# Table des matières

# Introduction

Les espaces les plus connu sont les espaces Lebesgue, Sobolev, Lorentz,.... Les espaces de Lorentz jouent rôle important dans l'analyse harmonique, plus précisément dans la théorie de l'interpolation.

Au cours des dernières années, il y a eu un intérêt croissant dans la généralisation des espaces classiques comme les espaces de Lebesgue, les espaces de Sobolev et les espaces de Lorentz au cas les composants de ces espaces sont des fonctions. Dans ce mémoire on s'intéresse à d'étude les espaces de Lorentz avec exposants variables.

Le travail se décompose de trois chapitres comme suit:

Dans le premier chapitre on donne quelques rappels sur l'espace de Lebesgue avec exposant variable et leurs propriétés les plus importantes dans la suite de ce travail, et quelques théorèmes sur l'analyse fonctionnelle. Ce chapitre termine par l'espace de Lebesgue mixte.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des espaces de Lorentz classique et leurs propriétés essentielles et avant ca on donne la définition de la fonction de distribution et le réarrangement décroissante. Ce chapitre se termine par la définition de la fonction maximale.

Dans le dernier chapitre, on s'intéresse à l'étude d'un espace de Lorentz avec exposant variable et leurs propriétés de base et on donne un théorème d'interpolation (l'interpolation réelle).

# Chapitre 1

# Espace de Lebesgue à exposant variable

L'objet de ce chapitre est de rappeler les propriétés de l'espace de Lebesgue avec exposant variable.

## 1.1 Rappel

**Définition 1.1.1** *Soit $X$ est un $\Bbbk$-espace vectoriel, une fonction $\rho : X \to [0;\infty[$ est appelé une semi-modulaire sur $X$ si les propriétés suivants vérifiés:*

1. $\varrho(0) = 0$
2. $\varrho(\lambda x) = \varrho(x)$ *pour tout* $x \in X$ , $\lambda \in \Bbbk$ *avec* $|\lambda| = 1$.
3. $\varrho$ est continue à gauche.
4. $\rho$ *est convexe,* $\rho\left(\alpha f + \beta g\right) \leq \alpha\rho\left(f\right) + \beta\rho\left(g\right)$ *pour tout* $\alpha, \beta \in [0, 1]$ *avec* $\alpha + \beta = 1$.
5. $\varrho(\lambda x) = 0$ *pour tout* $\lambda > 0$ *implique* $x = 0$.

   *Une semi modulaire est dite modulaire si* $\varrho(x) = 0$ *implique* $x = 0$.

   *Une semi modulaire est dite continue si l'application* $\lambda \to \varrho(\lambda x)$ *est continue sur* $[0, \infty)$ *pour tout* $x \in X$.

**Définition 1.1.2** *Si $\rho$ est une semi-modulaire ou modulaire sur $X$ , alors*

$$X_\rho := \left\{x \in X : \lim_{\lambda \to 0} \rho(\lambda x) = 0\right\}$$

*est appelé un espace semi-modulaire ou l'espace modulaire.*

Soit $\rho$ est une semi-modulaire. Comme $\rho(\lambda x) = \rho(|\lambda| x)$, par la convexité, $\rho \geq 0$ et $\varrho(0) = 0$, on a

$\rho(\lambda x) = \rho(|\lambda| x) \leq |\lambda| \rho(x)$ pour tout $|\lambda| \leq 1$. (1)

$\rho(\lambda x) = \rho(|\lambda| x) \geq |\lambda| \rho(x)$ pour tout $|\lambda| \geq 1$.

Pour cela on peut définir $X_\rho$ par

$$X_\rho := \{x \in X : \rho(\lambda x) < \infty \text{ pour certains } \lambda > 0\},$$

car pour $\lambda^{'} < \lambda$ nous avons par que

$$\rho\left(\lambda' x\right) = \rho\left(\frac{\lambda^{'}}{\lambda} \lambda x\right) \leq \frac{\lambda^{'}}{\lambda} \rho(\lambda x) \to 0$$

si $\lambda^{'} \to 0$.

