d'une vanne dans ce réservoir provoque la détente de l'air vers l'extérieur sous forme d'un jet ayant un diamètre $d = 5$ mm. Les paramètres extérieurs du jet d'air à l'état final sont : - Pression $P = 1$ bar, - Température $T = 25$ °C, On donne $\gamma = 1,4$ et $r = 287$ J/Kg. K.

- 1) Calculer la vitesse du son C à l'extérieur du réservoir en (m/s).
- 2) Déterminer la masse volumique ρ de l'air à l'extérieur du réservoir en (kg/m^3). (On suppose que l'air est un gaz parfait.)
- 3) Ecrire l'équation de Saint-Venant, en terme de rapport de pression, entre un point d'arrêt et un point sur le jet d'air.
- 4) En déduire le nombre de Mach M au niveau du jet d'air.

- 5) Quelle est la nature de l'écoulement ?
- 6) Calculer la vitesse d'écoulement V du jet d'air en (m/s).
- 7) En déduire le débit massique q_m (kg/s).

Réponse

1- La vitesse du son : $C = a = \sqrt{\gamma \cdot r \cdot T}$ A.N: $a = C = \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 298} = 346 \text{ m/s}$

2- Masse volumique : $\rho = \frac{P}{r \cdot T}$ A.N: $\rho = \frac{10^5}{287 \cdot 298} = 1.169 \text{ Kg/m}^3$

3- Equation de Saint-Venant: $1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 = \left(\frac{P_i}{P}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$

4- Nombre de Mach : $M = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \left[\left(\frac{P_i}{P}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]}$ A.N : $M = 1,558$

5- $M > 1$ donc l'écoulement est supersonique.

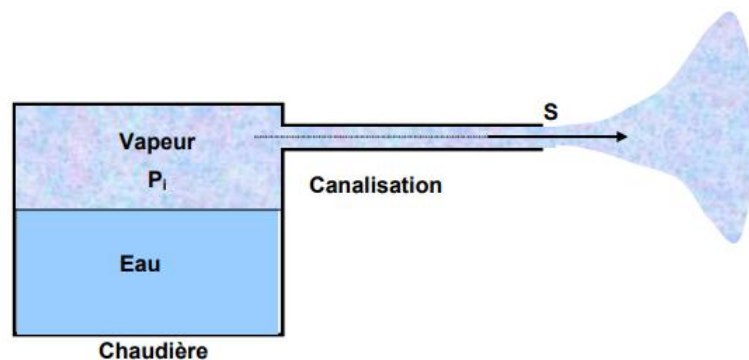
6- Vitesse d'écoulement : $V = M \cdot a$ A.N : $V = 1,558 \cdot 346 = 549.48 \text{ m/s}$

7- Débit massique : $q_m = \rho \cdot V \cdot S = \rho \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot V$

A.N : $q_m = 1,169 \cdot \frac{\pi \cdot 0.005^2}{4} \cdot 549,448 = 2,52 \text{ Kg/s}$

Exercice N°6

La figure ci-dessous représente une chaudière qui produit de la vapeur d'eau à un débit massique $q_m=13,4 \text{ kg/s}$. Par une canalisation cylindrique, la vapeur arrive dans une section S de diamètre $d=10 \text{ cm}$ à une pression $P=15 \text{ bar}$ et une température $T=541 \text{ K}$. On donne les caractéristiques de la vapeur d'eau : - $\gamma=1,3$. - $r=462 \text{ J/kgK}$.



Travail demandé :

- 1) On suppose que la vapeur est un gaz parfait, calculer la masse volumique ρ de la vapeur d'eau en sortie de la chaudière.
- 2) Déterminer la vitesse d'écoulement V .

- 3) Calculer la célérité du son C .
- 4) En déduire le nombre de Mach M . Préciser la nature de l'écoulement.
- 5) Ecrire l'équation de Saint-Venant en terme de rapport de pression, et calculer la pression d'arrêt P_i à l'intérieur de la chaudière.

Réponse

- 1) Masse volumique de la vapeur : $\rho = \frac{P}{r.T}$ A.N: $\rho = \frac{15.10^5}{462.541} = 6 \text{ Kg/m}^3$
- 2) Vitesse d'écoulement : $V = \frac{4 q_m}{\pi.d^2.\rho}$ A.N : $V = \frac{4 \cdot 13,4}{\pi.0.1^2.6} = 284,356 \text{ m/s}$
- 3) Célérité de son : $C = \sqrt{\gamma.r.T}$ A.N : $C = \sqrt{1,4.462.541} = 570,021 \text{ m/s}$
- 4) Nombre de Mach : $M = \frac{V}{C}$ A.N : $M = \frac{284,356}{570,021} 0.5$

$M < 1$ Donc l'écoulement est subsonique

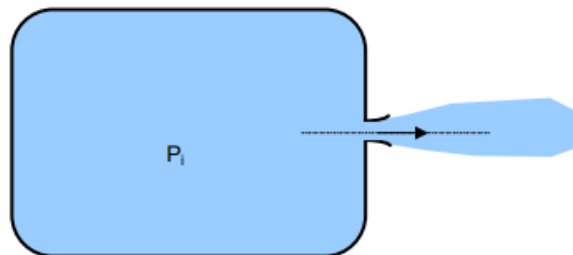
5) Equation de Saint-Venant : $\left(\frac{P_i}{P}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2$

La pression d'arrêt : $P_i = P. \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$

A.N : $P_i = 15.10^5. \left(1 + \frac{1,4-1}{2} 0,5^2\right)^{\frac{1,4}{1,4-1}} = 1759434 \text{ Ps} = 17,594 \text{ bar}$

Exercice N°7

De l'air comprimé contenu dans un grand réservoir s'échappe vers l'extérieur à travers un orifice à un nombre de Mach $M=0,77$. La détente se produit dans l'atmosphère où règne une pression $P=Patm=1,014 \text{ bar}$. On donne le rapport des chaleurs massiques : $\gamma = 4,1$.



Travail demandé :

- 1) En appliquant l'équation de Saint- Venant, déterminer la pression P_i (en bar) à l'intérieur du réservoir.
- 2) A partir de quelle pression P_i , l'écoulement devient supersonique ?

Réponse

$$1) \text{ Equation de Saint-Venant : } P_i = P \cdot \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \text{ donc } P_i = P \cdot \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$P_i = 1,014 \cdot 10^5 \cdot \left(1 + \frac{1,4-1}{2} 0,772^2\right)^{\frac{1,4}{1,4-1}} = 150097,21 \text{ Ps} = 1,5 \text{ bar}$$

$$2) M > 1 \rightarrow P_i > P \cdot \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$P_i > 1,014 \cdot 10^5 \cdot \left(\frac{1,4+1}{2}\right)^{\frac{1,4}{1,4-1}} = 191943 \approx 2 \text{ bar}$$

Exercice N°8

L'azote est comprimé dans une bouteille dans laquelle règne une pression d'arrêt $P_i = 3 \text{ bar}$. Il s'échappe à travers un orifice vers l'extérieur où la pression ambiante est $P = 1 \text{ bar}$. On donne $\gamma = 1,4$.

- 1) En appliquant l'équation de Saint-Venant, déterminer le nombre de Mach M .
- 2) Préciser la nature de l'écoulement.

Réponse

$$1) \text{ Théorème de Saint-Venant : } \left(\frac{P_i}{P}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2$$

$$\text{Nombre de Mach : } M = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \cdot \left[\left(\frac{P_i}{P}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]} \text{ A.N : } M = \sqrt{\frac{2}{1,4-1} \cdot \left[\left(\frac{3}{1}\right)^{\frac{1,4-1}{1,4}} - 1\right]} = 1,357$$

- 2) $M > 1$ donc l'écoulement est supersonique.

Exercice N°9

De l'air, supposé gaz parfait, s'échappe par la valve d'une chambre à air d'un pneu. La pression à l'intérieur de la chambre à air est $P_i = 1,7 \text{ bar}$. On suppose que la détente de l'air, s'effectue vers l'extérieur à une pression $P = 1 \text{ bar}$ et une température ambiante $T = 25 \text{ °C}$.

On donne les caractéristiques de l'air suivantes : - $r = 287 \text{ J/kgK}$, - $\gamma = 1,4$.

Travail demandé :

- 1) Calculer la célérité du son.
- 2) En appliquant l'équation de Saint-Venant, déterminer le nombre de Mach.
- 3) Déterminer la vitesse d'échappement V de l'air.

Réponse

1) $C = \sqrt{\gamma \cdot r \cdot T}$ A.N : $C = \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 298} = 346 \text{ m/s}$

2) Equation de Saint-Venant : $\left(\frac{P_i}{P}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \rightarrow M = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \cdot \left[\left(\frac{P_i}{P}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]}$

A.N: $M = \sqrt{\frac{2}{1,4-1} \cdot \left[\left(\frac{1,7}{1}\right)^{\frac{1,4-1}{1,4}} - 1\right]} = 0,9$

3) $V = M \cdot C \Rightarrow V = 0,9 \cdot 346 = 311,4 \text{ m/s}$

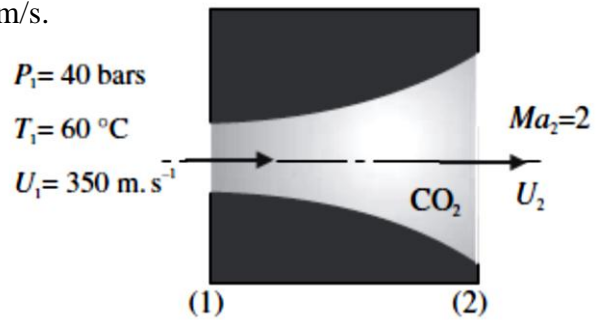
Exercice N°10

On considère l'écoulement isentropique du dioxyde de carbone dans une tuyère tel représenté sur la figure ci-contre. À la section (1) de cet écoulement, la température est $T_1=60 \text{ °C}$ et la vitesse $V_1=350 \text{ m/s}$.

Déterminer la vitesse V_2 à la section (2)

où le nombre de Mach $Ma_2 = 2$.

Calculer alors le rapport des sections S_2/S_1 .



Réponse

On a $U_2 = Ma_2 a_2 = Ma_2 \sqrt{\gamma r T_2}$

Pour le CO_2 , $\gamma = 1,3$ et $r = 188,9 \text{ J/kgK}$.

De plus, d'après l'équation, $\frac{T_{0,2}}{T_2} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_2^2$ et $\frac{T_{0,1}}{T_1} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_1^2$ où pour un écoulement isentropique $T_{0,2} = T_{0,1}$. En divisant ces équations, on obtient alors :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_2^2}$$

$$Ma_1 = \frac{U}{\sqrt{\gamma r T_1}} = \frac{350}{\sqrt{1,3 \cdot 188,9 \cdot (273 + 60)}} = 1,22$$

Donc : $T_2 = (273 + 60) \frac{1 + \frac{1,3-1}{2} 1,22^2}{1 + \frac{1,3-1}{2} 2^2} = 255 \text{ K}$

Par conséquent $U_2 = 2 \sqrt{1,3 \cdot 188,9 \cdot 255} = 500,5 \text{ m/s}$

Ce qui entraîne :

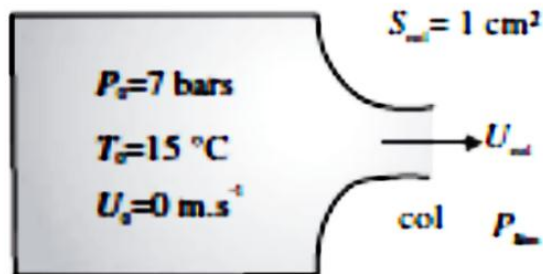
$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{S_2}{S_2^*}}{\frac{S_1}{S_1^*}} = \frac{\frac{1}{M_{a2}} \left\{ \left(\frac{2}{\gamma+1} \right) \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{a2}^2 \right] \right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}}{\frac{1}{M_{a1}} \left\{ \left(\frac{2}{\gamma+1} \right) \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{a1}^2 \right] \right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}}} = \frac{M_{a1}}{M_{a2}} \left[\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{a2}^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{a1}^2} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

Avec : $\frac{\gamma-1}{2} = 0,15$, $\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} = 3,83$, $M_{a2} = 2$, $M_{a1} = 1,22$

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{1,22}{2} \left[\frac{1 + 0,15 \cdot 2^2}{1 + 0,15 \cdot 1,22^2} \right]^{3,83} = 1,71$$

Exercice N°11

Un gaz idéal à la pression $P_0 = 7$ bars et à la température $T_0 = 15$ °C s'écoule de façon isentropique à partir d'un grand réservoir de stockage à travers une tuyère convergente directement à l'atmosphère. La surface au col du conduit est de 1 cm^2 . Déterminer la pression, température, vitesse et débit-masse du gaz au col du conduit si le gaz est (a) de l'air ($\gamma = 1.4$), (b) du dioxyde de carbone ($\gamma = 1.3$) et (c) de l'hélium ($\gamma = 1.66$).



Réponse

S'il y a blocage sonique à la sortie de la tuyère, alors la vitesse du fluide à la sortie est égale à la vitesse du son et la pression est égale à la pression critique P^* et par conséquent d'après l'équation :

$$\frac{P_0}{P^*} = \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Si $P^* < P_{atm}$ alors il n'y a pas blocage sonique au niveau du col de la tuyère et $P_{col} = P_{atm}$.

Si $P^* > P_{atm}$ alors il y a blocage sonique au niveau du col et $P_{col} = P^*$. En fait comme montré

ci-dessous, dans les deux cas, il y a blocage sonique au niveau du col de la tuyère. Pour l'air $\gamma = 1,4$, et donc :

$$P^* = 7 \cdot 10^5 \cdot \left(\frac{2}{2,4}\right)^{\frac{1,4}{0,4}} = 3,7 \cdot 10^5 \text{ Pa} > P_{atm} = 10^5 \text{ Pa}$$

Donc $P_{col} = P^* = 3,7 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ et $M_{col} = 1$

S'après l'équation : $T^* = T_{col} = T_0 \frac{2}{\gamma+1} = (273 + 15) \cdot \frac{2}{1,4+1} = 240 \text{ K}$

Soit alors : $U_{col} = M_{col} a_{col} = \sqrt{\gamma r T_{col}} = \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 240} = 310,5 \text{ m/d}$

Exercices N°12

Un courant d'air s'écoule subsoniquement dans une conduite adiabatique de 2 cm de diamètre. Le coefficient de friction moyen est 0,024. Quelle est la longueur de conduite nécessaire d'accélérer l'écoulement fluide de $M_1 = 0,1$ à $M_2 = 0,5$? Quelle longueur complémentaire l'accélérera à $M_3 = 1,0$? Supposez $\gamma = 1,4$.

Pour cet écoulement interne supposez que, à $M_1 = 0,1$, nous avons $p_1 = 600 \text{ kPa}$ et $T_1 = 450 \text{ K}$. A la section 2 plus éloignée en aval, $M_2 = 0,5$. Calculez (a) p_2 , (b) T_2 , (c) v_2 et (d) p_{02} .

Réponse

Avec les valeurs de $\frac{\bar{f}L^*}{D}$ lises de la table (III) :

$$\begin{aligned} \bar{f} \frac{\Delta L}{D} &= \frac{0,024 \Delta L}{0,02 \text{ m}} = \left(\frac{\bar{f}L^*}{D}\right)_{M=0,1} - \left(\frac{\bar{f}L^*}{D}\right)_{M=0,5} \\ &= 66,9216 - 1,0691 = 65,8525 \\ \Delta L &= \frac{65,8525(0,02 \text{ m})}{0,024} = 55 \text{ m} \end{aligned}$$

La longueur complémentaire $\Delta L'$ pour aller de $M = 0,5$ à $M = 1,0$ est prise directement de la table (II)

$$\begin{aligned} f \frac{\Delta L'}{D} &= \left(\frac{fL^*}{D}\right)_{M=0,5} = 1,0691 \\ \Delta L' &= L_{M=0,5}^* = \frac{1,0691(0,02 \text{ m})}{0,024} = 0,9 \text{ m} \end{aligned}$$

Ces calculs sont typiques : Il prend 55 m pour accélérer jusqu'à $M = 0,5$ et ensuite seulement 0,9 m plus pour arriver entièrement jusqu'au point sonique.

