

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHESCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DE M'SILA  
FACULTE DE TECHNOLOGIE  
DEPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE  
MEMOIRE DE FIN D'ETUDES EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME  
DE MASTER EN GENIE ELECTRIQUE  
**SPECIALITE: AUTOMATIQUE**  
**THEME**

---

# **Commande Robuste Adaptative Floue des Systèmes d'Ordre Fractionnaire**

---

Proposé et dirigé par :

- M. Khatir KHETTAB

Présenté par :

- BOUDJELLAL Imadeddine

Année Universitaire : 2012 / 2013

**N° d'ordre: 065**

*A ma mère,*

*A mon père,*

*A la mémoire de mes grands-pères et grandes mères,*

*A mes chers frères, et sœurs,*

*A toute ma famille,*

*A mes amis,*

*A tous mes collègues de la promotion 2013.*

## ***Remerciements***

*Je remercie ALLAH (ﷻ) tout puissant pour la volonté et la patience qu'il m'a donné tout au long de mes études.*

*Mes remerciements pour mon encadreur Mr. KHETTAB.K pour ses conseils pertinents, et ses orientations sages, sa patience et vigilance, ainsi pour tous les enseignants qui ont contribué à ma formation.*

*Mes remerciements vont aussi à tous les membres du jury qui ont accepté de juger mon travail.*

*Enfin, je tiens à exprimer ma reconnaissance à tous mes amis et collègues pour le soutien moral et matériel...*

---

# *Table des matières*

---

# Table des matières

Introduction générale.....	1
----------------------------	---

## Chapitre I

### Théorie de la Dérivation non Entière

I.1 Introduction.....	5
I.2 Fonctions spécifiques pour la dérivation non entière.....	5
I.3 Opérateur de dérivations non-entières, Définitions et propriétés.....	6
I.3.1 Dérivée fractionnaire au sens de <i>Grünwald-Letnikov</i> .....	6
I.3.2 Dérivée fractionnaire au sens de <i>Riemann-Liouville</i> .....	6
I.3.3 Dérivée fractionnaire au sens de <i>Caputo</i> .....	6
I.3.4 Propriétés.....	7
I.4 Méthodes opérationnelles fractionnaires.....	7
I.4.1 Eléments sur la transformée de Laplace.....	7
I.4.2 Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire.....	8
I.5 Equations différentielles fractionnaires et ces applications.....	9
I.5.1 Méthode d'Adams-Bashforth-Moulton.....	10
I.5.2 Méthode de <i>Grünwald-Letnikov</i> : Evaluation numérique de la dérivée fractionnaire de quelques fonctions usuelles.....	13
I.6 Etude d'un exemple de système chaotique fractionnaire.....	15
I.6.1 Caractérisation du chaos.....	15
I.6.2 Système chaotique fractionnaire de <i>Duffing-Holmes</i> .....	16
I.7 Conclusion.....	18

## Chapitre II

### Commande Adaptative Floue $H^\infty$ des Systèmes Chaotiques d'ordre Fractionnaire

II.1 Introduction.....	19
II.2 Définitions.....	19
II.2.1 Contrôleurs flous.....	19
II.2.2 Systèmes flous de type <i>Takagi-Sugeno (T-S)</i> .....	20
II.3 Problématique et conception de la commande adaptative floue $H^\infty$ .....	21
II.4 Analyse de la stabilité.....	24
II.5 Algorithme de la technique étudiée.....	25
II.6 Exemple de simulation.....	26
II.7 Conclusion.....	32

### **Chapitre III**

#### **Commande Hybride Adaptative Floue des Systèmes Fractionnaires par Mode Glissant**

III.1 Introduction .....	33
III.2 Problématique et conception de la commande intelligente hybride par mode glissant....	34
III.3 Analyse de la stabilité.....	38
III.5 Exemple de simulation .....	39
III.5 Conclusion.....	47

### **Chapitre IV**

#### **Commande Hybride Adaptative Floue $H^\infty$ des Systèmes Fractionnaires**

IV.1 Introduction .....	48
IV.2 Problématique de la conception du schéma de commande hybride étudiée .....	48
IV.3 Analyse de la stabilité .....	51
IV.4 Exemple de simulation.....	53
IV.5 Conclusion.....	59
<b>Conclusion générale.....</b>	<b>60</b>

---

# *Introduction générale*

---

# Introduction générale

## 1. Généralités

Ces dernières années, le calcul fractionnaire traite les dérivées et les intégrations d'ordre arbitraire [Yuan,11] et a trouvé beaucoup d'applications dans beaucoup de domaines de la physique, des mathématiques appliquées et de la technologie. D'ailleurs, beaucoup de systèmes physiques réels sont bien caractérisés par des équations d'ordre fractionnaire, c.-à-d., équations impliquant des dérivées d'ordre entier et d'ordre non entier.

Depuis quelques décennies, le monde industriel a connu un énorme développement technologique, sous l'effet de la concurrence et des besoins de plus en plus exigeants en qualité et en performances. Les industriels ont été amenés à s'intéresser et à s'impliquer dans la recherche automatique et à suivre les dernières nouveautés des techniques de la commande et de la régulation qui participent d'une manière essentielle à améliorer l'efficacité des processus de production, la qualité des produits et la rentabilité. [Ladaci,07]

On constate que la description de quelques systèmes est plus précise quand la dérivée fractionnaire est employée. Par exemple, des processus électrochimiques et les structures flexibles sont modélisés par les modèles d'ordre fractionnaire [Tsung,11], le comportement de quelques systèmes biologiques est exploré utilisant le calcul fractionnaire et la polarisation diélectrique, les ondes électromagnétiques sont décrites par des équations d'ordre fractionnaire [Yuan,11].

L'une des théories qui connaissent actuellement une grande popularité parmi les chercheurs aussi bien dans les sciences fondamentales qu'en ingénierie, le *Calcul Fractionnaire* dont les premières prémisses datent de plus de trois siècles. Au début c'était presque un jeu de l'esprit pour certains mathématiciens de renommée, qui voulaient généraliser la notion de différentiation d'ordre entier par des opérateurs d'ordre fractionnaire, permettant le calcul de la dérivée d'une fonction différentiable  $\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha}$ , où  $\alpha$  seraient un réel non nécessairement entier, voire un nombre complexe.

De nos jours, beaucoup des systèmes différentiels d'ordre fractionnaire se comportent chaotiquement, comme le système de *Chua* [Petras,06a], le système de *Duffing-Holmes*, le système de *Lü*, le système de *Chen*, le réseau neurologique cellulaire [Petras,06b].

Récemment, en raison de ses applications potentielles dans la communication protégée et la commande de processus, de l'étude de la synchronisation de chaos dans les systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire et des phénomènes relatifs suscite l'attention croissante.

Le problème de synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire a été étudié la première fois par *Deng et Li* [Deng,05] qui ont effectué la synchronisation dans le cas du système fractionnaire de *Lü*. Après, ils ont étudiés la synchronisation de chaos du système de *Chen* avec un ordre fractionnaire d'une façon différente. Des contrôleurs flous et des réseaux neurologiques sont généralement considérés applicables aux systèmes qui sont mathématiquement mal comprises et où les opérateurs humains expérimentés sont disponibles pour fournir un principe de base qualitatif [Wang,92],[Wang,93].

Basé sur le théorème de l'approximation universelle, [Tsung,12] les contrôleurs flous sont assez généraux pour effectuer toutes les actions de commande, c'est un intérêt pour des méthodologies de conception systématique pour une classe des systèmes non linéaires utilisant des schémas de commande adaptative floue. Un système adaptatif flou est un système flou équipé d'un algorithme de formation dans lequel un contrôleur adaptatif est synthétisé d'une collection de règles floues IF-THEN et les paramètres des fonctions d'appartenance caractérisant les termes linguistiques dans les règles IF-THEN changent selon une certaine loi adaptative afin de commander un système pour suivre une trajectoire de référence.

Bien que le concept de la commande par mode glissant (SMC) et la théorie de système d'ordre fractionnaire soient bien connus, leur intégration, commande par mode glissant fractionnaire, est un point intéressant de la recherche a insisté sur ce travail avec quelques applications [Momani,10],[Kuo,11].

Ce genre de commande souffre de problème du chattering (le broutement) inhérent à la fonction discontinue (i.e. la fonction signe), pour cela en combinant cette commande par une commande proportionnelle intégrale, pour le but d'éliminer le phénomène de chattering. [Redjem,12]

On applique ici, un nouvel critère de stabilité de Lyapunov incorporé par un algorithme hybride adaptatif flou avec l'utilisation de la commande par mode glissant (SMC) par l'intégration de la commande PI fractionnaire.

En général, dans ce travail, et par l'incorporation du critère de la technique de conception de poursuite de  $H^\infty$  [Chen,96] et de stabilité de Lyapunov, On étudie un nouvel algorithme de commande Hybride (directe/indirecte) intelligente (commandes avancées : adaptative,

floue, mode glissant, robuste  $H^\infty$ ) de telle sorte que non seulement la stabilité du système de commande floue adaptative soit garantie mais également l'influence de la perturbation externe et d'erreur d'approximation sur l'erreur de poursuite puisse être atténuée à un niveau prescrit par l'intermédiaire de la technique de conception  $H^\infty$  [Balas,11],[C.Wang,02a].

La méthode de conception utilisée essaye de combiner la technique d'atténuation, la méthode d'approximation floue, et l'algorithme de commande adaptative pour la conception de commande de poursuite robuste des systèmes fractionnaire non linéaires avec une incertitude ou une variation inconnue des paramètres et des structures du système.

## **2. Objectif du mémoire**

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre de la stabilisation et de la commande des systèmes non linéaires chaotiques d'ordre fractionnaires.

L'objectif du travail est donc de déterminer des lois de commande hybrides intelligentes (adaptative, floue, mode glissant et commande robuste de  $H^\infty$ ) pour les systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire (système de *Duffing-Holmes* et système financé économique), ainsi pour l'étude de la synchronisation de chaos dans les systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire et des phénomènes relatifs suscite l'attention croissante [Balas,11].

Dans le cas des systèmes non linéaires fractionnaires, les méthodes de stabilisation utilisées sont basées sur une généralisation du lemme de *Grünwald-Letnikov*. Pour les systèmes fractionnaires linéaires et non linéaires, les résultats utilisés dans ce mémoire ont été étendus aux cas des systèmes chaotiques fractionnaires de *Duffing*, aussi un autre système financier économique.

L'objectif de ces nouveaux algorithmes de commande intelligente est d'améliorer les performances des systèmes de commande de processus sur lesquelles peu d'informations sont disponibles.

Il est à noter que les processus considérés dans ce travail sont le plus souvent des systèmes *SISO*, mais les résultats obtenus peuvent être facilement généralisés aux cas *MIMO*.

Les développements résumés ci-dessus constituent les quatre chapitres de ce mémoire. Nous allons en décrire les principaux aspects.

### **3. Structure du mémoire**

Dans ce travail, Nous l'avons scindée en quatre chapitres selon le type de commande intelligente étudiée :

- Le premier chapitre est une introduction au calcul fractionnaire et aux systèmes de commande d'ordre fractionnaire en général. Des concepts de base y sont répertoriés pour une bonne compréhension de la partie de simulation.
- Le chapitre II traite de la commande adaptative floue robuste des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire.
- Dans le chapitre III on combine la technique de commande précédant par la commande directe/indirecte par mode de glissement.
- La commande hybride par la conception de la technique  $H^\infty$  est utilisée dans le chapitre IV pour la combinaison et la robustification des lois de commande développées.

Dans toutes les techniques de commande floues utilisées dans ce mémoire, les systèmes flous sont utilisés pour approximer les dynamiques inconnus des systèmes. L'analyse de la stabilité et de la robustesse des structures de commande vis-à-vis des erreurs d'approximation floue et des perturbations externes est effectuée par l'approche de Lyapunov. De plus, pour chaque technique utilisée des exemples de simulation sont donnés pour montrer et mettre en évidence ses performances.

Enfin, on termine ce mémoire par une conclusion générale qui présente une genèse des principaux résultats de ce mémoire et les perspectives de ce travail.

---

*Chapitre I*

*Théorie de la Dérivation*

*Non Entière*

---

## Chapitre I

# Théorie de la Dérivation non Entière

### I.1 Introduction

Le calcul d'ordre fractionnaire (intégration et différentiation d'ordre fractionnaire) est un concept qui date de l'époque de *Cauchy*, *Riemann Liouville* et *Letnikov* au 19<sup>ème</sup> siècle. Il a été utilisé en mécanique depuis les années 1930 et en électrochimie depuis les années 1960. Et plus tard plusieurs mathématiciens et physiciens ont étudié les opérateurs différentiels et les systèmes d'ordre fractionnaire.

L'une des applications importantes du calcul fractionnaire est la théorie du chaos [Ibrahima,11]. Cette partie est ainsi dédiée à l'étude des systèmes chaotiques fractionnaires, dont les propriétés intrinsèques peuvent être utilisées dans les schémas de synchronisation. Une étude sur le chaos dépassant largement le cadre de ce chapitre, nous nous contenterons de définir brièvement la notion de chaos et présenter le concept des systèmes chaotiques fractionnaires à partir de l'exemple du système fractionnaire de *Duffing-Holmes*.

On peut généraliser les opérateurs d'intégration et de différentiation dans une seule opération fondamentale  ${}_a D_t^\alpha$  où  $a$  et  $t$  sont les limites de l'opération [Petras,11b], [Petras,09]. L'opération intégration-différentiel continue est définie comme suit :

$${}_a D_t^q = \begin{cases} \frac{d^q}{dt^q} & q > 0 \\ 1 & q = 0 \\ \int_a^t (d\tau)^{-q} & q < 0 \end{cases}$$

### I.2 Fonctions spécifiques pour la dérivation non entière

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction de Gamma Euler  $\Gamma(n)$ . La fonction de Gamma  $\Gamma(n)$  est définie par l'intégrale suivante [Ibrahima,11]

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt. \quad (1.1)$$

Cette fonction est la généralisation d'une factorielle sous la forme suivante  $\Gamma(n) = (n - 1)!$ . Une autre fonction, qui joue un rôle très important dans le calcul fractionnaire, cette fonction a été introduite par *Humbert* et *Agrawal* en 1953. Il s'agit d'une fonction à deux paramètres de type *Mittag-Leffler* défini comme [Petras,11a].

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0. \quad (1.2)$$

Pour  $\beta = 1$ , nous obtenons la fonction *Mittag-Leffler* dans un paramètre

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \equiv E_{\alpha}(z).$$

A partir de la relation (1.2) on montre que

$$E_{1,1}(z) = e^z, \quad E_{1,2}(z) = \frac{e^z - 1}{z}$$

### I.3 Opérateur de dérivations non-entières, Définitions et propriétés

#### I.3.1 Dérivée fractionnaire au sens de *Grünwald-Letnikov*

La définition au sens de *Grünwald-Letnikov* est basée sur une approche aux différences finies fractionnaires où toute la différence par rapport au cas entier se situe dans l'extension de la factorielle à travers la fonction Gamma Euler. La dérivée fractionnaire au sens de *Grünwald-Letnikov* d'une fonction  $f(t)$  est définie par la relation suivante [Ibrahima,11]

$${}_{t_0}^G D_t^q f(t) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-t_0}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{q}{j} f(t - jh) \quad (1.3)$$

Où  $\lfloor \frac{t-t_0}{h} \rfloor$  désigne la partie entière et  $\binom{q}{j}$  sont des coefficients binomiaux.

#### I.3.2 Dérivée fractionnaire au sens de *Riemann-Liouville*

Soient  $\alpha \in R^+$  avec  $R(q) > 0$ ,  $n$  un entier positif  $t_0 \in R$  et  $f$  une fonction localement intégrable définie sur  $[t_0, \infty)$ . La dérivée d'ordre  $\alpha$  de  $f$  de borne inférieure  $t_0$  est définie par [Ammour,11]:

$${}_{t_0}^{RL} D_t^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{n-q-1} f(\tau) d\tau \quad (1.4)$$

Où  $(n - q) < q < n$ .

#### I.3.3 Dérivée fractionnaire au sens de *Caputo*

*Caputo* a introduit une autre formulation de la dérivée d'ordre fractionnaire comme suit

$${}_{t_0}^C D_t^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - q)} \int_{t_0}^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{n-q+1}} d\tau \quad (1.5)$$

Avec  $n$  est un entier positif vérifiant l'inégalité  $(n - 1) < q < n$ .

### I.3.4 Propriétés

Les principales propriétés des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire sont les suivantes [Ammour,11] et [Ladaci,07].

Si  $f(z)$  est une fonction analytique de  $z$ , alors sa dérivée d'ordre fractionnaire  ${}_aD_z^\alpha f(z)$  est une fonction analytique de  $z$  et.

1. Pour  $\alpha = n$ , où  $n$  est un entier, l'opération  ${}_aD_z^\alpha f(z)$  donne le même résultat que la différentiation classique d'ordre entier  $n$ .
2. Pour  $\alpha = 0$  l'opération  ${}_aD_z^\alpha f(z)$  est l'opérateur identité

$${}_aD_z^0 f(z) = f(z).$$

3. La différentiation et l'intégration d'ordres fractionnaire sont des opérations linéaires

$${}_aD_z^\alpha a f(z) + {}_aD_z^\alpha b g(z) = a {}_aD_z^\alpha f(z) + b {}_aD_z^\alpha g(z)$$

## I.4 Méthodes opérationnelles fractionnaires

Le calcul opérationnel est un outil souvent utilisé pour la résolution des problèmes d'ingénierie. Il s'avère être puissant et indispensable notamment dans l'étude des systèmes fractionnaires. C'est pourquoi, nous allons rappeler dans ce paragraphe quelques éléments de base de la transformée de Laplace dans le cas entier que nous allons par la suite étendre au cas fractionnaire.

### I.4.1 Eléments sur la transformée de Laplace

La fonction  $F(s)$  de la variable complexe  $s$  dénie par,

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t); s\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (1.6)$$

La fonction originale  $f(t)$  peut être retrouvée à partir de la transformée de Laplace  $F(s)$  avec la transformée inverse de Laplace

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f(s); t\} = \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{st} F(s) ds, \quad c = \text{Re}(s) > c_0 \quad (1.7)$$

Où  $c_0$  se trouve dans le demi-plan droit de la convergence absolue de l'intégrale de Laplace (1.7).

Le produit de convolution des fonctions  $f$  et  $g$  est donné par

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau \quad (1.8)$$

des deux fonctions  $f(t)$  et  $g(t)$ , qui sont nulles pour  $t < 0$ , est égale au produit de la transformée de Laplace des deux fonctions

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t); s\} = F(s)G(s) \quad (1.9)$$

Sous l'hypothèse que  $F(s)$  et  $G(s)$  existent. On utilisera la propriété (1.9) pour l'évaluation de la transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire de *Riemann-Liouville*.

Une autre propriété très utile dont nous aurons besoin est la formule de la transformée de Laplace de la dérivée d'un ordre entier  $n$  de la fonction  $f(t)$

Dans la partie suivante nous considérons la limite inférieure  $a = 0$ . [Petras,11a],[Ladaci,07].

$$\mathcal{L}\{f^n(t); s\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0) \quad (1.10)$$

#### I.4.2 Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire [Ibrahima,11],[Petras,11a]

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville peut notamment s'écrire comme le produit de convolution de la fonction  $g(t) = t^{\alpha-1}$  et  $f(t)$

$${}_0D_t^{-\alpha} f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau) d\tau = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * f(t) \quad (1.11)$$

La transformée de Laplace de la fonction  $g(t) = t^{\alpha-1}$  est donnée par

$$G(s) = \mathcal{L}\{t^{\alpha-1}\} = \Gamma(\alpha)s^{-\alpha} \quad (1.12)$$

Ainsi, en utilisant la formule de la transformée de Laplace de convolution, on obtient la transformée de Laplace de l'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

$$\mathcal{L}\{{}^{RL}D_t^\alpha f(t)\} = \mathcal{L}\{{}^{GL}D_t^\alpha f(t)\} = s^{-\alpha} F(s) \quad (1.13)$$

Pour obtenir la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de *Riemann-Liouville* de la fonction  $f(t)$ , posons

$$D^\alpha = g^{(n)}(t) \quad (1.14)$$

Ce qui entraîne

$$g(t) = D^{-(n-\alpha)} f(t) \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\tau-1} f(\tau) d\tau, \quad n-1 < \alpha < n \quad (1.15)$$

L'utilisation de la transformée de Laplace de la dérivation d'ordre entier conduit à

$$\mathcal{L}\{{}_0D_t^\alpha f(t)\} = s^\alpha G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0) \quad (1.16)$$

Où

$$G(s) = s^{-(n-\alpha)}F(s) \quad (1.17)$$

A partir de la définition de la dérivation fractionnaire de *Riemann-Liouville*, il vient

$$g^{(n-k-1)}(t) = \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} {}_0D_t^{-(n-\alpha)}f(t) = {}_0D_t^{\alpha-k-1}f(t) \quad (1.18)$$

En substituant (1.17) et (1.18) dans (1.16), nous obtenons l'expression finale de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de *Riemann-Liouville*

$$\mathcal{L}\{{}_0D_t^\alpha f(t)\} = s^\alpha G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k D_t^{\alpha-k-1}f(t)|_{t=0_+}, \quad n-1 < \alpha < n \quad (1.19)$$

En résumé, soit  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ , la transformée de Laplace de  $f(t)$ . On a les relations suivantes

- transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de *Grünwald-Letnikov*

$$\mathcal{L}\{D_t^{-\alpha}f(t)\} = s^{-\alpha}F(s), \quad n-1 < \alpha < n \quad (1.20)$$

- transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de *Riemann-Liouville*

$$\mathcal{L}\{{}_0D_t^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k D_t^{\alpha-k-1}f(t)|_{t=0_+}, \quad n-1 < \alpha < n \quad (1.21)$$

- transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de *Caputo*

$$\mathcal{L}\{{}_0^c D_t^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k D_t^{\alpha-k-1} \frac{d^k f(t)}{dt^k} \Big|_{t=0_+}, \quad n-1 < \alpha < n \quad (1.22)$$

## I.5 Equations différentielles fractionnaires et ces applications

Dans la littérature du chaos fractionnaire, deux méthodes d'approximations ont été étudiées pour résoudre numériquement les équations différentielles d'ordre fractionnaire.

La première méthode, connue comme approximation de domaine fréquentiel, est basée sur l'approximation du comportement du système d'ordre fractionnaire dans le domaine fréquentiel. Dans un algorithme a été étudié de calculer les approximations de transfert linéaires de la fonction  $\frac{1}{s^q}$  (*Oustaloup et Charef ...*).

La deuxième méthode est une version améliorée de l'algorithme (*Grünwald-Letnikov et Adams-Bashforth-Moulton*) est étudiée et basée sur les définition de *Grünwald-Letnikov et Caputo* [Tidjani,09].

### I.5.1 Méthode d'Adams-Bashforth-Moulton

Soit  $q$  un réel positif vérifiant  $m - 1 < q < m$ ,  ${}^c D^q$  désigne l'opérateur de dérivation au sens de *Caputo*.

On se donne le problème aux conditions initiales suivant

$$\begin{cases} {}^c D_0^q y(t) = f(t, y) \\ D_0^q y(0) = y_0^k, k = 0, 1, \dots, m - 1 \end{cases} \quad (1.23)$$

La solution de l'équation (1.23) est équivalent à l'équation intégrale non linéaire de *Volterra* [Diethelm,02a] comme,

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} y_0^k \frac{t^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t - \tau)^{q-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau \quad (1.24)$$

Le principe de cette méthode est de remplacer l'équation originale (1.23) par l'équation intégrale de *Volterra* (1.24) et on utilise la formule (produit de quadrature des trapèzes) pour remplacer l'intégrale par les nœuds  $t_j, j = 0, 1, \dots, n + 1$  qui sont prises respectivement à la fonction  $(t_{n+1} - \cdot)^{q-1}$  [Diethelm,02b] c'est-à-dire

$$\int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau)^{q-1} g(\tau) d\tau \approx \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau)^{q-1} \tilde{g}_{n+1}(\tau) d\tau = \frac{h^q}{q(q+1)} \sum_{j=0}^{n+1} a_{j,n+1} g(t_j)$$

Avec

$$a_{j,n+1} = \begin{cases} n^{q+1} - (n-q)(n+1)^q & j = 0 \\ (n-j+2)^{q+1} + (n-j)^{q+1} - 2(n-j+1)^{q+1} & 1 \leq j \leq n \\ 1 & j = n+1 \end{cases}$$

Cela nous donne la formule de correction [Diethelm,02b]:

$$y_h(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{[q]-1} y_0^{(k)} \frac{t_{n+1}^k}{k!} + \frac{h^q}{\Gamma(q+2)} f(t_{n+1}, y_h^p(t_{n+1})) + \frac{h^q}{\Gamma(q+2)} \sum_{j=0}^n a_{j,n+1} f(t_j, y_j)$$

Pour déterminer la formule de prédiction qui donne  $y_h^p(t_{n+1})$ , on procède de la même manière comme précédemment mais cette fois l'intégrale sera remplacée en utilisant la méthode des rectangles

$$\int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau)^{q-1} g(\tau) d\tau \approx \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} g(t_j)$$

Où

$$b_{j,n+1} = \frac{h^q}{q} ((n-j+1)^q - (n-j)^q)$$

Où la valeur prédicateur de  $y_h^p(t_{n+1})$  est déterminée par la méthode Adams–Bashforth [Diethelm,04]

$$y_h^p(t_{n+1}) = \sum_{j=0}^{[q]-1} y_0^{(j)} \frac{t_{n+1}^j}{j!} + \frac{1}{\Gamma(q)} \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f(t_j, y_j)$$

L'erreur d'estimation de cette approximation est décrite comme suit

$$\max_{j=0,1,\dots,N} |y(t_j) - y_h(t_j)| = O(h^p) \text{ Avec } p = \min(2, 1 + q)$$

Un système ayant trois équations différentielles fractionnaire de la forme

$$D^{q_1} x(t) = f_1(x, y, z)$$

$$D^{q_2} y(t) = f_2(x, y, z)$$

$$D^{q_3} z(t) = f_3(x, y, z)$$

Avec  $0 < q_i \leq 1$  ( $i = 1, 2, 3$ ), et la condition initial  $(x_0, y_0, z_0)$ .