**Définition 1.1.3** *(quasi-convexe) $f$ est quasi-convexe , si $f(\alpha x + \beta y) \leq C(\alpha f(x) + \beta f(y))$ pour tout $\alpha, \beta \in [0,1]$ avec $\alpha + \beta = 1$ et $C > 1$.*

***Théorème 1.1.1*** *Soit $\rho$ est une semi-modulaire quasi-convexe sur $X$. Alors $X_\rho$ est un espace quasi -norme avec le quasi- norme de Luxembourg donnéepar*

$$\|X\|_\rho := \inf\left\{\lambda > 0 : \rho\left(\frac{1}{\lambda} x\right) \leq 1\right\}.$$

**Preuve.** Voir$[1, p22]$ ■

## 1.2 Fonction d'exposant

**Définition 1.2.1** *Soit l'ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble de toutes les fonctions mesurables, $p(\cdot) : \Omega \to [1, \infty[$,*

$$\mathcal{P}(\Omega) := \{p \textit{ est mesurable telle que: } p : \Omega \to [1, \infty[\}.$$

*et*

$$\mathcal{P}_0(\Omega) := \{p \text{ est mesurable } \text{ telle que: } p : \Omega \to (c, \infty[, \ c > 0\}$$

*Pour* $p \in \mathcal{P}(\Omega)$ *et* $U \subset \Omega$ *on définie*

- $p_U^- = inf\ ess_{x \in U} p(x)$
- $p_U^+ = sup\ ess_{x \in U} p(x)$
- $p^- = p_\Omega^-$
- $p^+ = p_\Omega^+$

Les éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$ (ou $\mathcal{P}_0(\Omega)$ ) sont appelés les fonctions d'exposants. Nous définissons le conjugué de la fonction d'exposant par la formule

$$\forall x \in \Omega, \frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1.$$

**Définition 1.2.2** *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $p \in \mathcal{P}_0(\Omega)$ *et une fonction mesurable* $f$, *on définit le modulaire associé à p par:*

$$\rho_{p(\cdot),\Omega}(f) = \int_\Omega |f(x)|^{p(x)}\, dx.$$

*Nous allons utilisé le modulaire pour définit l'espace* $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *dans la section suivante.*

## 1.3 L'espace $L^{p(\cdot)}(\Omega)$

**Définition 1.3.1** *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *et* $p \in \mathcal{P}_0(\Omega)$. *L'espace* $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *est l'ensemble des fonctions mesurables* $f$ *telle que :*

$$\rho_{p(\cdot),\Omega}(f/\lambda) = \int_\Omega \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx < \infty, \text{ pour certains } \lambda > 0.$$

*On définit* $L^{p(\cdot)}_{loc}(\Omega)$ *est l'ensemble des fonctions mesurables* $f$ *telle que* $f \in L^{p(\cdot)}(K)$ *pour tout compact* $K \subset \Omega$.

**Exemple 1.3.1** *Soit* $\Omega = [1, \infty[$, $p(x) = x$ *et* $f(x) = 1$, *alors* $\rho(f) = \infty$, *mais pour tout* $\lambda > 1$, $\rho(f/\lambda) = \int_1^\infty \lambda^{-x} dx = \frac{1}{\lambda \log(\lambda)} < \infty$. *De même, si on pose* $\Omega = [0, 1]$ *et* $p(x) = \frac{1}{x}$, *encore soit* $f(x) = 1$, *alors* $\rho(f) < \infty$, *mais* $\rho(f/\lambda) = \infty$ *pour tout* $\lambda < 1$.