Comme information préliminaire nous pouvons calculer V_1 et p_{01} des données :

$$V_1 = M_1 a_1 = 0.1 [(1.4)(287)(450)]^{1/2} = 0.1(425 \text{ m/s}) = 42.5 \text{ m/s}$$

$$p_{01} = p_1 (1 + 0.2 M_1^2)^{3.5} = (600 \text{ kPa}) [1 + 0.2(0.1)^2]^{3.5} = 604 \text{ kPa}$$

Entrez maintenant à la table (III) pour trouver les rapports suivants

| Section | M | p / p^* | T / T^* | V / V^* | p_0 / p_0^* |
|---------|-----|-----------|-----------|-----------|---------------|
| 1 | 0.1 | 10.9435 | 1.1976 | 0.1094 | 5.8218 |
| 2 | 0.5 | 2.1381 | 1.1429 | 0.5345 | 1.3399 |

Employez ces proportions pour calculer toutes les propriétés en aval :

$$p_2 = p_1 \frac{p_2 / p^*}{p_1 / p^*} = (600 \text{ kPa}) \frac{2.1381}{10.9435} = 117 \text{ kPa}$$

$$T_2 = T_1 \frac{T_2 / T^*}{T_1 / T^*} = (450 \text{ K}) \frac{1.1429}{1.1976} = 429 \text{ K}$$

$$V_2 = V_1 \frac{V_2 / V^*}{V_1 / V^*} = (42.5 \text{ m/s}) \frac{0.5345}{0.1094} = 208 \text{ m/s}$$

$$p_{02} = p_{01} \frac{p_{02} / p_0^*}{p_{01} / p_0^*} = (604 \text{ kPa}) \frac{1.3399}{5.8218} = 139 \text{ kPa}$$

Exercices N°13

Un mélange air-carburant, supposé comme l'air avec $\gamma = 1.4$, entre à une chambre de combustion de conduite à $V_1 = 75 \text{ m/s}$, $p_1 = 150 \text{ kPa}$ et $T_1 = 300 \text{ K}$. L'ajout de chaleur par la combustion est 900 kJ/kg de mélange. Calculez (a) les propriétés de sortie V_2 , p_2 et T_2 , et (b) la quantité de chaleur totale ajoutée qui aurait causé un écoulement de sortie sonique.

Ce qui arrive à l'entrée de cet écoulement si l'ajout de chaleur est augmenté à 1400 kJ/kg et la pression et la température de stagnation à l'entrée sont fixées ? Quelle sera la diminution subséquente dans le débit massique de l'écoulement ?

Réponse

a) (a) D'abord on calcule $T_{01} = T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = 300 + \frac{75^2}{[2.2005]} = 303 \text{ K}$. Alors on calcule la

variation de la température de stagnation du gaz : $q = c_p(T_{02} - T_{01})$

Ou $T_{02} = T_{01} + \frac{q}{c_p} = 303 + \frac{900000}{1005} = 1199 \text{ K}$

Nous avons assez d'information pour calculer le nombre de Mach initial :

$$a_1 = \sqrt{\gamma r T_1} = \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 300} = 347 \text{ m/s}, M_1 = \frac{V_1}{a_1} = \frac{75}{347} = 0,216$$

Pour ce nombre de Mach, on emploie la table (IV) pour trouver la valeur sonique T_0^* :

$$\text{A } M_1 = 0,216: \frac{T_{01}}{T_0} \approx 0,1992 \text{ ou } T_0^* = \frac{303}{0,1992} \approx 1521K$$

Alors le rapport de température de stagnation à la section 2 est $\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{1199}{1521} = 0,788$, qui correspond dans la table (IV) à un nombre de Mach $M_2 \approx 0,573$.

On emploie maintenant la table (IV) à M_1 et M_2 pour tabuler les rapports de propriétés désirés.

| Section | M | V / V^* | p / p^* | T / T^* |
|---------|-------|-----------|-----------|-----------|
| 1 | 0.216 | 0.1051 | 2.2528 | 0.2368 |
| 2 | 0.573 | 0.5398 | 1.6442 | 0.8876 |

Les propriétés de sortie sont calculées en employant ces proportions pour trouver l'état 2 de l'état 1 :

$$V_2 = V_1 \frac{V_2 / V^*}{V_1 / V^*} = (75 \text{ m/s}) \frac{0.5398}{0.1051} = 385 \text{ m/s}$$

$$p_2 = p_1 \frac{p_2 / p^*}{p_1 / p^*} = (150 \text{ kPa}) \frac{1.6442}{2.2528} = 109 \text{ kPa}$$

$$T_2 = T_1 \frac{T_2 / T^*}{T_1 / T^*} = (300 \text{ K}) \frac{0.8876}{0.2368} = 1124 \text{ K}$$

b) l'ajout de chaleur maximal permis conduirait le nombre de Mach de la sortie à l'unité :

$$T_{02} = T_0^* = 1521K$$

$$q_m = C_p(T_0^* - T_{01}) = [1005](1521 - 303) \approx 1,22 \text{ J/Kg}$$

Pour $q = 1400 \text{ kJ/kg}$, la sortie sera étranglée (suffoquée) à la température de stagnation

$$T_0^* = T_{01} + \frac{q}{C_p} = 303 + \frac{1,4 \cdot 10^6}{1005} \approx 1696K$$

C'est plus haut que la valeur $T_0^* = 1521K$ dans l'exemple (VII.1), donc nous savons que la condition 1 devra suffoquer vers un nombre de Mach inférieur. La valeur appropriée est trouvée du rapport $\frac{T_{01}}{T_0^*} = \frac{303}{1696} = 0,1787$. De la table (IV) pour cette condition, nous lisons le nouveau

nombre de Mach d'entrée baissé : $M_{1,nouv} \approx 0,203$. avec T_{01} et p_1 connu, les autres propriétés d'entrée suivent de ce nombre de Mach :

$$T_1 = \frac{T_{01}}{1 + 0.2M_1^2} = \frac{303}{1 + 0.2(0.203)^2} = 301K$$

$$a_1 = \sqrt{\gamma R T_1} = [1.4(287)(301)]^{1/2} = 348 m / s$$

$$V_1 = M_1 a_1 = (0.202)(348 m / s) = 70 m / s$$

$$\rho_1 = \frac{p_1}{R T_1} = \frac{150000}{(287)(301)} = 1.74 kg / m^3$$

Finalement, le nouveau débit massique baissé d'écoulement par unité de surface est

$$\frac{\dot{m}_{nouv}}{A} = \rho_1 V_1 = (1.74 kg / m^3)(70 m / s) = 122 kg / (s.m^2)$$

C'est 7% moins que dans l'Exemple 9.14, dû à la suffocation par l'excès d'addition de chaleur.

Exercices supplémentaires

Exercice N°12

Un réservoir contient de l'air comprimé à une pression $P_i = 4$ bar, supposée pression d'arrêt à l'état initial. L'ouverture d'une vanne dans ce réservoir provoque la détente de l'air vers l'extérieur sous forme d'un jet ayant un diamètre $d = 5$ mm. Les paramètres extérieurs du jet d'air à l'état final sont :

- Pression $P = 1$ bar,
- Température $T = 250$ °C,

On donne $\gamma = 1,4$ et $r = 287$ J/Kg.K.

- 1) Calculer la vitesse du son a à l'extérieur du réservoir en (m/s).
- 2) Déterminer la masse volumique ρ de l'air à l'extérieur du réservoir en (kg/m³). (On suppose que l'air est un gaz parfait.)
- 3) Ecrire l'équation de Saint-Venant, en terme de rapport de pression, entre un point d'arrêt et un point sur le jet d'air.
- 4) En déduire le nombre de Mach M au niveau du jet d'air.
- 5) Quelle est la nature de l'écoulement ?
- 6) Calculer la vitesse d'écoulement V du jet d'air en (m/s).

7) En déduire le débit massique q_m (kg/s).

Rép : 1) $a=346\text{m/s}$, 2) $\rho=1.169\text{kg/m}^3$, 3) $1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 = \left(\frac{P_i}{P}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$, 4) $M=1.558$, 5) écoulement est supersonique, 6) $V=549.48\text{m/s}$, 7) $q_m=2.52\text{kg/s}$.

Exercice N°13

En un point d'un écoulement isentropique la température locale est 20°C et la pression 1bar.

1. Si $V=200\text{m/s}$, calculer M , T_i , P_i .
2. Même question pour $V=400\text{m/s}$.
3. Pour $V=400\text{m/s}$ il se forme une onde de choc en ce point, calculer P_2 , T_2 , M_2 après l'onde de choc.
4. On place une sonde d'arrêt après l'onde de choc, calculer la pression d'arrêt P_r .

Rép : 1) $M=0.583$, $T_i=313\text{K}$, $P_i=1.259\text{bar}$.

2) $M=1.166$, $T_i=373\text{K}$, $P_i=2.32\text{bar}$.

3) $P_2=1.419\text{bar}$, $M_2=0.864$, $T_2=323.14\text{K}$.

4) $P_r=1.617\text{bar}$.

Exercice N°14

Dans un écoulement isentropique unidimensionnel établir une relation donnant $\frac{dS}{S}$ en fonction de γ , M , $\frac{dM}{M}$. Intégrer cette relation entre deux points 1 et 2 de l'écoulement et en déduire l'expression du rapport $\frac{S_1}{S_2}$.

$$\text{Rép : } \frac{dS}{S} = \frac{M^2-1}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2} \cdot \frac{dM}{M}, \frac{S_1}{S_2} = \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}M_2^2} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

Exercice N°15

Une tuyère convergente-divergente alimenter par l'air $P_i=3\text{bar}$ et $T_i=600\text{K}$. Cette tuyère à une section d'entrée $S_e=5\text{cm}^2$ et une vitesse $V_e=146\text{m/s}$. On constate expérimentalement la présence d'une onde de choc dans une section $S_{o,c}=2.53\text{cm}^2$.

1. Calculer P , T , ρ au col et le débit.

2. Calculer P et T avant et après l'onde de choc.
3. Calculer P et T dans la section de sortie où $S_S=2.70\text{cm}^2$.

Rép : 1) $P_c=1.581\text{bar}, T_c=499\text{K}, \rho_c=1.107\text{kg/m}^3, q_m=0.122\text{kg/s}$.

2) $P_1=1.235\text{bar}, T_1=465\text{K}, P_2=1.87\text{bar}, T_2=525\text{K}$.

3) $P=2.14\text{bar}, T=546\text{K}$.

Exercice N°16

On considère une tuyère convergente-divergente ; une onde de choc est située dans le divergent.

On note $(.*)_1$ l'état critique associé à l'écoulement isentropique en amont de ce choc droit :

$(\rho^*)_1$,

$(p^*)_1, (T^*)_1, (u^*)_1, (A^*)_1$ sont donc respectivement la densité, la pression, la température, la vitesse et la section critique (ou sonique) en amont du choc.

On introduit similairement $(.*)_2$, l'état critique associé à l'écoulement en aval du choc. $(\rho^*)_2$,

$(p^*)_2$,

$(T^*)_2, (u^*)_2, (A^*)_2$ désignent alors respectivement la densité, la pression, la température, la vitesse et la section critique (ou sonique) en aval du choc. On notera également $(p_0)_1$ la pression d'arrêt isentropique associée à l'écoulement avant le choc et $(p_0)_2$ la pression d'arrêt isentropique associée à l'écoulement après le choc.

En écrivant la conservation de la masse entre l'état $(.*)_1$ et $(.*)_2$, démontrer la relation :

$$(\rho^*)_1(u^*)_1(A^*)_1 = (\rho^*)_2(\rho^*)_2(\rho^*)_2$$

Exercice N°17

On considère une tuyère convergente-divergente. L'écoulement est supersonique dans le divergent.

Le rapport de section entre la sortie et le col est égal à 10 ; la pression d'arrêt est $p_0 = 10 \text{ atm}$ et la pression ambiante $p_a = 0.04 \text{ atm}$.

Décrire précisément l'écoulement à la sortie de la tuyère.

Rép : $\theta=5.75^\circ$

Exercice N°18

Une tuyère est alimentée à l'amont par de l'air ($\gamma = 1.405, r = 287 \frac{\text{J}}{\text{kg.K}}$) dont la pression génératrice est $P_i=1\text{bar}$ et la température d'arrêt $T_i=288 \text{ K}$.

Dans la section d'entrée ($S=5 \text{ cm}^2$) la vitesse de l'air est 111 m/s . la pression dans la section de sortie est $1/3 \text{ bar}$.

1. Représenter graphiquement en fonction de x , pour x variant de 0 à l , les rapports $\frac{P}{P_i}, \frac{T}{T_i}, \frac{S}{S_c}, M$. On utilisera les tables d'écoulement isentropique. Dresser un tableau récapitulatif des valeurs pour l'entrée ($x=0$) la sortie ($x=l$) le col et les sections d'abscisse $0.25l, 0.50l, 0.75l$. calculer la vitesse de sortie et le débit masse de la tuyère.
2. Dans la tuyère ayant le profil défini à la question précédente, on fait varier la pression à l'aval, sans modifier les conditions à l'amont, de façon à obtenir une onde de choc droite située à l'abscisse $x=0.75l$. En négligeant la variation de pression d'arrêt à la traversée de l'onde de choc, calculer les pressions, masses volumiques, températures et vitesses de part et d'autre de l'onde de choc et à la sortie de la tuyère.

Compléter dans ce cas la représentation graphique de la première question.

Rép : 1)

| x | 0 | $l/4$ | $l/2$ | Col, $0.672l$ | $3l/4$ | l |
|---------|--------|--------|--------|---------------|--------|--------|
| P/P_i | 0.9273 | 0.7788 | 0.6303 | 0.527 | 0.4818 | 0.3333 |
| T/T_i | 0.9784 | 0.930 | 0.875 | 0.8316 | 0.8102 | 0.728 |
| S/S_c | 1.869 | 0.176 | 1.024 | 1 | 1.0047 | 1.0919 |
| M | 0.33 | 0.61 | 0.84 | 1 | 1.076 | 1.36 |

$$V_s = 394.7 \text{ m/s}, q_m = 63.5 \text{ g/s}$$

2)

| x | Col | $3l/4$ (amont) | $3l/4$ (aval) | l |
|---------|--------|----------------|---------------|--------|
| P/P_i | 0.527 | 0.4818 | 0.570 | 0.7177 |
| T/T_i | 0.8316 | 0.8102 | 0.810 | 0.909 |
| M | 1 | 1.076 | 0.932 | 0.704 |
| V | 310.3 | 329.5 | 292.5 | 228.1 |

Exercice N°19

Un courant d'air s'écoule subsoniquement dans une conduite adiabatique de 2 cm de diamètre. Le coefficient de friction moyen est 0.024 . Quelle est la longueur de conduite nécessaire

d'accélérer l'écoulement fluide de $M_1 = 0.1$ à $M_2 = 0.5$? Quelle longueur complémentaire l'accélénera à $M_3 = 1.0$? Supposez $\gamma = 1.4$.

Pour l'écoulement interne supposez que, à $M_1 = 0.1$, nous avons $P_1 = 600\text{kPa}$ et $T_1 = 450\text{ K}$. A la section 2 plus éloignée en aval, $M_2 = 0.5$. Calculez (a) P_2 , (b) T_2 , (c) V_2 et (d) P_{02} .

Rép : $\Delta L = 55\text{m}$, $\Delta L' = 0.9\text{m}$, $P_2 = 117\text{kPa}$, $T_2 = 429\text{K}$, $V_2 = 208\text{m/s}$, $P_{02} = 139\text{kPa}$.

Exercice N°20

A l'entrée d'une conduite parfaitement calorifugée, l'air présente les caractéristiques suivantes : $P_1 = 1\text{bar}$, $T_1 = 206\text{K}$, $M_1 = 2.60$.

L'air sera assimilé à un gaz parfait de constantes : $\gamma = 1.4$, $c_p = 1000 \frac{\text{J}}{\text{kg.K}}$, $r = 287 \frac{\text{J}}{\text{kg.K}}$.

La conduite a un diamètre de 50mm. Son coefficient de perte de charge linéaire est $\lambda = 0.01$.

1. A l'aide des tables de Fanno, déterminer la longueur de la conduite pour que l'écoulement soit sonique à la sortie, sans présenter aucune discontinuité à l'intérieur de la conduite.
2. En opérant d'une part le calcul, d'autre part par l'utilisation des tables de Fanno, et en comparant les résultats, calculer :
 - a). la température de sortie,
 - b). la pression de sortie,
 - c). les pressions génératrices locales à l'entrée et à la sortie.
3. Calculer les températures d'arrêt et les vitesses à l'entrée et à la sortie.
4. Calculer la variation d'entropie $S_2 - S_1$ entre l'entrée et la sortie.

Rép : 1) $L^* = 2.26\text{m}$, 2) $T_2 = 510\text{K}$, $P_2 = 3.64\text{bar}$, $P_{i1}' = 20\text{bar}$, $P_{i2}' = 6.90\text{bar}$.

3) $T_{i1} = T_{i2} = 612\text{K}$, $V_1 = 839\text{m/s}$, $V_2 = 452\text{m/s}$.

4) $S_2 - S_1 = 303\text{J/kg.K}$

Exercice N°21

Un mélange air-carburant, supposé comme l'air avec $\gamma = 1.4$, entre à une chambre de combustion de conduite à $V_1 = 75\text{ m/s}$, $P_1 = 150\text{kPa}$ et $T_1 = 300\text{ K}$. L'ajout de chaleur par la combustion est 900 kJ/kg de mélange. Calculez (a) les propriétés de sortie V_2 , P_2 et T_2 et (b) la quantité de chaleur totale ajoutée qui aurait causé un écoulement de sortie sonique.

Ce qui arrive à l'entrée de l'écoulement si l'ajout de chaleur est augmenté à 1400 kJ/kg et la pression et la température de stagnation à l'entrée sont fixées ? Quelle sera la diminution subséquente dans le débit massique de l'écoulement ?

Rép : a) $V_2=385\text{m/s}$, $P_2=109\text{kPa}$, $T_2=1124\text{K}$, b) $q_{\max}=1.22 \cdot 10^6\text{J/kg}$. 7% moins.