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_0 + \frac{h^{q_1}}{\Gamma(q_1 + 2)} f_1(x_{n+1}^P, y_{n+1}^P, z_{n+1}^P) + \sum_{j=0}^n \frac{h^{q_1} \alpha_{1,j,n+1}}{\Gamma(q_1 + 2)} f_1(x_j, y_j, z_j), \\ y_{n+1} &= y_0 + \frac{h^{q_2}}{\Gamma(q_2 + 2)} f_2(x_{n+1}^P, y_{n+1}^P, z_{n+1}^P) + \sum_{j=0}^n \frac{h^{q_2} \alpha_{2,j,n+1}}{\Gamma(q_2 + 2)} f_2(x_j, y_j, z_j), \\ z_{n+1} &= z_0 + \frac{h^{q_3}}{\Gamma(q_3 + 2)} f_3(x_{n+1}^P, y_{n+1}^P, z_{n+1}^P) + \sum_{j=0}^n \frac{h^{q_3} \alpha_{3,j,n+1}}{\Gamma(q_3 + 2)} f_3(x_j, y_j, z_j) \end{aligned} \quad (1.25)$$

Où

$$\begin{aligned} x_{n+1}^P &= x_0 + \sum_{j=0}^n \frac{\beta_{1,j,n+1}}{\Gamma(q_1)} f_1(x_j, y_j, z_j), \\ y_{n+1}^P &= y_0 + \sum_{j=0}^n \frac{\beta_{2,j,n+1}}{\Gamma(q_2)} f_2(x_j, y_j, z_j), \\ z_{n+1}^P &= z_0 + \sum_{j=0}^n \frac{\beta_{3,j,n+1}}{\Gamma(q_3)} f_3(x_j, y_j, z_j), \\ \alpha_{i,j,n+1} &= \begin{cases} n^{q_i+1} - (n - q_i)(n + 1)^{q_i}, & j = 0 \\ (n - j + 2)^{q_i+1} + (n - j)^{q_i+1} - 2(n - j + 1)^{q_i+1}, & 1 \leq j \leq n \\ 1, & j = n + 1 \end{cases} \\ \beta_{i,j,n+1} &= \frac{h^{q_i}}{q_i} ((n - j + 1)^{q_i} - (n - j)^{q_i}) \end{aligned}$$

**Exemple d'application (système de Chen)**

Nous allons démontrer la solution numérique étudiée sur l'ensemble de trois équations différentielles non linéaires fractionnaires, qui sont utilisées pour décrire le système de *Chen*.

Le système de Chen d'ordre fractionnaire est décrit comme [Petras,09]:

$${}_0D_t^{q_1} x(t) = a(y(t) - x(t))$$

$${}_0D_t^{q_2} y(t) = (c - a)x(t) - x(t)z(t) + cy(t)$$

$${}_0D_t^{q_3} z(t) = x(t)y(t) - bz(t)$$

Solution numérique de ce système de Chen donnée par la forme suivante :

$$x_{n+1} = x_0 + \frac{h^{q_1}}{\Gamma(q_1 + 1)} \left\{ (a(y_{n+1}^p - x_{n+1}^p)) + \sum_{j=0}^n \alpha_{1,j,n+1} (a(y_j - x_j)) \right\}$$

$$y_{n+1} = y_0 + \frac{h^{q_2}}{\Gamma(q_2 + 1)} \left\{ ((c - a)x_{n+1}^p - x_{n+1}^p z_{n+1}^p + cy_{n+1}^p) + \sum_{j=0}^n \alpha_{2,j,n+1} ((c - a)x_j - x_j z_j + cy_j) \right\}$$

$$z_{n+1} = z_0 + \frac{h^{q_3}}{\Gamma(q_3 + 1)} \left\{ (x_{n+1}^p y_{n+1}^p - bz_{n+1}^p) + \sum_{j=0}^n \alpha_{3,j,n+1} (x_j y_j - bz_j) \right\}$$

$$x_{n+1}^p = x_0 + \frac{1}{\Gamma(q_1)} \sum_{j=0}^n \beta_{1,j,n+1} (a(y_j - x_j))$$

$$y_{n+1}^p = y_0 + \frac{1}{\Gamma(q_2)} \sum_{j=0}^n \beta_{2,j,n+1} ((c - a)x_j - x_j z_j + cy_j)$$

$$z_{n+1}^p = z_0 + \frac{1}{\Gamma(q_3)} \sum_{j=0}^n \beta_{3,j,n+1} (x_j y_j - bz_j)$$

$$\beta_{i,j,n+1} = \frac{h^{q_i}}{q_i} ((n - j + 1)^{q_i} - (n - j)^{q_i}), \quad 0 \leq j \leq n$$

$$\alpha_{3,j,n+1} = \begin{cases} n^{q_i} - (n - q_i)(n + 1)^{q_i} & j = 0 \\ ((n - j + 2)^{q_i+1} + (n - j)^{q_i+1} - 2(n - j + 1)^{q_i+1}) & 0 \leq j \leq n \end{cases}$$

Le résultat de simulation de la réponse du système de Chen dans l'espace d'état pour les paramètres  $a = 35, b = 3, c = 28$ , l'ordre  $q_1 = 0.9, q_2 = 0.9, q_3 = 0.9$ , et les conditions

initiales  $(x(0), y(0), z(0)) = (-9, -5, 14)$ . le temps de calcul de 30s , et le pas  $h = 0,005$ .

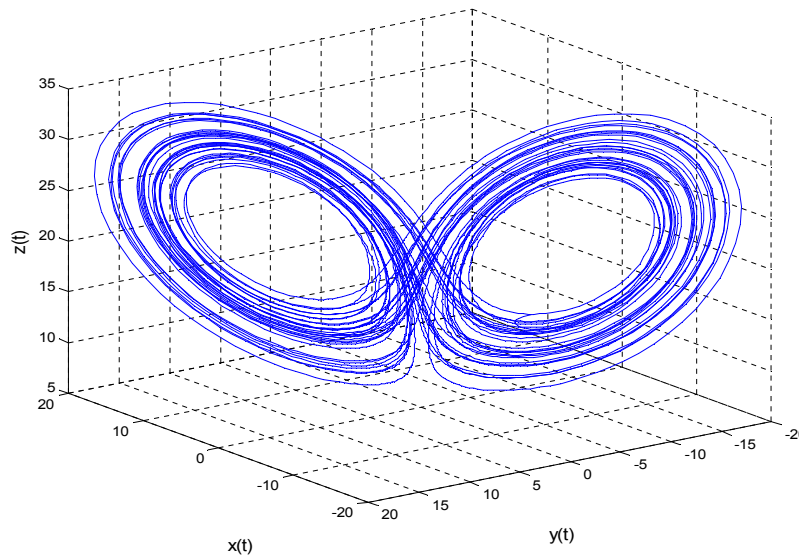


Fig. I.1. Résultat de la simulation du système Chen.

### 1.5.2 Méthode de Grünwald-Letnikov : Evaluation numérique de la dérivée fractionnaire de quelques fonctions usuelles

Nous décrivons dans cette partie une méthode simple et efficace pour l'évaluation des dérivées fractionnaires. Pour le calcul numérique des dérivées d'ordre fractionnaire nous pouvons utiliser la relation (1.26) découle de la définition *Grünwald-Letnikov*. Cette approche est basée sur une approximation de la dérivée fractionnaire au sens de *Grünwald-Letnikov*. Nous pouvons ainsi utiliser cette approximation pour l'évaluation numérique des fonctions usuelles et des équations différentielles fractionnaires. La relation à l'approximation numérique explicite de  $q^{\text{ème}}$  dérivée au point  $kh, (k = 1, 2, \dots)$  a la forme suivante [Petras, 11b], [Ibrahima, 11]

$$\left(k - \frac{L_m}{h}\right) D_{t_k}^q f(t) \approx h^{-q} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{q}{j} f(t_{k-j}) \quad (1.26)$$

Où  $L_m$  est la "longueur de la mémoire",  $t_k = kh$ ,  $h$  le pas de temps de calcul et  $(-1)^j \binom{q}{j}$  sont les coefficients binomiaux  $c_j^{(q)} (j = 0, 1, \dots)$ . Le calcul des coefficients se fait par formule de récurrence suivante :

$$c_0^{(q)} = 1, \quad c_j^q = \left(1 - \frac{1+q}{j}\right) c_{j-1}^q \quad (1.27)$$

La solution numérique générale de l'équation différentielle fractionnaire

$${}^G L D_t^q y(t) = f(y(t), t),$$

Peut être exprimé comme

$$y(t_k) = f(y(t_k), t_k) h^q - \sum_{j=v}^k c_j^{(q)} y(t_{k-j}) \quad (1.28)$$

Pour le terme de mémoire exprimée par la somme, un principe de "mémoire courte" peut être utilisé. Ensuite, l'index inférieur des sommes dans les relations (1.28) sera  $v = 1$  pour  $k < (L_m/h)$  et  $v = k - (L_m/h)$  pour  $k > (L_m/h)$ , ou sans utiliser le principe de la "mémoire courte", nous mettons  $v = 1$  pour tous  $k$  [Petras,11b].

Cette méthode numérique est appelée développement en série entière d'une fonction génératrice. Cette approximation de la dérivée fractionnaire au sens de *Grünwald-Letnikov* est d'une part équivalente à la définition de *Riemman-Liouville* pour une large classe de fonctions [Ibrahima,11], d'autre part, elle est bien adaptée à la définition de Caputo car elle ne nécessite que les conditions initiales et a clairement un sens physique.

**Remarque :** Comme il est indiqué dans [petras,11a], tous les deux méthodes numériques dans le domaine temporel mentionné (*Grünwald-Letnikov* et *Adams-Bashforth-Moulton*) ont approximativement le même ordre de précision et bonnes solutions numériques.

## Exemples d'application

### Système économique

Dans cette section, nous allons démontrer la solution numérique étudiée sur l'ensemble de trois équations différentielles non linéaires fractionnaires, qui sont utilisées pour décrire un système économique. Le système financier de l'ordre fractionnaire est décrit comme suit [Petras,11b]

$$\begin{aligned} {}_0 D_t^{q_1} x(t) &= z(t) + (y(t) - a)x(t) \\ {}_0 D_t^{q_2} y(t) &= 1 - by(t) - x^2(t) \\ {}_0 D_t^{q_3} z(t) &= -x(t) - cz(t) \end{aligned} \quad (1.29)$$

Où l'ordre total du système est représenté par  $q = (q_1, q_2, q_3)$ ,  $a$  représente le montant d'économie,  $b$  est le coût par investissement, et  $c$  est l'élasticité de la demande du marché commercial. Les variables d'état sont les suivantes  $x(t)$  est le taux d'intérêt,  $y(t)$  est la demande d'investissement, et  $z(t)$  est l'indice des prix.

La solution numérique du système financier de l'ordre fractionnaire (1.29) a la forme suivante

$$x(t_k) = (z(t_{k-1}) - (y(t_{k-1}) - a)x(t_{k-1}))h^{q_1} - \sum_{j=v}^k c_j^{(q_1)} x(t_{k-j}),$$

$$y(t_k) = (1 - by(t_k) - x^2(t_k))h^{q_2} - \sum_{j=v}^k c_j^{(q_2)} y(t_{k-j}),$$

$$z(t_k) = (-x(t_k) - cz(t_{k-1}))h^{q_3} - \sum_{j=v}^k c_j^{(q_3)} z(t_{k-j}),$$

La figure (I.2). sont représentée les résultats de simulation du système financier (1.29) pour les paramètres suivants  $a = 1$ ,  $b = 0,1$  et  $c = 1$ , les ordres  $q_1 = 1.1$ ,  $q_2 = 0,9$  et  $q_3 = 0,8$ , le temps de calcul de 200 jours, et pour pas de temps  $h = 0,04166$  et les conditions initiales  $(x(0), y(0), z(0)) = (1, -1, 1)$ .

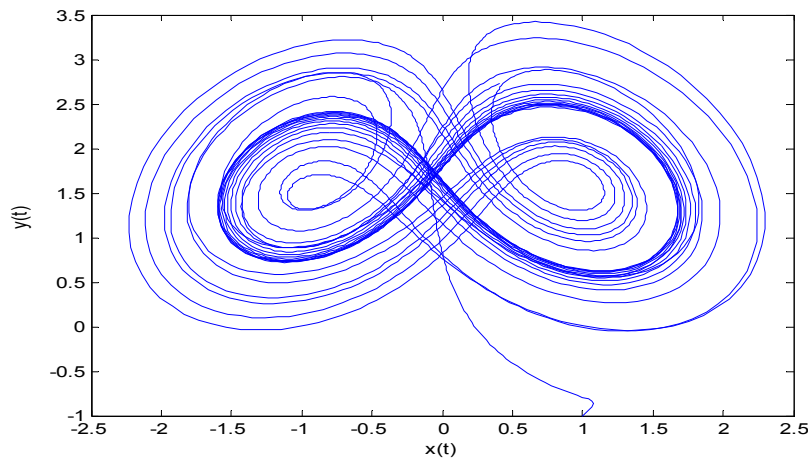


Fig. I.2. Résolution numérique (trajectoire de phase) du système financier d'ordre fractionnaire pour les conditions initiales  $(x(0), y(0), z(0)) = (1, -1, 1)$ .

## I.6 Etude d'un exemple de système chaotique fractionnaire

L'une des applications importantes du calcul fractionnaire est la théorie du chaos. Cette partie est ainsi dédiée à l'étude des systèmes chaotiques fractionnaires

### I.6.1 Caractérisation du chaos

Il est très délicat de définir ce qu'est un système chaotique, étant donné qu'il n'existe pas une définition précise. En pratique, on peut dire qu'un système chaotique a un comportement borné en régime permanent qui ne correspond pas à un point d'équilibre, qu'il n'est ni périodique, ni quasi-périodique. Parmi les caractéristiques principales permettant d'évoquer un comportement chaotique, on peut retenir les trois suivantes [Ibrahima,11] :

1. un système chaotique est un système déterministe.
2. il exhibe une extrême sensibilité aux conditions initiales.
3. il présente un comportement asymptotique apériodique.

En général, les trajectoires d'un système dynamique chaotique sont attirées vers un attracteur étrange. Ce dernier est caractérisé par

- i. un volume nul.
- ii. une séparation exponentiellement rapide de trajectoires initialement proches.
- iii. une dimension souvent fractale (non entière) caractérisant le concept de système chaotique fractionnaire.

La naissance d'un attracteur étrange est liée à l'existence de deux processus, à savoir l'étirement, responsable de l'instabilité et de la sensibilité aux conditions initiales, et le repliement, responsable du côté étrange, fractal de l'attracteur.

En pratique, la vérification de quelques propriétés d'un système dynamique suffit pour pouvoir le considérer comme chaotique :

- vérifier la sensibilité aux conditions initiales.
- tracer les trajectoires des états et leur spectre de puissance.
- tracer différents attracteurs.
- tracer un diagramme de bifurcations.

### I.6.2 Système chaotique d'ordre fractionnaire de *Duffing-Holmes*

L'oscillateur de *Duffing*, introduit en 1918 par *G. Duffing*, avec une rigidité linéaire négative, d'amortissement et d'excitation périodique est souvent écrit sous la forme [Petras,11a]

$$x''(t) - x(t) + \alpha x'(t) + x^3(t) = \delta \cos(\omega t) \quad (1.30)$$

Pour obtenir le système de Duffing d'ordre fractionnaire, l'équation (1.30) peut être réécrite sous la forme d'un système de premier ordre des équations différentielles autonomes sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{x(t)}{dt} &= y(t) \\ \frac{y(t)}{dt} &= x(t) - x^3(t) - \alpha y(t) + \delta \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (1.31)$$

Ici, les dérivées conventionnelles dans les équations (1.31) sont remplacés par des dérivées fractionnaires des dérivées de la manière suivante

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1}x(t) &= y(t) \\ {}_0D_t^{q_1}y(t) &= x(t) - x^3(t) - \alpha y(t) + \delta \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (1.32)$$

Où  $q_1, q_2$  sont de deux ordres fractionnaires et  $\alpha, \delta, \omega$  sont des paramètres du système.

Une solution numérique du système de *Duffing* d'ordre fractionnaire (1.32), obtenu par à l'aide des relations (1.26) et (1.27), a la forme suivante

$$\begin{aligned} x(t_k) &= y(t_{k-1})h^{q_1} - \sum_{j=v}^k c_j^{(q_1)} x(t_{k-j}) \\ y(t_k) &= (x(t_k) - x^3(t_k) - \alpha y(t_{k-1}) + \delta \cos(\omega t_k))h^{q_2} - \sum_{j=v}^k c_j^{(q_2)} y(t_{k-j}) \end{aligned} \quad (1.33)$$

Où  $T_{sim}$  est le temps de simulation,  $k = 1, 2, 3, \dots, N$ , pour  $N = [T_{sim}/h]$ , et  $(x(0), y(0))$  est le point de départ (conditions initiales). [Petras, 11a]

Dans la figure (I.3) est représenté attracteur chaotique du système Duffing d'ordre entier (1.31) pour les paramètres suivants  $\alpha = 0,15$ ,  $\delta = 0,3$ ,  $\omega = 1$  avec les conditions initiales  $(x(0), y(0)) = (0,21, 0,13)$  pour la simulation temps  $T_{sim} = 200s$  et pas de temps  $h = 0,005$ .

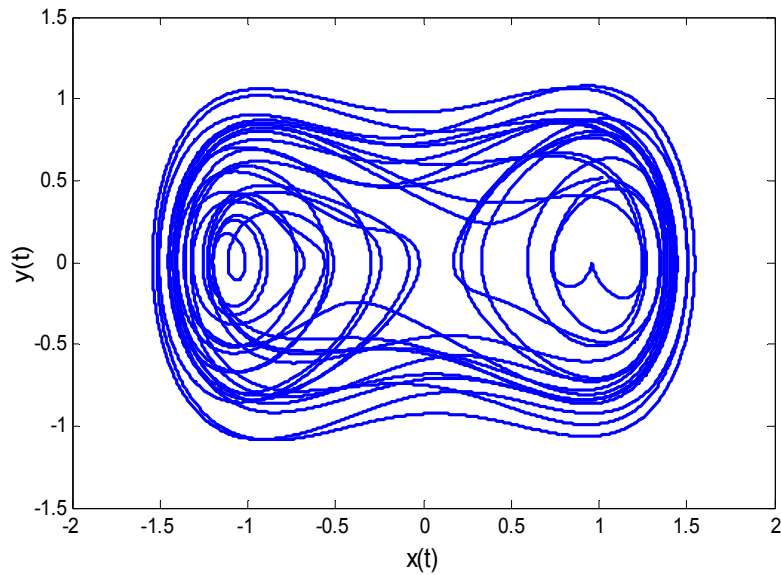


Fig. I.3. Résolution numérique (trajectoire de phase) du système Duffing d'ordre entier.

Dans la figure (I.4) est représenté à double attracteur défilement du système *Duffing* d'ordre fractionnaire (1.32) pour les paramètres suivants  $\alpha = 0,15$ ,  $\delta = 0,3$ ,  $\omega = 1$ , ordres dérivés  $q_1 = 0,9$ ,  $q_2 = 1,0$ , avec les conditions initiales  $(x(0), y(0)) = (0,21, 0,13)$ , pour le temps de simulation  $T_{sim} = 200s$  et pas de temps  $h = 0,005$ .

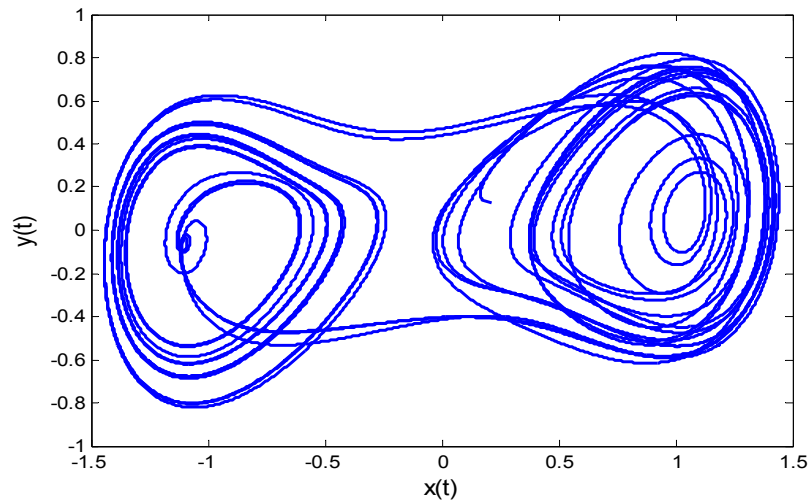


Fig. I.4. Résolution numérique (trajectoire de phase) du système de Duffing ordre fractionnaire.

### Discussion

On remarque à partir des résultats de simulation que le chaos est assez réduit dans le cas fractionnaire (fig. I.4) par rapport au cas entier (fig. I.3).

Aussi, on constate concernant la stabilité, que le système d'ordre entier est instable, par contre le système d'ordre non entier ou fractionnaire est stable. Ceci montre en général que les systèmes fractionnaires possèdent des caractéristiques différentes de celles des systèmes d'ordre entier.

### I.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'état de l'art sur les systèmes à dérivée d'ordre fractionnaire, cette théorie de la dérivation non entière a été introduite à partir de quelques rappels sur les fonctions de Gamma Euler et *Mittag-Leffler* et sur les différentes définitions et propriétés de la dérivée fractionnaire. Nous avons présenté une méthode numérique s'appuyant sur l'approximation de la définition de *Grünwald-Letnikov* afin d'évaluer numériquement la dérivée fractionnaire des fonctions et de résoudre les équations à dérivée fractionnaire (telles que les équations d'oscillation de *Duffing-Holmes* et un système d'équation économique). Nous avons aussi décrit, les systèmes chaotiques fractionnaires de *Duffing* comme un exemple d'application.

---

## *Chapitre II*

# *Commande Adaptative Floue $H^\infty$ des Systèmes Chaotiques d'ordre Fractionnaire*

---

## Chapitre II

# Commande Adaptative Floue $H^\infty$ des Systèmes Chaotiques d'Ordre Fractionnaire

## II.1 Introduction

Dans ce chapitre, en incorporant le critère de la technique de  $H^\infty$  et la théorie de Lyapunov [Chen,96], on étudie un nouvel algorithme de commande adaptative floue de telle sorte que non seulement la stabilité du système est garantie, mais également l'influence de la perturbation et l'erreur d'approximation sur l'erreur de poursuite peut être atténuée à un niveau prescrit par l'intermédiaire de la technique étudiée de  $H^\infty$ .

La méthode de conception étudiée essaye de combiner la technique d'atténuation, la méthode d'approximation floue, et l'algorithme de la commande adaptative pour la conception d'une commande de poursuite robuste des systèmes non linéaires d'ordre fractionnaire avec une incertitude ou une variation inconnue des paramètres et des structures du système.

## II.2 Définitions

### II.2.1 Contrôleurs flous

Les grandeurs de sortie d'un processus à commander et éventuellement d'autres mesures déterminantes pour saisir l'évolution dynamique du processus ainsi que les consignes définissent les variables d'entrée du contrôleur flou. Les variables de sortie de ce contrôleur sont les commandes à appliquer au processus. [Ougli,09]

Le contrôleur flou est constitué de quatre blocs principaux : la base de connaissance, le système d'inférence, l'interface de fuzzification et l'interface de défuzzification.

La base de connaissance est composée d'une base des données et d'une base de règles. La base des données contient des faits de la forme :  $x$  est  $A$  pour les variables linguistiques d'entrée et de sortie du contrôleur flou. La base des règles contient des propositions de la forme *si  $x_1$  est  $A_1$  et  $x_2$  est  $A_2$  alors  $y$  est  $B$* . Elle caractérise la stratégie de commande émise par l'expert sous forme de règles linguistiques. Le système d'inférence est capable de raisonner à partir des informations contenues dans la base de connaissance et de faire des déductions. Si  $B$  (*la conclusion*) est une valeur linguistique, le contrôleur est dit de type

*Mamdani*. Si *Best* une valeur numérique ou une équation mathématique, alors le contrôleur est dit de type *Takagi-Sugeno*.

Un contrôleur flou passe généralement par les étapes suivantes :

- Choix de la stratégie de fuzzification.
- Etablissement de la base de règles.
- Choix de la méthode d'inférence.
- Choix de la stratégie de défuzzification.

### II.2.2 Systèmes flous de type *Takagi -Sugeno (T-S)*

Les systèmes de logique floue adressent l'imprécision des variables d'entrée et de sortie directement en les définissant avec des nombres flous (et des ensembles flous) qui peuvent être exprimés en termes linguistiques (par exemple, petit, moyen et grand). [C.Wang,02a]

La configuration de base du système de Takagi-Sugeno (T-S) contient une base de règles floues, qui se compose d'une collection de règles floues IF-THEN sous la forme suivante :

$$R^{(l)}: IF x_1 \text{ is } F_1^l, \text{ and } \dots, \text{ and } x_n \text{ is } F_n^l \text{ THEN } y_l = f_l(x)$$

$$y_l = q_0^l + q_1^l x_1 + \dots + q_n^l x_n = \underline{\theta}_l^T [1 \ x^T]^T$$

Où  $(F_1^l, \dots, F_i^l, \dots, F_n^l)$  sont les entrées des ensembles flous et  $\underline{\theta}_l^T = [q_0^l, q_1^l, \dots, q_n^l]$  est un vecteur des paramètres d'ajustement. Ainsi  $y$  est une variable linguistique, et un moteur d'inférence flou pour combiner les règles *IF-THEN* dans la base de règles floues dans une cartographie d'un vecteur linguistique  $\underline{x}^T = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathfrak{R}^n$  à une variable de sortie  $y \in R$ . [C.Wang,02b]

En général,  $f_l(x)$  est une fonction polynomiale en fonction des variables d'entrées, mais peut être aussi une fonction arbitraire tantqu'elle puisse décrire convenablement le comportement du système étudié.

Si  $f_l(x)$  est une fonction linéaire :  $f_l(x) = q_0^l + q_1^l x_1 + \dots + q_n^l x_n$ , alors on a un système flou de *Takagi-Sugeno* d'ordre un, par contre, si la fonction  $f_l(x)$  est un polynôme d'ordre zéro:  $f_l(x) = q_0^l$ , on a donc un système flou de *Takagi-Sugeno* d'ordre zéro.