**Théorème 1.3.1** *Soit* $\Omega$ *un ouvert et* $p \in \mathcal{P}_0(\Omega)$, $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *est un espace vectoriel.*

**Preuve.** L'ensemble des fonctions mesurables est une espace vectoriel. On a $0 \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Il suffit de montrer que pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, si $f, g \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, alors $\alpha f + \beta g \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Il existe $\lambda > 0$ telle que $\rho(f/\lambda), \rho(g/\lambda) < \infty$, donc si on prend $\mu = (|\alpha| + |\beta|)\lambda$, alors

$$\begin{aligned} \rho\left(\frac{\alpha f + \beta g}{\mu}\right) &= \rho\left(\frac{|\alpha f + \beta g|}{\mu}\right) \leq \rho\left(\frac{|\alpha|}{|\alpha| + |\beta|}\frac{|f|}{\lambda} + \frac{|\beta|}{|\alpha| + |\beta|}\frac{|g|}{|\lambda|}\right) \\ &\leq C\left(\frac{|\alpha|}{|\alpha| + |\beta|}\rho(f/\lambda) + \frac{|\beta|}{|\alpha| + |\beta|}\rho(g/\lambda)\right) < \infty. \end{aligned}$$

■

**Définition 1.3.2** *Soit* $\Omega$ *et* $p \in \mathcal{P}_0(\Omega)$, *si* $f$ *est une fonction mesurable on définie:*

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \rho_{p(\cdot),\Omega}(f/\lambda) \leq 1\right\}.$$

**Théorème 1.3.2** *Soit* $\Omega$ *un ouvert et* $p \in \mathcal{P}_0(\Omega)$, *la fonction* $\|\cdot\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$ *définie une quasi-norme sur* $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

**Preuve.** Voir[4, $p21$] ■

**Corollaire 1.3.1** *Fixé* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *et* $p \in \mathcal{P}(\Omega)$ :

1. Si $\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$, alors $\rho(f) \leq \|f\|_{p(\cdot)}$.
2. Si $\|f\|_{p(\cdot)} > 1$, alors $\rho(f) \geq \|f\|_{p(\cdot)}$.

**Preuve.** Si $\|f\|_{p(\cdot)} = 0$, alors $f \equiv 0$ et ainsi $\rho(f) = 0$. Si $0 < \|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$, comme $\rho$ est un modulaire convexe alors

$$\rho(f) = \rho\left(\frac{\|f\|_{p(\cdot)} f}{\|f\|_{p(\cdot)}}\right) \leq \|f\|_{p(\cdot)}\, \rho\left(\frac{f}{\|f\|_{p(\cdot)}}\right) \leq \|f\|_{p(\cdot)}. \qquad \text{voir } (1).$$

Si $\|f\|_{p(\cdot)} > 1$, alors $\rho(f) > 1$, car si $\rho(f) \leq 1$, alors par la définition de la norme on trouve $\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$ et on a

$$\begin{aligned} \rho(f/\rho(f)) &= \int_\Omega \left(\frac{|f(x)|}{\rho(f)}\right)^{p(x)} dx \\ &\leq \int_\Omega |f(x)|^{p(x)}\, \rho(f)^{-1}\, dx = 1. \end{aligned}$$

Donc $\|f\|_{p(\cdot)} \leq \rho(f)$. ■

**Définition 1.3.3** *On pose* $|||f|||_{p(\cdot)} = \sup_{\rho_{p'(\cdot)}(g)\leq 1} \left|\int_\Omega f(x) g(x)\, dx\right|$. *Alors*

$$\frac{1}{4} \|f\|_{p(\cdot)} \leq |||f|||_{p(\cdot)} \leq 4 \|f\|_{p(\cdot)}.$$

**Théorème 1.3.3** *Soit* $p \in \mathcal{P}(\Omega)$. *Si l'inégalité*

$$\|f * g\|_{p(\cdot)} \leq c \|f\|_{p(\cdot)} \|g\|_1$$

*est vraie pour tout* $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *et* $g \in L^1(\Omega)$ *ssi* $p(\cdot)$ *est constante, avec* $f * g(x) = \int_\Omega f(x-y)g(y)dy$.

**Preuve.** Voir[5, p94] ■

## 1.4 L'inégalité de Hölder

L'inégalité de Hölder classique donne que pour tout $p$, $1 \leq p < \infty$, si $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}$, alors $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_\Omega |f(x) g(x)|\, dx \leq \|f\|_p \|g\|_{p'} .$$

Cette inégalité est vraie pour l'exposant variable avec une constante sur le côté droite.