Chapitre

3

La turbulence et écoulements turbulents

3.1. Introduction

Par définition, un mouvement turbulent est irrégulier. L'irrégularité associée à la turbulence est telle qu'elle peut être décrite par des lois de probabilités. L'écoulement turbulent peut être défini à travers les différentes quantités (par exemple les composantes de la vitesse et la pression) qui montrent une variation aléatoire avec le temps et l'espace de telle sorte que la moyenne statistique de ces quantités peut être exprimée quantitativement. Il est montré que les fluctuations provenant de ce mouvement aléatoire viennent des perturbations (dus à la rugosité de la surface par exemple) et peuvent être soit amorties par dissipation visqueuse soit amplifiées en pompant de l'énergie à partir de l'écoulement au loin. Pour un nombre de Reynolds inférieur à un nombre de Reynolds critique, l'énergie cinétique de l'écoulement n'est pas suffisante pour soutenir les fluctuations aléatoires contre les efforts visqueux et donc pour ces cas l'hypothèse d'un écoulement laminaire reste valable. Dans le cas contraire, la transition vers la turbulence prend place et c'est l'objet de ce chapitre [16].

3.2. Caractéristiques d'un écoulement turbulent

La caractéristique principale d'un mouvement turbulent vient du fait que les vitesses et pression en un point fluctuent avec le temps de façon aléatoire (voir Figure 3.1).

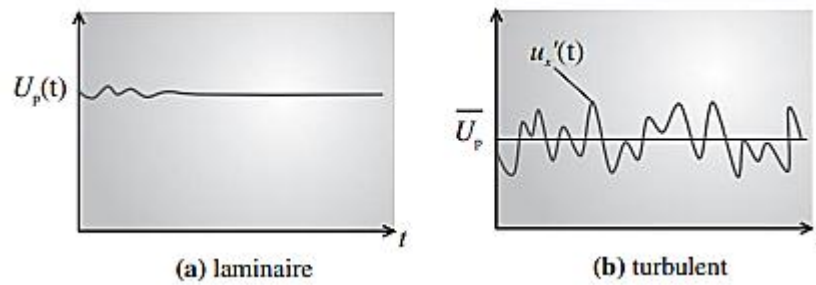


Fig. 3.1 – Variation d’une des composantes de la vitesse pour des écoulements (a) laminaire et (b) turbulent en un point P [16].

Le mélange dans un écoulement turbulent est dû à ces fluctuations qui donnent un profil de vitesses qui est plus uniforme en moyenne que dans le cas d’un écoulement laminaire dans un tube (voir Figure 3.2).

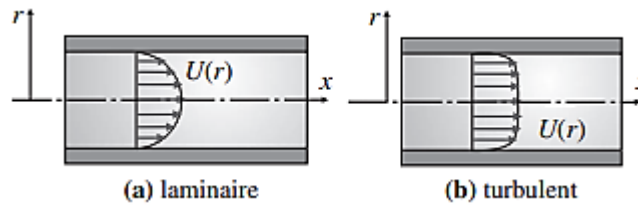


Fig. 3.2 – Comparaison des profils de vitesse dans un tube à écoulement (a) laminaire et (b) turbulent [16].

La turbulence peut être créée par les forces de viscosité sur les parois (turbulence pariétale) ou par les différentes couches de l’écoulement et qui sont à des vitesses différentes les unes par rapport aux autres (turbulence libre).

Le terme turbulence homogène implique que les fluctuations de vitesse dans le système sont aléatoires. Si on considère la moyenne quadratique des fluctuations de vitesse :

$$u'_x = \sqrt{\overline{u_x^2}}, u'_y = \sqrt{\overline{u_y^2}}, u'_z = \sqrt{\overline{u_z^2}} \text{ alors en turbulence homogène ces vitesses } u'_x, u'_y \text{ et } u'_z$$

peuvent être différentes, mais chaque valeur est constante sur le champ entier de turbulence. En revanche, les valeurs instantanées de u_x, u_y et u_z peuvent différer d’un point à un autre à chaque instant.

En turbulence isotrope, les fluctuations sont indépendantes de la direction et dans ce cas :

$$\sqrt{\overline{u_x^2}} = \sqrt{\overline{u_y^2}} = \sqrt{\overline{u_z^2}} \text{ ou } u'_x = u'_y = u'_z.$$

En général, la turbulence engendre un mélange plus efficace et produit donc un effet de diffusion supplémentaire. Le terme de diffusion turbulente est souvent employé pour distinguer de la diffusion moléculaire. À des nombres de Reynolds élevés, il y a un transport continu d'énergie de l'écoulement libre aux gros tourbillons. Puis, à partir des gros tourbillons de petits tourbillons sont continûment formés. Enfin près de la paroi ces petits tourbillons dissipent l'énergie et s'autodétruisent.

La turbulence est caractérisée par différents aspects :

a- l'aspect irrégulier et aléatoire en temps ou en espace :

Les grandeurs telles que la vitesse, la pression et la température varient de façon rapide et aléatoire. Les écoulements turbulents sont donc fortement instationnaires.

b- L'aspect tridimensionnel et rotationnel :

Les écoulements turbulents sont strictement rotationnels et tridimensionnel caractérisés par la présence d'innombrables tourbillons de quelques millimètres de grandeurs dans un domaine d'écoulement de plusieurs mètres.

c- La capacité de mélange élevée :

En un écoulement laminaire, le transport de quantité de mouvement et de chaleur se fait par convection et par diffusion. En turbulent, les fluctuations de vitesses d'écoulement et de la température dans les trois directions assurent un mélange bien plus efficace

d- L'aspect dissipatif :

L'énergie des écoulements moyens est dissipée par les contraintes visqueuses. Pour se maintenir, les écoulements turbulents ont besoin d'être fournis en énergie, sinon ils finissent par se relaminariser. Cette source d'énergie peut avoir des origines diverses, la plus fréquente est le cisaillement ou la déformation de l'écoulement moyen : l'origine peut aussi être des forces extérieures

Autre caractéristique à signaler est que les nombres adimensionnels caractérisant le régime de l'écoulement (nombre de Reynolds et nombre de Rayleigh) sont plus élevés en régime turbulent qu'un régime laminaire. A titre d'exemple, le régime turbulent est observé pour un écoulement :

- Dans une conduite à : $Re > 4 \cdot 10^3$
- Sur une plaque plane à : $Re > 10^6$

Pour le cas particulier de l'écoulement d'un jet libre le régime turbulent est observé pour des nombres de Reynolds faibles, approximativement à $Re > 10$.

3.3. Aspect macroscopique (expérience de Reynolds)

Les expériences réalisées par Reynolds (1883) lors de l'écoulement d'un fluide dans une conduite cylindrique rectiligne, ont montré l'existence de deux régimes d'écoulement : laminaire et turbulent. En utilisant des fluides divers (viscosité différente), en faisant varier le débit et le diamètre de la canalisation, Reynolds a montré que le paramètre qui permettait de déterminer si l'écoulement est laminaire ou turbulent est un nombre sans dimension appelé nombre de Reynolds Re donné par la relation [16] :

$$Re = \frac{v \cdot D}{\nu} \quad (3.1)$$

Ou
$$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot D}{\eta} \quad (3.2)$$

Avec :

ρ = masse volumique du fluide,

v = vitesse moyenne,

D = diamètre de la conduite

η = viscosité dynamique du fluide

ν = viscosité cinématique

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (3.3)$$

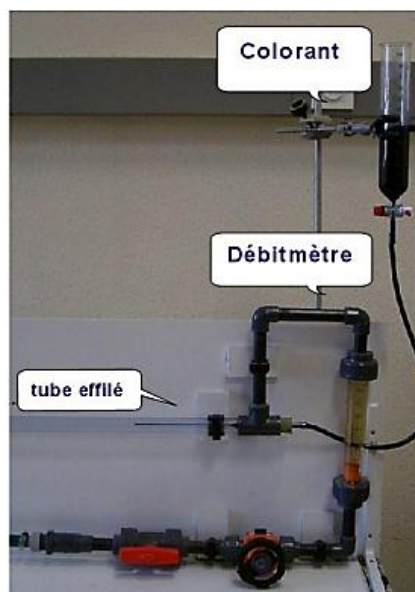


Fig. 3.2- Expérience de Reynolds

L'expérience montre que :

Si $Re < 2000$ le régime est LAMINAIRE

Si $2000 < Re < 3000$ le régime est intermédiaire

Si $Re > 3000$ le régime est TURBULENT

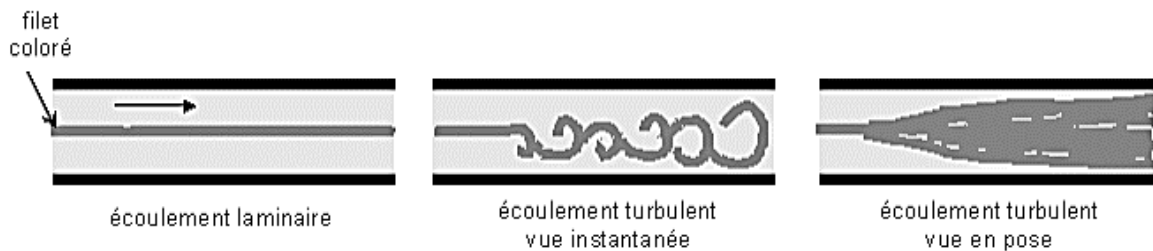


Fig. 3.3- Différentes types d'écoulement [16]

3.3.1. Viscosité cinématique et dynamique

3.3.1.1. Introduction

Sous l'effet des forces d'interaction entre les molécules de fluide et des forces d'interaction entre les molécules de fluide et celles de la paroi, chaque molécule de fluide ne s'écoule pas à la même vitesse. *On dit qu'il existe un profil de vitesse.*

Si on représente par un vecteur, la vitesse de chaque particule située dans une section droite perpendiculaire à l'écoulement d'ensemble, la courbe lieu des extrémités de ces vecteurs représente le profil de vitesse.

Le mouvement du fluide peut être considéré comme résultant du glissement des couches de fluide les unes sur les autres.

La vitesse de chaque couche est une fonction de la distance z de cette couche au plan fixe : $v = v(z)$. Considérons 2 couches contiguës distantes de dz .

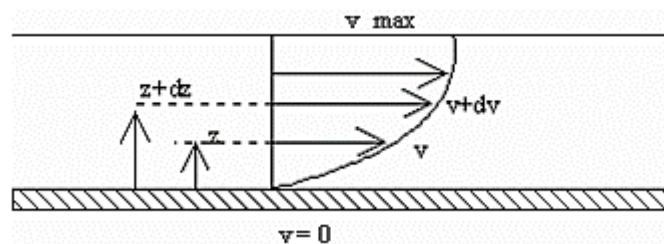


Fig. 3.4- Courbe de vitesse au plan fixe

La force de frottement F qui s'exerce à la surface de séparation de ces deux couches s'oppose au glissement d'une couche sur l'autre. Elle est proportionnelle à la différence de vitesse des couches soit dv , à leur surface S et inversement proportionnelle à dz : Le facteur de proportionnalité η est le coefficient de viscosité dynamique du fluide.

$$F = -\eta \cdot S \cdot \frac{dv}{dz} \quad (3.4)$$

Unité : Dans le système international (SI), l'unité de la viscosité est le (**Pa.s**) ou **Poiseuille (PI)** : $1 \text{ PI} = 1 \text{ Kg/m.s}$

Autres unités : La viscosité de produits industriels (huiles en particulier) est exprimée au moyen d'unités empiriques : degré **ENGLER** en Europe, degré **Redwood** en Angleterre, degré **Saybolt** aux USA.

Par rapport aux faits expérimentaux, on est conduit à considérer deux types de fluides :

- D'une part les fluides **newtoniens** qui satisfont à la loi de Newton. Ces fluides ont un coefficient de viscosité indépendant du gradient de vitesse. C'est le cas des gaz, des vapeurs, des liquides purs de faible masse molaire,...
- D'autre part les fluides **non-newtoniens**. Ce sont les solutions de polymères, les purées, les gels, les boues, le sang, la plupart des peintures, etc....L'étude de ces fluides relève de la rhéologie : fluides pseudo plastiques, rhéoplastiques, thixotropiques, rhéopectiques.

3.3.1.2. Viscosité cinématique

Dans de nombreuses formules apparaît le rapport de la viscosité dynamique η et de la masse volumique ρ .

Ce rapport est appelé viscosité cinématique équation (3.3)

unité SI : m^2/s système cgs : le Stoke (St) $1 \text{ m}^2/\text{s} = 10^6 \text{ cSt}$

Viscosité de l'eau :

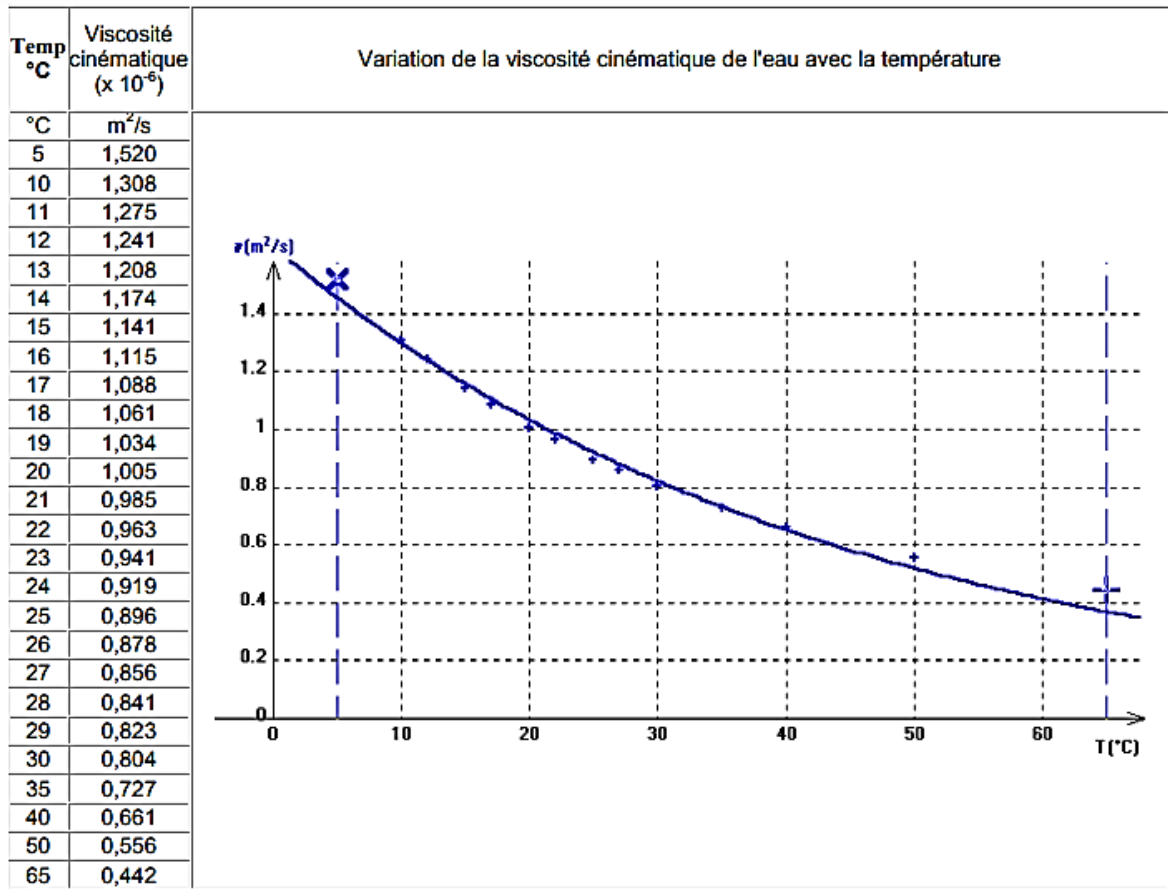


Fig. 3.5- Variation de la viscosité cinématique de l'eau avec la température

Tableau. 3.1- quelques valeurs de la viscosité à 20°C

Quelques valeurs de la viscosité :
(à 20 °C sous la pression atmosphérique normale)

| | Viscosité dynamique | Viscosité cinématique (x10 ⁻⁶) |
|----------|--------------------------|--|
| Ethanol | 1,20 x 10 ⁻³ | 1,51 |
| Benzène | 0,625 x 10 ⁻³ | 0,741 |
| Glycérol | 1,49 | 1182 |
| Mercure | 1,554 | 0,1147 |
| Air | 18,5 x 10 ⁻⁵ | 15,6 |

3.4. Aspect microscopique (fluctuation des vitesses « l'anémomètre à fil chaud »)

Plus de l'approche expérimentale, l'étude des écoulements turbulents peut être menée par des procédures numériques. Néanmoins, le calcul des écoulements turbulents par résolution directe des équations de Navier-Stokes est très délicat et souvent inaccessible à cause des résolutions spatiales très élevées dans ce type d'approche.

3.4.1. Notion de l'écoulement moyen

Toutes les approches pratiques de calcul (résolution numérique) font appel à la notion de grandeur moyenne. La moyenne est à l'origine une moyenne d'ensemble, c'est-à-dire qu'elle est prise sur un ensemble d'expériences effectuées dans des conditions identiques. L'hypothèse qu'il est équivalent de considérer une expérience répétée une infinité de fois ou une seule expérience menée à l'infini dans le temps permet le passage à des moyennes temporelles et par conséquent un traitement statistique des équations.

Ainsi, au lieu de chercher à déterminer l'évolution spatiale et temporelle des grandeurs instantanées, on s'intéresse essentiellement au comportement de leurs moyennes temporelles [16,17].