Soit  $M$  le nombre de règles floues IF-THEN. La sortie des systèmes flous avec le défuzzifier de centre moyenne, l'inférence de produit et le fuzzifier singleton peut être exprimée comme :

$$y(\underline{x}) = \frac{\sum_{l=1}^M v^l \cdot y_l}{\sum_{l=1}^M v^l} = \frac{\sum_{l=1}^M v^l \cdot \underline{\theta}_l^T [1 \ x^T]^T}{\sum_{l=1}^M v^l} \quad (2.1)$$

Où  $v^l = \prod_{i=1}^n \mu_{F_i^l}(x_i)$  est la valeur réelle de  $l$ ème implication et  $\mu_{F_i^l}(x_i)$  est la fonction d'appartenance de la variable floue  $x_i$ . [Tsung,04]

Alors, l'équation (14) peut être réécrite comme :

$$y(\underline{x}) = \underline{\theta}_j^T \xi(\underline{x}) \quad (2.2)$$

Où  $\underline{\theta}_j^T = [\theta_{j1}^T \theta_{j2}^T \dots \theta_{jM}^T]$  le vecteur de paramètres ajustables et  $\xi^T(\underline{x}) = [\xi^1(\underline{x}), \xi^2(\underline{x}), \dots, \xi^M(\underline{x})]$  est la fonction de base floue donnée comme :

$$\xi^l(\underline{x}) = \frac{v^l [1 \ \underline{x}^T]}{\sum_{l=1}^M v^l}$$

Quand les entrées sont introduites dans le T-S, la valeur réelle  $v^l$  de lème implication est calculée. Appliquant la stratégie commune de défuzzification, la sortie exprimée comme dans l'équation (2.1).

En se basant sur le théorème d'approximation universel [Wang,92], le système flou ci-dessus est capable de rapprocher uniformément n'importe quelle fonction non linéaire bien définie au-dessus d'un ensemble compact  $Uc$  à n'importe quel degré de précision.

En outre, il est clair de prouver qu'un système à multi-sorties peut toujours être approximé par un groupe de systèmes d'approximation à une sortie unique.

### II.3 Problématique et conception de la commande adaptative floue $H^\infty$

Considérons le système SISO non linéaires d'ordre fractionnaire comme suit

$$\begin{cases} x_1^{(q_1)} = x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1}^{(q_{n-1})} = x_n \\ x_n^{(q_n)} = f(\underline{x}, t) + g(\underline{x}, t)u + d(t) \\ y = x_1 \end{cases}$$

Si  $q_1 = q_2 = \dots = q_n = q$ , le système ci-dessus est appelé un système d'ordre *proportionnelle*. La forme équivalente du système ci-dessus est décrite comme

$$\begin{cases} x^{(nq)} = f(\underline{x}, t) + g(\underline{x}, t)u + d(t) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2.3)$$

Où  $\underline{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T = [x, x^{(q)}, x^{(2q)}, \dots, x^{((n-1)q)}]^T$  est le vecteur d'état de ce système,  $f(\underline{x}, t)$  et  $g(\underline{x}, t)$  sont non linéaires et inconnues,  $d(t)$  est la perturbation externe donnée bornée,  $u(t)$  est l'entrée de commande.

L'objectif de la commande est de forcer la sortie  $y$  à suivre un signal de référence borné  $y_d$ , sous la contrainte que tous les signaux impliqués doivent être bornés [Tsong,11].

Comme dans [Wang,96], [Redjem,12], les hypothèses suivantes sont considérées.

**Hypothèse II.1 :** Le gain de commande de  $g(\underline{x}, t)$  est différent de zéro pour tout  $x$  et de signe connu. Sans perte de généralité, il est supposé que  $g(\underline{x}, t) > 0$ .

**Hypothèse II.2 :** Le vecteur d'état  $\underline{x}$  est mesurable.

**Hypothèse II.3 :** La trajectoire désirée et ses dérivées jusqu'à l'ordre  $n$  sont connues, continues et bornées.

**Hypothèse II.4 :** la limite supérieure de la perturbation  $d(t)$  est  $D$ , c'est-à-dire  $|d(t)| \leq D$  avec  $D$  est une constante positive inconnue.

L'objectif consiste à déterminer une loi de commande assurant la bornitude de tous les signaux du système et la poursuite pour la sortie d'une trajectoire de référence en présence des perturbations externes.

Pour commencer, le signal de référence de vecteur  $\underline{y}_d$  et le vecteur d'erreur  $\underline{e}$  est définie comme

$$\underline{y}_d = [y_d, y_d^{(q)}, \dots, y_d^{((n-1)q)}]^T \in R^n,$$

$$\underline{e} = \underline{y}_d - \underline{y} = [e, e^{(q)}, \dots, e^{((n-1)q)}]^T \in R^n, \quad e^{(iq)} = y_d^{(iq)} - y^{(iq)}.$$

Soit  $\underline{k} = [k_1, k_2, \dots, k_n]^T \in R^n$  à être choisi de telle sorte que l'état stable  $|arg(eig(A))| > q\pi/2$  est remplie, où  $0 < q < 1$  et  $eig(A)$  représente les valeurs propres de la matrice  $A$  donnée par la suite en (2.9).

Si les fonctions  $f(\underline{x}, t)$  et  $g(\underline{x}, t)$  sont connues avec de perturbation externe  $d(t)$  nulle, alors la loi de commande a la forme suivante [Tsung,11], [C.Wang,02b]:

$$u_{eq} = \frac{1}{g(\underline{x}, t)} [-f(\underline{x}, t) + y_d^{(nq)} + \underline{k}^T \underline{e}] \quad (2.4)$$

En appliquant (2.4) à (2.3) on trouve [C.Wang,02a]:

$$e^{(nq)} + k_n e^{(n-1)q} + \dots + k_1 e = 0$$

qui implique que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$  qui est l'un des objectifs de la commande.

Cependant,  $f(\underline{x}, t)$  et  $g(\underline{x}, t)$  sont inconnues et la perturbation externe  $d(t) \neq 0$ , l'effort de commande idéal (2.4) ne peuvent pas être mis en œuvre (non réalisable). On remplace  $f(\underline{x}, t)$  et  $g(\underline{x}, t)$  par les systèmes flous  $f(\underline{x}|\underline{\theta}_f)$  et  $g(\underline{x}|\underline{\theta}_g)$  spécifiés comme :

$$f(\underline{x}|\underline{\theta}_f) = \xi^T(\underline{x})\underline{\theta}_f \quad \text{et} \quad g(\underline{x}|\underline{\theta}_g) = \xi^T(\underline{x})\underline{\theta}_g \quad (2.5)$$

Avec  $\xi(\underline{x})$  est un vecteur de fonctions floues de base supposé convenablement fixé en avance par l'utilisateur,  $\underline{\theta}_f$  et  $\underline{\theta}_g$  sont les vecteurs de paramètres ajustés par des lois d'adaptation sur la base d'un critère de stabilité de Lyapunov.

Par conséquent, l'effort de contrôle qui en résulte peut être obtenu comme [Tsung,12], [Tsung,11]

$$u = \frac{1}{g(\underline{x}|\underline{\theta}_g)} \left[ -f(\underline{x}|\underline{\theta}_f) + y_d^{(nq)} + \underline{k}^T \underline{e} - u_a \right] \quad (2.6)$$

Où le compensateur robuste (terme  $H^\infty$ )  $u_a$  est utilisé pour atténuer la perturbation externe et les erreurs d'approximation floue. En appliquant (2.6) à (2.3) on trouve :

$$\begin{aligned} x^{(nq)} &= f(\underline{x}, t) + g(\underline{x}, t)u + d(t) + g(\underline{x}|\underline{\theta}_g)u - g(\underline{x}|\underline{\theta}_g)u \\ &= [f(\underline{x}, t) - f(\underline{x}|\underline{\theta}_f)] + y_d^{(nq)} + \underline{k}^T \underline{e} - u_a \\ &\quad + [g(\underline{x}, t) - g(\underline{x}|\underline{\theta}_g)]u + d(t). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Alors

$$e^{(nq)} + [f(\underline{x}, t) - f(\underline{x}|\underline{\theta}_f)] + \underline{k}^T \underline{e} - u_a + d(t) + [g(\underline{x}, t) - g(\underline{x}|\underline{\theta}_g)]u = 0 \quad (2.8)$$

L'équation (2.8) peut être réécrite comme représentation d'état

$$\underline{e}^{(q)} = A\underline{e} + B \left[ f(\underline{x}|\underline{\theta}_f) - f(\underline{x}, t) + u_a + (g(\underline{x}|\underline{\theta}_g) - g(\underline{x}, t))u - d(t) \right] \quad (2.9)$$

Où

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & -k_4 & \dots & -k_{(n-1)} & -k_n \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tant que  $(|sI - A| = s^{(n)} + k_1 s^{(n-1)} + \dots + k_n$  est stable ( $A$  stable).

Le vecteur des paramètres optimaux  $\underline{\theta}_f^*$  et  $\underline{\theta}_g^*$  est défini par :

$$\underline{\theta}_f^* = \arg \min_{\underline{\theta}_f \in \Omega_f} [\sup_{x \in \Omega_x} |f(\underline{x}|\underline{\theta}_f) - f(\underline{x}, t)|] \quad (2.10)$$

$$\underline{\theta}_g^* = \arg \min_{\underline{\theta}_g \in \Omega_g} [\sup_{x \in \Omega_x} |g(\underline{x}|\underline{\theta}_g) - g(\underline{x}, t)|] \quad (2.11)$$

Où  $\Omega_f$ ,  $\Omega_g$  et  $\Omega_x$  sont des ensembles de contraintes pour  $\underline{\theta}_f$ ,  $\underline{\theta}_g$  et  $x$  respectivement et elles sont définies comme

$$\Omega_f = \{\underline{\theta}_f \mid \|\underline{\theta}_f\| \leq M_f\}, \Omega_g = \{\underline{\theta}_g \mid \|\underline{\theta}_g\| \leq M_g\} \text{ et } \Omega_x = \{x \mid |x| \leq M_x\}$$

Où  $M_f$ ,  $M_g$  et  $M_x$  sont des constantes positives.

En utilisant (2.10) - (2.11), l'équation de l'erreur dynamique (2.9) peut être exprimée comme

$$\underline{e}^{(q)} = A\underline{e} + B \left[ f(\underline{x}|\underline{\theta}_f) - f(\underline{x}|\underline{\theta}_f^*) + u_a + \left( g(\underline{x}|\underline{\theta}_g) - g(\underline{x}|\underline{\theta}_g^*) \right) u - d(t) + \omega_1 \right] \quad (2.12)$$

Où l'erreur d'approximation minimale est définie comme suit

$$\omega_1 = g(\underline{x}|\underline{\theta}_g^*) - g(\underline{x}, t) + f(\underline{x}|\underline{\theta}_f^*) - f(\underline{x}, t) - d(t). \quad (2.13)$$

Si  $\tilde{\theta}_f = \underline{\theta}_f - \underline{\theta}_f^*$  et  $\tilde{\theta}_g = \underline{\theta}_g - \underline{\theta}_g^*$ , (2.12) peut être réécrite comme

$$\underline{e}^{(q)} = A\underline{e} + B \left[ \xi(\underline{x})^T \tilde{\theta}_f + \xi(\underline{x})^T \tilde{\theta}_g u + u_a + w_1 \right] \quad (2.14)$$

Après la considération précédente, le théorème (2.1) peut être obtenu [Tsung,11][Chen,96].

## II.4 Analyse de la stabilité

**Théorème III.1 :** *Considérons le système SISO non linéaire d'ordre fractionnaire (2.3) et la loi de commande (2.6) si le compensateur robuste  $u_a$  et les basés flous sur les lois d'adaptation sont choisis comme suit :*

$$u_a = -\frac{1}{r} B^T P \underline{e} \quad (2.15)$$

$$\underline{\theta}_f^{(q)} = -r_1 \xi(\underline{x}) B^T P \underline{e} \quad (2.16)$$

$$\underline{\theta}_g^{(q)} = -r_2 \xi(\underline{x}) B^T P \underline{e} u \quad (2.17)$$

Où  $r > 0, r_i > 0, i = 1 \sim 2$ , et  $P = P^T > 0$  est la solution de l'équation de Riccati suivante :

$$PA + A^T P + Q - PB \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{\rho^2} \right) B^T P = 0 \quad (2.18)$$

Avec  $Q = Q^T > 0$  est une matrice symétrique arbitraire définie positive de dimensions  $(n \times n)$ ,  $\rho$  est le coefficient d'atténuation et  $r$  est un paramètre positif vérifiant  $2\rho^2 \geq r$  et toutes les variables du système en boucle fermée sont bornées [Tsung,12].

Afin d'analyser la stabilité en boucle fermée, la fonction de Lyapunov est choisie comme

$$V = \frac{1}{2} \underline{e}^T(t) P \underline{e}(t) + \frac{1}{2r_1} (\tilde{\theta}_f^T) (\tilde{\theta}_f) + \frac{1}{2r_2} (\tilde{\theta}_g^T) (\tilde{\theta}_g). \quad (2.19)$$

La dérivée de (2.19) par rapport au temps, nous obtenons [Tsung,11]

$$V^{(q)}(t) = \frac{1}{2} \left( \underline{e}^{(q)}(t) \right)^T P \underline{e}(t) + \frac{1}{2} \underline{e}^T(t) P \underline{e}^{(q)}(t) + \frac{1}{r_1} (\tilde{\theta}_f^T) (\tilde{\theta}_f^{(q)}) + \frac{1}{r_2} (\tilde{\theta}_g^T) (\tilde{\theta}_g^{(q)}) \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left\{ A\underline{e} + B \left[ \xi(\underline{x})^T \tilde{\theta}_f + \xi(\underline{x})^T \tilde{\theta}_g u + u_a + \omega_1 \right] \right\}^T P \underline{e} \\ &+ \frac{1}{2} \underline{e}^T(t) P \left\{ A\underline{e} + B \left[ \xi(\underline{x})^T \tilde{\theta}_f + \xi(\underline{x})^T \tilde{\theta}_g u + u_a + \omega_1 \right] \right\} \\ &+ \frac{1}{r_1} (\tilde{\theta}_f^T) (\tilde{\theta}_f^{(q)}) + \frac{1}{r_2} (\tilde{\theta}_g^T) (\tilde{\theta}_g^{(q)}) \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$= \frac{1}{2} \underline{e}^T (A^T P + PA) \underline{e} + \underline{e}^T P B u_a + \underline{e}^T P B \omega_1 + \left\{ \tilde{\theta}_f^T \left[ \xi(\underline{x}) B^T P \underline{e} + \frac{1}{r_1} (\tilde{\theta}_f^{(q)}) \right] \right\}$$

$$+ \left\{ \tilde{\theta}_g^T \left[ \xi(\underline{x}) B^T P \underline{e} u + \frac{1}{r_2} \left( \tilde{\theta}_g^{(q)} \right) \right] \right\} \quad (2.22)$$

Le terme de robustesse  $u_a$  et les lois d'adaptation (2.15)-(2.17),  $V^{(q)}(t)$  dans (2.22) peut être réécrite comme

$$\begin{aligned} V^{(q)}(t) &= -\frac{1}{2} \underline{e}^T Q \underline{e} - \frac{1}{2\rho^2} \underline{e}^T P B B^T \underline{e} + \underline{e}^T P B w_1 \\ &= -\frac{1}{2} \underline{e}^T Q \underline{e} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho} B^T P \underline{e} - \rho w_1 \right)^T \left( \frac{1}{\rho} B^T P \underline{e} - \rho w_1 \right) + \frac{1}{2} \rho^2 w_1^T w_1 \\ &\leq -\frac{1}{2} \underline{e}^T Q \underline{e} + \frac{1}{2} \rho^2 w_1^T w_1. \end{aligned}$$

L'intégration (2.23) à partir de  $t = 0$  à  $t = T$ ,

$$V(T) - V(0) \leq -\frac{1}{2} \int_0^T \left( \underline{e}^T Q \underline{e} dt + \frac{1}{2} \rho^2 w_1^T w_1 \right) dt \quad (2.23)$$

Puisque  $V(T) \geq 0$ , (2.23) peut être réécrite comme suit

$$\int_0^T \underline{e}^T Q \underline{e} dt \leq e^T(0) P e(0) + \theta^T(0) \theta(0) + \rho^2 \int_0^T w_1^T w_1 dt. \quad (2.24)$$

Donc, l'approche  $H^\infty$  peut être obtenue. Et la preuve est terminée.

## II.5 Algorithmes de la technique étudiée

### Etape 1

définir les  $m_i$  ensembles flous  $F_i^l$  dont les fonctions d'appartenances sont  $\mu_{F_i^l}(x_i)$ , où  $i=1,2,\dots,n$ .

Spécifiquement les règles floues de base de  $f(\underline{x}|\underline{\theta}_f)$  et  $g(\underline{x}|\underline{\theta}_g)$  sont constituées de règles de la forme :

$$R_f^{(l)}: \text{IF } x_1 \text{ is } F_1^l, \text{ and } \dots, \text{ and } x_n \text{ is } F_n^l \text{ THEN } f(\underline{x}|\underline{\theta}_f) \text{ is } G^l$$

$$R_g^{(l)}: \text{IF } x_1 \text{ is } F_1^l, \text{ and } \dots, \text{ and } x_n \text{ is } F_n^l \text{ THEN } g(\underline{x}|\underline{\theta}_g) \text{ is } H^l$$

$l = 1, 2, \dots, m_i$ ,  $G^l$  et  $H^l$  sont des ensembles flous dans  $R^l$  [Wang, 96].

Construction des fonctions floues de base comme dans (2.3).

### Etape 2

Spécifier une matrice  $Q$  symétrique définie positive.

Résoudre l'équation de Lyapunov, pour obtenir la matrice symétrique  $p > 0$ .

### Etape 3

Spécifier les  $K_i$ , telles que les racines de  $s^{(n)} + k_1 s^{(n-1)} + \dots + k_n = 0$  soient dans le demi-plan gauche.

**Etape 4**

Résoudre l'équation de *Riccati* comme suit [Chen,96] :

$$PA + A^T P + Q - PB \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{\rho^2} \right) B^T P = 0.$$

**Etape 5**

Enfin obtenir la loi commande globale (2.6) comme :

$$u = \frac{1}{\xi^T(\underline{x})\underline{\theta}_g} \left[ -\xi^T(\underline{x})\underline{\theta}_f + y_d^{(nq)} + \underline{k}^T \underline{e} - u_a \right]$$

$$\text{avec : } u_a = -\frac{1}{r} B^T P \underline{e}, \quad \underline{\theta}_f^{(q)} = -r_1 \xi(\underline{x}) B^T P \underline{e}, \quad \underline{\theta}_g^{(q)} = -r_2 \xi(\underline{x}) B^T P \underline{e}$$

**II.6 Exemple de simulation**

Dans cette partie, on applique la stratégie de commande adaptative floue  $H^\infty$  pour la synchronisation des deux différents systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire de *Duffing*.

On considère deux systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire de *Duffing* comme suit, Le premier est un système de référence

$$D^q y_1 = y_2$$

$$D^q y_2 = y_1 - 0.25y_2 - y_1^3 + 0.3 \cos(t)$$

Le second est le système réponse (de commande)

$$D^q x_1 = x_2$$

$$D^q x_2 = x_1 - 0.3x_2 - x_1^3 + 0.35 \cos(t) + u(t) + d(t)$$

Où la perturbation externe donnée comme  $d(t) = 0.1 \sin(t)$ .

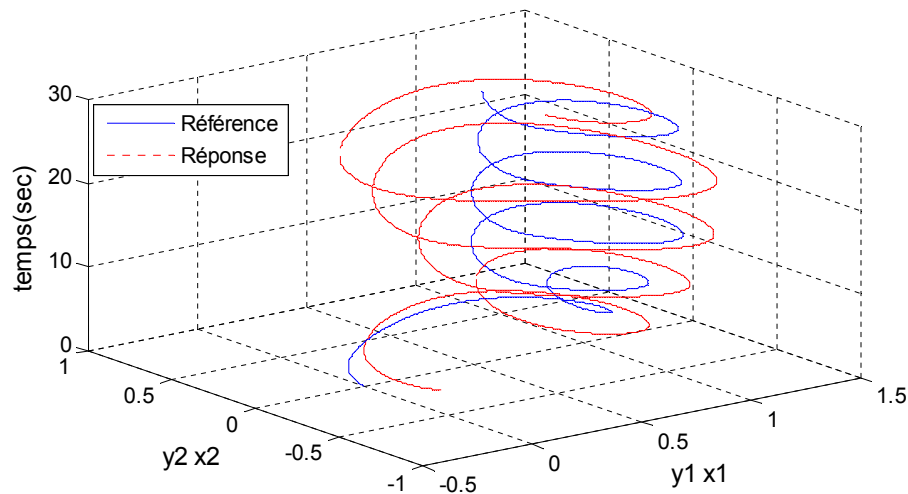
L'objectif principal est de commander notre système de réponse pour suivre le système de référence. Avec les fonctions  $f(\underline{x}, t)$  et  $g(\underline{x}, t)$  sont totalement inconnues.

Les conditions initiales sont choisies comme suit  $\underline{y}(0) = [0, 0]^T$  et  $\underline{x}(0) = [0.2, -0.2]^T$  respectivement. On considère dans ce cas deux valeurs différentes de  $q = 0.95$  et  $q = 0.98$  pour tester la robustesse.

Pour les autres constantes de conception sont fixées comme suit  $k_1 = k_2 = 1$ ,  $r_1 = 100$ ,  $r_2 = 40$ ,  $r = 0.005$ ,  $\rho = 0.05$ , le pas  $h = 0.001$ .

Les figures (II.1 et II.3) illustrent respectivement les résultats de simulation sans la commande étudiée.

1. Pour  $q = 0.95$  nous avons les résultats suivants :



FigII.1. Plan de phase des systèmes sans commande.

Chacune des fonctions  $f(\underline{x}, t)$  et  $g(\underline{x}, t)$  est représentée par un système flou, et chaque système flou a comme entrée  $x_1$  et  $x_2$ . le système flou est utilisé avec les entrées  $x_1$  et  $x_2$  car la forme de la fonction est inconnue. Pour chaque variable d'entrée, on définit sept fonctions d'appartenance de type gaussienne comme suit :

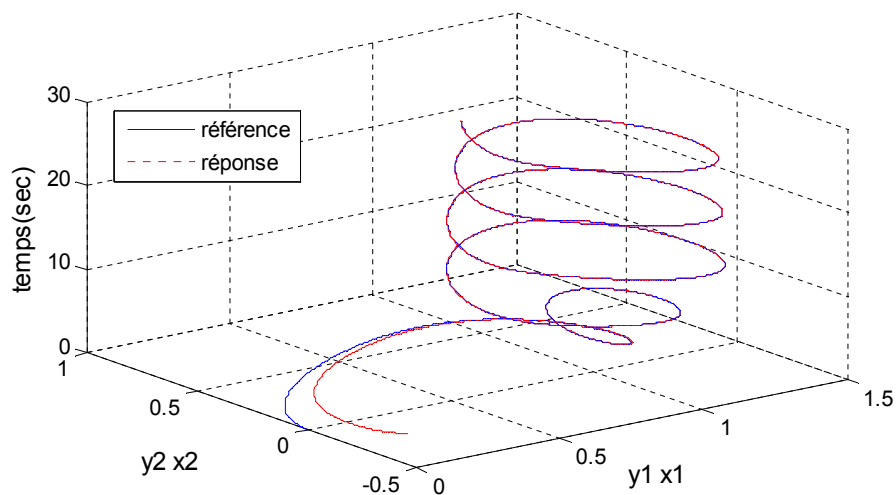
$$\mu_{F_i^l}(x_i) = \exp \left[ -0.5 \left( \frac{x_i - \bar{x}}{0.8} \right)^2 \right], \quad i = 1, 2 \text{ et } l = 1, \dots, 7 \text{ avec } \bar{x} \text{ choisi dans l'intervalle } [-1, 2].$$

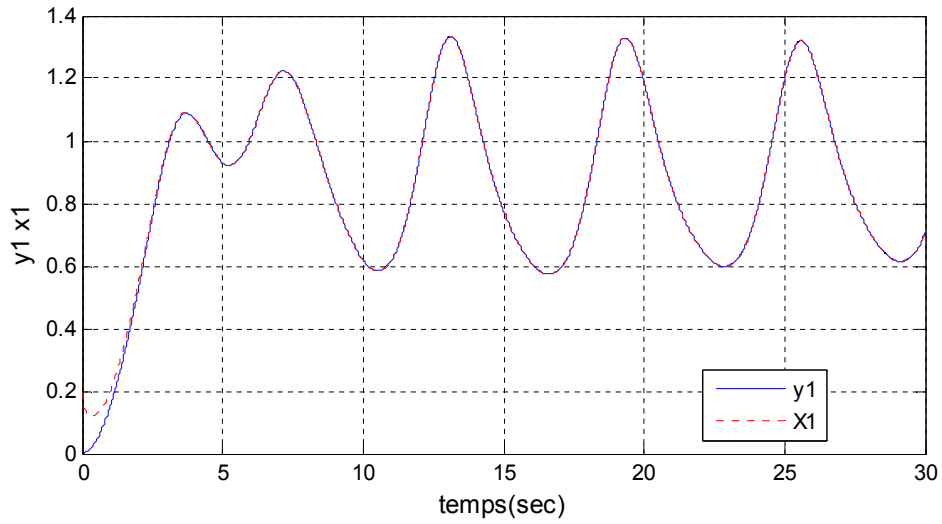
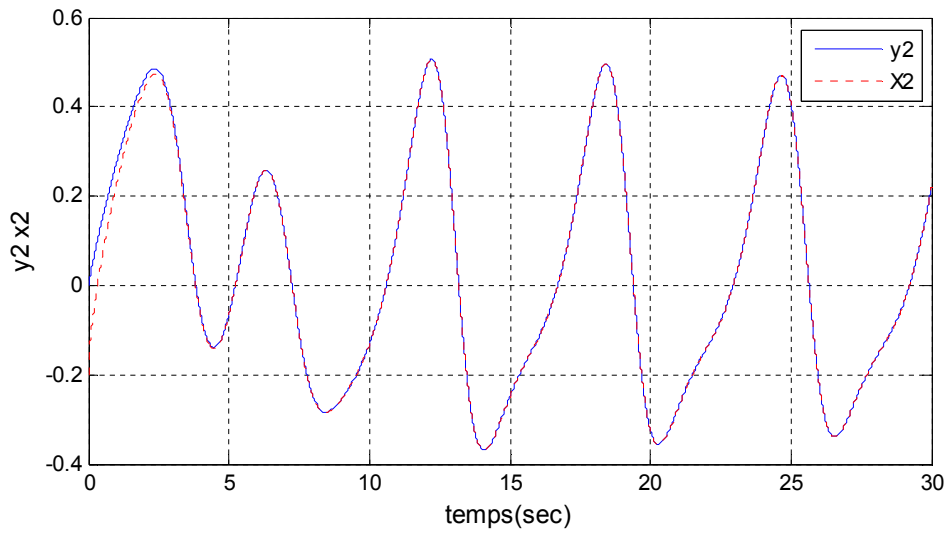
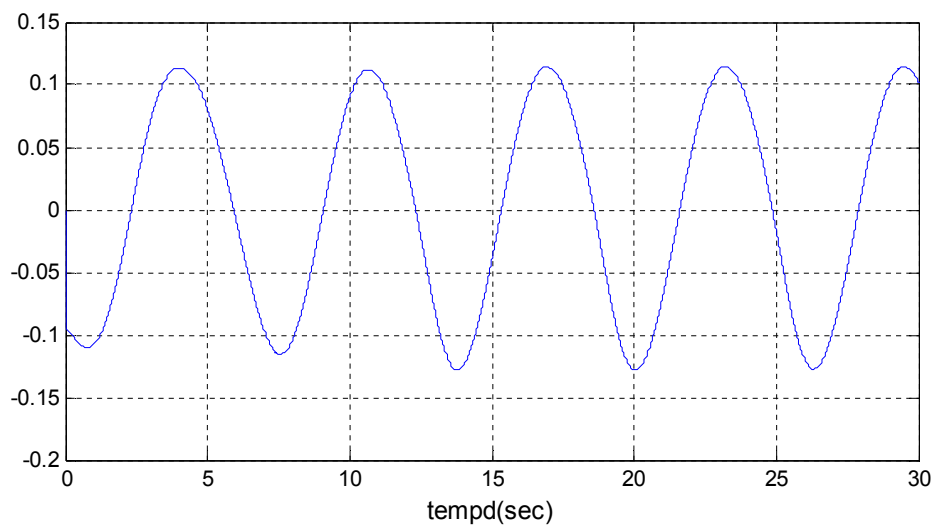
On applique la loi de commande globale (2.6) comme suit