**Théorème 1.4.1** *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *et* $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ *pour tout* $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *et* $g \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$, $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ *et*

$$\int_\Omega |f(x) g(x)|\, dx \leq C \|f\|_{p(\cdot)} \|g\|_{p'(\Omega)}$$

telle que $C > 0$ une constante.

**Preuve.** Voir [4, p 27] ■

**Corollaire 1.4.1** *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *et* $r(\cdot), q(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, *on pose* $\frac{1}{p(x)} = \frac{1}{q(x)} + \frac{1}{r(x)}$.

*Alors il existe une constante* $k$ *telle que pour tout* $f \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$ *et* $g \in L^{r(\cdot)}(\Omega)$, $f \cdot g \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *et*

$$\|fg\|_{p(\cdot)} \leq k \|f\|_{q(\cdot)} \|g\|_{r(\cdot)}.$$

## 1.5 La convergence dans $L^{p(\cdot)}(\Omega)$

Dans cette section, nous considérons deux types de convergence dans l'espace de Lebesgue $L^{p(\cdot)}(\Omega)$: convergence modulaire, en norme.

### 1.5.1 La convergence en modulaire et en norme

**Définition 1.5.1** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $p \in \mathcal{P}(\Omega)$, et soit une suite de fonction $\{f_k\} \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$, on dit que $f_k \longrightarrow f$ en modulaire si pour certaines $\beta > 0$, $\rho_{p(\cdot),\Omega}(\beta(f - f_k)) \longrightarrow 0$ étant que $k \longrightarrow \infty$. On dit que $f_k \longrightarrow f$ en norme si $\|f - f_k\|_{p(\cdot)} \longrightarrow 0$ telle que $k \longrightarrow \infty$.*

**Proposition 1.5.1** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $p \in \mathcal{P}(\Omega)$, la suite $\{f_k\}$ converge vers $f$ en norme ssi pour tout $\beta > 0, \rho_{p(\cdot),\Omega}(\beta(f - f_k)) \longrightarrow 0$ tant que $k \longrightarrow \infty$ en particulier, la convergence en norme implique la convergence en modulaire*

**Preuve.** Voir[4, p 44]. ■

**Exemple 1.5.1** *Soit $\Omega = [1, \infty[$ et $p(x) = x$, on pose $f = 1$ et $f_k = \chi_{[1,k]}$ alors $f_k \longrightarrow f$ en modulaire car $\rho((f - f_k)/2) = \int_k^\infty 2^{-x}dx \longrightarrow 0$ si $k \longrightarrow \infty$*

*d'autre part $f_k$ n'est pas converge vers $f$ en norme car pour tout $k \geq 1$, $\rho(f - f_k) = \int_k^\infty 1^x dx = \infty$, implique $\|f - f_k\|_{p(\cdot)} \geq 1$. Cette example est vraie pour tout $0 < \beta < 1$.*

**Théorème 1.5.1 (Propriété de Riez-Fischer)** *Soit $\Omega$ et $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, soit $\{f_k\} \subset L^{p(\cdot)}$ telle que $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{p(\cdot)} < \infty$ alors il existe $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ telle que $\sum_{k=1}^{i} f_k \to f$ en norme tant que $i \to \infty$ et $\|f\|_{p(\cdot)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{p(\cdot)}$.*

## 1.6 Complétude et les sous-ensembles denses dans $L^{p(\cdot)}(\Omega)$

**Théorème 1.6.1** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $p \in \mathcal{P}(\Omega)$. L'espace $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ est quasi-Banach .*

**Preuve.** Voir [1]. ■

**Théorème 1.6.2** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $p \in \mathcal{P}(\Omega)$ on suppose que $p_+ < \infty$ alors l'ensemble des fonctions bornées de support compact avec supp$(f) \subset \Omega$ est dense dans $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.*