L'importance et l'intérêt de cette procédure résident dans le fait que :

- L'hypothèse de bidirectionnalité dans un écoulement turbulent possède plus de signification et de justification lorsqu'il s'agit d'un écoulement moyenné.
- Ce sont les écoulements moyens représentant les caractéristiques globales des écoulements instationnaires.

C'est la raison pour laquelle les études sur la turbulence sont orientées vers la modélisation numérique utilisant les modèles statistiques. Afin de transformer les équations de transport de quantité de mouvement et de chaleur en équations moyennées une décomposition des variables instantanées de l'écoulement, dite « décomposition de Reynolds » .

3.4.2. Décomposition de Reynolds

La décomposition de Reynolds permet de transformer les équations de Navier-Stokes et d'énergie en équations moyennes dans le temps, en exprimant chaque variable instantanée $X(x_i, t)$, $i = 1, 2, 3$, en la somme de [16,17] :

- Sa valeur moyenne temporelle $\bar{X}(x_i)$
- Et d'une fluctuation $X'(x_i, t)$ ou bien $\tilde{X}(x_i, t)$

C'est-à-dire

$$X(x_i, t) = \bar{X}(x_i) + X'(x_i, t) \quad (3.5)$$

La moyenne temporelle est définie comme suit :

$$\bar{X}(x_i) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} X(x_i, t) dt \quad (3.6)$$

La variable X peut représenter dans la plupart des cas l'une des grandeurs suivantes :

- u, v, w : Composantes de vecteur vitesse et p : la pression
- Dans le cas de transfert thermique et solutal : la température (T) et la concentration (C).

Lorsqu'on applique la décomposition de Reynolds aux équations instantanées de transport de mouvement, ou équation de Navier-Stokes, et de l'énergie on obtient un système d'équations moyennées.

Cette moyenne vérifie les règles dites de Reynolds :

$$\overline{X'} = 0, \overline{(X + Y)} = \bar{X} + \bar{Y}, \overline{aX} = a \bar{X} \text{ avec : } a \text{ une constante}$$

$$\overline{(X \times Y)} = \bar{X} \times \bar{Y}, \frac{\partial \bar{X}}{\partial s} = \frac{\partial X}{\partial s} \text{ avec : } s \text{ variable d'espace ou de temps}$$

→ Propriété importante à retenir : $\overline{(X \times Y)} = \bar{X} \times \bar{Y} + \overline{X'Y'}$

Ce traitement appliqué aux équations de transport de mouvement et d'énergie qui décrivent le mouvement détaillé instantané du fluide, fait apparaître des termes inconnus supplémentaires de type $\overline{X'Y'}$ provenant des termes non linéaires des équations.

3.5 Equations de Reynolds

On rappelle les équations de mouvement d'un écoulement incompressible de fluide newtonien s'écrivent sous une forme indicelle comme suit ($i, j=1,2,3$) [16,17] :

- Equation de continuité :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.7)$$

Ou : $u_{i,j} = 0$

- Equation de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_j u_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (3.8)$$

Ou : $u_{i,t} + (u_j u_i)_j = -\frac{1}{\rho} P_i + [\nu(u_{i,j} + u_{i,j})]_j$

- Equation d'énergie :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (3.9)$$

Ou sous la forme :

$$T_t + u_j T_j = \left(\frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)_j \quad (3.10)$$

En introduisant la décomposition de Reynolds dans l'équation de continuité comme suit :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.11)$$

Puis en moyennant cette équation :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} + 0 \quad (3.12)$$

On obtient : $\rightarrow \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0$ ou bien sous la forme : $\bar{u}_{i,j} = 0$

Dans les équations de quantité de mouvement, on procède de la même manière :

$$\frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial t} + \frac{\partial[(\bar{u}_j + u'_j)(\bar{u}_i + u'_i)]}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{P} + P')}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\bar{u}_j + u'_j)}{\partial x_i} \right) \right] \quad (3.13)$$

En moyennant l'équation on obtient :

$$\frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_i \bar{u}_j + u'_i u'_j + \bar{u}_i u'_j + \bar{u}_j u'_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{P} + P')}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\bar{u}_j + u'_j)}{\partial x_i} \right) \right] \quad (3.14)$$

Ou bien :

$$\frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_i \bar{u}_j + u'_i u'_j + \bar{u}_i u'_j + \bar{u}_j u'_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{P} + P')}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\bar{u}_j + u'_j)}{\partial x_i} \right) \right] \quad (3.15)$$

Ce qui donne les trois équations de quantité de mouvement moyennes dans le cas d'un écoulement permanent en moyenne (d'où la disparition de la dérivée temporelle) :

$$\bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \bar{u}'_i u'_j \right] \quad (3.16)$$

Ou bien sous la forme suivante :

$$\bar{u}_j \bar{u}_{i,j} = -\frac{1}{\rho} \bar{P}_i + \left[\nu (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}) - \bar{u}'_i u'_j \right]_j \quad (3.17)$$

Les termes $-\overline{(u'_i u'_j)}$ sont appelés « contraintes de Reynolds » par analogie aux contraintes visqueuses avec lesquelles elles sont en sommation est formé ainsi un tenseur symétrique dit « tenseur de contrainte de Reynolds ». Il en résulte évidemment 6 termes inconnus supplémentaires.

Le système d'équations moyennées décrivant l'écoulement turbulent appelées équations de Navier-Stokes moyennées de Reynolds ou RANS (Reynolds Averaged Navier Stokes), s'écrit alors sous la forme indicelle suivante :

$$\bar{u}_{i,j} = 0 \quad (3.18)$$

$$\bar{u}_j \bar{u}_{i,j} = -\frac{1}{\rho} \bar{P}_i + \left[\nu (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}) - \overline{u'_i u'_j} \right]_j \quad (3.19)$$

Dans le cas d'un écoulement de convection thermique, le terme de poussée qui est rajouté au second membre des équations de Navier-Stokes s'écrira dans les équations moyennées précédentes sous la forme :

$$-g \beta (\bar{T} - \bar{T}_0) \delta_{ij} \quad (3.20)$$

Dans ce cas toujours l'équation de l'énergie moyennée est obtenue de la même manière :

$$\frac{\partial(\bar{T}+T')}{\partial t} + (\bar{u}_j + u'_j) \frac{\partial(\bar{T}+T')}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu}{Pr} \frac{\partial(\bar{T}+T')}{\partial x_j} \right) \quad (3.21)$$

D'où l'équation moyennée de l'énergie :

$$\bar{u}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu}{Pr} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} - \overline{T' u'_j} \right) \quad (3.22)$$

Ou bien sous la forme :

$$\bar{u}_j \bar{T}_j = \left(\frac{\nu}{Pr} \bar{T}_j - \overline{T' u'_j} \right)_j \quad (3.23)$$

Les termes $-\overline{(T' u'_j)}$ sont appelés les flux thermique turbulent par analogie aux flux de diffusion thermique avec lesquels ils sont sommés. Trois autres termes inconnus font leur apparition dans le cas convectif.

On voit ainsi apparaître des inconnues supplémentaires dans le système d'équations :

- $-\overline{u'_i u'_j}$ → les contraintes de Reynolds
- $-\overline{T' u'_i}$ → flux thermique turbulent

⇒ Il se pose alors le problème de fermeture des équations.

Pour toute autre grandeur transportable Φ , on obtient l'équation moyennée suivante :

$$(\rho \bar{u}_j \bar{\Phi})_j = (\Gamma \bar{\Phi}_j - \overline{\rho u'_j \Phi'})_j + \bar{S} \quad (3.24)$$

Le terme $-\overline{\rho u'_j \Phi'}$ est un flux de diffusion turbulent.

Exercices d'application**Exercice N°1**

Démontrer, pour un écoulement turbulent que :

$$a- \overline{UV} = \overline{U}\overline{V} + \overline{U'V'}$$

$$b- \overline{U(t)} = \overline{U}$$

$$c- \overline{UVW} = \overline{U}\overline{V}\overline{W} + \overline{U'V'W'} + \overline{V'U'W'} + \overline{W'U'V'} + \overline{U'V'W'}$$

Réponse

$$\begin{aligned} a- \overline{UV} &= \overline{(\overline{U} + U')(\overline{V} + V')} = \overline{\overline{U}\overline{V} + \overline{U}V' + U'\overline{V} + U'V'} = \overline{\overline{U}\overline{V}} + \overline{\overline{U}V'} + \overline{U'\overline{V}} + \overline{U'V'} \\ &= \overline{U}\overline{V} + \overline{\overline{U}V'} + \overline{U'\overline{V}} + \overline{U'V'} \end{aligned}$$

$$\text{Et puisque } \overline{\overline{U}V'} = \overline{U'\overline{V}} = 0$$

$$\Rightarrow \overline{UV} = \overline{U}\overline{V} + \overline{U'V'}$$

$$b- \overline{U(t)} = \overline{\overline{U} + U'} = \overline{\overline{U}} + \overline{U'} = \overline{U} + \overline{U'}$$

$$\text{Et puisque } \overline{U'} = 0 \Rightarrow \overline{U(t)} = \overline{U}$$

$$\begin{aligned} c- \overline{UVW} &= \overline{(\overline{U} + U')(\overline{V} + V')(\overline{W} + W')} \\ &= \overline{\overline{U}\overline{V}\overline{W} + \overline{U}V'\overline{W} + U'\overline{V}\overline{W} + U'V'\overline{W} + \overline{U}\overline{V}W' + \overline{U}V'W' + U'\overline{V}W' + U'V'W'} \\ &= \overline{\overline{U}\overline{V}\overline{W}} + \overline{\overline{U}V'\overline{W}} + \overline{U'\overline{V}\overline{W}} + \overline{U'V'\overline{W}} + \overline{\overline{U}\overline{V}W'} + \overline{\overline{U}V'W'} + \overline{U'\overline{V}W'} + \overline{U'V'W'} \end{aligned}$$

$$\text{Et puisque } \overline{\overline{U}V'\overline{W}} = \overline{U'\overline{V}\overline{W}} = \overline{\overline{U}\overline{V}W'} = 0$$

$$\Rightarrow \overline{UVW} = \overline{U}\overline{V}\overline{W} + \overline{U'V'W'} + \overline{V'U'W'} + \overline{W'U'V'} + \overline{U'V'W'}$$

Exercice N°2

Montrer pour un écoulement de l'eau à 15 °C dans une conduite circulaire de diamètre D , que la condition de la turbulence du régime d'écoulement est conditionnée par :

$$V > \frac{0,0026}{D}, \text{ tout en considérant que le nombre de Reynolds critique est de } 2300 ?$$

Montrer que pour un diamètre de l'ordre de 1 cm, le régime turbulent est assuré pour des vitesses $V > 0,3$ m/s ?

Réponse

$$\text{On a : } \nu = \frac{0,0178}{1 + 0,0337.t + 0,000221.t^2}$$

$$\text{A } 15 \text{ °C : } \nu = 1,14.10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\text{Et on a : } \Re = \frac{V.D}{\nu} > 2300 : \text{condition de la turbulence.}$$

$$\Rightarrow V > \frac{2300.\nu}{D} = \frac{2300.1,14.10^{-6}}{D} = \frac{0,0026}{D}$$

$$\Rightarrow V > \frac{0,0026}{D}$$

$$\text{Pour } D = 1 \text{ cm} \Rightarrow V > 0,26 \text{ m/s}$$

Pour $V > 0,3$ m/s : le régime turbulent est suffisamment assuré.

Exercice N°3

Démontrer pour un écoulement turbulent d'un fluide incompressible, que l'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 ?$$

Réponse

Pour un fluide incompressible : $\text{div}V = 0$,

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v} + v')}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{w} + w')}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$$

Et puisque $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$$

Exercice N°4

Démontrer que pour un écoulement turbulent :

$$1- \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = 0$$

$$2- \frac{\overline{v \frac{\partial u}{\partial y}}} = \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \overline{v' \cdot \frac{\partial u'}{\partial y}}$$

$$3- \overline{u^2} = \bar{u}^2 + \overline{u'^2}$$

Réponse

$$1- \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}'}{\partial t} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}'}{\partial t} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}'}{\partial t}$$

Et puisque $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = 0$ et $\frac{\partial \bar{u}'}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = 0$$

$$\begin{aligned} 2- \frac{\overline{v \frac{\partial u}{\partial y}}} &= \overline{(\bar{v} + v') \cdot \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial y}} = \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + v' \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{v} \cdot \frac{\partial u'}{\partial y} + v' \cdot \frac{\partial u'}{\partial y} \\ &= \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \overline{v' \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}} + \bar{v} \cdot \frac{\partial u'}{\partial y} + \overline{v' \cdot \frac{\partial u'}{\partial y}} \end{aligned}$$

Et puisque $\overline{v'} = \frac{\partial \overline{u'}}{\partial y} = 0$

$$\Rightarrow \overline{v \frac{\partial u}{\partial y}} = \overline{v} \cdot \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \overline{v' \cdot \frac{\partial u'}{\partial y}}$$

$$3- \overline{u \cdot v} = \overline{(\overline{u} + u') \cdot (\overline{v} + v')} = \overline{u}^2 + \overline{u'^2} + 2\overline{u u'}$$

Et puisque $\overline{u \cdot u'} = \overline{u} \overline{u'} = 0$

$$\Rightarrow \overline{u^2} = \overline{u}^2 + \overline{u'^2}$$

Exercice N°5

Comparer entre le tenseur des tensions visqueuses d'un écoulement laminaire, et un écoulement turbulent pour un fluide incompressible ?

Réponse

Pour un fluide incompressible, nous avons : $div(V) = 0$.

Le tenseur des tensions s'exprime comme :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Pour un écoulement laminaire, les éléments du tenseur s'écrivent comme :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -p_x - \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot div V + 2\mu \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = -p_x + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_{yy} &= -p_y - \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot div V + 2\mu \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = -p_y + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma_{zz} &= -p_z - \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot div V + 2\mu \cdot \frac{\partial w}{\partial z} = -p_z + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Pour un écoulement turbulent, les éléments du tenseur s'écrivent comme :

$$\sigma_{xx} = -p_x + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \overline{u'^2}$$

$$\sigma_{yy} = -p_y + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \rho \overline{v'^2}$$

$$\sigma_{zz} = -p_z + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \rho \overline{w'^2}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \rho \overline{u'v'}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \rho \overline{u'w'}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \rho \overline{v'w'}$$

Le tenseur des tensions visqueuses d'un écoulement turbulent comme est présenté, est la somme du tenseur d'un écoulement laminaire et le tenseur de Reynolds.

Car le tenseur de Reynolds s'écrit comme :

$$\sigma_{xx} = -\rho \overline{u'^2}$$

$$\sigma_{yy} = -\rho \overline{v'^2}$$

$$\sigma_{zz} = -\rho \overline{w'^2}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\rho \overline{u'v'}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = -\rho \overline{u'w'}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\rho \overline{v'w'}$$

Chapitre

4

Notion Physiques élémentaires sur la stabilité des écoulements

4.1. Exposé du problème

L'instabilité des solutions des équations est due au terme non-linéaire de transport de quantité de mouvement $\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}$. Elles correspondent à une bifurcation de la solution obtenue pour une certaine valeur du nombre de Reynolds. On rencontre divers types d'instabilités :

- Instabilité de cisaillement bidimensionnelle pour des profils de vitesse perpendiculaire à l'écoulement ayant un point d'inflexion (instabilité de Kelvin-Helmholtz). Le tourbillon généré est dans le plan de l'écoulement ;
- Instabilités centrifuges de type Taylor-Couette qui se crée lorsque le moment cinétique $\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r})$ décroît lorsque l'on s'éloigne du centre de courbure. Le tourbillon généré est perpendiculaire à l'écoulement, conduisant par exemple aux tourbillons de Görtler. Il existe nombre d'autres instabilités de type inertiel telles les instabilités elliptiques et instabilité de Crow rencontrées en aéronautique ou en géophysique.

4.2. Exemples d'instabilités de mouvements de fluides

4.2.1. Instabilité de Taylor -Couette

Les travaux sur les écoulements tournants ont suscité la curiosité du monde scientifique depuis une centaine d'années. Tout a débuté par les travaux de Maurice Couette qui étudia l'écoulement entre deux cylindres tournants dans le but de déterminer la viscosité d'un fluide [18]. Il réalisa pour cela des mesures du couple exercé par le fluide sur le cylindre

intérieur. C'est cette première étude qui est à l'origine du développement des rhéomètres de Couette que l'on connaît de nos jours [19].

Taylor [20] s'est lui intéressé à la stabilité de cet écoulement. Il a trouvé avec un très bon accord entre les résultats numériques et expérimentaux que lorsque la vitesse de rotation du cylindre intérieur dépasse une valeur seuil, des tourbillons apparaissent (instabilité primaire). Ces tourbillons portent aujourd'hui son nom : "tourbillons ou vortex de Taylor". Pour des vitesses encore plus élevées, ces vortex oscillent périodiquement (instabilité secondaire) jusqu'à ce que l'écoulement devienne complètement chaotique (turbulence). Les résultats de Taylor ont été vérifiés par plusieurs études expérimentales ultérieures. L'écoulement de Taylor-Couette, l'écoulement d'un fluide visqueux, incompressible, entre deux cylindres coaxiaux infiniment longs tournant à des vitesses angulaires différentes est devenu au fil des années le paradigme pour l'étude des instabilités hydrodynamiques et la transition à la turbulence des systèmes dynamiques non linéaires. Les premières études concernent principalement les fluides newtoniens. Une synthèse de ces différents travaux sur le problème peut se trouver dans deux principaux articles de revue [21,22].