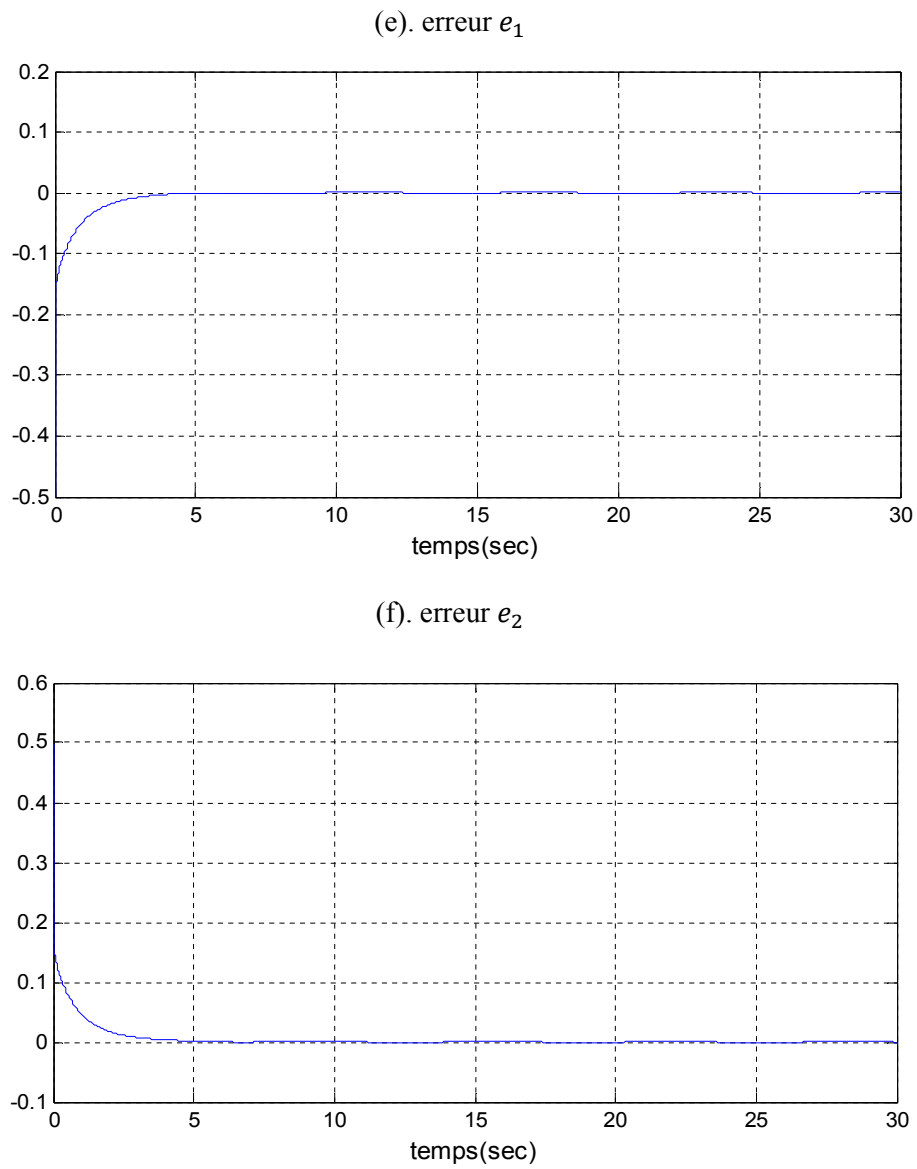
$$u = \frac{1}{\xi^T(\underline{x})\underline{\theta}_g} \left[ -\xi^T(\underline{x})\underline{\theta}_f + y_d^{(nq)} + \underline{k}^T \underline{e} - u_a \right]$$

Les figures (II.2 et II.4) illustrent respectivement les résultats de simulation avec la commande étudiée.

(a). Performance de synchronisation du signal de référence et de réponse.

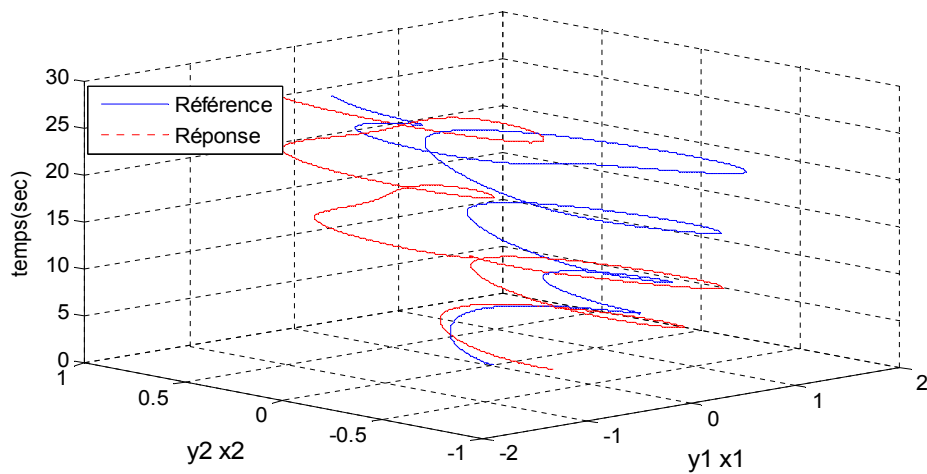


(b). Trajectoires des états  $x_1$  et  $y_1$ (c). Trajectoires des états  $x_2$  et  $y_2$ (d). Signal de commande  $u$ 



FigII.2. Résultats de simulation avec commande pour  $q=0.95$ .

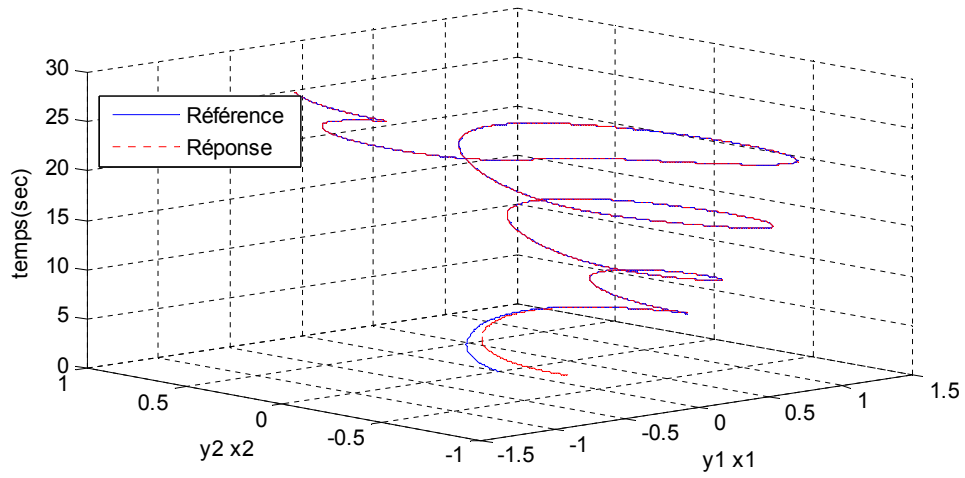
2. Pour  $q = 0.98$  nous avons les résultats suivants :



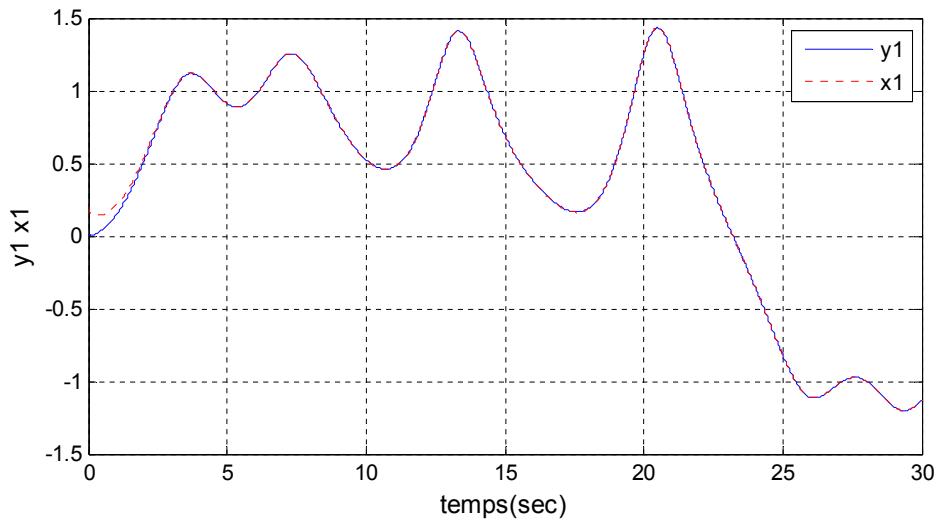
FigII.3. Plan de phase des systèmes sans commande.

Après l'application de notre loi de commande on a les résultats suivants

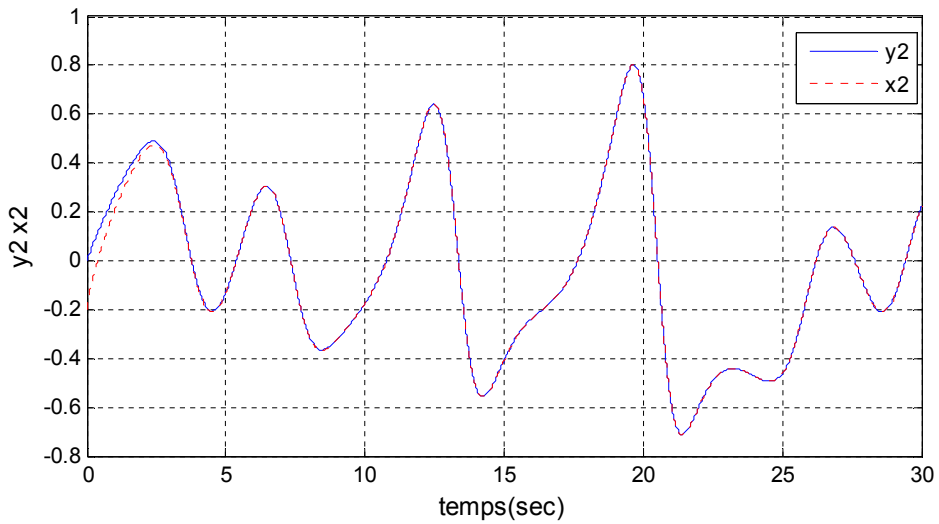
(a). Performance de synchronisation du signal de référence et de réponse.

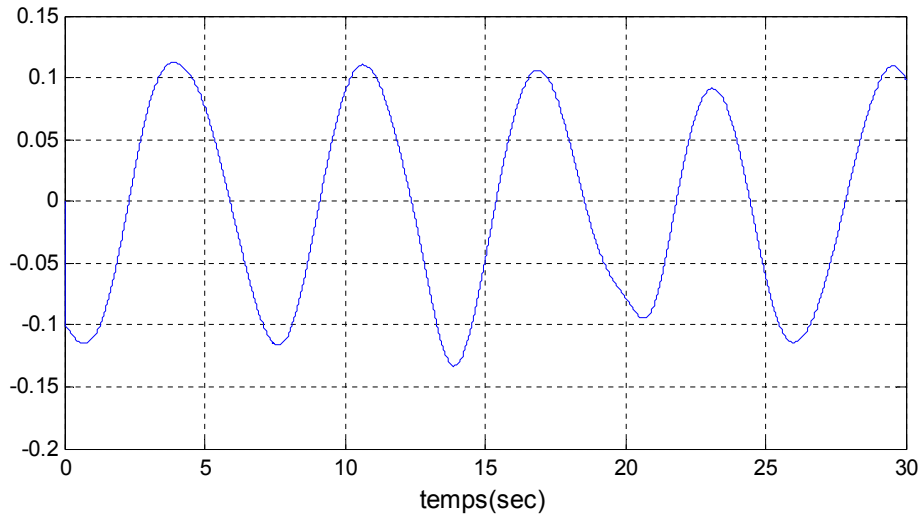
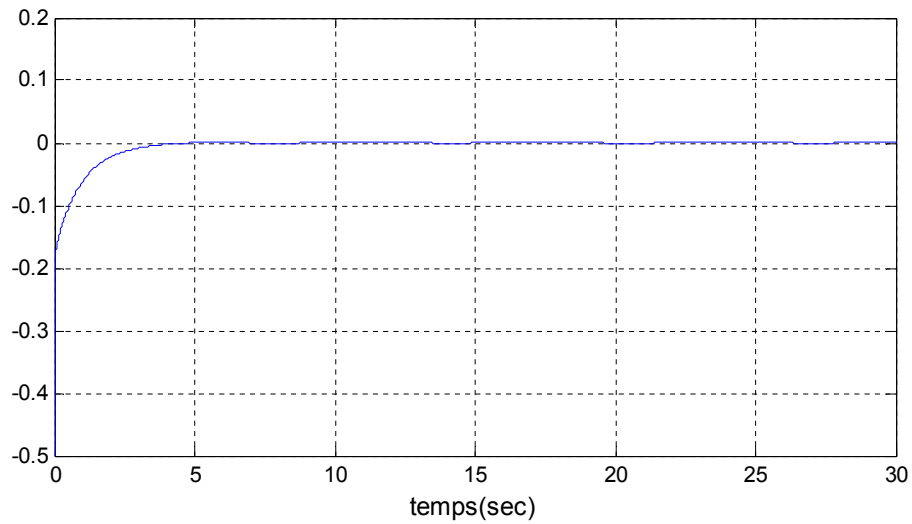
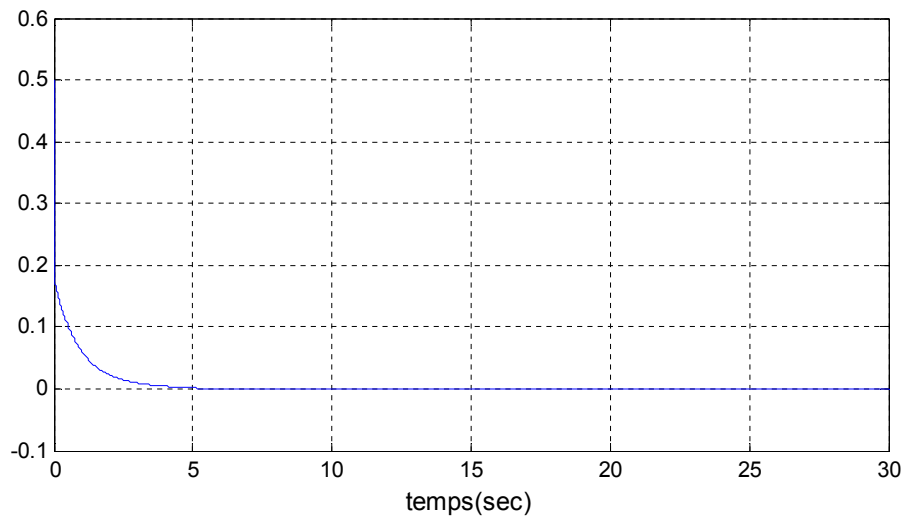


(b). Trajectoires des états  $x_1$  et  $y_1$



(c). Trajectoires des états  $x_2$  et  $y_2$



(d). Signal de commande  $u$ (e). erreur  $e_1$ (f). erreur  $e_2$ Fig II.4. Résultats de simulation avec commande pour  $q=0.98$ .

**Discussion des résultats**

- La signification de la commande étudiée pour différentes valeurs de  $q$  est exprimée.
- Réalisation d'une rapide synchronisation des systèmes de référence et de réponse.
- pour  $q$  est réduit on voit que le chaos est réduit, c.-à-d., l'erreur de synchronisation est réduite, en conséquence.

**II.7 Conclusion**

Dans ce chapitre une commande adaptative floue  $H^\infty$  est étudiée pour traiter la synchronisation de chaos entre deux systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire incertain. En se basant sur l'approche de la synthèse de Lyapunov, des paramètres libres du contrôleur adaptatif flou peuvent être accordés en ligne par la loi de commande de feedback et les lois d'adaptations.

Un exemple de simulation de la synchronisation de chaos de deux systèmes d'ordre fractionnaire de *Duffing* est donné pour démontrer l'efficacité de la méthodologie étudiée.

La signification du schéma de commande étudiée dans la simulation pour différentes valeurs de  $q$  est manifeste pour tester la robustesse.

Les résultats de simulation prouvent qu'une synchronisation rapide entre le système de commande et la réponse peut être réalisée, et pendant la valeur de  $q$  est réduite on voit que le chaos est réduit, c.-à-d., l'erreur de synchronisation est réduite, en conséquence.

---

# ***Chapitre III***

***Commande Hybride Adaptative***

***Floue des Systèmes Fractionnaires***

***Par Mode Glissant***

---

## Chapitre III

# Commande Hybride Adaptative Floue des Systèmes Fractionnaires par Mode Glissant

### III.1 Introduction

Dans ce chapitre, une nouvelle stratégie de commande hybride (directe/indirecte) adaptative floue par la technique de commande glissante a été étudiée pour assurer la stabilité et des performances constantes des systèmes non linéaires incertains chaotiques d'ordre fractionnaire.

Puis, une commande proportionnelle intégrale PI-fractionnaire est considérée en combinant avec la commande adaptative floue par mode de glissement pour une classe des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire non linéaires inconnus, afin d'éviter le phénomène de chattering et d'offrir une bonne performance de l'état en régime transitoire et permanent ; en outre, on applique la théorie de la synthèse de Lyapunov pour assure que tous les signaux sont bornés, ainsi que la poursuite de la sortie du système et de référence avec les incertitudes des perturbations soit réalisée [Wong,09], [Kuo,11].

Un facteur de pondération, qui peut être ajusté par le compromis entre la connaissance du système et la connaissance de commande, est adopté pour combiner l'ensemble des efforts de la commande adaptative floue indirecte et la commande adaptative floue directe.

Pour confirmer l'efficacité du schéma de commande étudiée, un système de réponse chaotique d'ordre fractionnaire est entièrement illustré pour suivre une trajectoire de sortie d'un système de référence chaotique d'ordre fractionnaire [C.Wang,02a].

Les résultats montrent que l'erreur de poursuite et l'effort de commande peuvent être rendus plus petits, et la structure de la commande intelligente hybride étudiée est plus flexible pendant le processus de conception.

### III.2 Problématique et conception de la commande intelligente hybride par mode glissant

Dans cette section et avant l'application de la commande par mode glissant, nous étudions la commande hybride adaptative floue des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire incertains, c.-à-d., pour forcer la trajectoire de sortie qui est obtenue par l'algorithme étudié du système de réponse à suivre la trajectoire du système de référence. [Kuo,11]

On considère le système chaotique d'ordre fractionnaire comme suit

$$\begin{aligned} x^{(nq)} &= f(\underline{x}, t) + g(\underline{x}, t)u + d(t) \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Où  $\underline{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T = [x, x^{(q)}, x^{(2q)}, \dots, x^{((n-1)q)}]^T$  est le vecteur d'état de ce système,  $f(\underline{x}, t)$  et  $g(\underline{x}, t)$  sont des fonctions non linéaires et inconnues,  $d(t)$  est la perturbation externe donnée bornée,  $|d(t)| \leq D$ , et  $u(t)$  est l'entrée de commande.

L'objectif de la commande est de forcer la sortie du système à suivre un signal de référence borné  $y_d$ , sous la contrainte que tous les signaux impliqués doivent être bornés.

Pour commencer, le signal de référence  $\underline{y}_d$  et le vecteur d'erreur  $\underline{e}$  sont définis comme,

$$\begin{aligned} \underline{y}_d &= [y_d, y_d^{(q)}, \dots, y_d^{((n-1)q)}]^T \in R^n, \\ \underline{e} &= \underline{y}_d - \underline{y} = [e, e^{(q)}, \dots, e^{((n-1)q)}]^T \in R^n, \quad e^{(iq)} = y_d^{(iq)} - y^{(iq)}. \end{aligned}$$

En général, dans l'espace d'état de l'erreur la surface de glissement est définie par

$$s(\underline{x}, t) = -(\underline{k}\underline{e}) = -(k_1 e + k_2 e^{(q)} + \dots + k_{n-1} e^{(n-2)q} + e^{(n-1)q}) \quad (3.2)$$

Où  $\underline{k} = [k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, 1] \in R^n$  où les  $k_i$  sont toutes des réelles et sont choisies de telle sorte que  $h(r) = \sum_{i=1}^n k_i r^{(i-1)q}$ ,  $k_n = 1$  est un polynôme *Hurwitz* où  $r$  est l'opérateur de Laplace.

Le problème de poursuite sera considéré comme le vecteur d'état d'erreur  $e$  qui reste sur la surface de glissement  $s(\underline{x}, t) = 0$  pour tout  $t \geq 0$ . Le processus de commande en mode glissant peut être classé en deux phases, la phase approchante avec  $s(\underline{x}, t) \neq 0$  et la phase de glissement avec  $s(\underline{x}, t) = 0$  pour l'erreur initiale  $\underline{e}(0) = 0$ . Afin de garantir que la trajectoire du vecteur d'état d'erreur  $\underline{e}$  se traduira à partir de la phase approchante de la phase de glissement, la condition suffisante [Ming,11], [Yuan,11]

$$s(\underline{x}, t)\dot{s}(\underline{x}, t) \leq -\eta, \text{ où } \eta > 0 \quad (3.3)$$

Doit être satisfaite.

Deux types de lois de commande doit être tirés séparément pour ces deux phases décrites ci-dessus. Dans la phase de glissement, elle implique  $s(\underline{x}, t) = 0$  et  $s^q(\underline{x}, t) = 0$ . [Momani,10]

Afin de forcer la dynamique du système à rester sur la surface de glissement, la commande équivalente  $\bar{u}$  peut être calculée comme suit

Si  $f(\underline{x}, t)$  et  $g(\underline{x}, t)$  sont connues avec la perturbation externe nulle, c.à.d.  $d(t) = 0$ , en prenant la dérivée de la surface de glissement par rapport au temps, nous obtenons

$$\begin{aligned} s^{(q)} &= -\left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(iq)} + e^{(nq)}\right) = -\left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(iq)} + y_d^{(nq)} - y^{(nq)}\right) \\ &= -\left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(iq)} - f(\underline{x}, t) - g(\underline{x}, t)\bar{u}\right) - y_d^{(nq)} \\ &= -\sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(iq)} + f(\underline{x}, t) + g(\underline{x}, t)\bar{u} - y_d^{(nq)} = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Par conséquent, la commande équivalente peut être obtenue comme

$$\bar{u} = \frac{1}{g(\underline{x}, t)} \left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(iq)} - f(\underline{x}, t) + y_d^{(nq)}\right) \quad (3.5)$$

Au contraire, dans la phase approchante,  $s(\underline{x}, t) \neq 0$  un type s'approche de contrôle  $u_{ap}$  doit être ajouté afin de satisfaire à la condition suffisante (3.3) et la commande par mode de glissement complète sera exprimée comme

$$u = \bar{u} - u_{ap}, \quad u_{ap} = \psi_h \operatorname{sgn}(s) \quad (3.6)$$

Où  $\psi_h \geq \eta > 0$ .

De plus, la commande *PI adaptatif fractionnaire* a été appliquée pour éviter le problème de phénomène de chattering. L'entrée et la sortie du régulateur PI est sous la forme suivante [Wong,09] et [Redjem,12]:

$$u_h = h(s|\underline{\theta}_h) = \underline{\theta}_{h_1} z_1 + \underline{\theta}_{h_2} z_2 \quad (3.7)$$

Où  $z_1 = s$  et  $z_2 = s^{(q)}$ ,  $\underline{\theta}_{h_1}$  et  $\underline{\theta}_{h_2}$  sont les gains de commande à concevoir.

L'équation (3.7) peut être réécrite comme :

$$h(s|\underline{\theta}_h) = \xi^T(s)\underline{\theta}_h \quad (3.8)$$

Où  $\xi^T(s) = [s, s^{(q)}] \in \mathcal{R}^2$  et  $\underline{\theta}_h = [\underline{\theta}_{h_1}, \underline{\theta}_{h_2}]^T \in \mathcal{R}^2$  est un vecteur des paramètres réglables.

La loi de commande *indirecte* résultante, qui comprend un système flou pour approximer les fonctions inconnues  $f(\underline{x})$ ,  $g(\underline{x})$  et un régulateur *PI* adaptatif fractionnaire qui permet d'atténuer le chattering et améliorer les performances, est le suivant [Kuo,11], [Wong,09]

$$u_i(x) = \frac{1}{g(\underline{x}|\underline{\theta}_g)} \left( \sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(iq)} + y_d^{(nq)} - f(\underline{x}|\underline{\theta}_f) - h(s|\underline{\theta}_h) \right) \quad (3.9)$$

La commande de commutation  $u_{ap}$  est remplacée par l'action du contrôleur *PI* pour éviter le problème chattering où l'état est à l'intérieur d'une couche limitée  $|s(\underline{x}, t)| < \phi$ , l'action de commande est maintenue à la valeur saturée lors que l'état est dehors de l'accouche limite.