**Preuve.** Voir [4, p 56] . ■

**Corollaire 1.6.1** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $p \in \mathcal{P}(\Omega)$, supposé que $p_+ < \infty$ alors les ensembles $C_c(\Omega)$ sont dense dans $L^{p(\cdot)}(\Omega)$*

**Définition 1.6.1 (Séparable)** *Un espace topologique $E$ est dit **séparable** s'il contient un sous-ensemble dense dans $E$ dénombrable.*

**Théorème 1.6.3** *Soit $\Omega$ un ouvert et $p \in \mathcal{P}(\Omega)$, alors $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ est séparable ssi $p_+ < \infty$.*

**Preuve.** Voir[4, p 60] ■

## 1.7 Dualité et réflexivité

Dans cette section nous considérons l'espace dual de $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Dans l'espace de Lebesgue classique, $L^{p'} = (L^p)^*$ avec $1 < p < \infty$. Le comportement des espaces variables est analogue si $p_+ < \infty$. Soit $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Pour tout fonction mesurable $g$, on définit l'opérateur $\phi_g$ par

$$\phi_g(f) = \int_\Omega f(x)\, g(x)\, dx.$$

**Proposition 1.7.1** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $p \in \mathcal{P}(\Omega)$ et une fonction mesurable $g$, alors $\phi_g$ est une forme linéaire continue en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ ssi $g \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ . En autre $\left\|\phi_g\right\| = \|g\|'_{p'}$ , et ainsi*

$$C\|g\|_{p'(\cdot)} \leq \left\|\phi_g\right\| \leq C\|g\|_{p'(\cdot)},$$

*avec $\|g\|_{p'(\cdot)} = \sup_{\|h\|_{p(\cdot)} \leq 1} \int_\Omega h(x)\, g(x)\, dx$.*

**Théorème 1.7.1** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $p \in \mathcal{P}(\Omega)$ avec $p_+ < \infty$. L'opérateur $V : g \to \phi_g$ est isomorphisme du $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ vers $(L^p(\Omega))^*$.*

**Définition 1.7.1** *Soit $E$ un espace de Banach , et soit $J$ l'injection canonique de $E$ dans $E^{**}$. On dit que $E$ est réflexive si $J(E) = E^{**}$.*

**Corollaire 1.7.1** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $p \in \mathcal{P}(\Omega)$ , $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ est réflexive ssi $1 < p_- < p_+ < \infty$.*

## 1.8 L'espace $\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)$

**Définition 1.8.1** *Soit $p, q \in \mathcal{P}_0$. L'espace des suites de Lebesgue mixte $\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)$ est définie sur des suites des fonctions de $L^{p(\cdot)}$ par le modulaire*

$$\rho_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)}\left((f\nu)\,\nu\right) := \sum_{\nu} \inf\left\{\lambda_\nu > 0 : \rho_{p(\cdot)}\left(f_\nu/\lambda_\nu^{\frac{1}{q(\cdot)}}\right) \leq 1\right\}$$

*La norme est définie par que:*

$$\left\|(f_\nu)_\nu\right\|_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)} := \inf\left\{\mu > 0\text{: } \rho_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)}\left(\frac{1}{\mu}\left(f_\nu\right)\nu\right) \leq 1\right\}.$$

*Si $q^+ < \infty$, alors*

$$\inf\left\{\lambda > 0\text{: } \rho_{p(\cdot)}\left(f/\lambda^{\frac{1}{q(\cdot)}}\right) \leq 1\right\} = \left\||f|^{q(\cdot)}\right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}}.$$

*et*

$$\rho_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)}\left(\left(f_\nu\right)\nu\right) = \sum_{\nu} \left\||f_\nu|^{q(\cdot)}\right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}}.$$

**Proposition 1.8.1** *Soit $p, q \in \mathcal{P}_0$, alors $\rho_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)}$ est une semi-modulaire. De plus*

$(a)$ Est une modulaire si $p^+ < \infty$.

$(b)$ Est une continue si $p^+, q^+ < \infty$.