L'écoulement de base, c'est-à-dire l'écoulement de Couette Circulaire, ECC, est purement azimutal et présente seulement une variation radiale à travers l'espace annulaire entre les deux cylindres (entrefer). Les premières études portent sur l'analyse linéaire des instabilités qui se développent lorsque l'écoulement de base est soumis à une perturbation axisymétrique. Il a été montré que, pour un fluide parfait, l'apparition des instabilités est gouvernée par le critère de Rayleigh : l'ECC est instable pour une perturbation axisymétrique lorsque la dérivée du carré du moment angulaire, dL^2/dr , est négative pour au moins une position radiale [23]. Dans le plan (Re_1, Re_2) , où Re_1 et Re_2 sont les nombres de Reynolds construits avec la vitesse angulaire de rotation des cylindres intérieur et extérieur respectivement, les domaines stables et instables sont séparés par une ligne dénommée "la ligne de Rayleigh", figure 4.1.

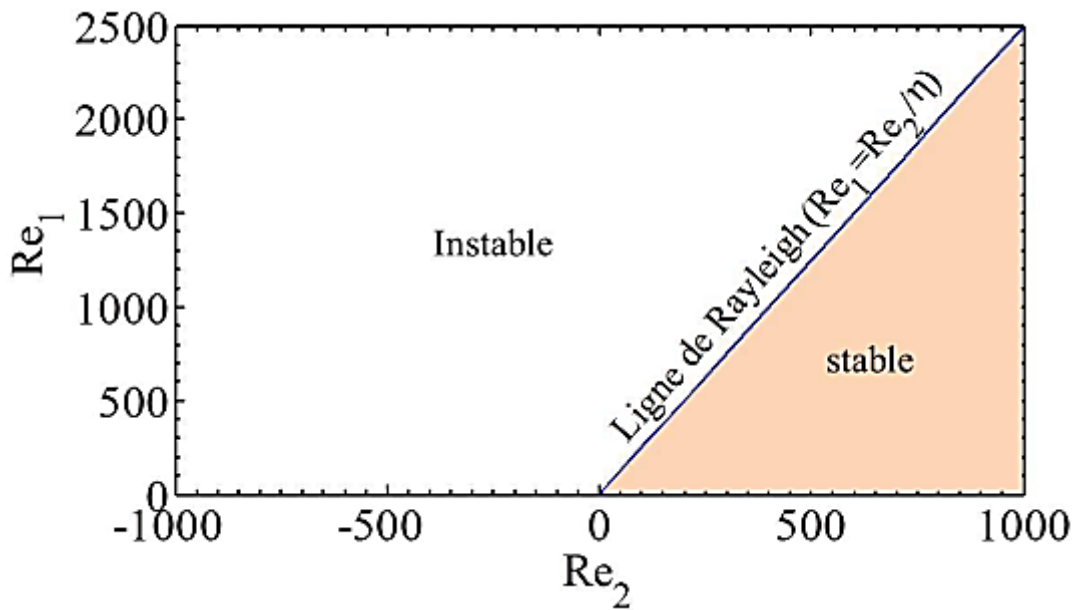


Fig. 4.1- Délimitation des zones stable et instable suivant le critère Rayleigh pour un fluide newtonien avec un rapport de rayons $\eta = 0.4$.

Pour un fluide newtonien, la ligne de Rayleigh est donnée par $Re_2 / Re_1 = \eta$, avec $\eta = R_1/R_2$ le rapport de rayons intérieur et extérieur. Sur cette ligne, le moment angulaire est uniforme dans tout l'espace annulaire. Dans la région stable de Rayleigh, on a $dL^2/dr > 0$ dans tout l'entrefer. Par ailleurs, dans la zone instable du plan (Re_1, Re_2) , qui se trouve majoritairement dans la zone où les deux cylindres tournent en sens opposés (la configuration contra-rotative), dL^2/dr est négatif au voisinage de la paroi du cylindre intérieur mais reste positif près du cylindre extérieur. Ce comportement au voisinage de la paroi du cylindre intérieur a un grand effet sur la longueur d'onde du mode critique [20]. [24] ont montré en utilisant une approximation WKB (Wentzel–Kramers–Brillouin) pour les grandes longueurs d'ondes que le critère de Rayleigh peut être généralisé à une perturbation non axisymétrique.

Lorsque la viscosité est prise en compte, les instabilités apparaissent si les forces centrifuges déstabilisantes surpassent les forces visqueuses à une échelle de temps inférieure au temps de diffusion. Ainsi, lorsque le cylindre extérieur est fixe par exemple, le moment angulaire décroît du cylindre intérieur vers le cylindre extérieur. Les instabilités de l'écoulement ECC apparaissent via une perturbation axisymétrique stationnaire avec des rouleaux toroïdaux contra-rotatifs régulièrement espacés dans la direction axiale [20].

Dans une configuration contra-rotative, dL^2/dr est négatif au voisinage du cylindre intérieur mais est fortement positif près du cylindre extérieur. Il est montré par l'analyse linéaire de

stabilité que pour des vitesses angulaires de rotation du cylindre extérieur suffisamment élevées, l'ECC devient instable du fait de perturbations non axisymétriques [25-27]. Le nombre d'onde azimutal qui caractérise l'orientation des structures instables augmente avec le nombre de Reynolds du cylindre extérieur [27]. Dans ce cas, les structures sont des tourbillons en forme de spirale, enroulés autour du cylindre intérieur. Ces vortex obliques sont la superposition d'ondes se propageant dans la direction axiale et d'ondes tournant dans la direction azimutale [22, 28]. Dans le domaine instable selon le critère de Rayleigh, L^2 décroît quand la position radiale r augmente du cylindre intérieur vers le cylindre extérieur, et l'ECC est le siège d'une instabilité caractérisée par l'apparition des rouleaux toroïdaux.

En augmentant le nombre de Reynolds du cylindre intérieur au-delà du nombre de Reynolds critique, différents régimes d'écoulement peuvent être observés selon que les deux cylindres tournent ou que seul le cylindre intérieur tourne. [29] ont étudié par visualisation une vaste diversité d'écoulement dans le plan (Re_1 , Re_2). En fonction des valeurs de Re_1 et Re_2 , il peut apparaître dans l'écoulement des tourbillons de Taylor, des tourbillons de Taylor ondulés, des tourbillons hélicoïdaux ou spirales, des spirales ondulées, des spirales turbulentes, des rides, etc. Ils ont ainsi identifié près de 20 régimes d'écoulement différents comme le montre la figure 4.2. Lorsque le cylindre extérieur est fixe, ou pour de faibles valeurs du nombre de Reynolds Re_2 , la transition vers la turbulence découle d'une succession d'instabilités (tourbillons toroïdaux, des ondulations et des modulations temporelles), l'écoulement devenant de plus en plus complexe jusqu'à l'apparition de la turbulence [29]. La transition vers la turbulence est supercritique.

Par ailleurs, dans le régime contra-rotatif pour des nombres de Reynolds Re_2 suffisamment grands, la transition vers la turbulence n'est plus supercritique mais plutôt sous-critique [30, 31]. En effet, les auteurs ont observé des spirales turbulentes intermittentes en dessous de la limite de stabilité prévue par l'analyse linéaire.

En analyse linéaire de stabilité, la transition sous-critique peut être caractérisée par la croissance transitoire, considérée comme un prérequis important à une bifurcation sous-critique et la transition vers la turbulence. La croissance transitoire est une condition suffisante mais pas nécessaire. La notion de mécanisme de croissance transitoire a été introduite par [32]. Elle a été reprise ces dernières décennies par [33-35] avec l'étude de l'influence de la non-normalité de l'opérateur linéaire dans l'analyse linéaire de stabilité des écoulements cisailés.

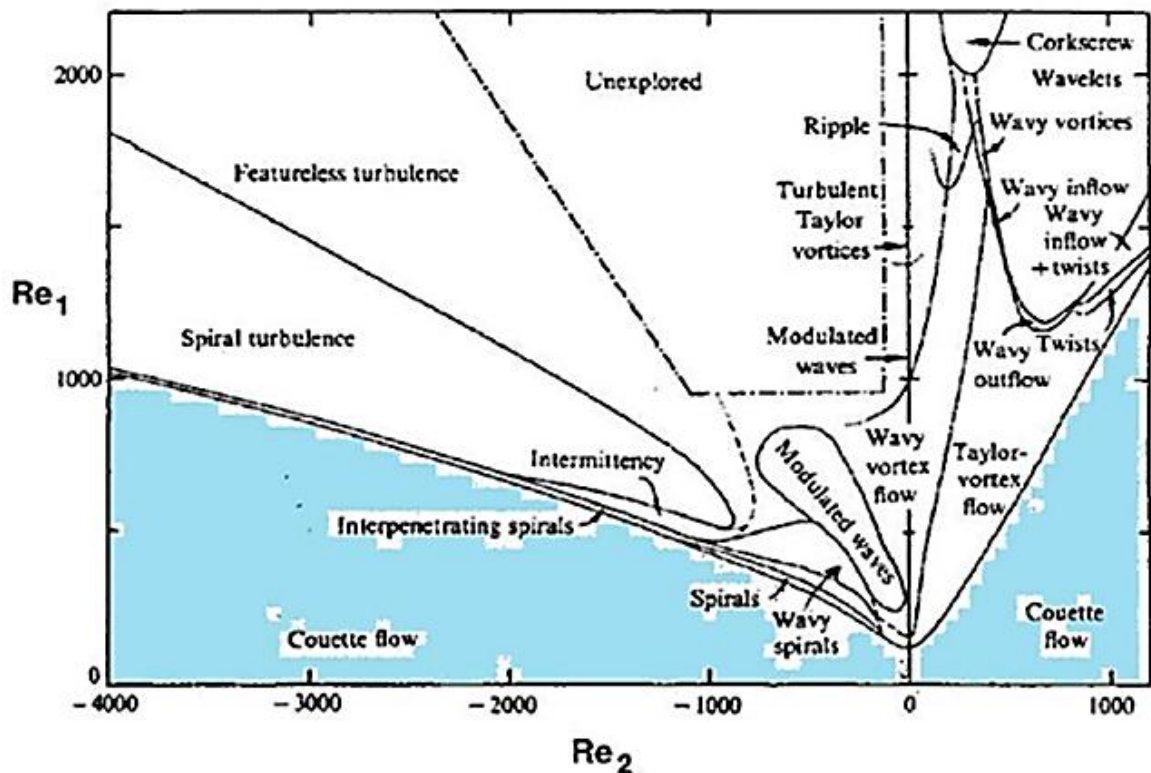


fig. 4.2 – Régimes d'écoulement observés par [29] lorsque les deux cylindres tournent en fonction des valeurs des nombres de Reynolds intérieur Re_1 et extérieur Re_2 , pour un fluide newtonien et un rapport de rayon $\eta = R_1 / R_2 = 0.883$.

Dans ce mécanisme, de petites perturbations interagissent avec l'écoulement de base, ce qui produit une augmentation de leur énergie. En effet, malgré la stabilité linéaire de l'écoulement, une croissance suffisamment importante de l'énergie de la perturbation peut déclencher les effets non linéaires qui peuvent maintenir l'énergie cinétique des perturbations non nulle aux temps ultérieurs.

Cette énergie est fortement amplifiée pendant un temps court, inférieur au temps de diffusion visqueuse, avant de décroître sous l'effet de la viscosité. Pour les écoulements ouverts ou fermés, deux mécanismes physiques ont été identifiés pour expliquer la croissance transitoire : le mécanisme de [32] [32, 36] et le mécanisme de lift-up [37, 38].

Le mécanisme de lift-up agit lorsqu'un tourbillon orienté dans la direction axiale se trouve superposé à un écoulement parallèle, près d'une paroi. Le tourbillon transporte du fluide de faible vitesse en l'éloignant de la paroi et pousse du fluide de haute vitesse vers la paroi. Des zones alternées de basse et haute vitesse axiale appelées "streaks" apparaissent alors. On peut montrer d'après les équations aux perturbations linéarisées que des tourbillons axiaux produisent une perturbation de vitesse axiale augmentant proportionnellement avec

le temps, jusqu'à ce que la dissipation visqueuse devienne importante et produise une décroissance de l'énergie de la perturbation.

Le mécanisme de [32] est déclenché par des perturbations formées de tourbillons transverses (de vorticité dans la direction z) initialement penchés dans la direction opposée à l'écoulement de base (orienté dans la direction x). L'écoulement de base alimente ces perturbations en énergie via le tenseur de Reynolds, ce qui produit un basculement progressif des tourbillons. Lorsque les tourbillons commencent à pencher dans la direction de l'écoulement de base, la dissipation visqueuse l'emporte sur le tenseur de Reynolds et l'énergie des perturbations diminue.

Du point de vue mathématique, la croissance transitoire est associée à la non-normalité de l'opérateur de stabilité linéaire [39]. Cet effet a été souligné pour la première fois par [40] pour le problème de l'écoulement de Taylor-Couette. Les caractéristiques de la croissance transitoire dans l'écoulement de Taylor-Couette ont été étudiées pour la première fois par [41] qui ont calculé le pseudo spectre d'une perturbation axisymétrique, pour une périodicité axiale fixée, avec des cylindres en contra-rotation pure de sorte que l'effet de la force de Coriolis disparaisse. Les auteurs ont montré que la courbure augmente la croissance transitoire. [42] a déterminé pour un rapport de rayon fixé, $\eta = 0.881$, les nombres d'ondes axial et azimutal qui donnent la croissance optimale. Son étude a été menée dans la zone linéaire stable pour les cylindres en contra-rotation. Récemment, des calculs de la croissance transitoire couvrant tout le régime linéairement stable de l'écoulement Taylor-Couette ont été effectués par [43]. Pour ce faire, ils ont utilisé de nouveaux paramètres, le nombre de Reynolds de cisaillement et le nombre de rotation, introduit par [44]. Les auteurs ont trouvé que la croissance transitoire dans la zone linéairement stable de l'écoulement de Taylor-Couette évolue en $Re^{2/3}$ pour de grandes valeurs du nombre de Reynolds Re , ce qui suggère que ces effets pourraient être importants à Re  lev .

4.2.2. Instabilité de Rayleigh-Bénard

Au début du XX^{ me} siècle, Henry Bénard (1901) a réalisé un travail expérimental, sur la convection thermique, qui a marqué son époque. Ce travail a permis d'observer l'apparition des cellules de convection au sein d'un film liquide différentiellement chauffé. Quinze ans plus tard, John Williams Strutt alias Lord Rayleigh (1916) interprète ces rouleaux comme induits par la poussée d'Archimède. Depuis, ce phénomène est connu sous le nom de convection de Rayleigh-Bénard. Le modèle de Rayleigh consiste en une couche horizontale de liquide confinée entre deux plaques parfaitement conductrices, maintenues à deux

températures constantes, avec celle du bas supérieure à celle du haut. Il a en plus considéré l'approximation de Boussinesq qui suppose que la densité est constante sauf dans le terme force de poussée d'Archimède, où elle varie linéairement avec la température.

Pour ce type de configuration, la convection n'apparaît pas tant que la différence de température ne dépasse pas un certain seuil. En effet, au-dessous de cette valeur critique, la solution reste diffusive, car la dissipation visqueuse et la diffusion thermique l'emportent sur les travaux des forces de gravitation qui sont responsables des instabilités convectives [45]. Les travaux réalisés dans ce domaine peuvent être classés en deux catégories. La première concerne les analyses de stabilité linéaire de la solution diffusive, qui mène aux calculs des seuils d'apparition de la convection appelés aussi 'seuils primaires' [46,47], [48,49]. La deuxième catégorie englobe les études de la convection au-delà de son apparition où on analyse les transitions d'écoulements (phénomènes non-linéaires) [50], [51]. Etant donné la littérature abondante sur le sujet, nous allons nous limiter à la configuration qui nous concerne, c'est à dire la configuration cylindrique.

4.2.2.1. Analyse de stabilité linéaire

La première étude des seuils primaires de convection dans les cavités cylindriques chauffées par le bas, est due à [52]. Cette étude a montré que la convection apparaît sous la forme d'un mode axi-symétrique $m = 0$, pour les faibles rapports de forme A ($A = H/D$, H étant la hauteur du cylindre et D son diamètre) et sous la forme d'un mode asymétrique $m = 1$ pour les grandes valeurs de A . La transition entre ces modes a lieu pour $A = 0.56$ pour les cavités avec des parois latérales adiabatiques et pour $A = 0.72$ pour celles avec des parois latérales parfaitement conductrices. En 1983, Buell & Catton [53] ont complété le travail en faisant varier continuellement la conductivité thermique des parois latérales, du cas conducteur au cas isolant. Leurs résultats sont en conformité avec ceux de [52] sauf pour le mode $m = 1$, où une différence de 20 %, a été trouvée. Cette différence est expliquée par le choix des fonctions de base qui présentent un point singulier sur l'axe dans le cas de [52]. D'autre part, [54] a considéré des conditions aux limites qui facilitent le calcul analytique des seuils primaires. Il a ainsi montré que la convection apparaît sous forme du mode $m = 0$ pour les valeurs du rapport de forme A , comprises entre 0.15 et 0.33, et sous la forme $m = 2$, pour $0.33 < A < 0.45$, et finalement elle apparaît sous la forme du mode $m = 1$ pour $A > 0.45$.