Par conséquent,  $|h(s|\underline{\theta}_h)| = D + \psi_h + \omega_{max}$  lorsque  $s(\underline{x}, t)$  se situe en dehors de la couche limite c.-à-d.  $|s(\underline{x}, t)| \geq \phi$ , où  $\phi$  est l'épaisseur de cette couche.

Pour obtenir la commande de mode de glissement (3.6), les fonctions  $f(\underline{x}, t)$ ,  $g(\underline{x}, t)$  du système et le paramètre de commutation  $\psi_h$  doivent être connues à l'avance.

Cependant,  $f(\underline{x}, t)$  et  $g(\underline{x}, t)$  sont inconnues et la perturbation externe  $d(t) \neq 0$ , l'effort de la commande idéale (3.5) ne peuvent pas être mise en œuvre (n'est pas réalisable). Nous remplaçons  $f(\underline{x}, t)$ ,  $g(\underline{x}, t)$  et  $u_{ap}$  par les systèmes flous  $f(\underline{x}|\underline{\theta}_f)$ ,  $g(\underline{x}|\underline{\theta}_g)$  et  $h(s|\underline{\theta}_h)$  sous les formes spécifiés comme, [Yuan,11]

$$f(\underline{x}|\underline{\theta}_f) = \xi^T(\underline{x})\underline{\theta}_f, \quad g(\underline{x}|\underline{\theta}_g) = \xi^T(\underline{x})\underline{\theta}_g, \quad h(s|\underline{\theta}_h) = \xi^T(s)\underline{\theta}_h \quad (3.10)$$

On a  $|h(s|\underline{\theta}_h)| = D + \psi_h + \omega_{max}$  lorsque  $s(\underline{x}, t)$  se situe en dehors de la couche limite c.-à-d.  $|s(\underline{x}, t)| \geq \phi$ , où  $\phi$  est l'épaisseur de cette couche. [Kuo,11]

Ici, les fonctions floues de base  $\xi(\underline{x})$  et  $\xi(s)$  dépendent des fonctions d'appartenance floues et est censé être fixées, tandis que  $\underline{\theta}_f$ ,  $\underline{\theta}_g$  et  $\underline{\theta}_h$  sont réglés par les lois d'adaptations qui sont basées sur le critère de stabilité de Lyapunov. [Tsong,11]

Par conséquent, selon la connaissance du système et la connaissance de la commande, une commande hybride adaptative floue peut être construite en incorporant à la fois la description floue et les règles de commande floue à l'aide d'un facteur de pondération  $\alpha$  pour combiner la commande adaptative floue indirecte et la commande adaptative floue directe. En se basant sur le compromis entre la connaissance du système et celle de la commande, le facteur de pondération  $\alpha \in [0,1]$  peut être ajusté. Par conséquent, la loi de commande hybride globale est exprimée comme, [C.Wang,02a][Kuo,11],

$$u_c = \alpha u_i + (1 - \alpha) u_d \quad (3.11)$$

Où la commande adaptatif indirect  $u_i$  est donné par (3.9) et a commande adaptatif direct  $u_d$  donné comme suit :

$$u_d(\underline{x}) = u_D(\underline{x}|\underline{\theta}_D) - \frac{h(s|\underline{\theta}_h)}{g(\underline{x}, t)} \quad (3.12)$$

Où  $u_D(\underline{x}|\underline{\theta}_D)$  est obtenue par un système flou spécifié comme

$$u_D(\underline{x}|\underline{\theta}_D) = \xi^T(\underline{x})\underline{\theta}_D \quad (3.13)$$

Les vecteurs des paramètres optimaux  $\underline{\theta}_f^*$ ,  $\underline{\theta}_g^*$ ,  $\underline{\theta}_h^*$  et  $\underline{\theta}_D^*$  sont définis par

$$\underline{\theta}_f^* = \arg \min_{\underline{\theta}_f \in \Omega_f} [\sup_{x \in \Omega_x} |f(\underline{x}|\underline{\theta}_f) - f(\underline{x}, t)|]$$

$$\underline{\theta}_g^* = \arg \min_{\underline{\theta}_g \in \Omega_g} [\sup_{x \in \Omega_x} |g(\underline{x}|\underline{\theta}_g) - g(\underline{x}, t)|]$$

$$\underline{\theta}_D^* = \arg \min_{\underline{\theta}_D \in \Omega_D} [\sup_{x \in \Omega_x} |u_D(\underline{x}|\underline{\theta}_D) - \bar{u}|]$$

$$\underline{\theta}_h^* = \arg \min_{\underline{\theta}_h \in \Omega_h} \left[ \sup_{x \in \Omega_x} |h(s|\underline{\theta}_h) - u_{ap}| \right]$$

Où  $\Omega_f$ ,  $\Omega_g$ ,  $\Omega_D$ ,  $\Omega_h$  et  $\Omega_x$  sont des ensembles de contraintes pour  $\underline{\theta}_f$ ,  $\underline{\theta}_g$ ,  $\underline{\theta}_D$ ,  $\underline{\theta}_h$  et  $x$  respectivement et elles sont définies comme  $\Omega_f = \{\underline{\theta}_f \mid |\underline{\theta}_f| \leq M_f\}$ ,  $\Omega_g = \{\underline{\theta}_g \mid |\underline{\theta}_g| \leq M_g\}$ ,  $\Omega_D = \{\underline{\theta}_D \mid |\underline{\theta}_D| \leq M_D\}$ ,  $\Omega_h = \{\underline{\theta}_h \mid |\underline{\theta}_h| \leq M_h\}$  et  $\Omega_x = \{x \mid |x| \leq M_x\}$ , où  $M_f$ ,  $M_g$ ,  $M_D$ ,  $M_h$  et  $M_x$  sont des constantes positives.

En utilisant (3.12), (3.13), l'équation de la surface de glissement (3.4) peut être réécrite comme

$$\begin{aligned} s^{(a)} = & \omega + \alpha [f(\underline{x}|\underline{\theta}_f^*) - f(\underline{x}|\underline{\theta}_f)] + \alpha [g(\underline{x}|\underline{\theta}_g^*) - g(\underline{x}|\underline{\theta}_g)] u_i \\ & - (1 - \alpha) h(s|\underline{\theta}_h^*) - \alpha h(s|\underline{\theta}_h) - (1 - \alpha) g(\underline{x}) [u_D(\underline{x}|\underline{\theta}_D^*) - u_D(\underline{x}|\underline{\theta}_D)] \\ & + \alpha h(s|\underline{\theta}_h^*) - \alpha h(s|\underline{\theta}_h^*) + (1 - \alpha) h(s|\underline{\theta}_h^*) - (1 - \alpha) h(s|\underline{\theta}_h^*) + d(t) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Où les erreurs d'approximation minimale sont définies comme

$$\begin{aligned} \omega = & \alpha [f(\underline{x}, t) - f(\underline{x}|\underline{\theta}_f^*)] + \alpha [g(\underline{x}, t) - g(\underline{x}|\underline{\theta}_g^*)] u_i \\ & + (1 - \alpha) [u_D(\underline{x}|\underline{\theta}_D^*) - u_D(\underline{x}|\underline{\theta}_D)] \end{aligned} \quad (3.15)$$

Si  $\tilde{\theta}_f = \underline{\theta}_f - \underline{\theta}_f^*$ ,  $\tilde{\theta}_g = \underline{\theta}_g - \underline{\theta}_g^*$ ,  $\tilde{\theta}_h = \underline{\theta}_h - \underline{\theta}_h^*$  et  $\tilde{\theta}_D = \underline{\theta}_D - \underline{\theta}_D^*$ , nous avons

$$\begin{aligned}
s^{(q)} = & -(1 - \alpha)h(s|\underline{\theta}_h^*) + \omega - \alpha \underline{\tilde{\theta}}_h^T \xi(s) - \alpha \underline{\tilde{\theta}}_f^T \xi(\underline{x}) - \alpha \underline{\tilde{\theta}}_g^T \xi(\underline{x}) u_i \\
& + (1 - \alpha)g(\underline{x}) \underline{\tilde{\theta}}_D^T \xi(\underline{x}) - \alpha h(s|\underline{\theta}_h^*) - (1 - \alpha) \underline{\tilde{\theta}}_h^T \xi(s) + d(t)
\end{aligned} \quad (3.16)$$

Après la considération de démarche, le théorème (3.1) peut être obtenu.

### III.3 Analyse de la stabilité

**Théorème III.1** - *Considérons le système SISO chaotique non linéaire d'ordre fractionnaire (3.1) avec une entrée de commande (3.11), si les lois d'adaptation floues sont choisies comme*

$$\theta_f^{(q)} = r_1 s \xi(\underline{x}), \theta_g^{(q)} = r_2 s \xi(\underline{x}) u_i, \theta_D^{(q)} = -r_3 s g(\underline{x}) \xi(\underline{x}), \theta_h^{(q)} = r_4 s \xi(s) \quad (3.17)$$

Où  $r_i > 0, i = 1, \dots, 4$ . Ensuite, le schéma d'adaptation global garantit la stabilité globale du système en boucle fermée résultant dans le sens où tous les signaux impliqués sont uniformément bornées et l'erreur de poursuite convergera vers zéro asymptotiquement.

[Kuo,11],[C.Wang,02a]

**Preuve** - Afin d'analyser la stabilité en boucle fermée, la fonction de Lyapunov est choisie comme

$$V = \frac{1}{2} s^2 + \frac{\alpha}{2r_1} \underline{\tilde{\theta}}_f^T \underline{\tilde{\theta}}_f + \frac{\alpha}{2r_2} \underline{\tilde{\theta}}_g^T \underline{\tilde{\theta}}_g + \frac{\alpha}{2r_4} \underline{\tilde{\theta}}_h^T \underline{\tilde{\theta}}_h + \frac{(1-\alpha)}{2r_3} \underline{\tilde{\theta}}_D^T \underline{\tilde{\theta}}_D + \frac{(1-\alpha)}{2r_4} \underline{\tilde{\theta}}_h^T \underline{\tilde{\theta}}_h \quad (3.18)$$

En prenant la dérivée (3.18) par rapport au temps, nous obtenons

$$\begin{aligned}
V^{(q)} = & s s^{(q)} + \frac{\alpha}{r_1} \underline{\tilde{\theta}}_f^T \underline{\tilde{\theta}}_f^{(q)} + \frac{\alpha}{r_2} \underline{\tilde{\theta}}_g^T \underline{\tilde{\theta}}_g^{(q)} + \frac{\alpha}{r_4} \underline{\tilde{\theta}}_h^T \underline{\tilde{\theta}}_h^{(q)} + \frac{(1-\alpha)}{r_3} \underline{\tilde{\theta}}_D^T \underline{\tilde{\theta}}_D^{(q)} + \frac{(1-\alpha)}{r_4} \underline{\tilde{\theta}}_h^T \underline{\tilde{\theta}}_h^{(q)} \\
= & -(1 - \alpha)sh(s|\underline{\theta}_h^*) + s\omega - \alpha s \underline{\tilde{\theta}}_h^T \xi(s) - \alpha s \underline{\tilde{\theta}}_f^T \xi(\underline{x}) - \alpha s \underline{\tilde{\theta}}_g^T \xi(\underline{x}) u_i \\
& + (1 - \alpha)sg(\underline{x}) \underline{\tilde{\theta}}_D^T \xi(\underline{x}) - \alpha sh(s|\underline{\theta}_h^*) - (1 - \alpha) s \underline{\tilde{\theta}}_h^T \xi(s) + sd(t) \\
& + \frac{\alpha}{r_1} \underline{\tilde{\theta}}_f^T \underline{\tilde{\theta}}_f^{(q)} + \frac{\alpha}{r_2} \underline{\tilde{\theta}}_g^T \underline{\tilde{\theta}}_g^{(q)} + \frac{\alpha}{r_4} \underline{\tilde{\theta}}_h^T \underline{\tilde{\theta}}_h^{(q)} + \frac{(1-\alpha)}{r_3} \underline{\tilde{\theta}}_D^T \underline{\tilde{\theta}}_D^{(q)} + \frac{(1-\alpha)}{r_4} \underline{\tilde{\theta}}_h^T \underline{\tilde{\theta}}_h^{(q)} \quad (3.19) \\
\leq & \frac{\alpha}{r_1} \underline{\tilde{\theta}}_f^T \left( \underline{\tilde{\theta}}_f^{(q)} - r_1 s \xi(\underline{x}) \right) + \frac{\alpha}{r_2} \underline{\tilde{\theta}}_g^T \left( \underline{\tilde{\theta}}_g^{(q)} - r_2 s \xi(\underline{x}) u_i \right) \\
& + \frac{\alpha}{r_4} \underline{\tilde{\theta}}_h^T \left( \underline{\tilde{\theta}}_h^{(q)} - r_4 s \xi(s) \right) - \alpha s(D + \eta) \text{sgn}(s) + sd(t) + s\omega \\
& + \frac{(1-\alpha)}{r_3} \underline{\tilde{\theta}}_D^T \left( \underline{\tilde{\theta}}_D^{(q)} + r_3 s g(\underline{x}) \xi(\underline{x}) \right) - (1 - \alpha) s(D + \psi_h) \text{sgn}(s)
\end{aligned}$$

Avec le compensateur robuste  $u_{ap}$  et les lois d'adaptations floues sont données (3.17), et après une simple manipulation, nous avons

$$V^{(a)} \leq s\omega - s\psi_h \operatorname{sgn}(s) = s\omega - |s|\psi_h \quad (3.20)$$

Par l'utilisation du corollaire du lemme de *Barbalat* [Kuo,11],[Tsong,04], nous avons  $\lim_{t \rightarrow \infty} |s(\underline{x}, t)| = 0$ . alors  $\lim_{t \rightarrow \infty} |e(t)| = 0$ . La preuve est complète.

### III.5 Exemple de simulation

Dans cette partie, on applique la stratégie de la commande hybride adaptative floue par mode glissant pour la commande et la synchronisation des deux différents systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire de *Duffing*.

On considère deux systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire de *Duffing* comme suit, L'un est un système de référence donné comme

$$D^q y_1 = y_2$$

$$D^q y_2 = 1.2y_1 - y_2 - y_1^2 + 0.5 \cos(t)$$

Et l'autre est un système de réponse (de commande) donnée comme

$$D^q x_1 = x_2$$

$$D^q x_2 = x_1 - 1.8x_2 - x_1^2 + 0.9 \cos(t) + u(t) + d(t)$$

Où la perturbation externe donnée comme  $d(t) = 0.1 \sin(t)$ .

Les conditions initiales sont choisies comme suit  $\underline{y}(0) = [0, 0]^T$  et  $\underline{x}(0) = [1, -1]^T$  respectivement. On considère dans ce cas l'ordre fractionnaire  $q = 0.98$ , Pour les autres constantes de conception sont fixées comme suit  $k_1 = k_2 = 1$ ,  $r_1 = 200$ ,  $r_2 = 40$ ,  $r_3 = 100$ ,  $r_4 = 10$ ,  $r = 0.005$ ,  $\eta = 1$ , le pas  $h = 0.001$ , et  $\alpha = 0.7$  est le facteur de pondération.

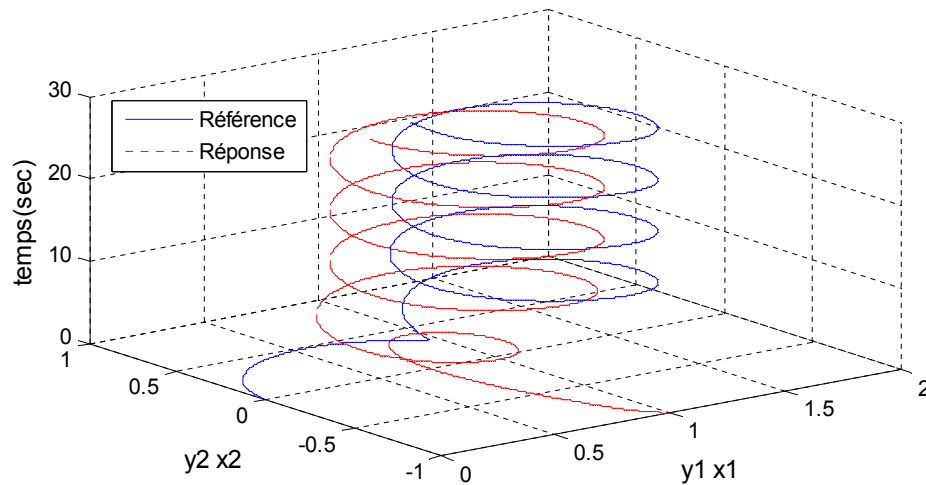
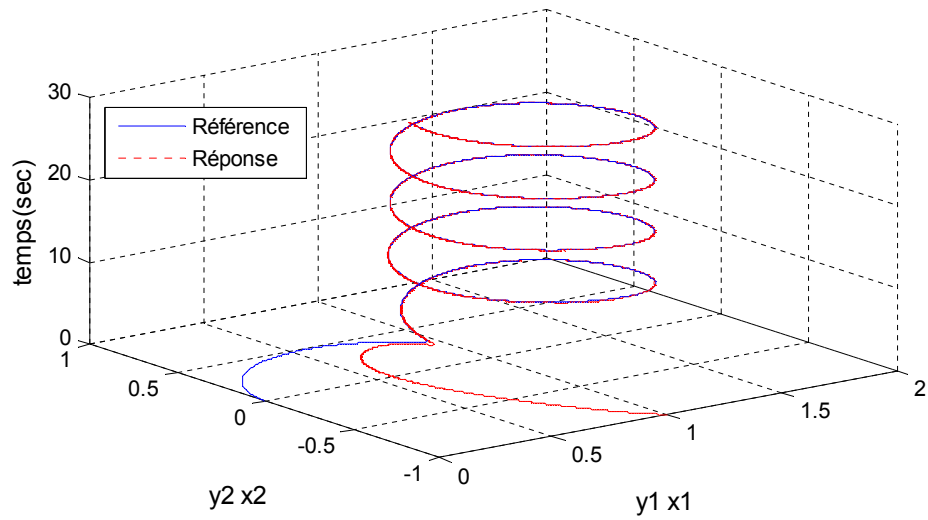


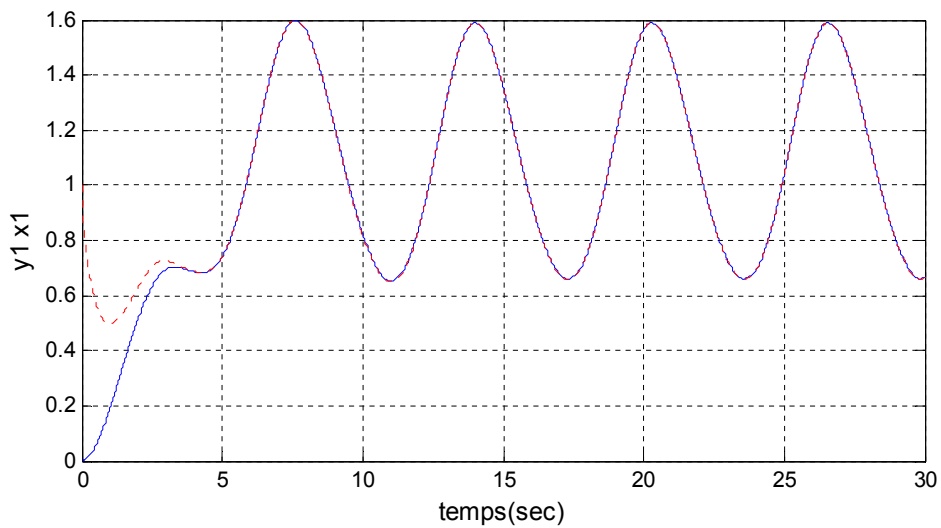
Fig III.1. Plan de phase des systèmes sans commande.

1. Le cas de la commande par mode glissant et l'existence de Chattering (broutement)

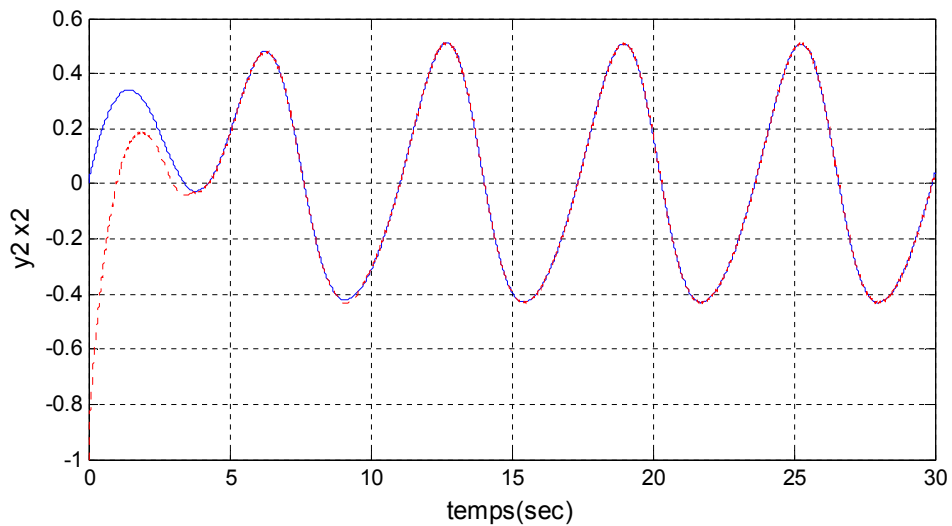
(a). Performance de synchronisation du signal de référence et de réponse.



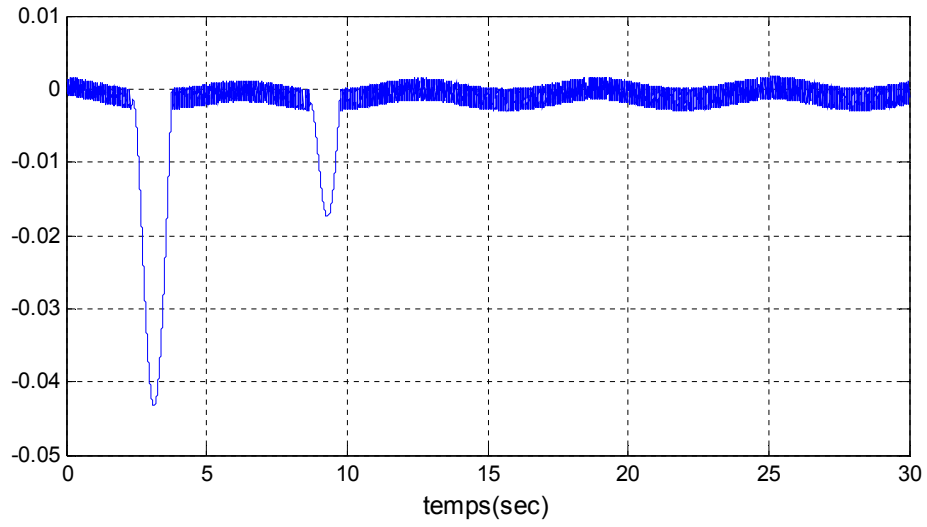
(b). Trajectoires des états  $x_1$  et  $y_1$



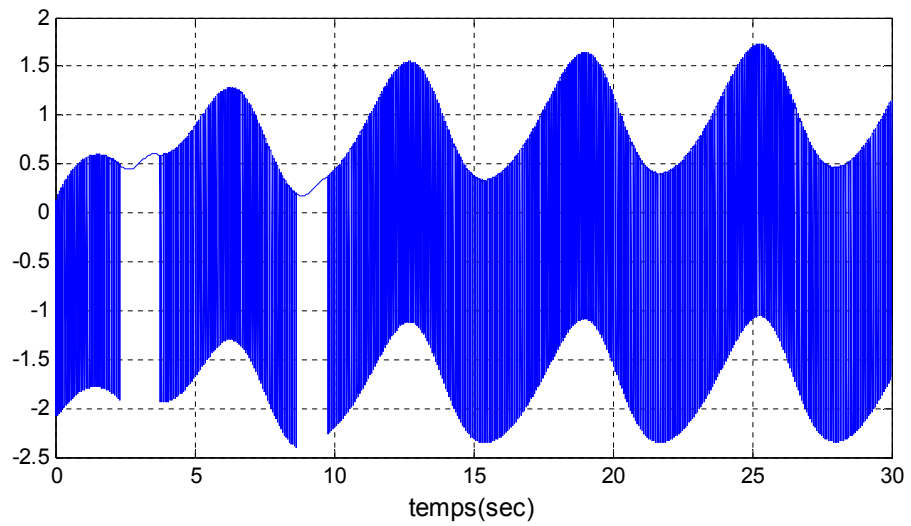
(c). Trajectoires des états  $x_2$  et  $y_2$