**Théorème 1.8.1** *Soit $p, q \in \mathcal{P}(\Omega)$. Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$, ou $q$ est une constante, alors $\|\cdot\|_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)}$ est une norme.*

**Preuve.** Voir[1, $p$ 1636] ■

**Théorème 1.8.2** *Si $p, q \in \mathcal{P}_0$, alors $\|\cdot\|_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)}$ est une quasi-norme sur$\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)$.*

**Preuve.** Par le théorème 1.1.1, nous avons besoin de considérer quasi-convexité. Soit $r \in \left]0, \frac{1}{2}\min\left\{\bar{p}, \bar{q}, 2\right\}\right]$ et définie $\tilde{p} = p/r$ et $\tilde{q} = q/r$, puis clairement $\frac{1}{\tilde{p}} + \frac{1}{\tilde{q}} \leq 1$. Ainsi nous obtenons

$$\begin{aligned}
\left\|(f_\nu)_\nu + (g_\nu)_\nu\right\|_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)} &= \left\| |(f_\nu)_\nu + (g_\nu)_\nu|^r \right\|^{\frac{1}{r}}_{\ell^{\tilde{q}(\cdot)}\left(L^{\tilde{p}(\cdot)}\right)} \\
&\leq \left\| (|f_\nu|^r)_\nu + (|g_\nu|^r)_\nu \right\|^{\frac{1}{r}}_{\ell^{\tilde{q}(\cdot)}\left(L^{\tilde{p}(\cdot)}\right)} \\
&\leq \left( \left\| (|f_\nu|^r)_\nu \right\|_{\ell^{\tilde{q}(\cdot)}\left(L^{\tilde{p}(\cdot)}\right)} + \left\| (|g_\nu|^r)_\nu \right\|_{\ell^{\tilde{q}(\cdot)}\left(L^{\tilde{p}(\cdot)}\right)} \right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \left( \left\| (|f_\nu|)_\nu \right\|^r_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)} + \left\| (|g_\nu|)_\nu \right\|^r_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)} \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq 2^{\frac{1}{r}-1} \left( \left\| (|f_\nu|)_\nu \right\|_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)} + \left\| (|g_\nu|)_\nu \right\|_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)} \right).
\end{aligned}$$

■

**Remarque 1.8.1** *Si $p(\cdot) = p$ et $q(\cdot) = q$ sont des fonctions constantes, alors $\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right) = \ell^q\left(L^p\right)$.*

# Chapitre 2

# L'espace de Lorentz classique

Dans ce chapitre, nous introduisons l'espace de Lorentz $L^{(p,q)}$ et rappeler quelques propriétés. Dans la suite $(\Omega, \sum, \mu)$ est un espace $\sigma$-finie.

## 2.1 Fonction de distribution

**Définition 2.1.1** *La fonction $\mu_f : [0, \infty[ \longmapsto [0, \infty]$ définie par*

$$\mu_f(\lambda) = \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| \geq \lambda\}), \ \ \lambda \geq 0$$

*qui l'on appelle la fonction de distribution de $f$.*

**Théorème 2.1.1** *Soit $f_n$ est une fonction mesurable sur $\Omega$, $n = 1, 2, ...,$ alors*

1. $\mu_f$ est décroissante et continue à droite .
2. Si $|f(x)| \leq |g(x)|$ pour $x \in \Omega$, alors $\mu_f(\lambda) \leq \mu_g(\lambda)$ pour tout $\lambda \geq 0$.
3. $\mu_{f+g}(\lambda_1 + \lambda_2) \leq \mu_f(\lambda_1) + \mu_g(\lambda_2)$ pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$.
4. $\mu_{fg}(\lambda_1 \lambda_2) \leq \mu_f(\lambda_1) + \mu_g(\lambda_2)$ pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$.
5. Si $|f(x)| \leq \liminf\limits_{n\to\infty} |f_n(x)|$ pour $x \in \Omega$, alors

$$\mu_f(\lambda) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu_{f_n}(\lambda) \ \text{ pour tout } \lambda \geq 0.$$