4.2.3. Instabilité de Kelvin-Helmholtz

L'instabilité de Kelvin-Helmholtz est un mouvement ondulatoire en dynamique des fluides qui se forme lorsque deux fluides thermiquement stables sont superposés et se déplacent à des vitesses différentes à leur surface de contact [55].

L'effet a été étudié au XIX^e siècle par les physiciens Lord Kelvin et Hermann von Helmholtz qui ont montré que la différence de vitesse va engendrer un flot turbulent transversal à la frontière. La théorie peut être appliquée de la même façon à l'intérieur d'un fluide de densité uniforme mais ayant des couches se déplaçant à des vitesses différentes ou des fluides de densités différentes superposés [56].

Cette instabilité joue un rôle important dans de nombreuses situations géophysiques : dans la dynamique de l'atmosphère et des océans, dans le comportement des plasmas, etc. Les structures tourbillonnaires, onde ou lame de Kelvin-Helmholtz, résultant de l'instabilité contribuent de façon significative au transport de quantité de mouvement, de température et de polluants. La compréhension de la génération de ces instabilités permet de mieux les représenter dans les modèles dont la résolution n'est pas suffisante pour permettre de les résoudre explicitement.

Lorsque le vent souffle suffisamment fort sur la surface de l'océan, on observe les croissances vagues. Cette instabilité, due au cisaillement du champ de vitesse, est appelée "instabilité de Kelvin-Helmholtz"



Fig. 4.3 – Vagues générées par le vent lors d'une tempête [56].

Lorsqu'un fluide lourd est placé au-dessus d'un fluide léger, on observe la croissance de doigts amorçant le mélange des deux fluides. Cette instabilité, due à la gravité, est appelée "instabilité de Rayleigh-Taylor". En l'absence de forçage de la vitesse et lorsque le fluide

lourd est placé sous le fluide léger, une perturbation de l'interface génère des oscillations que l'on appelle "ondes de surface" ou "ondes de gravité externes" ou plus communément "houle linéaire" ou "vagues".

Pour comprendre ces phénomènes d'instabilité ou d'oscillations, pour déterminer leurs taux de croissance et leurs pulsations, le choix d'un modèle pertinent, sa linéarisation autour d'une état d'équilibre et le calcul d'une relation de dispersion généralisée constituent une démarche très courante en physique, bien au-delà de la mécanique des fluides. Cette relation de dispersion généralisée relie le taux de croissance de l'instabilité ou la période de l'oscillation à la longueur d'onde des perturbations et aux différents paramètres du problème étudié.

4.2.3.1. Exemples d'écoulements $U(y)$ de fluide parfait [57]

Nappes de vorticité :

La vitesse est constante sauf en des positions y_n où elle change brusquement. En y_n , la vorticité est infinie ailleurs elle est nulle. On parle d'une nappe de vorticité [57]

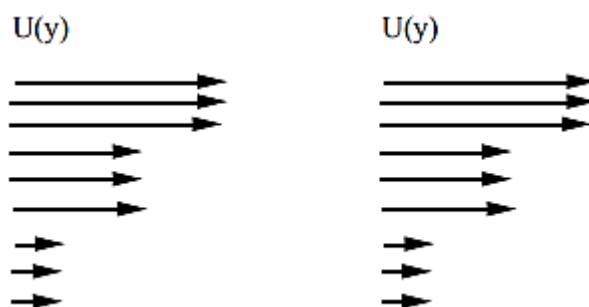


Fig. 4.4 - Nappes de vorticité

Saut de vorticité:

Le profil de vitesse est continu mais pas sa dérivée. Par exemple, il est linéaire par morceaux : la vorticité est bornée mais constante par morceaux dans ce cas.

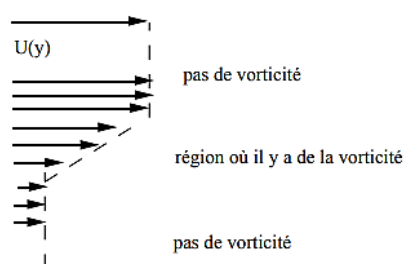


Fig. 4.5- Saut de vorticité

Pourquoi la vorticité se réorganise-t-elle en une allée de vortex? Tel est l'objet de cet exemple.

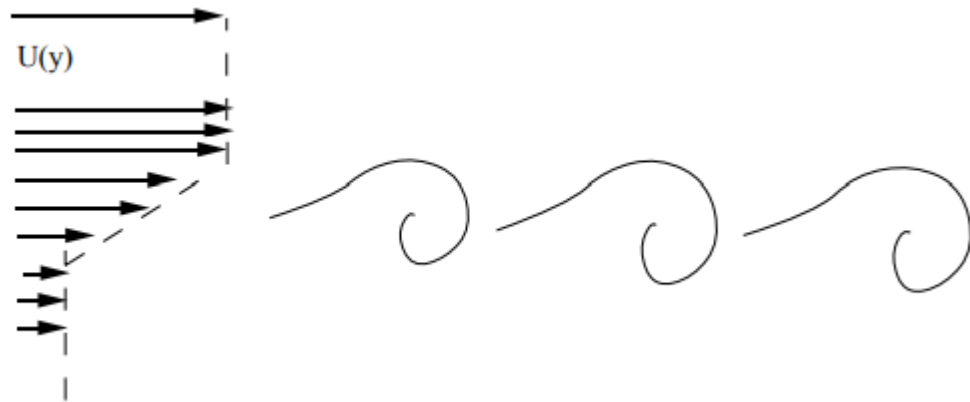


Fig. 4.6- Vortex

4.2.3.1.1. Mise en équations

4.2.3.1.1.1. Hypothèses

Soient deux fluides incompressibles de densité différente, soumis à un champ de pesanteur. Ces deux fluides sont immiscibles : ils ne se mélangent donc pas mais sont séparés par une interface possédant une tension de surface caractérisant leur interaction moléculaire. La tension de surface est constante et notée σ . [57]

Le couplage entre les champs de vitesse/ pression et la forme de l'interface rend ce problème particulièrement complexe. [57]

En plus du cisaillement, plusieurs mécanismes interviennent : la gravité, la tension superficielle, la viscosité.

Dans le cadre linéaire, on peut supposer qu'il n'y a pas de déferlement de l'interface : il est toujours possible de définir l'interface comme une fonction $y = \eta(x, t)$. Au-delà d'une certaine amplitude, cette hypothèse est prise en défaut. [57]

Hypothèses

- On se place en 2D (pas nécessaire mais simplifie les calculs sans occulter le phénomène prépondérant qui est 2D).
- On néglige la viscosité.

4.2.3.1.1.2. L'état de base de la nappe de vorticité

Consid rions l'état de base suivant une interface plate et deux champs de vitesses uniformes de part et d'autre.

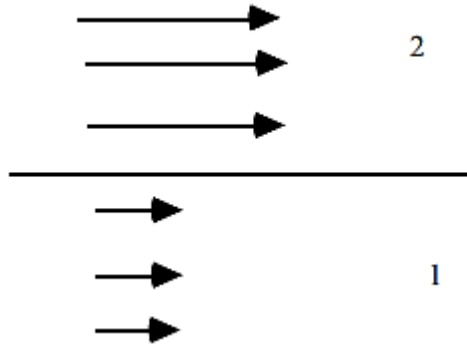


Fig. 4.7- Deux champs de vitesses uniformes

Ceci est un cas limite pour lequel tout le cisaillement est situé à l'interface où se produit le saut de vitesse :

$$u_B = U_1 \text{ en } y < 0, u_B = U_2 \text{ en } y > 0 \quad (4.1)$$

La vorticité de cet écoulement de base est située sur l'interface où elle est singulière.

La pression est constante s'il n'y a pas de gravité. Sinon, on aura simplement un effet hydrostatique pur :

$$p = p_0 - \rho_1 g y \quad y < 0 \text{ et } p = p_0 - \rho_2 g y \quad y > 0 \quad (4.2)$$

L'interface étant plate dans l'état de base, la tension superficielle n'intervient pas explicitement puisqu'elle est associée à une courbure de l'interface. [57]

4.2.3.1.1.3. Les équations du mouvement

Les équations à résoudre sont les équations d'Euler avec les conditions aux limites $u \geq U_1$ en $y > -\infty$ et $u \geq U_2$ en $y > +\infty$, et la condition d'incompressibilité. La gravité est prise en compte dans l'équation suivant y .

Il faut imposer des conditions sur une interface dont la dynamique n'est pas connue à l'avance : c'est la grande difficulté de ce problème. [57]

Condition dynamique :

Le saut de pression est tel que :

$$p_1(x, \eta(x, t), t) - p_2(x, \eta(x, t), t) = \sigma \nabla \cdot n_{12} \quad (4.3)$$

La normale à la surface est :

$$n_{12} = \left(-\frac{\partial \eta}{\partial x}, 1 \right) / \left(1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (4.4)$$

Condition cinématique :

Les fluides ne "décollent" pas de la surface et ne s'interpénètrent pas : intuitivement, les vitesses normales sont donc continues à la traversée de l'interface :

$$u_1 \cdot n_{12} = u_2 \cdot n_{12} \text{ en } y - \eta(x, t) = 0 \quad (4.5)$$

On retrouve cette même relation à partir de $\nabla \cdot u = 0$ intégrée sur une petite épaisseur (cf électromagnétisme ! Voir la condition sur la composante normale du champ magnétique B à une interface !)

Si

$$F(x, y, t) = y - \eta(x, t) = 0 \quad (4.6)$$

Est l'équation de l'interface, on remarque également que l'interface étant matérielle, F est transporté le long des lignes de courant :

$$\frac{d}{dt} F = 0 \text{ (dérivée totale)} \quad (4.7)$$

Par définition de la dérivée lagrangienne

$$\frac{dy}{dt} = v(x, \eta, t) \text{ et } \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (4.8)$$

$\frac{d}{dt} F = 0$ S'écrit (en utilisant les vitesses dans le milieu 1 ou 2) :

$$\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} + u_i(x, \eta(x, t), t) \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} = v_i(x, \eta(x, t), t) \text{ pour } i = 1, 2 \quad (4.9)$$

Qu'on peut réécrire en faisant apparaître les vitesses normales

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = u_i \cdot n_{12} \left(1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (4.10)$$

En faisant la différence entre ces deux expressions on retrouve la continuité des vitesses normales. On a en plus une relation nouvelle reliant le déplacement de l'interface et le champ des vitesses.

N.B. Il y a des termes non linéaires dans les équations d'Euler mais aussi et surtout dans les équations à l'interface !

4.2.4. Instabilité de Bénard-Marangoni

Les écoulements convectifs dans une couche horizontale de fluide à surface supérieure libre, initialement au repos et soumise à un gradient de température peuvent être produits soit par les forces de flottabilité soit par une variation de la tension superficielle en fonction de la température ou par ces deux effets conjugués. Dans la littérature ces phénomènes sont désignés comme instabilités de Rayleigh-Bénard-Marangoni. Ces phénomènes sont rencontrés dans les procédés mettant en jeu la croissance des cristaux, ou ceux qui concernent le revêtement par film mince, ainsi que dans les expérimentations des écoulements à faible gravité.

Des études expérimentales sur la convection de Bénard-Marangoni ont été entreprises pour comprendre les mécanismes responsables de ces phénomènes d'instabilité, Koshmeider et al. [58] ont par exemple mis en évidence l'influence de la géométrie du récipient ainsi que le rapport de forme du récipient sur le nombre des cellules convectives obtenues et leurs formes, Rahal et al. [59] ont étudié l'influence des nombres de Biot et de Prandtl sur la convection de Bénard-Marangoni dans des petits récipients cylindriques. D'autres travaux numériques ont été élaborés pour étudier ces phénomènes, on citera à titre d'exemples les travaux de Médale et al. [60] et ceux de Kuhlmann et al. [61].

Pour toutes ces études faites concernant cet écoulement plusieurs facteurs tels que la géométrie des cavités et les propriétés physiques du fluide influent sur les motifs des écoulements convectifs et leur distribution.

4.2.4.1. Exemples d'écoulements

L'objectif de cet exemple est de simuler la convection de Bénard-Marangoni dans des récipients cylindriques chauffés par un flux non-uniforme tout en variant les nombres de Biot et de Marangoni et ce, pour un nombre de Prandtl élevé $Pr = 9000$ et un nombre de Rayleigh faible tel que $Ra = 1000$. Le choix de ces valeurs de Pr et Ra nous permettra d'étudier la convection dû à l'effet Marangoni dans des fluides très visqueux et au sein desquels le transfert thermique se fait principalement par advection.

4.2.4.1.1. Modèle physique et formulation mathématique

On considère un fluide newtonien incompressible contenu dans un récipient cylindrique ouvert, de rapport de forme $\Gamma = R/e$. Les parois latérales sont isolées thermiquement, la surface supérieure est libre et un flux thermique uniforme est imposé sur la partie centrale de la face inférieure comme le montre la figure 4.8. La conduction

thermique dans le substrat de la base crée un gradient thermique dans le fluide, qui va se propager jusqu'à la surface libre. Cela induit des forces thermo capillaires qui donnent naissance à des cellules convectives. La forme de ces cellules dépend des conditions géométriques (rapport de forme) et thermiques ainsi que des nombres de Prandtl, Rayleigh, Biot et Marangoni.

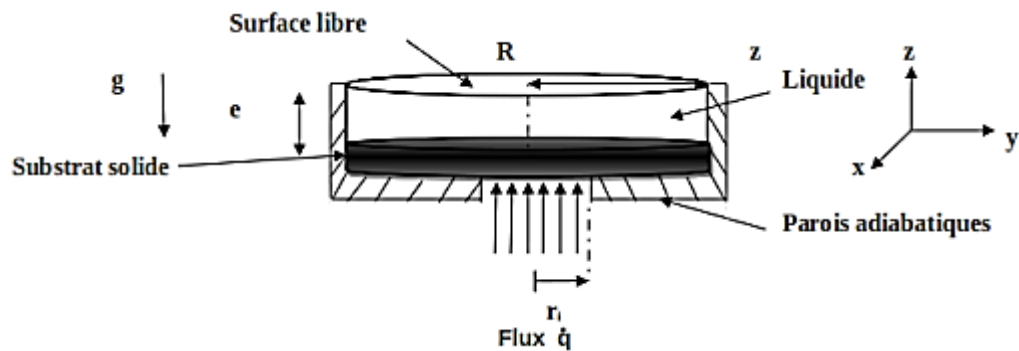


Fig. 4.8 - Schéma du dispositif modélisé physiquement.

Les équations régissant l'écoulement sont les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Pour une formulation plus simple du problème, nous allons considérer quelques approximations. Nous supposons que l'épaisseur de la couche fluide reste constante, et que la surface est maintenue plane. La déformation de la surface libre peut être négligée si on a le nombre de crispation $C_r \ll 1$ et le nombre de Galillé $Ga \gg 1$ avec $C_r = (\rho \nu k_f) / (\gamma e)$ et $Ga = (g e^3) / (\nu k_f)$ ce qui est le cas pour notre étude, puisque $C_r = 5 \times 10^{-3}$ et $Ga = 1,78 \times 10^{10}$. Il s'agira alors de déterminer la répartition des vitesses et de la température dans le fluide. L'écoulement de convection de Bénard-Marangoni est provoqué par les forces thermocapillaires (effet de la variation de la tension superficielle avec la température). On suppose que les propriétés physiques du fluide sont constantes sauf pour la masse volumique dont la variation au sein du fluide est prise en compte via l'approximation de Boussinesq et pour la tension superficielle qui dépend de la température. Les relations suivantes sont considérées :

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] \quad (4.11)$$

$$\gamma = \gamma_0 + \frac{\partial \gamma}{\partial T} T \quad (4.12)$$

Où γ : tension de surface, N m^{-1}

Les grandeurs caractéristiques utilisées pour adimensionner le problème sont l'épaisseur du film e , la vitesse de diffusion thermique α/e , le temps de diffusion e^2/α et l'écart de température $\Delta T = \frac{\dot{q}e}{k_f}$. Le modèle mathématique s'écrit après adimensionnalisation comme :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \otimes \vec{V}) = -\vec{\nabla} p + Ra \cdot Pr \cdot \theta \cdot \vec{j} + Pr \cdot \Delta \vec{V} \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \theta) = \Delta \theta \quad (4.15)$$

Le fluide est initialement au repos à la température ambiante T_0 . Les vitesses sont nulles le long des parois solides adiabatiques (parois non glissantes). Les conditions aux limites obtenues à l'interface solide/liquide sont :

$$\frac{k_s}{k_f} \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0^-} = \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0^+} \quad (4.16)$$

$$V_x = V_y = V_z = 0 \quad (4.17)$$

La condition cinématique à la surface libre doit satisfaire l'équilibre mécanique et en tenant compte de l'imperméabilité de la surface libre on obtient :

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} + Ma \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial z} + Ma \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad (4.19)$$

$$V_z = 0 \quad (4.20)$$

Où : Ma nombre de Marangoni, $Ma = \frac{e \Delta T}{\mu \alpha} \frac{\partial \gamma}{\partial T}$