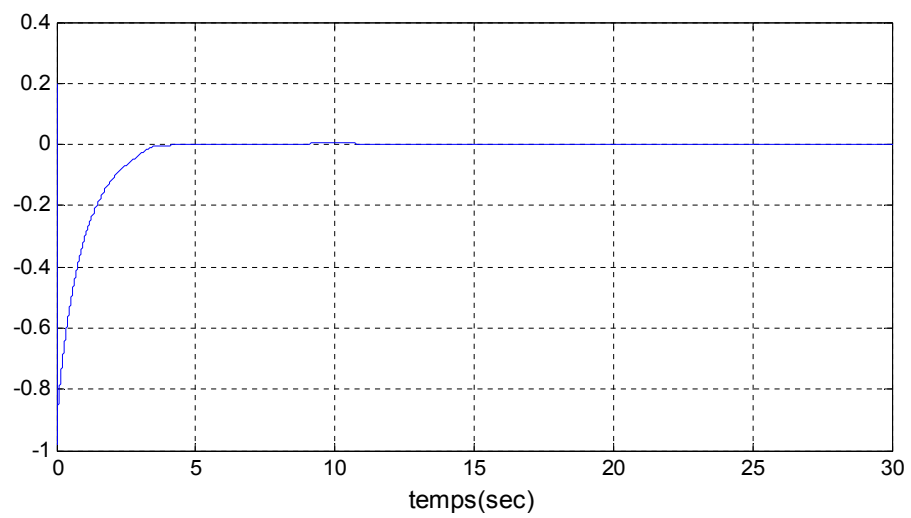
(d). Surface S



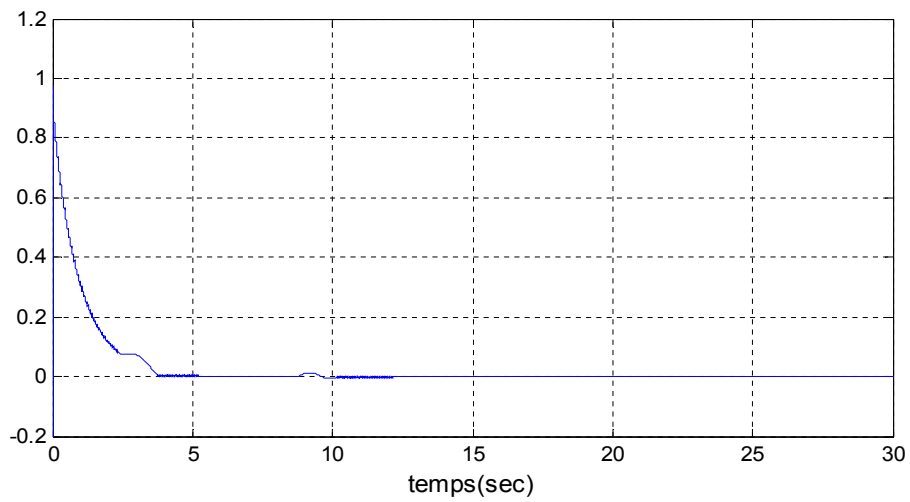
(e). Signal de commande u



(f). Erreur  $e_1$



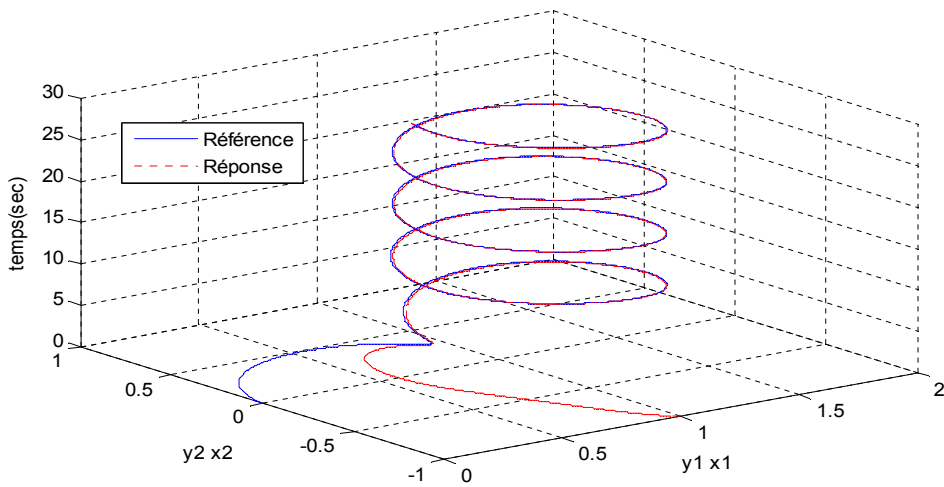
(g). Erreur  $e_2$



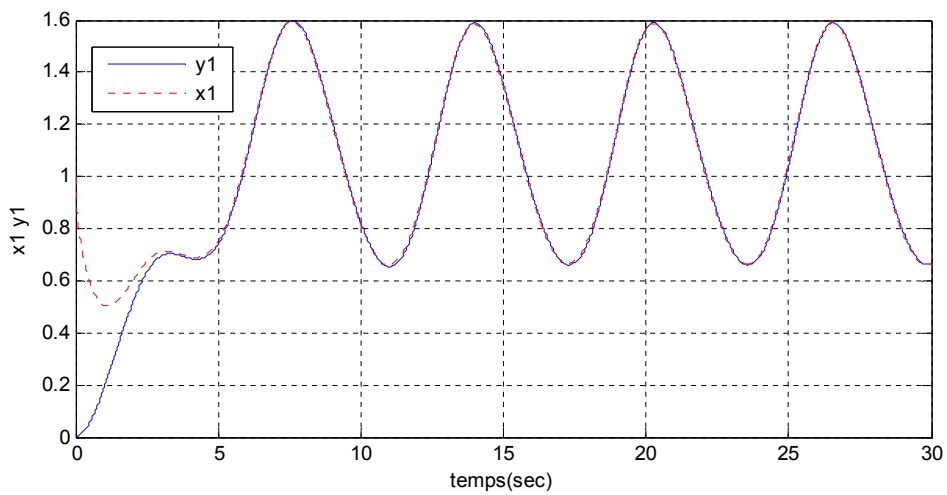
FigIII.2. Résultats de simulation par le mode glissant.

2. Le cas d'élimination de chattering par l'utilisation de la commande indirecte  $u_i$  avec le régulateur PI-fractionnaire.

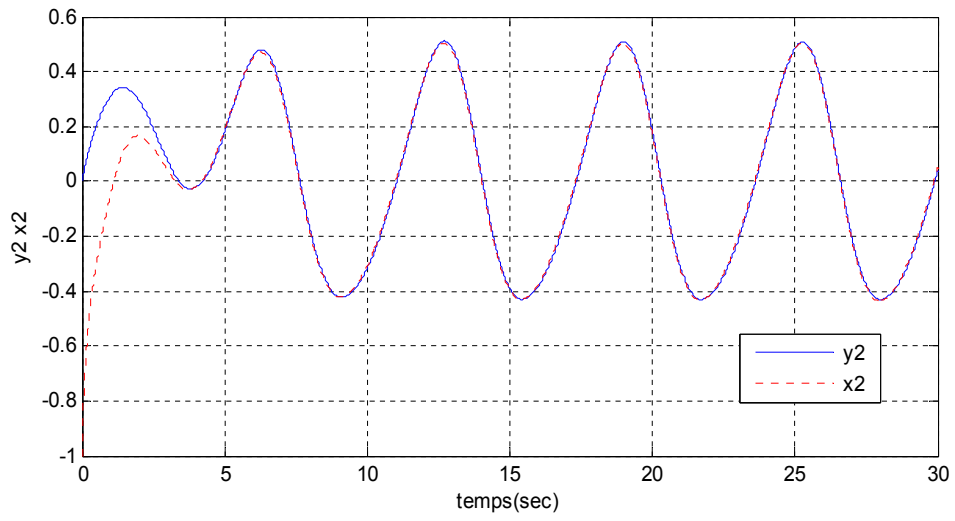
(a). Performance de synchronisation du signal de référence et de réponse.



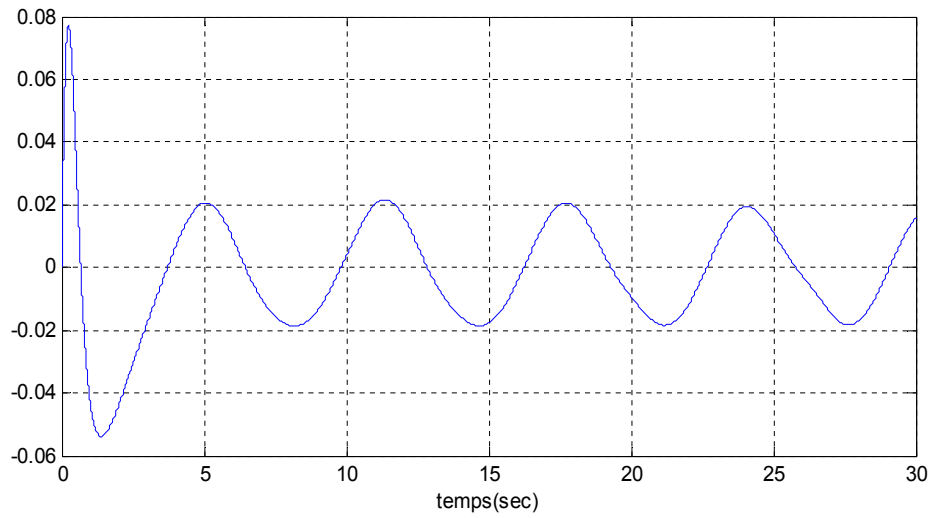
(b). Trajectoires des états  $x_1$  et  $y_1$



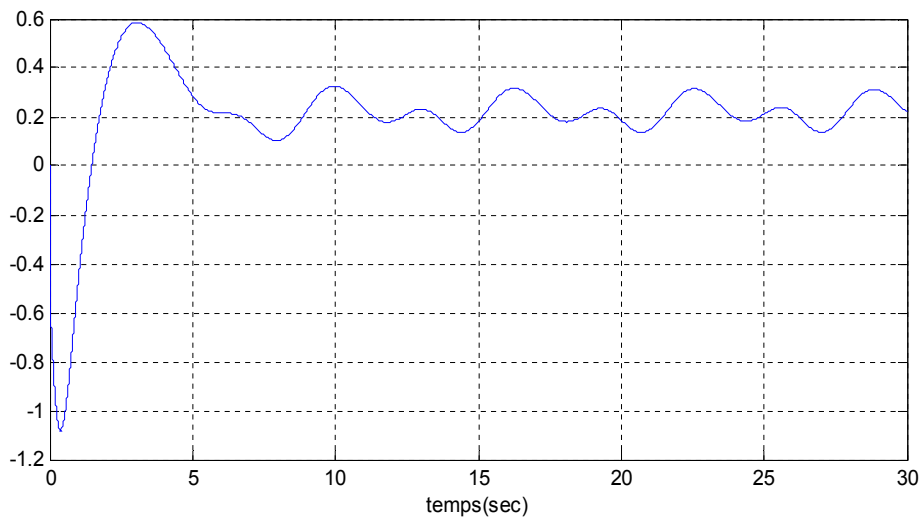
(c). Trajectoires des états  $x_2$  et  $y_2$



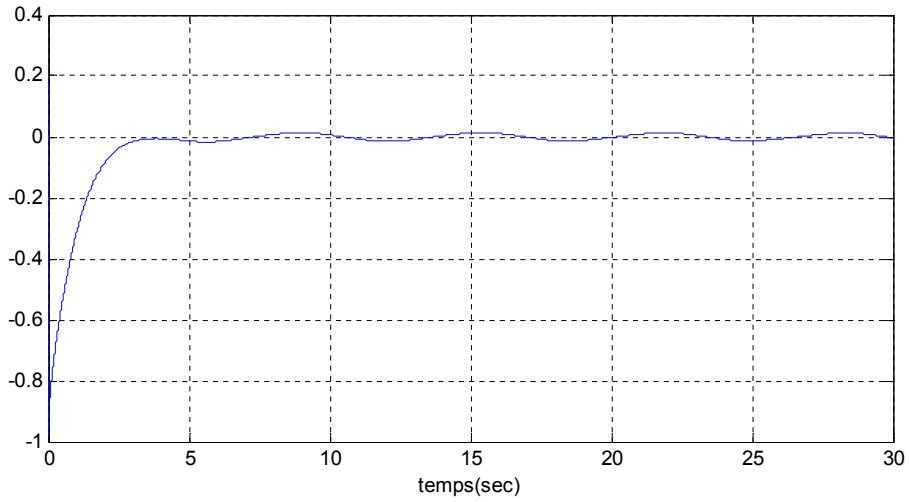
(d). Surface  $s$



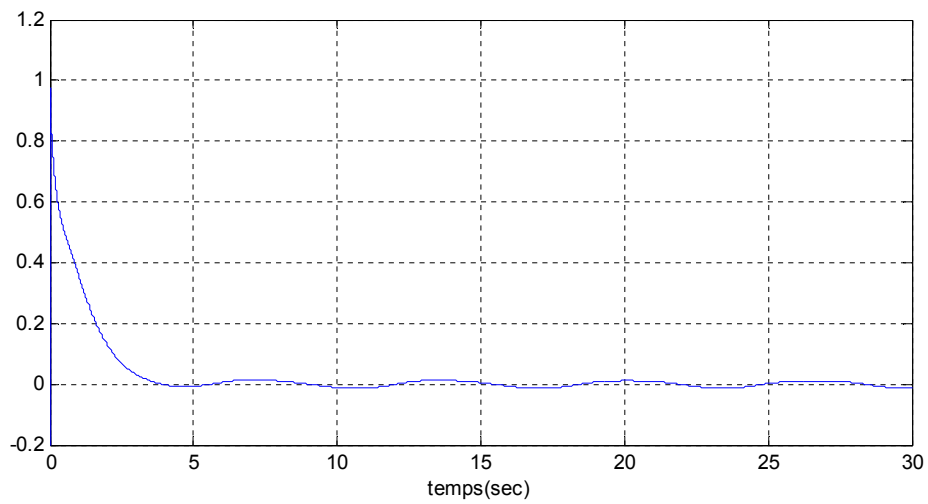
(e). Signal de commande  $u_i$



(f). Erreur  $e_1$



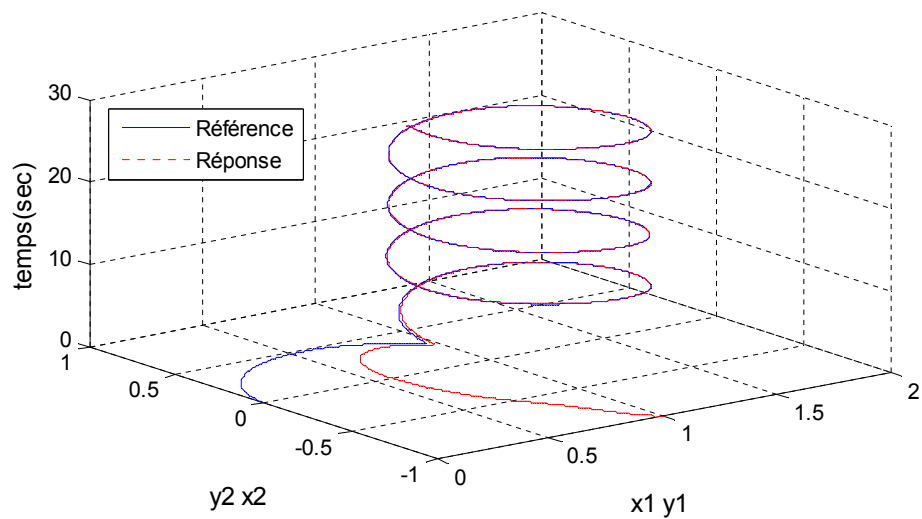
(g). Erreur  $e_2$



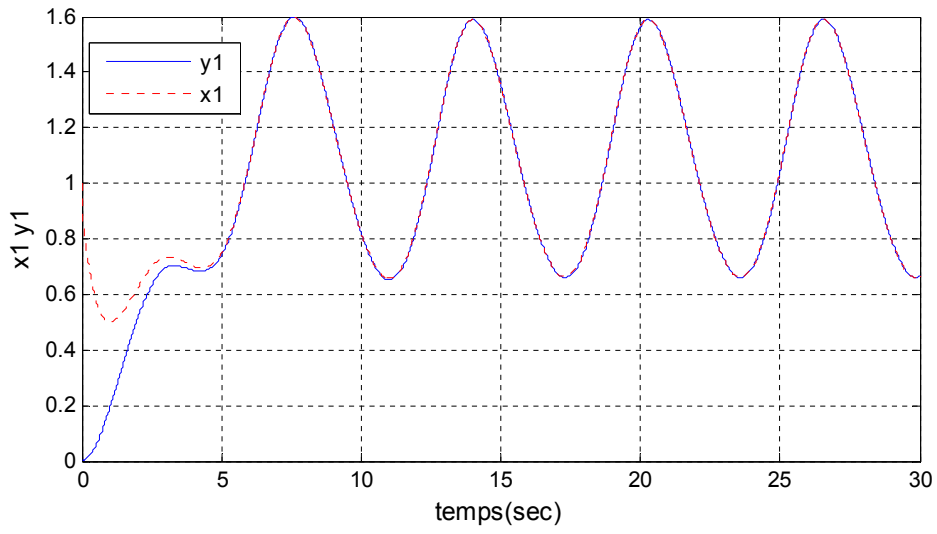
FigIII.3. Résultats de simulation par la commande indirect avec le PI-fractionnaire.

3. Le cas d'utilisation de la commande hybride avec le régulateur PI-fractionnaire.

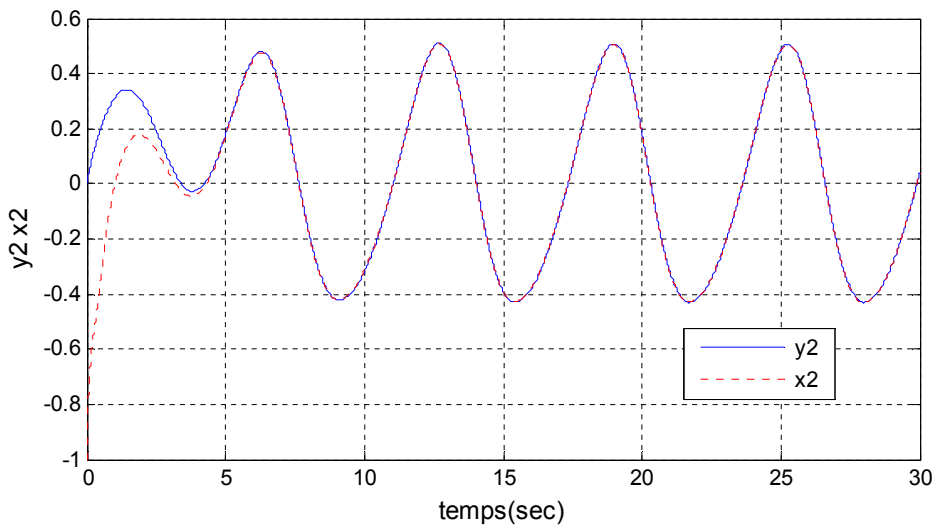
(a). Performance de synchronisation du signal de référence et de réponse.



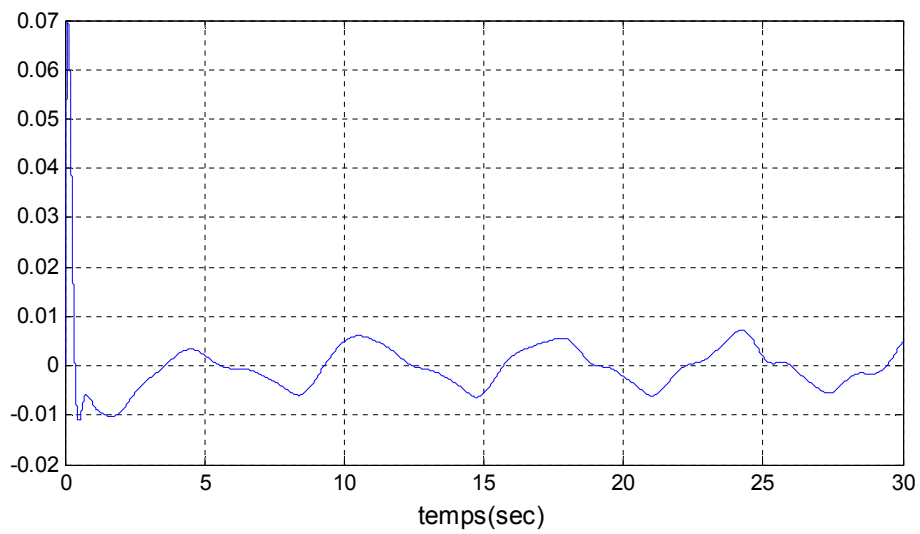
(b). Trajectoires des états  $x_1$  et  $y_1$

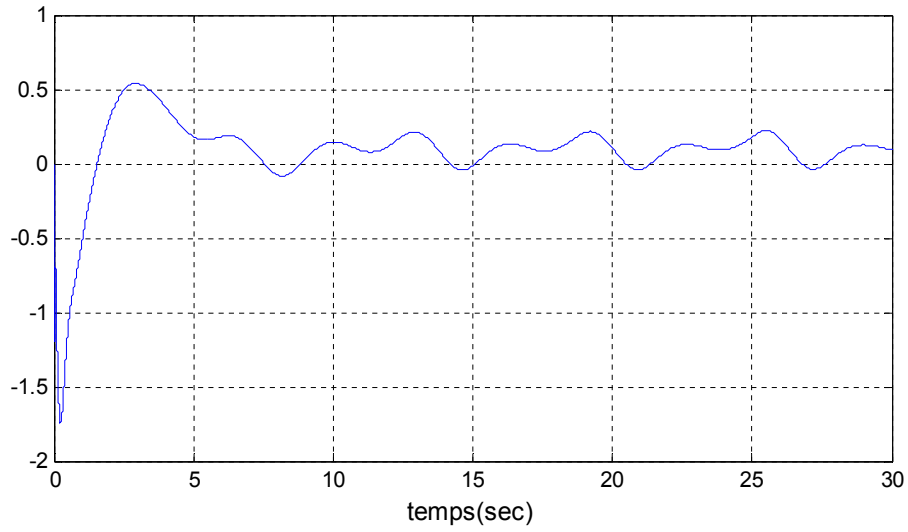
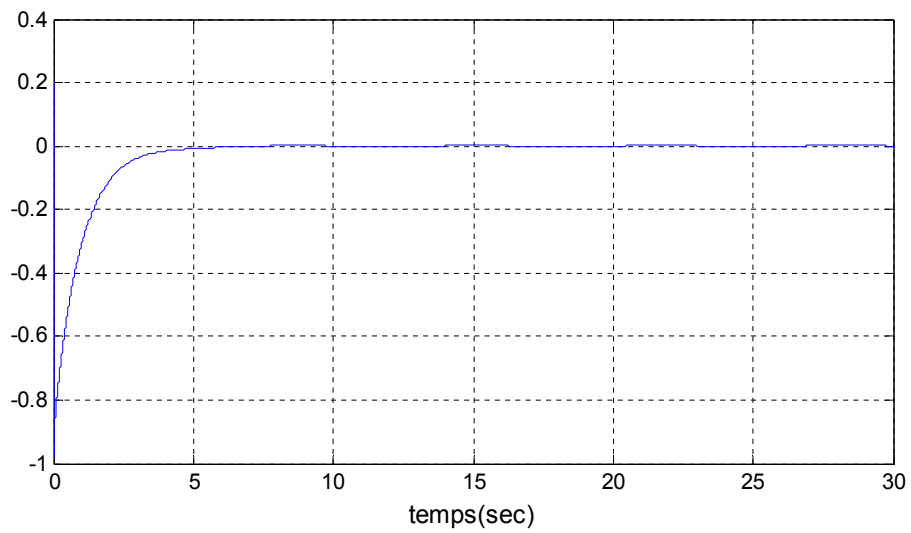
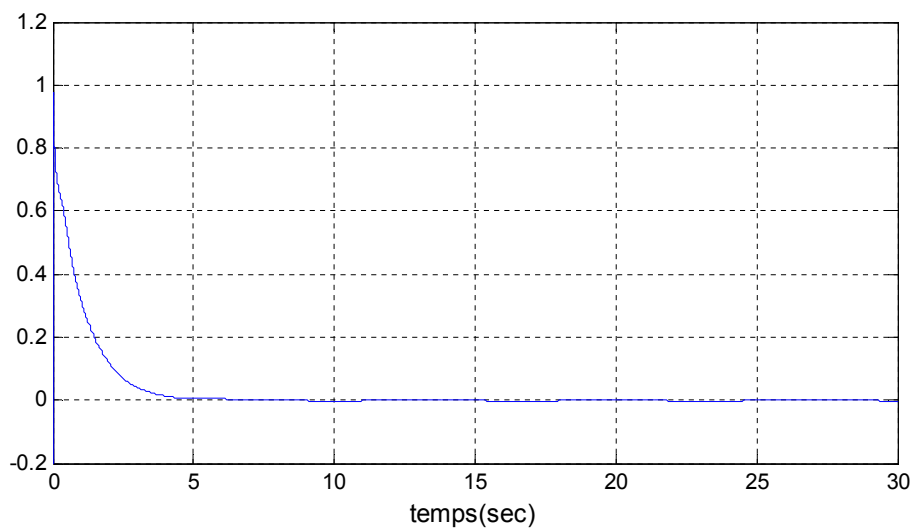


(c). Trajectoires des états  $x_2$  et  $y_2$



(d). Surfaces



(e). Signal de commande  $u$ (f). Erreur  $e_1$ (g). Erreur  $e_2$ 

FigIII.4. Résultats de simulation par la commande hybride avec le PI fractionnaire.

### Commentaires sur les résultats

- On note que la poursuite de la trajectoire désirée soit assurée avec une précision bien définie (figures (III.2.a,b,c - III.3.a,b,c - III.4.a,b,c)),
- Le phénomène de Chattering (figure (III.2.e)) est éliminé par la commande étudiée. (figure (III.3.e)).
- D'après les figures (III.2.e - III.3.e - III.4.e), en présence des perturbations externes, la commande reste efficace où les trajectoires réelles convergent vers les trajectoires désirées.
- On remarque d'après les figures (III.3 et III.4), les résultats dans ce cas de commande hybride sont améliorés par rapport dans le cas de commande indirecte.
- La méthode étudiée est efficace pour les systèmes chaotiques d'ordre fractionnaires.

### III.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié une commande hybride intelligente par mode glissant pour réaliser la performance de la poursuite des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire.

C'est une méthodologie de conception flexible par le compromis entre la connaissance du système et la connaissance de la commande, on utilise un facteur de pondération adopté pour additionner un ensemble d'effort de commande adaptative floue indirecte avec un ensemble de commande adaptative floue directe.

En ce qui concerne le phénomène de chattering, nous avons utilisé le régulateur PI adaptatif fractionnaire pour éliminer ce broutement.

En se basant sur l'approche de la synthèse de Lyapunov, les paramètres libres du contrôleur adaptatif flou peuvent être réglés en ligne par une loi de commande de feedback et par des lois d'adaptations.

Les résultats de simulation ont montrés que la commande étudiée peut atteindre les performances souhaités, ainsi confirme l'efficacité de la méthodologie étudiée.

---

***Chapitre IV***

***Commande Hybride Adaptative***

***Floue  $H^\infty$  des Systèmes***

***Fractionnaires***

---

## Chapitre IV

# Commande Hybride Adaptative Floue $H^\infty$ des Systèmes Fractionnaires

### IV.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie une commande hybride adaptative floue pour réaliser la performance de la poursuite des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire.

En se basant sur le compromis entre la connaissance du système et la connaissance de commande, un facteur de pondération peut être ajusté pour combiner l'effort de la commande adaptative floue indirecte et l'effort de la commande adaptative floue directe.

Un système de commande qui est un système non linéaire chaotique d'ordre fractionnaire est entièrement illustré pour poursuivre une trajectoire du système de référence chaotique d'ordre fractionnaire.