**Preuve.** Voir[8, $p$ 6] ■

## 2.2 Réarrangement décroissante

**Définition 2.2.1** *Le réarrangement décroissante de la fonction $f$ est $f^* : [0,\infty) \longmapsto [0,\infty]$ définie par*

$$f^*(t) = \inf\left\{\lambda \geq 0 : \mu_f(\lambda) \leq t\right\}.$$

**Théorème 2.2.1** *On a les propriétés suivantes:*

1. $f^*(t) > \lambda$ ssi $\mu_f(\lambda) > t$.
2. $f$ et $f^*$ sont équi-mersurable,
$$\mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > \lambda\}) = m(\{t > 0 : f^*(t) > \lambda\})$$
pour tout $\lambda \geq 0$, où $m$ est la mesure de Lebesgue.
3. Si $\lambda \geq 0$ et $\mu_f(\lambda) < \infty$, alors $f^*\left(\mu_f(\lambda)\right) \geq \lambda$ et $f^*\left(\mu_f(\lambda) + \varepsilon\right) \leq \lambda$ pour tout $0 < \varepsilon < f^*(t)$. Si $t \geq 0$ et $f^*(t) < \infty$, alors $\mu_f(f^*(t)) \leq t$ et $\mu_f(f^*(t) - \varepsilon) \geq t$ pour tout $\varepsilon > 0$.
4. Pour $0 < p < \infty$ $(|f|^p)^*(t) = f^*(t)^p$.
5. Si $A \in \sum$, alors $(f\chi_A)^*(t) \leq f^*(t)\chi_{[0,\mu(A))}(t)$ pour tout $t \geq 0$.

**Preuve.** Voir[8, $p$ 9] ■

**Théorème 2.2.2** *On a*

$$(f+g)^*(t_1+t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2)$$

*et*

$$(fg)^*(t_1+t_2) \leq f^*(t_1)\, g^*(t_2)$$

*pour tour $t_1, t_2 \geq 0$. En particuliers*

$$(f+g)^*(t) \leq f^*(t/2) + g^*(t/2)$$

*et*

$$(fg)^*(t) \leq f^*(t/2)\, g^*(t/2)$$

*pour tout $t \geq 0$.*

**Preuve.** Voir[8, $p$ 12]. ■

**Théorème 2.2.3** *Soit $\mu$ est une mesure, et soit $a$ satisfaisant* $0 \leq a \leq \mu(\Omega)$.

1. Alors on a
$$\sup_{\mu(A)\leq a} \int_A |f(x)| \, d\mu = \int_0^a f^*(t) \, dt.$$
2. Si $\mu(\Omega) < \infty$, alors il existe un ensemble $A \in \sum$ telle que $\mu(A) = a$ et
$$\int_A |f(x)| \, d\mu = \int_0^a f^*(t) \, dt.$$
3. Si $\mu(\Omega) = \infty$ et $f^*(a) > \lim_{t\to\infty} f^*(t)$, alors il ya un ensemble $A \in \sum$ telle que $\mu(A) = a$ et
$$\int_A |f(x)| \, d\mu = \int_0^a f^*(t) \, dt.$$

**Preuve.** Voir[8, $p$ 24] ■

**Définition 2.2.2** *La fonction* $f^{**} : (0, \infty) \longmapsto [0, \infty]$ *est définit par*
$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) \, ds.$$

**Théorème 2.2.4 (Sous-additivité)** *si $\mu$ est une mesure , alors*
$$(f + g)^{**}(t) \leq f^{**}(t) + g^{**}(t)$$
*pour tout $t > 0$.*