La condition thermique sur la partie centrale de la paroi du fond soumise à un flux \dot{q} , s'écrit sous forme adimensionnelle :

$$\frac{k_s}{k_f} \frac{\partial \theta}{\partial z} = 1 \text{ pour } x^2 + y^2 \leq \left(\frac{r_i}{R}\right)^2 = (0.3)^2 \text{ avec } (r_i = 0.3R) \quad (4.21)$$

La condition aux limites thermique sur la surface libre s'écrit sous forme dimensionnelle :

$$-k_f \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) = h(T(x, y, e, t) - T_0) \quad (4.22)$$

Où $h(T(x, y, e, t) - T_0)$ désigne l'échange convectif entre la surface libre et le milieu ambiant. Cette condition aux limites s'écrit sous forme adimensionnelle :

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} + Bi \theta = 0 \quad (4.23)$$

Où : Bi est le nombre de Biot, $Bi = \frac{h e}{k_f}$

ANNEXE A

(Coordonnées cartésiennes)

1. Vecteur

$$\overline{OM} = x\overline{e}_x + y\overline{e}_y + z\overline{e}_z$$

Soit un vecteur arbitraire en coordonnées cartésiennes : $\vec{V} = v_x\overline{e}_x + v_y\overline{e}_y + v_z\overline{e}_z$

En notation matricielle on écrira parfois :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \text{ d'où le vecteur transposé : } \vec{V}^T = (v_x \quad v_y \quad v_z)$$

2. Produit scalaire

Le produit vectoriel de deux vecteurs :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{U}^T \cdot \vec{V} = (u_x \quad u_y \quad u_z) \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

Ou en notation indicielle :

$$\text{Avec : } \overline{e}_i \cdot \overline{e}_j = \delta_{ij} \text{ et } \delta_{ij} \text{ est le symbole de kronecker avec : } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

3. Produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs :

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} u_y & v_y \\ u_z & v_z \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_z & v_z \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix}$$

4. Produit tensoriel

Le produit tensoriel de deux vecteurs :

$$\overline{\mathbf{U}} \otimes \overline{\mathbf{V}} = \overline{\mathbf{U}} \otimes \overline{\mathbf{V}} = u_i v_j \overline{\mathbf{e}}_i \otimes \overline{\mathbf{e}}_j = \begin{pmatrix} u_x v_x & u_x v_y & u_x v_z \\ u_y v_x & u_y v_y & u_y v_z \\ u_z v_x & u_z v_y & u_z v_z \end{pmatrix}$$

5. Gradient

Le gradient d'une fonction scalaire en coordonnées cartésiennes est donné par :

$$\overline{\text{grad}} f = \overline{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x_i} \overline{\mathbf{e}}_i = \frac{\partial f}{\partial x} \overline{\mathbf{e}}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \overline{\mathbf{e}}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \overline{\mathbf{e}}_z$$

Avec : $\overline{\nabla}$ est l'opérateur nabla donné par :

$$\overline{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Le gradient d'un vecteur en coordonnées cartésiennes est donné par :

$$\overline{\text{grad}} \overline{\mathbf{V}} = \overline{\nabla} \otimes \overline{\mathbf{V}} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \overline{\mathbf{e}}_i \otimes \overline{\mathbf{e}}_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

6. Laplacien

Le Laplacien d'une fonction scalaire en coordonnées cartésiennes est donné par :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\text{Avec : } \Delta = \overline{\nabla} \cdot \overline{\nabla} = \overline{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

7. Divergence

La divergence d'un vecteur en coordonnées cartésiennes est donnée par :

$$\operatorname{div}(\vec{V}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

La divergence d'un tenseur d'ordre 2 :

$$\operatorname{div}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} \vec{e}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial A_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial A_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{zz}}{\partial z} \end{bmatrix}$$

8. Rotationnel

Le rotationnel d'un vecteur en coordonnées cartésiennes est donné par :

$$\operatorname{rot}(\vec{V}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \vec{e}_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{bmatrix}$$

9. Operateur d'advection

$$\vec{V} \cdot \vec{\nabla} = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$$

L'advection d'un scalaire

$$(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})f = v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z}$$

L'advection d'un vecteur

$$(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{V} = \begin{bmatrix} (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \cdot v_x \\ (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \cdot v_y \\ (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \cdot v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

10. Equations de la mécanique des fluides

L'équation de continuité en écriture vectorielle :

$$\frac{\partial(\rho)}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0$$

La projection de l'équation est donnée par :

$$\frac{\partial(\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

L'équation de quantité de mouvement s'écrit :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \text{grad}) \cdot \vec{V} \right) = \text{div}(\vec{\sigma}) + \rho \vec{g}$$

La projection de l'équation de quantité de mouvement :

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \rho g_x \\ \rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \rho g_y \\ \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho g_z \end{cases}$$

Pour un écoulement de fluide newtonien :

$$\vec{\sigma} = -p\vec{I} + \vec{\tau} \quad \text{avec : } \vec{\tau} = \mu \vec{D} \quad \text{où } \vec{D} = \frac{1}{2} \left((\text{grad} \vec{V}) + (\text{grad} \vec{V})^T \right)$$

On obtient l'écriture finale connue sous le nom des équations de Navier-Stokes :

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x \\ \rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) + \rho g_y \\ \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z \end{cases}$$

ANNEXE B

Formules et Identités Vectorielles

$$\nabla \cdot (a\vec{b}) = \vec{b} \cdot \nabla a + a \nabla \cdot \vec{b} \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla \wedge (a\vec{b}) = (\nabla a) \wedge \vec{b} + a \nabla \wedge \vec{b} \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\nabla \wedge \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\nabla \wedge \vec{b}) \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} + \vec{a} (\nabla \cdot \vec{b}) - \vec{b} (\nabla \cdot \vec{a}) - (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} \quad (\text{A.4})$$

$$\nabla (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} + \vec{a} \wedge (\nabla \wedge \vec{b}) + \vec{b} \wedge (\nabla \wedge \vec{a}) \quad (\text{A.5})$$

$$(\vec{a} \cdot \nabla) \vec{a} = (\nabla \wedge \vec{a}) \wedge \vec{a} + \nabla \left(\frac{1}{2} a^2 \right) \quad (\text{A.6})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{a}) = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\nabla \wedge (\nabla a) = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{a}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a} \quad (\text{A.9})$$

$$\nabla \wedge (\vec{a} \cdot \nabla \vec{a}) = (\nabla \wedge \vec{a}) (\nabla \cdot \vec{a}) + \vec{a} \cdot \nabla (\nabla \wedge \vec{a}) - (\nabla \wedge \vec{a}) \cdot \nabla \vec{a} \quad (\text{A.10})$$

Soit S une surface délimitant un volume V , \mathcal{C} une courbe délimitant une surface S , \vec{n} le vecteur unitaire normal extérieur à un élément dS de S et $\vec{r} = (x, y, z)^t$. Alors

$$\int_S a \vec{n} dS = \int_V \nabla a dV \quad (\text{A.11})$$

$$\int_S \vec{n} \cdot \vec{a} dS = \int_V (\nabla \cdot \vec{a}) dV \quad (\text{A.12})$$

$$\int_S \vec{n} \wedge \vec{a} dS = \int_V (\nabla \wedge \vec{a}) dV \quad (\text{A.13})$$

$$\int_S \vec{n} \wedge (\nabla a) dS = \int_{\mathcal{C}} a d\vec{r} \quad (\text{A.14})$$

$$\int_S \vec{n} \cdot (\nabla \wedge \vec{a}) dS = \int_{\mathcal{C}} \vec{a} \cdot d\vec{r} \quad (\text{A.15})$$

ANNEXE C

Théorème de transport de Reynolds

Soit un volume matériel $\mathcal{D}(t)$ délimité par la surface $\partial\mathcal{D}(t)$; $\mathcal{D}(t)$ pouvant se déplacer et se déformer. À l'instant t_0 , on fait confondre $\mathcal{D}(t)$ avec un volume de contrôle V délimité lui même par la surface S ; à l'instant $t_0 + \delta t$, $\mathcal{D}(t)$ se confond avec un autre volume de contrôle V' délimité par S' . Soit $v(\vec{r}, t)$ la vitesse de fluide en un point (\vec{r}, t) appartenant à la surface $\partial\mathcal{D}(t)$, voir figure 2.1.

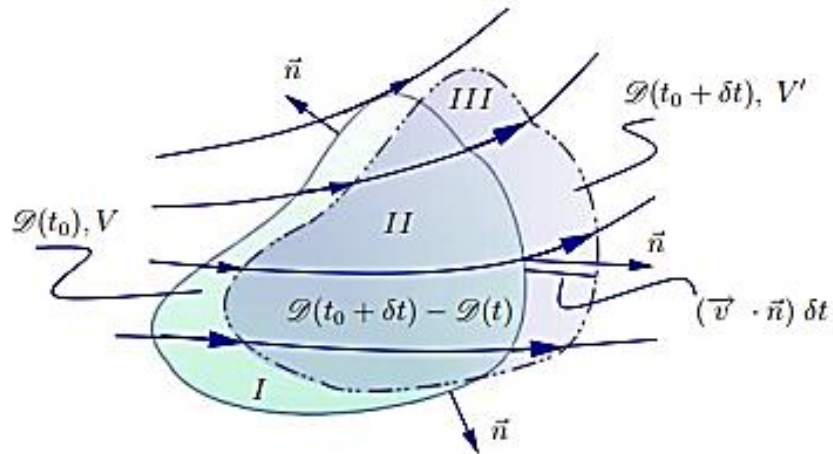


FIGURE 2.1. Lors de son déplacement le volume matériel $\mathcal{D}(t)$ occupe à l'instant t_0 l'espace désigné par $(I + II)$ et l'espace désigné par $II + III$ à l'instant $t_0 + \delta t$.

Soit l'intégrale

$$F(t) = \int_{\mathcal{D}(t)} f(\vec{r}, t) dV$$

où $f(\vec{r}, t)$ est une propriété physique quelconque associée au fluide et variant en espace et en temps. Alors, il vient

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{F(t_0 + \delta t) - F(t_0)}{\delta t} \\ &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{(F_{II} + F_{III})(t_0 + \delta t) - F_V(t_0)}{\delta t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{(F_{II} + F_{III} + F_I)(t_0 + \delta t) - F_I(t_0 + \delta t) - F_V(t_0)}{\delta t} \\
&= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{(F_I + F_{II})(t_0 + \delta t) - F_V(t_0)}{\delta t} + \frac{F_{III}(t_0 + \delta t) - F_I(t_0 + \delta t)}{\delta t} \right] \\
&= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{F_V(t_0 + \delta t) - F_V(t_0)}{\delta t} + \frac{F_{III}(t_0 + \delta t) - F_I(t_0 + \delta t)}{\delta t} \right] \\
&= \frac{\partial F}{\partial t} + \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{F_{III}(t_0 + \delta t) - F_I(t_0 + \delta t)}{\delta t}
\end{aligned}$$

car le volume de contrôle V est fixe dans l'espace.

Lors de son mouvement, la surface $\partial\mathcal{D}(t)$ balaye soit un volume nouvellement occupé ou soit un volume évacué par le fluide. Le terme $[F_{III}(t_0 + \delta t) - F_I(t_0 + \delta t)]/\delta t$ représente précisément le changement induit par le mouvement de $\partial\mathcal{D}(t)$:

$$F_{III}(t_0 + \delta t) = \text{changement en } F \text{ dû au volume nouvellement occupé}$$

$$F_I(t_0 + \delta t) = \text{changement en } F \text{ dû au volume évacué}$$

Une surface élémentaire, dS , en mouvement à la vitesse \vec{v} balaye un volume $(\vec{v} \cdot \vec{n}) \delta t dS$ lors de son mouvement dans un intervalle δt . Alors, il vient

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{F_{III}(t_0 + \delta t) - F_I(t_0 + \delta t)}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\int_S f(\vec{r}, t) (\vec{v} \cdot \vec{n}) \delta t dS}{\delta t}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V f(\vec{r}, t) dV + \int_S f(\vec{r}, t) (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS \\
&= \underbrace{\int_V \frac{\partial f(\vec{r}, t)}{\partial t} dV}_{\text{variation locale}} + \underbrace{\int_S f(\vec{r}, t) (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS}_{\text{flux de } f(\vec{r}, t) \text{ à travers la surface } S} \\
&= \int_V \frac{\partial f(\vec{r}, t)}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot (f(\vec{r}, t) \vec{v}) dV \\
&= \int_V \frac{\partial f(\vec{r}, t)}{\partial t} dV + \int_V [(\vec{v} \cdot \nabla) f(\vec{r}, t) + f(\vec{r}, t) \nabla \cdot \vec{v}] dV \\
&= \int_V \left[\frac{Df(\vec{r}, t)}{Dt} + f(\vec{r}, t) \nabla \cdot \vec{v} \right] dV
\end{aligned} \tag{B.1}$$

On appelle cette équation l'équation de transport de Reynolds.

ANNEXE D

Tenseur de contraintes, équations de mouvement $\nabla \cdot \vec{v} = 0$

Nous écrivons dans ce qui suit les équation de la conservation de la masse et Navier-Stokes dans les coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.

3.1. Coordonnées cartésiennes (x, y, z) avec (u, v, w)

Tenseur de contraintes

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} & \sigma_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 \sigma_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} & \sigma_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\
 \sigma_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} & \sigma_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

Équations de Navier-Stokes

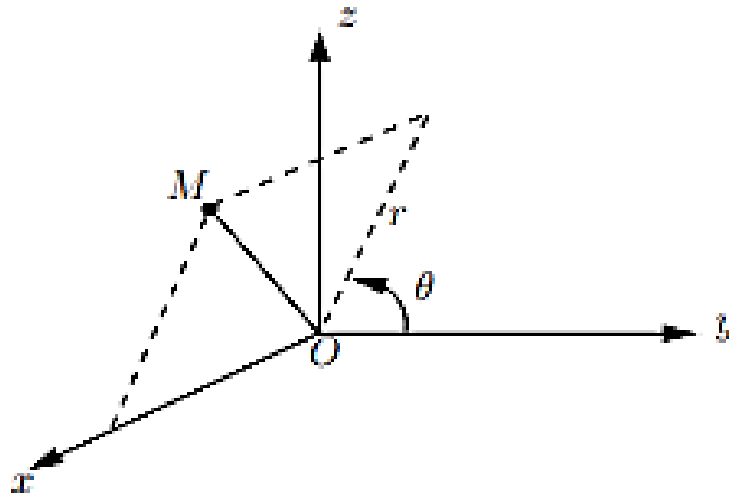
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \tag{C.2a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \tag{C.2b}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \tag{C.2c}$$

Équation de la conservation de la masse

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{C.3}$$



3.2. Coordonées cylindriques (r, θ, x) avec (v_r, v_θ, v_x)

Tenseur des contraintes

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} & \sigma_{r\theta} &= \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \\
 \sigma_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} & \sigma_{rx} &= \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \right) \\
 \sigma_{\theta\theta} &= -p + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) & \sigma_{\theta x} &= \mu \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \theta} \right)
 \end{aligned} \tag{C.4}$$

Équation de la conservation de masse

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \tag{C.5}$$

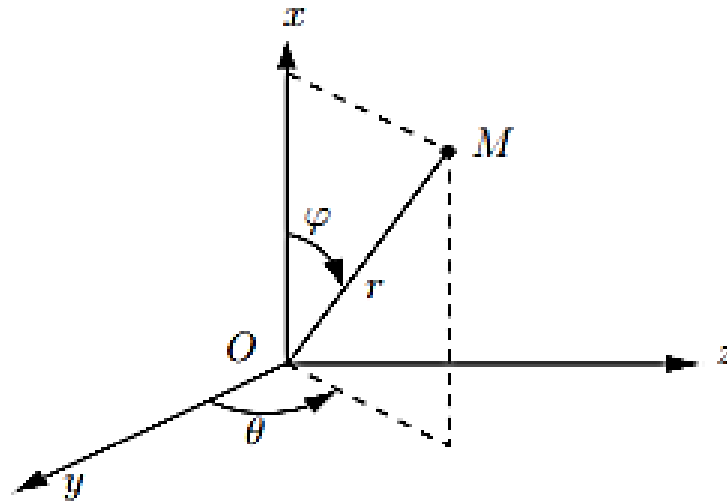
Équation de Navier–Stokes

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_x \frac{\partial v_r}{\partial x} \\
 = f_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} \right), \tag{C.6a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_x \frac{\partial v_\theta}{\partial x} \\ = f_\theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial x^2} \right), \end{aligned} \quad (\text{C.6b})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \theta} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.6c})$$

3.3. Coordonées sphériques (r, φ, θ) avec $(v_r, v_\varphi, v_\theta)$



Tenseur de contraintes

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} & \sigma_{r\varphi} &= \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) \\ \sigma_{\theta\theta} &= -p + 2\mu \left(\frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right. & \sigma_{\varphi\theta} &= \mu \left(\frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} \right. \\ & \quad \left. + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\varphi \cot \varphi}{r} \right) & & \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta \cot \varphi}{r} \right) \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -p + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} \right) & \sigma_{\theta r} &= \mu \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Équation de la conservation de la masse

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial (\sin \varphi v_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0, \quad (\text{C.8})$$