On applique un nouveau critère de stabilité de Lyapunov pour l'algorithme de commande  $H^\infty$  de telle sorte que non seulement la stabilité du système pour cette commande adaptative floue soit garantie, mais également l'influence de l'erreur d'approximation et de la perturbation externe sur l'erreur de poursuite puisse être atténuée arbitrairement à un niveau bien défini.

Des résultats de simulation montrent que l'erreur de poursuite et l'effort de commande peuvent être rendus plus petits ainsi le schéma de commande intelligente hybride utilisé est plus flexible pendant le processus de conception.

### IV.2 Problématique de la conception du schéma de commande hybride étudiée

Considérons le système chaotique d'ordre fractionnaire comme suit [Balas,11]

$$\begin{aligned} x^{(nq)} &= f(\underline{x}, t) + g(\underline{x}, t)u + d(t) \\ y &= x_1 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Où  $\underline{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T = [x, x^{(q)}, x^{(2q)}, \dots, x^{((n-1)q)}]^T$  est le vecteur d'état de ce système,  $f(\underline{x}, t)$  et  $g(\underline{x}, t)$  sont non linéaires et inconnues,  $d(t)$  est la perturbation externe donnée bornée,  $u(t)$  est l'entrée de commande. L'objectif de la commande est de forcer la sortie  $y$  à

suivre un signal de référence donné borné  $y_d$ , sous la contrainte que tous les signaux impliqués doivent être bornés.

Pour commencer, le signal de référence de vecteur  $\underline{y}_d$  et le vecteur d'erreur  $\underline{e}$  est définie comme [C.Wang,02b],

$$\underline{y}_d = [y_d, y_d^{(q)}, \dots, y_d^{((n-1)q)}]^T \in R^n,$$

$$\underline{e} = \underline{y}_d - \underline{y} = [e, e^{(q)}, \dots, e^{((n-1)q)}]^T \in R^n, \quad e^{(iq)} = y_d^{(iq)} - y^{(iq)}.$$

Soit  $\underline{k} = [k_1, k_2, \dots, k_n]^T \in R^n$  telles que toutes les racines du polynôme caractéristique  $p(s) = s^{nq} + k_n s^{(n-1)q} + \dots + k_1$  soient dans le demi-plan gauche (système stable).

Si les fonctions  $f(\underline{x}, t)$  et  $g(\underline{x}, t)$  sont connues et le système avec une perturbation externe  $d(t) = 0$ , alors la loi de commande a la forme suivante [Huang,11][C.Wang,02a]

$$\bar{u} = \frac{1}{g(\underline{x}, t)} \left( -f(\underline{x}, t) + y_d^{(nq)} + \underline{k}^T \underline{e} \right) \quad (4.2)$$

En appliquant (4.2) à (4.1) l'équation de l'erreur est obtenue comme, [Tsong,04]

$$e^{(nq)} + k_n e^{(n-1)q} + \dots + k_1 e = 0$$

qui implique que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$  qui est l'un des objectifs de la commande.

Cependant, lorsque  $f(\underline{x}, t)$  et  $g(\underline{x}, t)$  sont inconnues et la perturbation externe  $d(t) \neq 0$ , l'effort de commande idéal (4.2) ne peuvent pas être mis en œuvre (non réalisable). On remplace  $f(\underline{x}, t)$  et  $g(\underline{x}, t)$  par les systèmes flous  $f(\underline{x}|\underline{\theta}_f)$  et  $g(\underline{x}|\underline{\theta}_g)$  spécifiés comme,

$$f(\underline{x}|\underline{\theta}_f) = \xi^T(\underline{x})\underline{\theta}_f \quad \text{and} \quad g(\underline{x}|\underline{\theta}_g) = \xi^T(\underline{x})\underline{\theta}_g \quad (4.3)$$

Avec  $\xi(\underline{x})$  est un vecteur de fonctions floues de base supposé convenablement fixé en avance par l'utilisateur,  $\underline{\theta}_f$  et  $\underline{\theta}_g$  sont les vecteurs de paramètres ajustés par des lois d'adaptation sur la base d'un critère de stabilité de Lyapunov. [Balas,11]

Toutefois, en fonction de la connaissance du système et la connaissances de commande, un contrôleur hybride adaptatif peut être construit en intégrant à la fois la description floue et des règles de commande floue à l'aide d'un facteur de pondération  $\alpha$  pour combiner la commande adaptative indirecte et celle adaptative directe. Basé sur le compromis entre la connaissance des systèmes et les connaissances de la commande, le facteur de pondération  $\alpha \in [0,1]$  peut être ajusté. Par conséquent, l'effort de la commande totale peut être exprimé comme [Balas,11], [Chen,96]

$$u = \alpha u_i + (1 - \alpha) u_d \quad (4.4)$$

Où la commande adaptatif direct  $u_d$  et la commande adaptatif indirect  $u_i$  sont donnés comme suit

$$u_d = u_D(\underline{x}|\underline{\theta}) - \frac{u_a}{g(\underline{x}, t)} \quad (4.5)$$

$$u_i = \frac{1}{g(\underline{x}|\theta_g)} \left[ -f(\underline{x}|\theta_f) + y_d^{(nq)} + \underline{k}^T \underline{e} - u_a \right] \quad (4.6)$$

Où  $u_a$  est un compensateur robuste utilisé pour atténuer la perturbation externe et les erreurs d'approximation floues, et  $u_D(\underline{x}|\underline{\theta}_D)$  est obtenue par un système flou spécifié comme

$$u_D(\underline{x}|\underline{\theta}_D) = \xi^T(\underline{x})\underline{\theta}_D \quad (4.7)$$

En substituant (4.4) dans (4.1), l'équation dynamique d'erreur peut être obtenue dans la représentation de l'espace d'état comme

$$\begin{aligned} \underline{e}^{(q)} = A\underline{e} + B\{\alpha([f(\underline{x}|\theta_f) - f(\underline{x}, t)] + [g(\underline{x}|\theta_g) - g(\underline{x}, t)]u_i) \\ - (1 - \alpha)(g(\underline{x}, t)[u_D(\underline{x}|\underline{\theta}_D) - \bar{u}] + u_a - d(t))\} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Où

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & -k_4 & \dots & -k_{(n-1)} & -k_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Les vecteurs des paramètres optimaux  $\underline{\theta}_f^*$ ,  $\underline{\theta}_g^*$  et  $\underline{\theta}_D^*$  sont définis par :

$$\underline{\theta}_f^* = \arg \min_{\underline{\theta}_f \in \Omega_f} [\sup_{x \in \Omega_x} |f(\underline{x}|\underline{\theta}_f) - f(\underline{x}, t)|] \quad (4.9)$$

$$\underline{\theta}_g^* = \arg \min_{\underline{\theta}_g \in \Omega_g} [\sup_{x \in \Omega_x} |g(\underline{x}|\underline{\theta}_g) - g(\underline{x}, t)|] \quad (4.10)$$

$$\underline{\theta}_D^* = \arg \min_{\underline{\theta}_D \in \Omega_D} [\sup_{x \in \Omega_x} |u_D(\underline{x}|\underline{\theta}_D) - \bar{u}|] \quad (4.11)$$

Où  $\Omega_f$ ,  $\Omega_g$ ,  $\Omega_D$  et  $\Omega_x$  sont des ensembles de contraintes pour  $\underline{\theta}_f$ ,  $\underline{\theta}_g$ ,  $\underline{\theta}_D$  et  $x$  respectivement et elles sont définies comme

$$\Omega_f = \{\underline{\theta}_f \mid |\underline{\theta}_f| \leq M_f\}, \Omega_g = \{\underline{\theta}_g \mid |\underline{\theta}_g| \leq M_g\}, \Omega_D = \{\underline{\theta}_D \mid |\underline{\theta}_D| \leq M_D\} \text{ et } \Omega_x = \{x \mid |x| \leq M_x\}$$

Où  $M_f$ ,  $M_g$ ,  $M_D$  et  $M_x$  sont des constantes positives.

En utilisant (4.9) - (4.11), l'équation dynamique de l'erreur (4.10) peut être réécrite comme

$$\underline{e}^{(q)} = A\underline{e} + B\{\alpha([f(\underline{x}|\theta_f) - f(\underline{x}|\theta_f^*)] + [g(\underline{x}|\theta_g) - g(\underline{x}|\theta_g^*)]u_i) \quad (4.12)$$

$$-(1 - \alpha)(g(\underline{x}, t)[u_D(\underline{x}|\underline{\theta}_D) - u_D(\underline{x}|\underline{\theta}_D^*)]) + u_a + \omega\}$$

Où les erreurs minimales d'approximation sont définies comme

$$\begin{aligned} \omega = & \alpha(f(\underline{x}|\underline{\theta}_f^*) - f(\underline{x}|\underline{\theta}_f) + [g(\underline{x}|\underline{\theta}_g^*) - g(\underline{x}|\underline{\theta}_g)]u_i) \\ & -(1 - \alpha)g(\underline{x}, t)[u_D(\underline{x}|\underline{\theta}_D^*) - \bar{u}] - d(t) \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\text{Si } \tilde{\theta}_f = \theta_f - \theta_f^*, \tilde{\theta}_g = \theta_g - \theta_g^* \text{ et } \tilde{\theta}_D = \theta_D - \theta_D^*,$$

$$\underline{e}^{(q)} = A\underline{e} + B[\alpha(\xi(\underline{x})^T \tilde{\theta}_f + \xi(\underline{x})^T \tilde{\theta}_g u_i) + \xi(\underline{x})^T \tilde{\theta}_D + u_a + \omega] \quad (4.14)$$

Après les considérations précédentes, le théorème (4.1) peut être obtenu

### IV.3 Analyse de la stabilité

**Théorème IV.1:** *Considérons le système chaotique non linéaire d'ordre fractionnaire SISO (4.1) avec une entrée de commande (4.4), si le compensateur robuste  $u_a$  et les lois adaptatives floues sont choisis comme*

$$u_a = -\frac{1}{r} B^T P e \quad (4.15)$$

$$\underline{\theta}_f^{(q)} = -r_1 \xi(\underline{x}) B^T P e \quad (4.16)$$

$$\underline{\theta}_g^{(q)} = -r_2 \xi(\underline{x}) B^T P e u_i \quad (4.17)$$

$$\underline{\theta}_D^{(q)} = r_3 \xi(\underline{x}) g(\underline{x}, t) B^T P e \quad (4.18)$$

Où  $r > 0, r_i > 0, i = 1 \sim 2$ , et  $P = P^T > 0$  est la solution de l'équation de *Riccati* suivante

$$PA + A^T P + Q - PB \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{\rho^2} \right) B^T P = 0 \quad (4.19)$$

Où  $Q = Q^T > 0$  est une matrice de pondération prescrite. Par conséquent, la performance de poursuite  $H^\infty$  peut être obtenue pour un niveau d'atténuation  $\rho$  prescrit et toutes les variables du système en boucle fermée sont bornées. [Chen,96],[Balas,11],[C.Wang,02a]

Afin d'analyser la stabilité en boucle fermée, la fonction de Lyapunov est choisie comme [Balas,11],

$$V = \frac{1}{2} \underline{e}^T P e + \frac{\alpha}{2r_1} \tilde{\theta}_f^T \tilde{\theta}_f + \frac{\alpha}{2r_2} \tilde{\theta}_g^T \tilde{\theta}_g + \frac{(1 - \alpha)}{2r_3} \tilde{\theta}_D^T \tilde{\theta}_D \quad (4.20)$$

La dérivée de (4.20) par rapport au temps, nous obtenons

$$\begin{aligned}
V^{(q)}(t) &= \frac{1}{2} \left( \underline{e}^{(q)}(t) \right)^T P \underline{e}(t) + \frac{1}{2} \underline{e}^T(t) P \underline{e}^{(q)}(t) \\
&\quad + \frac{\alpha}{r_1} (\tilde{\theta}_f^T) (\tilde{\theta}_f^q) + \frac{\alpha}{r_2} (\tilde{\theta}_g^T) (\tilde{\theta}_g^q) + \frac{(1-\alpha)}{r_3} (\tilde{\theta}_D^T) (\tilde{\theta}_D^q)
\end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned}
V^{(q)} &= \frac{1}{2} \underline{e}^T A^T P \underline{e} + [\alpha (\xi^T \tilde{\theta}_f + \xi^T \tilde{\theta}_g u_i) - (1-\alpha) g(x, t) \xi^T \tilde{\theta}_D + u_a + \omega]^T B^T P \underline{e} \\
&\quad + \frac{1}{2} \underline{e}^T P A \underline{e} + \underline{e}^T P B [\alpha (\xi^T \tilde{\theta}_f + \xi^T \tilde{\theta}_g u_i) - (1-\alpha) g(x, t) \xi^T \tilde{\theta}_D + u_a + \omega] \\
&\quad + \frac{\alpha}{r_1} \tilde{\theta}_f^T \tilde{\theta}_f^{(q)} + \frac{\alpha}{r_2} \tilde{\theta}_g^T \tilde{\theta}_g^{(q)} + \frac{(1-\alpha)}{r_3} \tilde{\theta}_D^T \tilde{\theta}_D^{(q)} \\
&= \frac{1}{2} \underline{e}^T \left( P A + A^T P - \frac{2}{r} P B B^T P \right) \underline{e} + \left( \alpha \underline{e}^T P B \xi^T(x) + \frac{\alpha}{r_1} \tilde{\theta}_f^{(q)T} \right) \tilde{\theta}_f \\
&\quad + \left( \alpha \underline{e}^T P B \xi^T(x) u_i + \frac{\alpha}{r_1} \tilde{\theta}_g^{(q)T} \right) \tilde{\theta}_g - ((1-\alpha) \underline{e}^T P B g(x, t) \xi^T(x) \\
&\quad - \frac{(1-\alpha)}{r_3} \tilde{\theta}_D^{(q)T} \tilde{\theta}_D) + \frac{1}{2} (\omega^T B^T P \underline{e} + \underline{e}^T P B \omega)
\end{aligned} \quad (4.22)$$

Avec le compensateur robuste  $u_a$  et les lois adaptatives floues sont donnés par (4.15)-(4.18), après une simple manipulation, nous avons

$$\begin{aligned}
V^{(q)}(t) &= -\frac{1}{2} \underline{e}^T Q \underline{e} - \frac{1}{2\rho^2} \underline{e}^T P B B^T \underline{e} + \underline{e}^T P B \omega \\
&= -\frac{1}{2} \underline{e}^T Q \underline{e} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho} B^T P \underline{e} - \rho \omega \right)^T \left( \frac{1}{\rho} B^T P \underline{e} - \rho \omega \right) + \frac{1}{2} \rho^2 \omega^T \omega \\
&\leq -\frac{1}{2} \underline{e}^T Q \underline{e} + \frac{1}{2} \rho^2 \omega^T \omega
\end{aligned} \quad (4.23)$$

l'intégration de (2.23) à partir de  $t = 0$  à  $t = T$ ,

$$V(T) - V(0) \leq -\frac{1}{2} \int_0^T \left( \underline{e}^T Q \underline{e} dt + \frac{1}{2} \rho^2 w_1^T w_1 \right) dt \quad (4.24)$$

Puisque  $V(T) \geq 0$ , (4.24) peut être réécrite comme suit

$$\int_0^T \underline{e}^T Q \underline{e} dt \leq e^T(0) P e(0) + \theta^T(0) \theta(0) + \rho^2 \int_0^T w_1^T w_1 dt. \quad (4.25)$$

Donc, l'approche  $H^\infty$  peut être obtenue. Et la preuve est terminée.

## IV.4 Exemple de simulation

Dans cette partie, on applique la stratégie de commande hybride adaptative floue  $H^\infty$  pour la synchronisation des deux différents systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire de *Duffing*.

On considère deux systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire de *Duffing* comme suit,

Le premier est un système de référence donné comme

$$D^q y_1 = y_2$$

$$D^q y_2 = 1.2y_1 - y_2 - y_1^2 + 0.5 \cos(t)$$

Le second est le système réponse (de commande)

$$D^q x_1 = x_2$$

$$D^q x_2 = x_1 - 1.8x_2 - x_1^2 + 0.9 \cos(t) + u(t) + d(t)$$

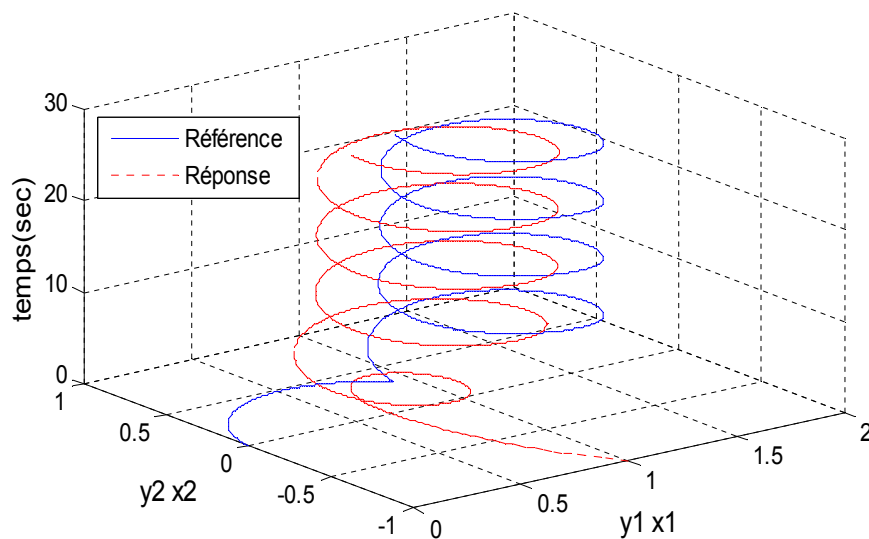
Où la perturbation externe donnée comme  $d(t) = 0.1\sin(t)$ .

L'objectif principal est de commander notre système de réponse pour suivre le système de référence. Avec les fonctions  $f(\underline{x}, t)$  et  $g(\underline{x}, t)$  sont totalement inconnues.

Les conditions initiales sont choisies comme suit  $\underline{y}(0) = [0, 0]^T$  et  $\underline{x}(0) = [1, -1]^T$  respectivement. On considère dans ce cas deux valeurs différentes de  $q = 0.95$  et  $q = 1.15$  pour tester la robustesse.

Pour les autres constantes de conception sont fixées comme suit  $k_1 = k_2 = 1$ ,  $r_1 = 200$ ,  $r_2 = 40$ ,  $r_3 = 100$ ,  $r = 0.005$ ,  $\rho = 0.05$  et le pas  $h = 0.01$ .

1. Pour  $q = 0.95$  nous avons les résultats suivants :



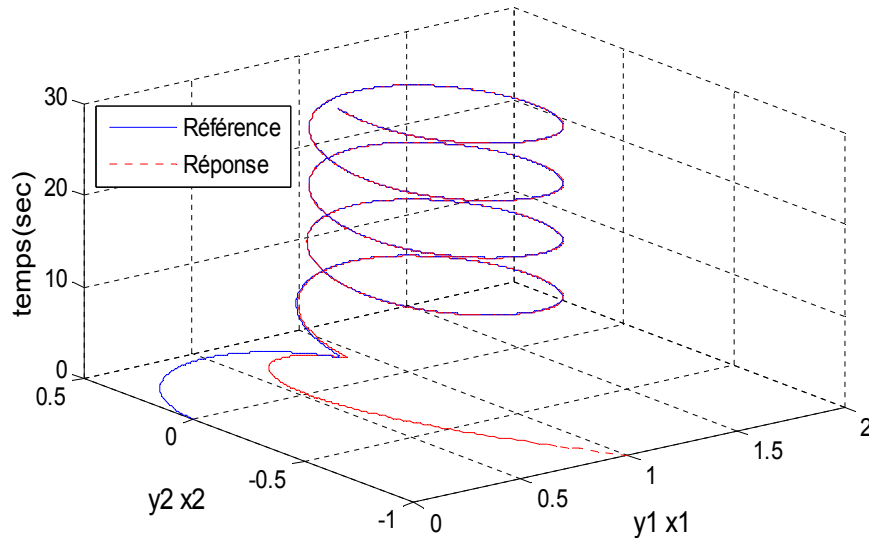
FigIV.1. Plan de phase des systèmes sans commande.

On applique la loi de commande globale (4.4) comme suit,

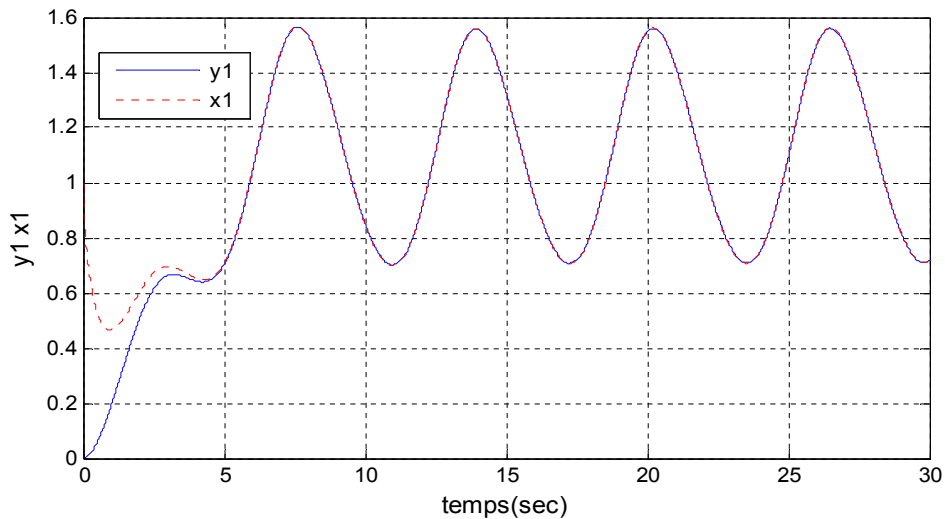
$$u = \alpha u_i + (1 - \alpha) u_d$$

Les figures (IV.1 et IV.3) illustrent respectivement pour les deux valeurs de  $q$  les résultats de simulation sans la commande étudiée. Par contre les figures (IV.2 et IV.4) illustrent respectivement les résultats de simulation de la commande hybride adaptative floue  $H^\infty$ .

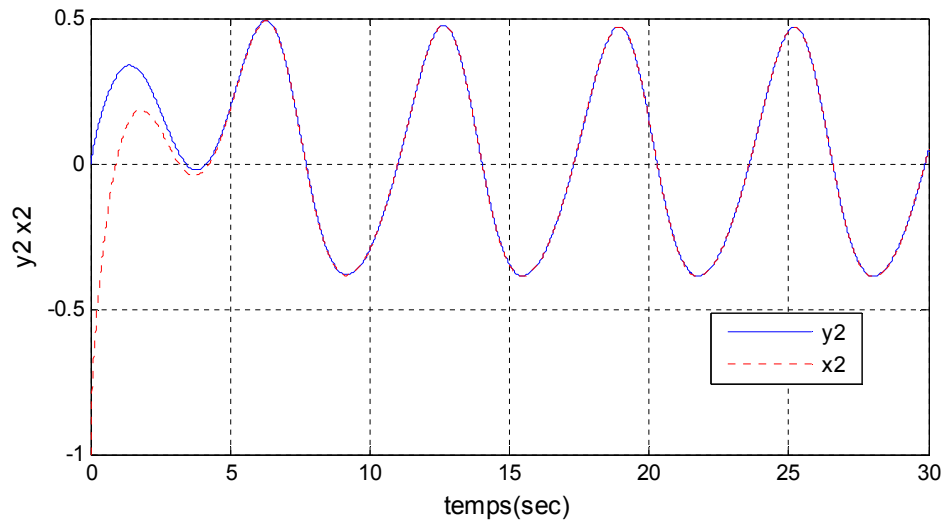
(a). Performance de synchronisation du signal de référence et de réponse.