Équation de Navier–Stokes

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{v_\theta}{r \sin \varphi} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\varphi^2 + v_\theta^2}{r} &= f_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ + \nu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r v_r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\text{ctg} \varphi}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2\text{ctg} \varphi}{r^2} v_\varphi \right\}, \quad (\text{C.9a}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_\theta}{r \sin \varphi} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\varphi}{r} - \frac{v_\theta^2 \text{ctg} \varphi}{r} &= f_\varphi - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \\ + \nu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r v_\varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\text{ctg} \varphi}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\text{ctg} \varphi}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2 \sin^2 \varphi} \right\}, \quad (\text{C.9b}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{v_\theta}{r \sin \varphi} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + \frac{v_\varphi v_\theta \text{ctg} \varphi}{r} &= f_\theta - \frac{1}{\rho r \sin \varphi} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ + \nu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r v_\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\text{ctg} \varphi}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2\text{ctg} \varphi}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \varphi} \right\}. \quad (\text{C.9c}) \end{aligned}$$

ANNEXE E

Equation de la conservation d'énergie

Soit $\mathcal{D}(t)$ un volume matériel de fluide (homogène et isotrope) en mouvement délimité par une surface de contrôle $\partial\mathcal{D}(t)$; le volume $\mathcal{D}(t)$ se confond à l'instant t avec un volume de contrôle V fixe délimité par une surface de contrôle S . L'énergie totale E contenue dans $\mathcal{D}(t)$ à l'instant t est alors :

$$E_{\mathcal{D}(t)} = \int_{\mathcal{D}(t)} \rho \mathcal{E} dV = \int_V \rho \left(\underbrace{e}_{\substack{\text{énergie} \\ \text{interne massique}}} + \underbrace{\frac{1}{2}v^2}_{\substack{\text{énergie} \\ \text{cinétique}}} \right) dV \quad (\text{D.1})$$

Il vient, d'après le théorème de transport de Reynolds- voir annexe B- que le taux temporel de variation de E s'écrit sous la forme :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} \rho \mathcal{E} dV = \int_V \left[\frac{D(\rho \mathcal{E})}{Dt} + \rho \mathcal{E} \nabla \cdot \vec{v} \right] dV \quad (\text{D.2})$$

Selon le premier principe de la Thermodynamique, la variation temporelle de l'énergie E est donnée par :

$$\frac{dE}{dt} = \underbrace{\frac{dQ}{dt}}_{\substack{\text{chaleur reçue} \\ \text{par unité de temps}}} + \underbrace{\frac{dW}{dt}}_{\substack{\text{travail reçu} \\ \text{par unité de temps}}} \quad (\text{D.3a})$$

Pour la chaleur \dot{Q} reçue par unité de temps, on a d'après la loi de Fourier :

$$\dot{Q} = \int_S (-\lambda \nabla T) \cdot \vec{n} dS = - \int_V \nabla \cdot (\lambda \nabla T) dV \quad (\text{D.3b})$$

où λ est la conductivité thermique de fluide. En l'absence de tout travail mécanique, la puissance de travail effectué par le milieu extérieur au $\mathcal{D}(t)$ (à l'instant t) sur le fluide (contenu en $\mathcal{D}(t)$ à l'instant t), est constitué de la puissance de travail fait par les forces surfaciques :

$$\dot{W}_s = \int_S \vec{v} \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) dS = \int_S \vec{n} \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{v}) dS = \int_V \nabla \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\sigma}) dV \quad (\text{D.3c})$$

et de celui de force volumique \vec{f} :

$$\dot{W}_v = \int_V \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dV \quad (\text{D.3d})$$

où $\vec{\sigma}$ est le tenseur de contraintes.

Il vient alors qu'en combinant équations (D.2) et (D.3) l'on obtient :

$$\int_V \left(\frac{D(\rho \mathcal{E})}{Dt} + \rho \mathcal{E} \nabla \cdot \vec{v} \right) dV = \int_V \left(-\nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \nabla \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\sigma}) + \rho \vec{f} \cdot \vec{v} \right) dV, \quad (\text{D.4})$$

valable quelque soit V . D'où on tire l'équation aux dérivée partielles suivante pour la conservation d'énergie :

$$\frac{D(\rho \mathcal{E})}{Dt} + \rho \mathcal{E} \nabla \cdot \vec{v} = -\nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \nabla \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\sigma}) + \rho \vec{f} \cdot \vec{v} \quad (\text{D.5})$$

On peut simplifier encore cette équation en faisant usage de l'équation de Navier–Stokes exprimée sous la forme :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} v^2 \right) - \vec{v} \times \vec{\omega} \right) = -\nabla p + \rho \vec{f} + \nabla \cdot \vec{\tau} = \rho \vec{f} + \nabla \cdot \vec{\sigma} \quad (\text{D.6})$$

et l'équation de continuité écrite sous la forme :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{D.7})$$

où $\vec{\tau} = p \vec{I} + \vec{\sigma}$ est le tenseur de contraintes visqueuses.

Ensuite, on projette l'équation (D.6) sur \vec{v} (sur une ligne de courant) :

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = -\vec{v} \cdot \nabla p + \rho \vec{v} \cdot \vec{f} + \vec{v} \cdot \nabla \cdot \vec{\tau} \quad (\text{D.8a})$$

et multiplie (D.7) par \mathcal{E} :

$$\mathcal{E} \frac{D\rho}{Dt} + \mathcal{E} \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (\text{D.8b})$$

afin d'en soustraire les résultats de (D.5) pour arriver à :

$$\underbrace{\rho \frac{D\mathcal{E}}{Dt}}_{\textcircled{1}} = - \underbrace{\rho \nabla \cdot \vec{v}}_{\textcircled{2}} - \underbrace{\nabla \cdot (\lambda \nabla T)}_{\textcircled{3}} + \underbrace{\nabla \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\tau}) - \vec{v} \cdot \nabla \cdot \vec{\tau}}_{\textcircled{3}} \quad (\text{D.9})$$

où

- ① : variation de l'énergie interne d'une particule en mouvement par unité de temps,
- ② : puissance de travail de pression,
- ③ : puissance thermique échangée par conduction,
- ④ : puissance de dissipation visqueuse.

Il est d'usage de poser

$$\begin{aligned}\Phi &= \nabla \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\tau}) - \vec{v} \cdot \nabla \cdot \vec{\tau} = \vec{\sigma} : \nabla(\vec{v}) \\ &= \begin{pmatrix} p + \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & p + \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & p + \sigma_{zz} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

en coordonnées cartésiennes. On trouve :

$$\begin{aligned}\Phi &= (p + \sigma_{xx}) \frac{\partial u}{\partial x} + (p + \sigma_{yy}) \frac{\partial v}{\partial y} + (p + \sigma_{zz}) \frac{\partial w}{\partial z} \\ &\quad + \sigma_{xy} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \sigma_{yz} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \sigma_{zx} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)\end{aligned}\quad (\text{D.10})$$

Il est utile de noter que :

$$\begin{aligned}\rho \frac{De}{Dt} + p \nabla \cdot \vec{v} &= \rho \frac{De}{Dt} - \frac{p D\rho}{\rho Dt} \\ &= \rho \left[\frac{De}{Dt} + p \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right] \\ &= \rho \left[\frac{De}{Dt} + p \frac{D\vartheta}{Dt} \right]\end{aligned}\quad (\text{D.11})$$

où ϑ est le volume massique du fluide. Il vient alors que (D.9) se réécrit alors sous la forme :

$$\rho \left[\frac{De}{Dt} + p \frac{D\vartheta}{Dt} \right] = -\nabla(\lambda \nabla T) + \Phi \quad (\text{D.12})$$

où

$$\rho \left[\frac{De}{Dt} + p \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right] = -\nabla(\lambda \nabla T) + \Phi \quad (\text{D.13})$$

qui traduit l'application du premier principe de la thermodynamique.

Références

- [1] A. Boukhari, Notes de cours de gazodynamique. 1429. (2008).
- [2] J. Gosse, Mécanique des fluides. Traité Sciences fondamentales, A 1 870. (1996).
- [3] A. Lallemand, Écoulements monodimensionnels des fluides compressibles. Techniques de l'Ingénieur, traité Génie énergétique, B 8 165.
- [4] R. Ouziaux, J. Perrier, Mécanique des fluides appliquée. Dunod Université. 3^{ème} Edition. ISBN 2-04-010143-8. Paris. (1978).
- [5] V. Lemort, Modélisation d'une tuyère convergente/divergente. Laboratoire de Thermodynamique. Université de Liège. (2005).
- [6] D. Thévenin, Etude et analyse des écoulements compressibles, Octobre 18, 2004.
- [7] G. Riollrt, Thermodynamique appliquée. Énergie, Entropie, Exergie. Traité Génie énergétique B 1 211, p. 6 (1992).
- [8] J. Délerly, Cours d'Aérodynamique, Université de Versailles-Saint-Quentin-en - Yvelines (2001).
- [9] S. Candel, Mécanique des Fluides, Dunod (1995).
- [10] E. Krause, Fluid Mechanics with Problems and Solutions, ISBN 3-540-22981-7 Springer Berlin Heidelberg New York, (2005).
- [11] K. Antoni Oppenheim, Introduction to gazodynamics of explosions, ISBN 978-3-7091-4364-3 (eBook), originally published by Springer-Verlag Wien-New York in (1972).
- [12] J.D. Anderson, Modern compressible flow, McGraw-Hill (1995)
- [13] H.W. Liepmann, A. Roshko, Elements of Gas Dynamics, Wiley (1957)
- [14] I.L. Ryhming, Dynamique des Fluides, Presses polytechniques et universitaires romandes (1985).

-
- [15] C. Guilié, cours de mécanique des fluides compressibles, (2010).
- [16] S. Amiroudine, J. L. Battaglia, *Mécanique des fluides*, Dunod, Paris, ISBN 978-2-10-056922-9 (2011).
- [17] Bouaouina, L. Cour de mécanique des fluides approfondie, Master 1 énergétique. Université Mohamed Boudiaf M'sila.
- [18] Couette, M. (1888). Sur un nouvel appareil pour l'étude de frottement des liquides. *Compte Rend. Acad. Sci.*, 107:388–390.
- [19] Macosko, C. (1994). *Rheology: principles, measurements, and applications*. Advances in interfacial engineering series. Wiley-Blackwell.
- [20] Taylor, G. I. (1923). Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. *Phil. Trans. R. Soc. London. A*, 223:289–343.
- [21] Koschmieder, E. (1993). *Bénard Cells and Taylor Vortices*. In *Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics*. Cambridge University Press, New York.
- [22] Tagg, R. (1994). The Couette-Taylor problem. *Nonlinear Science Today*, 4:1–25.
- [23] Drazin, P. et Reid, W. (1981). *Hydrodynamic stability*. In *Cambridge Mathematical Library*. Cambridge University Press.
- [24] Billant, P. et Gallaire, F. (2005). Generalized Rayleigh criterion for nonaxisymmetric centrifugal instabilities. *J. Fluid Mech.*, 542:365–379.
- [25] Krueger, E., Gross, A. et Diprima, R. (1966). On the relative importance of Taylor-vortex and non-axisymmetric modes in flow between rotating cylinders. *J. Fluid Mech.*, 24:521–538.
- [26] Snyder, H. (1968). Stability of a rotating Couette flow. I. Asymmetric Waveform. *Phys. Fluids.*, 11:728–734.
- [27] Langford, F., Tagg, R., Kostelich, E., Swinney, H. et Glubitsky, M. (1988). Primary instabilities and bicriticality in flow between counter rotating cylinders. *Phys. Fluids.*, 31:776–785.
- [28] Altmeyer, S., Hoffmann, C. et Lucke, M. (2011). Islands of instability for growth of spiral vortices in the Taylor-Couette system with and without axial through flow. *Phys. Rev. E.*, 84:046308, 1–12.

-
- [29] Andereck, C., Liu, S. et Swinney, H. (1986). Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders. *J. Fluid Mech.*, 164:155–183.
- [30] Coles, D. (1965). Transition in circular Couette flow. *J. Fluid Mech.*, 21:385–425.
- [31] Atta, C. V. (1966). Exploratory measurements in spiral turbulence. *J. Fluid Mech.*, 25: 495–512.
- [32] Orr, W. M. (1907). The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and of a viscous liquid. *Proc. R. Irish Acad.*, 27:9–138.
- [33] Trefethen, L. N., Trefethen, A. E., Reddy, S. C. et Driscoll, T. A. (1993). Hydrodynamic stability without eigenvalues. *Science*, 261(5121):578–584.
- [34] Henningson, D. S. et Reddy, S. C. (1994). On the role of linear mechanisms in transition to turbulence. *Phys. Fluids*, 6(3):1396–1398.
- [35] Waleffe, F. (1995). Transition in shear flows. Nonlinear normality versus non-normal linearity. *Phys. Fluids*, 7(12):3060–3066.
- [36] Schmid, P. J. et Henningson, D. S. (2001). Stability and transition in shear flows, volume 142 de Applied Mathematical Sciences. Springer.
- [37] Landahl, M. T. (1980). A note on an algebraic instability of inviscid parallel shear flows. *J. Fluid Mech.*, 98:243–251.
- [38] Ellingsen, T. et Palm, E. (1975). Stability of linear flow. *Phys. Fluids*, 18(4):487–488.
- [39] Trefethen, L. N., Chapman, S. J. R., Henningson, D. S., Meseguer, A., Mullin, T. et Nieuwstadt, F. T. M. (2000). Threshold amplitudes for transition to turbulence in a pipe. Numerical Analysis Report, 00/17.
- [40] Gebhardt, T. et Grossmann, S. (1993). The Taylor - Couette eigenvalue problem with independently rotating cylinders. *Physik B Condensed Matter*, 90(4):475–490.
- [41] Hristova, H., Roch, S., Schmid, P. et Tuckerman, S. (2002). Transient growth in Taylor-Couette flow. *Phys. Fluids.*, 14:3475–3484.
- [42] Meseguer, A. (2002). Energy transient growth in the Taylor-Couette problem. *Phys. Fluids.*, 14:1655–1660.
- [43] Marezke, S., Hof, B. et Avila, M. (2014). Transient growth in linearly stable Taylor-Couette flows. *J. Fluid Mech.*, 742:254–290.

-
- [44] Dubrulle, B., Dauchot, O., Daviaud, F., Longaretti, P., Richard, D. et Zhan, J. (2005). Stability and turbulent transport in Taylor-Couette flow from analysis of experimental data. *Phys. Fluids.*, 17:095103, 1–19.
- [45] Jeifreys, H. (1926). The stability of layer of fluid heated from below. *Phil. Mag.*, 2: 833-844.
- [46] Catton, I. (1972a). Effect of wall conduction on the stability of a fluid in a rectangular region heated from below. *J. Heat Transfer*, 94, n° 4:446-452.
- [47] Catton, I. (1972b). The effect of insulating vertical walls on the onset of motion in a fluid heated from below. *J. Heat Mass Transfer*, 15:665-672.
- [48] Chen, Y. Y. (1992a). 'Finite-size effects on linear analysis of finite-cell Rayleigh-Bénard convection. *J. Fluid. Mech.*, 241:549.
- [49] Chen, Y. Y. (1992b). 'Finite-size effects on linear analysis stability of pure-fluid convection. *Phys. Rev.*, 45: 3727.
- [50] Crespo, E. & Bontoux, P. (1989). Numerical solution and analysis of asymmetric convection in a vertical cylinder: an effect of Prandtl number. *Phys. Fluids*, 1, n° 8: 1348-1359.
- [51] Stork, K. & Müller, U. (1975). Convection in boxes: An experimental investigation in vertical cylinders and annuli. *J. Fluid Mech.*, 71: 231.
- [52] Chanson, G. S. & Sani, R. L. (1971). On thermoconductive instability in a bounded cylindrical fluid layer. *J. Heat Mass Transfer.*, 14: 2157-2160.
- [53] Buell, J. C. & Catton, I. (1983). The effect of wall conduction on the stability of a fluid in a right circular cylinder heated from below. *J. Heat Transfer*, 105:255-260.
- [54] Rosenblatn, S. (1982). Thermal convection in a vertical cylinder. *J. Fluid. Mech.*, 122: 395-410.
- [55] Kelvin, Lord (William Thomson), "Hydrokinetic solutions and observations," *Philosophical Magazine*, vol. 42, pages 362–377 (1871).
- [56] Helmholtz, Hermann Ludwig Ferdinand von, "Über discontinuierliche Flüssigkeits-Bewegungen [On the discontinuous movements of fluids]," *Monatsberichte der Königlichen Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berlin [Monthly Reports of the Royal Prussian Academy of Philosophy in Berlin]*, vol. 23, pages 215 ff (1868).

-
- [57] Lagrée, P.Y. & Rossi, M. (1997). Introduction à l'Instabilité Hydrodynamique. Cours de DEA de Mécanique Filière 2, UPMC.
- [58] Koshmeider, E. L. et Prah, S. A. (1990). Surface-tension-driven Bénard convection in small containers. *Journal of Fluid Mechanics*, 215:571–583.
- [59] Rahal, S., Cerisier, P. et Azuma H. (2007). Bénard–Marangoni convection in a small circular container: influence of the Biot and Prandtl numbers on pattern dynamics and free surface deformation. *Experiments in Fluids*, 43(4):547–554.
- [60] Medale, M. et Cerisier, P. (2002). Numerical simulation of Benard-Marangoni convection in small aspect ratio containers. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 42(1):55–72.
- [61] Kuhlmann, H.C. et Schoisswohl, U. (2010). Flow instabilities in thermocapillary-buoyant liquid pools. *Journal of Fluid Mechanics*, 644:509–535.