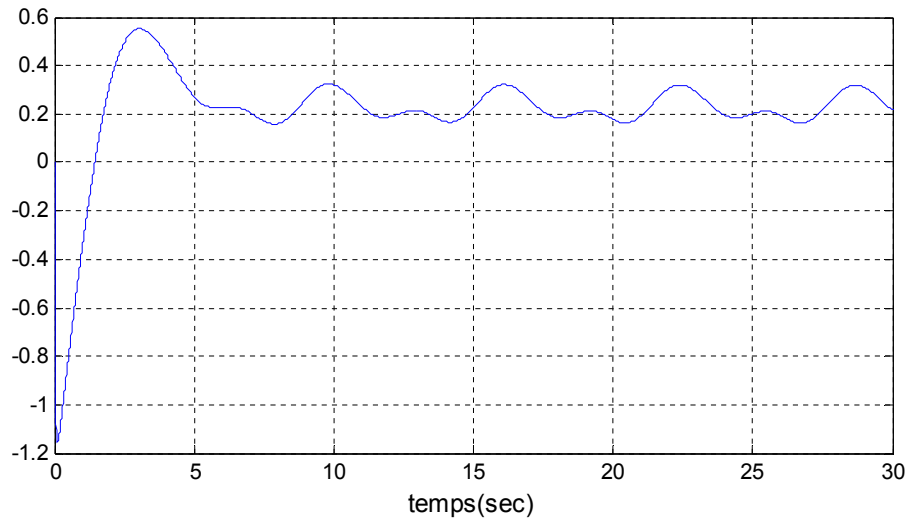
(b). Trajectoires des états  $x_1$  et  $y_1$



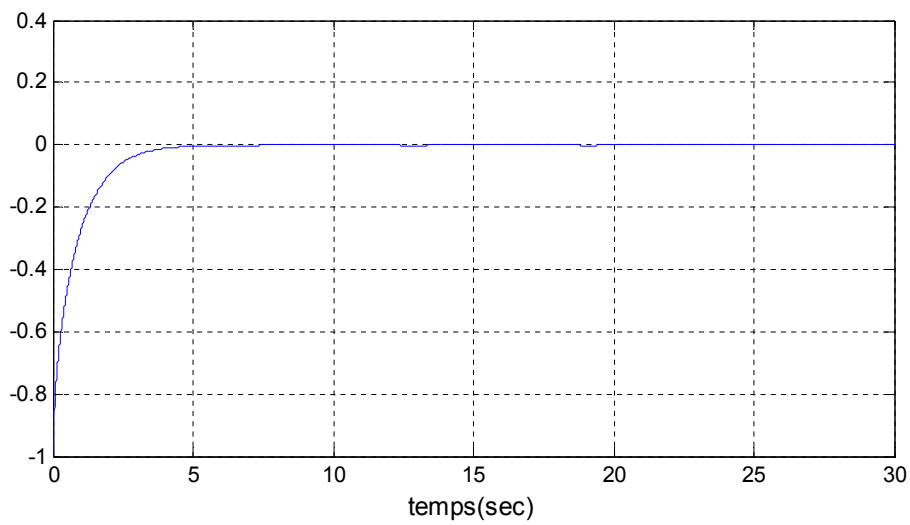
(c). Trajectoires des états  $x_2$  et  $y_2$

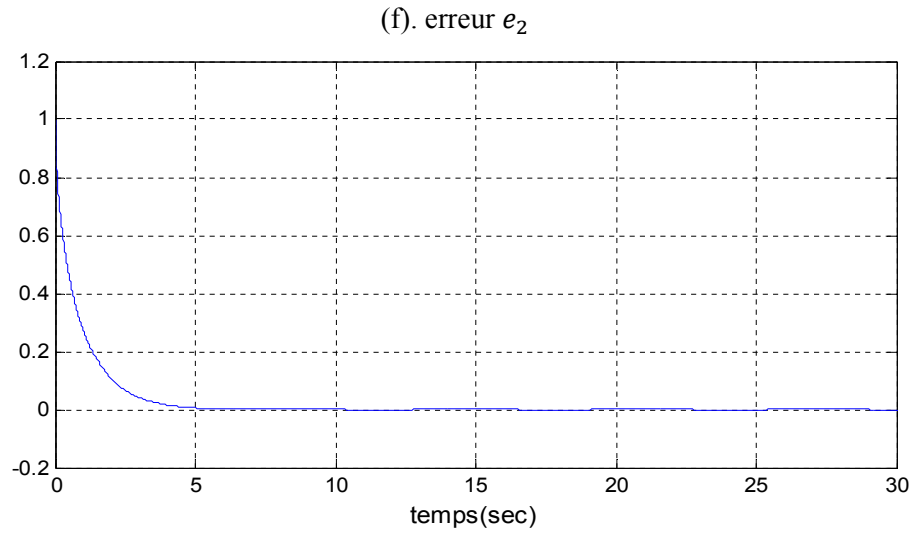


(d). Signal de commande  $u$



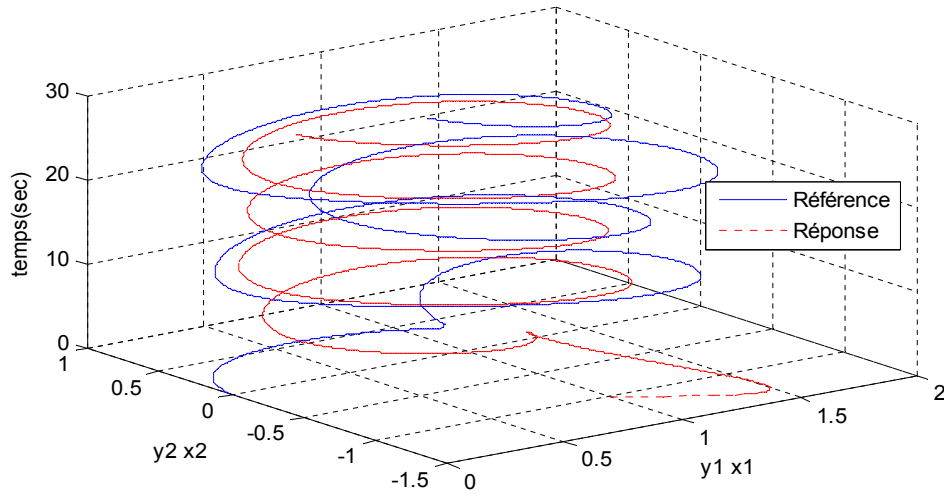
(e). erreur  $e_1$





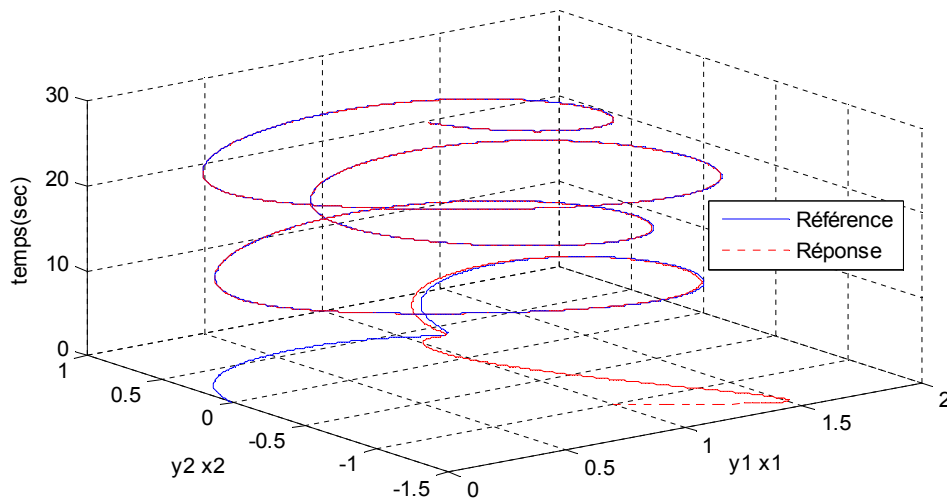
FigIV.2. Résultats de simulation avec commande pour  $q=0.95$ .

Pour  $q = 1.15$  nous avons les résultats suivants :

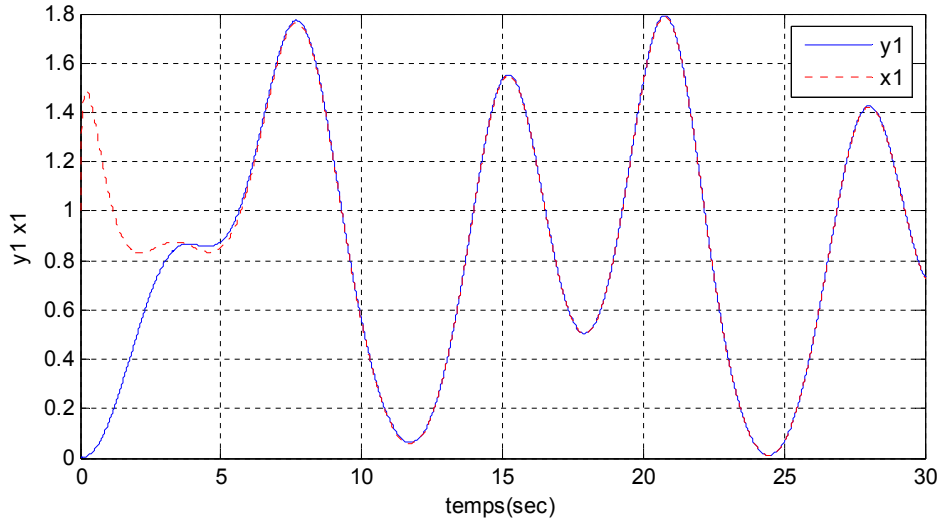


FigIV.3. Plan de phase des systèmes sans commande.

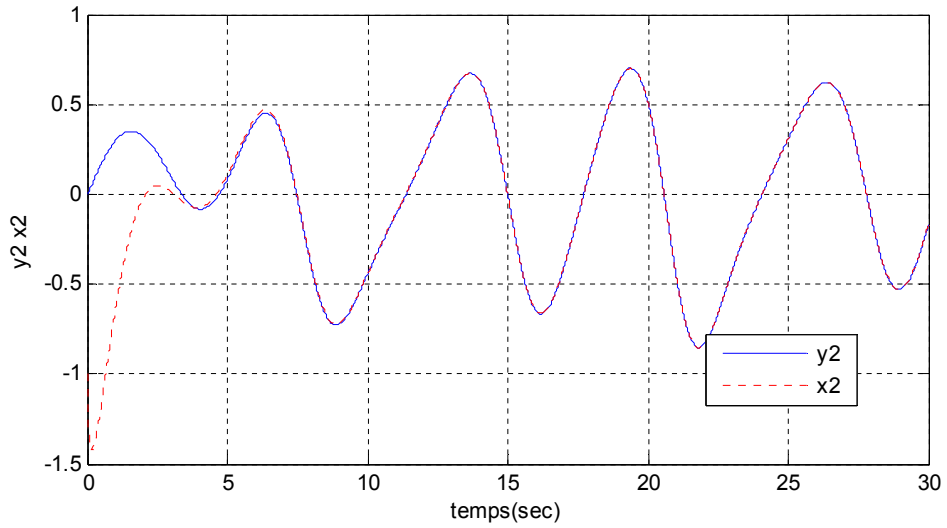
(a). Performance de synchronisation du signal de référence et de réponse.



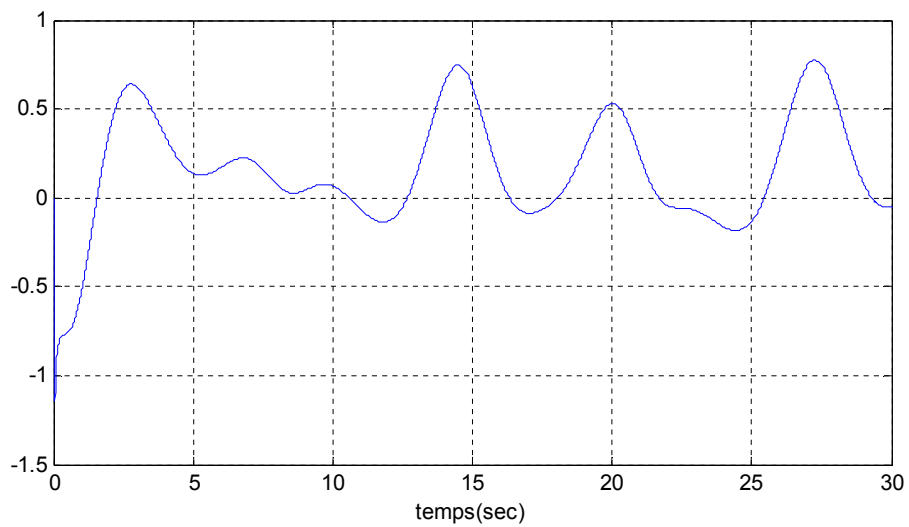
(b). Trajectoires des états  $x_1$  et  $y_1$

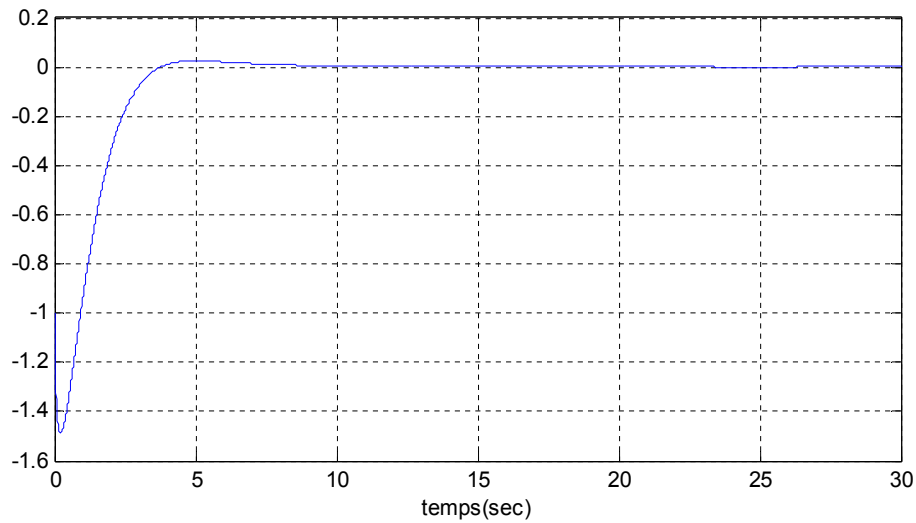
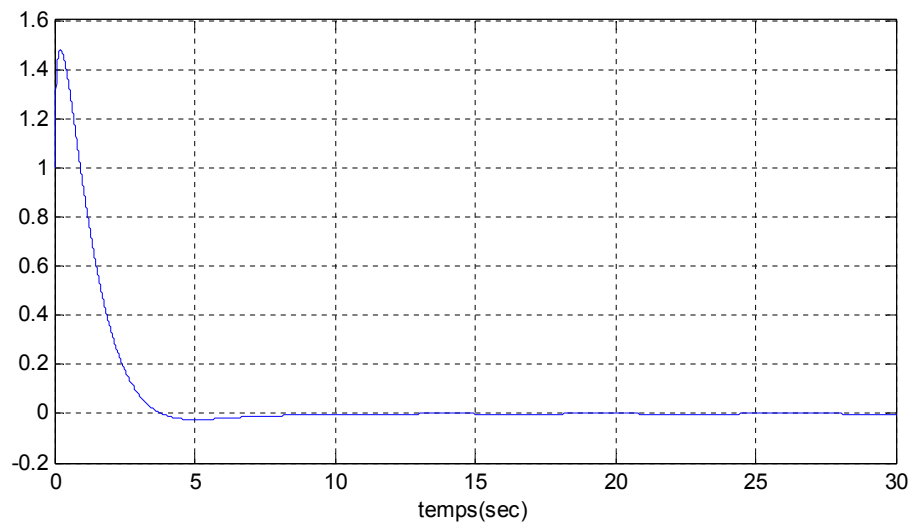


(c). Trajectoires des états  $x_2$  et  $y_2$



(d). Signal de commande  $u$



(e). erreur  $e_1$ (f). erreur  $e_2$ FigIV.4. Résultats de simulation avec commande pour  $q = 1.15$ .

### Discussion des résultats

- La signification de la commande hybride adaptative floue  $H^\infty$  dans les simulations pour différentes valeurs de  $q$  est manifeste.
- Les résultats de simulation prouvent que la synchronisation rapide des systèmes de référence et de réponse peut être réalisée.
- pour  $q$  réduit on voit que le chaos est réduit, c.-à-d. que l'erreur de synchronisation est réduite, en conséquence.
- On conclut que la commande étudiée est valable pour ce genre de systèmes.

## IV.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié une commande hybride adaptative floue pour réaliser la performance de la poursuite des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire.

C'est une méthodologie de conception flexible par le compromis entre la connaissance du système et la connaissance de commande, on utilise le facteur de pondération  $\alpha$  adopté pour additionner l'ensemble de commande adaptative floue indirecte avec l'ensemble de commande adaptative floue directe.

Basé sur l'approche de la synthèse de Lyapunov, des paramètres libres du contrôleur adaptatif flou peuvent être accordés en ligne par la loi de commande de feedback et les lois d'adaptation.

Pour démontrer l'efficacité de la méthodologie étudiée, un exemple de simulation est donné. La trajectoire de sortie d'un système de réponse chaotique d'ordre fractionnaire à poursuivre la trajectoire du système de référence chaotique d'ordre fractionnaire.

Enfin on termine ce chapitre par un exemple de simulation pour valider l'efficacité de cette stratégie de commande d'une classe des systèmes d'ordre fractionnaire.

---

## *Conclusion générale*

---

# Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons étudié des développements des lois de commande et de stabilisation des systèmes non linéaires chaotiques à dérivée d'ordre fractionnaire pour la synchronisation et la réalisation des performances de poursuite.

L'approche utilisée est basée sur la nouvelle généralisation de la méthode de *Grünwald-Letnikov* permettant de résoudre les équations d'ordre fractionnaire des systèmes.

Ce travail s'inscrit dans un des axes de la théorie de la commande des systèmes chaotiques non linéaires fractionnaire incertains, la complexité étant dans l'ordre non entier de la dérivation des équations différentielles décrivant une classe de processus non linéaires.

Ce mémoire peut se décomposer en quatre chapitres principaux :

- Dans le premier chapitre, nous avons présenté l'état de l'art sur les systèmes à dérivée d'ordre fractionnaire, et on présente aussi une méthode numérique s'appuyant sur l'approximation de la définition de *Grünwald-Letnikov* afin d'évaluer numériquement la dérivée fractionnaire des fonctions et de résoudre les équations à dérivée fractionnaire. Afin de décrire, les systèmes chaotiques fractionnaires de *Duffing-Holmes* comme des exemples d'application.
- Le deuxième chapitre est consacré au développement de loi de commande adaptative floue  $H^\infty$  pour traiter la synchronisation de chaos entre deux systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire incertain. En se basant sur l'approche de la synthèse de Lyapunov, des paramètres libres du contrôleur adaptatif flou peuvent être accordés en ligne par la loi de commande de feedback et les lois d'adaptations.
- Dans le chapitre III, nous avons étudié une commande hybride avancée par mode glissant pour réaliser la performance de poursuite des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire. C'est une méthodologie de conception flexible par le compromis entre la connaissance du système et la connaissance de la commande, on utilise un facteur de pondération adopté pour additionner un ensemble d'effort de commande adaptative floue indirecte avec un ensemble de commande adaptative floue directe. En ce qui concerne le phénomène de *chattering*, nous avons appliqué le régulateur PI adaptatif fractionnaire pour éliminer ce broutement.
- Nous avons étudié dans le dernier chapitre une commande hybride adaptative floue robuste pour réaliser la performance de la poursuite des systèmes chaotiques d'ordre

fractionnaire. En se basant sur l'approche de la synthèse de Lyapunov, des paramètres libres du contrôleur adaptatif flou peuvent être accordés en ligne par la loi de commande de feedback et les lois d'adaptation.

Pour démontrer l'efficacité de la méthodologie étudiée dans ce mémoire, des exemples de simulation sont donnés pour valider l'efficacité de ces stratégies de commande.

La trajectoire de sortie des systèmes de réponse chaotiques d'ordre fractionnaire à poursuivre la trajectoire des systèmes de référence chaotiques d'ordre fractionnaire.

Dans tous les cas, nous montrons que l'utilisation des systèmes d'ordre fractionnaire permet d'améliorer le niveau de performance des systèmes de commande concernant la phase transitoire de la réponse, et d'obtenir une meilleure robustesse contre les bruits et les perturbations pour différente valeur de l'ordre fractionnaire  $0 < q < 2$ .

## **Perspectives**

Nous pouvons notamment proposer les perspectives suivantes :

- la recherche d'une structure d'observateurs robustes au cas des systèmes à dérivée d'ordre non entier comportant des bruits dans la dynamique et la sortie du système.
- la commande basée sur un observateur des systèmes non linéaires fractionnaires pour la synchronisation chaotique avec, par exemple, des applications aux communications sécurisées.
- Enfin, la recherche de valider les résultats présentés dans ce mémoire sur des systèmes *MIMO* d'ordre fractionnaire et sur des processus réels.

---

# *Bibliographie*

---

# Bibliographie

- [Ammour,11] A. Si Ammour, « contribution à la commande par modes glissants d'ordre fractionnaire », thèse de Doctorat, Université de Tizi-Ouzou, Algérie, 2011.
- [Balas,11] BalasV. E, Tsung-C. L , Chia-H. K, « Fractional Order Chaotic System Tracking Design Based on Adaptive Hybrid Intelligent Control » IEEE International Conference on Fuzzy Systems, June 27-30, 2011.
- [C.Wang,02a] , Tsung-C. L, Tsu-T. L, Han-L. L, « Adaptive Hybrid Intelligent Control for Uncertain Nonlinear Dynamical Systems » IEEE TRANSACTIONS ON SYSTEMS, VOL. 32, NO. 5, OCTOBER 2002.
- [C.Wang,02b] C.Wang-H, Tsung-C. L, L, Han-L. L, « Direct Adaptive Fuzzy-Neural Control With State Observer and Supervisory Controller for Unknown Nonlinear Dynamical Systems » IEEE TRANSACTIONS ON SYSTEMS, VOL. 10, NO. 1, FEBRUARY 2002.
- [Chen,96] Chen-H. Lee, Y-C. Chang, «  $H^\infty$  Tracking design of uncertain nonlinear SISO systems : Adaptive fuzzy approach » IEEE Trans on systems, Vol. 4, NO. 1, February 1996.
- [Deng,05] Deng WH, Li CP. «Chaos synchronization of the fractional Lü system»Physica A2005;353:61–72.
- [Diethelm,02a] Diethelm K, Ford NJ, « Analysis of fractional differential equations » Journal of Mathematical Analysis and Applications 265,229–248 2002.
- [Diethelm,02b] Diethelm K, Ford NJ, Freed AD, « A predictor–corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations » Nonlinear Dynamics 29: 3–22, 2002.
- [Diethelm,04] Diethelm K, Ford NJ, Freed AD, « Detailed error analysis for a fractional Adams method » Numerical Algorithms 36:31–52, 2004.
- [Huang,11] Huang Yi-S, Dong-S X, Xiao-X C, Qi-X Z, Zheng-W W, «  $H^\infty$  tracking-based decentralized hybrid adaptive output feedback fuzzy control for a class of large-scale nonlinear systems » ELSEVIER, Fuzzy Sets and Systems 171 (2011) 72 – 92
-

- [Ibrahima,11] Ibrahima N'DOYE « Généralisation du lemme de Gronwall-Bellman pour la stabilisation des systèmes fractionnaires », thèse de Doctorat, Ecole doctorale IAEM Lorraine, Maroc, 2011.
- [Kuo,11] Kuo.C-H, Tsung-C. L , Valentina E. B, « Uncertain Fractional Order Chaotic Systems Tracking Design via Adaptive Hybrid Fuzzy Sliding Mode Control », *Int. J. of Computers, Communications & Control*, VI (2011), No. 3 (September), pp. 418-427.
- [Ladaci,07] S. Ladaci, « Contribution à la commande adaptative d'ordre fractionnaire » thèse de Doctorat, Université de Constantine, Algérie, 2007.
- [Momani,10] S. Momani, S.H. Hosseinnia, R. Ghaderi, A. Ranjbar N, M. Mahmoudian « Sliding mode synchronization of an uncertain fractional order chaotic system » *ELSEVIER, Computers and Mathematics with Applications* 59 (2010) 1637-1643.
- [Ming,11] Ming-C C , Tsung-C L, « Adaptive hybrid type-2 intelligent sliding mode control for uncertain nonlinear multivariable dynamical systems » *ELSEVIER, Fuzzy Sets and Systems* 171 (2011) 44 – 71.
- [Ougli,09] A. El Ougli, « Intégration des techniques floues à la synthèse de contrôleurs adaptatifs » thèse de Doctorat, Université Sidi Mohamed Ben Abdellah, Maroc, 2009.
- [Petras,06a] Petráš. I, «A note on the fractional-order Chua's system», *ELSEVIER, Chaos SolitonsFractals*, VOL 38, I 1, October 2008.
- [Petras,06b] Petráš. I, « A Note on the Fractional-Order Cellular Neural Networks»*InternationalProceedings of the IEEE world congress on computational intelligence,international joint conference on neural networks*. 2006. p. 16–21
- [Petras,09] Petráš. I, and Bednarova D, « Fractional - Order Chaotic Systems » *EEE Conference on Emerging Technologies & Factory Automation, ETFA 2009*, September 22–25, Palma de Mallorca, Spain.
- [Petras,11a] Petráš. I, « Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation Series: Nonlinear Physical Science », Springer, HEP. 2011.
-

- [Petras,11b] Petráš. I, « Fractional Derivatives, Fractional Integrals, and Fractional Differential Equations in Matlab », Published by InTech, Assi, JanezaTrdine 9, 51000 Rijeka, Croatia, 2011.
- [Redjem,12] W. Rdjem, « Commande adaptative floue à base d'observateur des systèmes non linéaires incertains avec une direction de commande connue ou inconnue » Mémoire de Master, Université de M'sila, Algérie, 2012.
- [Tidjani,09] M. Tidjani, « Synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques à dérivées fractionnaires »Mémoire de Magistère , Université de Constantine, Algérie, 2009.
- [Tsung,04] Tsung-C L, Chi- W, Han-L L, « Observer-based indirect adaptive fuzzy-neural tracking control for nonlinear SISO systems using VSS and  $H^\infty$  approaches », ELSEVIER  
Fuzzy Sets and Systems 143 (2004) 211 – 232.
- [Tsung,11] Tsung-C L, Chia-H K, «  $H^\infty$  synchronization of uncertain fractional order chaotic systems: Adaptive fuzzy approach », ELSEVIER ISA Transactions 50 (2011) 548–556.
- [Tsung,12] Tsung-C L, Chia-H K, Tun-Y L, Valentina E. B, «Adaptive fuzzy  $H^\infty$  tracking design of SISO uncertain nonlinear fractional order time-delay systems », Nonlinear Dyn (2012) 69:1639–1650.
- [Wang,92] L.X. Wang, « Fuzzy systems are universal approximators », IEEE International Conference on Fuzzy Systems, pp. 1163–1170, San Diego, 1992.
- [Wang,93] L.X. Wang, « Stable adaptive fuzzy control of nonlinear systems», IEEE Trans. Fuzzy Systems, vol. 1, pp. 146–155, 1993.
- [Wang,96] L.X. Wang, « Stable adaptive fuzzy controllers with application to inverted pendulum tracking », IEEE Trans on systems, Man. Cybern-Part B. vol. 36, no. 5, October 1996.
- [Wong,09] H.F. Ho, Y.K. Wong, A.B. Rad « Adaptive fuzzy sliding mode control with chattering elimination for nonlinear SISO systems », ELSEVIER Simulation Modelling Practice and Theory 17 (2009) 1199–1210.
-

- [Yuan,11] Yuan.T- L, Tsung-C L, Valentina E. B, « Adaptive fuzzy sliding mode control for synchronization of uncertain fractional order chaotic systems » , ELSEVIER Chaos, Solitons & Fractals 44 (2011) 791–801.

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME  
DE MASTER EN GENIE ELECTRIQUE  
**SPECIALITE: AUTOMATIQUE**

Proposé et dirigé par : *Mr. KHETTAB Khatir.*

Présenté par : *BOUDJELLAL Imadeddine.*

**Thème**

**Commande Robuste Adaptative Floue des Systèmes  
d'Ordre Fractionnaire**

***Résumé :***

Dans ce mémoire, nous avons étudié des développements des lois de commande hybride (directe / indirecte) avancée (adaptative, floue, mode glissant et  $H^\infty$ ) et la stabilisation des systèmes non linéaires incertains chaotiques à dérivée d'ordre fractionnaire pour la synchronisation et la réalisation des performances de poursuite.

La théorie de Lyapunov est employée pour assurer la stabilité du système en feedback. Pour démontrer l'efficacité de la méthodologie étudiée dans ce mémoire, des exemples de simulation sont donnés pour valider l'efficacité de ces stratégies de commande.

La trajectoire de sortie des systèmes de réponse chaotiques d'ordre fractionnaire à poursuivre la trajectoire des systèmes de référence chaotiques d'ordre fractionnaire.

***Mots-clés :***

**Commande adaptative floue, systèmes fractionnaires, systèmes chaotiques, critère de Lyapunov, commande par mode glissant.**

**N° d'ordre : 065**