**Preuve.** d'apres le théorème 2.2.3
$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) \, dt = \frac{1}{t} \sup_{\mu(A)=t} \int_A |f(x)| \, d\mu$$
alors, par l'inégalité triangulaire et la sous-additivité
$$\begin{aligned}
(f+g)^{**}(t) &= \frac{1}{t} \sup_{\mu(A)=t} \int_A |f(x) + g(x)| \, d\mu \\
&\leq \frac{1}{t} \sup_{\mu(A)=t} \left( \int_A |f(x)| \, d\mu + \int_A |g(x)| \, d\mu \right) \\
&\leq \frac{1}{t} \sup_{\mu(A)=t} \int_A |f(x)| \, d\mu + \frac{1}{t} \sup_{\mu(A)=t} \int_A |g(x)| \, d\mu \\
&= f^{**}(t) + g^{**}(t).
\end{aligned}$$

■

**Théorème 2.2.5** *Soit* $0 < p < \infty$, *alors*

$$\int_{\Omega} |f(x)|^{p(x)} \, d\mu = p \int_0^{\infty} \lambda^{p-1} \mu_f(\lambda) \, d\lambda = \int_0^{\infty} f^*(t)^p \, dt.$$

## 2.3 L'espaces de Lorentz $L^{(p,q)}$

**Définition 2.3.1** *Soit* $(\Omega, \Sigma, \mu)$ *un espace de mesure* $\sigma$*-finie et* $0 < p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$, *alors l'espace de Lorentz* $L^{(p,q)}$ *est l'ensemble de toutes les classes de fonctions mesurable f telle que* $\|f\| pq < \infty$, *telle que*

$$\|f\|_{pq} = \begin{cases} \left(\int_0^{\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} & si \; 0 < p < \infty, \; 0 < q < \infty \\ \sup\limits_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) & si \; 0 < p \leq \infty, \; q = \infty \end{cases}.$$

L'espace de Lorentz $L^{(p,q)}$ peut être considère comme des généralisations de l'espace $L^p$, car si l'on prend $q = p$, on trouve $L^{(p,q)} = L^p$ pour tout $0 < p \leq \infty$, car pour $0 < p < \infty$, on obtient par la définition de $\|\cdot\|_{pq}$ que

$$\begin{aligned} \|f\|_{pp} &= \left(\frac{p}{p} \int_0^{\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^p \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_0^{\infty} t \left(f^*(t)\right)^p \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_0^{\infty} f^*(t)^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

et on a d'apres le théorème 2.2.5. Donc

$$\|f\|_{pp} = \left(\int_0^{\infty} f^*(t)^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

et pour $p = \infty$

$$\|f\|_{\infty\infty} = \sup_{t>0} f^*(t) = f^*(0) = \sup_{x \in \Omega} ess \, |f(x)| = \|f\|_{\infty},$$

donc, $\|f\|_{pp} = \|f\|_p$, ce qui implique que $L^{(p,p)} = L^p$.

**Proposition 2.3.1** *Pour* $p, q < \infty$, *on a*

$$\|f\|_{L^{p,q}(\mathbb{R}^n)} \approx p^{1/q} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{kq} \left\|\chi_{\left\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > 2^k\right\}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^q\right)^{1/q}.$$

**Preuve.** On a

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^{p,q}(\mathbb{R}^n)} &= \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_0^\infty \frac{p}{q} f^*\left(s^{p/q}\right)^q ds\right)^{1/q} \\
&= \left(\frac{p}{q}\right)^{1/q} \left(\int_0^\infty \mu\left\{s \geq 0 : f^*\left(s^{p/q}\right)^q > t\right\} dt\right)^{1/q} \\
&= \left(\frac{p}{q}\right)^{1/q} \left(\int_0^\infty \mu\left\{s \geq 0 : f^*\left(s^{p/q}\right) > t^{1/q}\right\} dt\right)^{1/q} \\
&= p^{1/q} \left(\int_0^\infty \lambda^q \mu\left\{s \geq 0 : f^*\left(s^{p/q}\right) > \lambda\right\} \frac{d\lambda}{\lambda}\right)^{1/q} \\
&= p^{1/q} \left(\int_0^\infty \lambda^q \mu\left\{s \geq 0 : f^*(s) > \lambda\right\}^{q/p} \frac{d\lambda}{\lambda}\right)^{1/q} \\
&= p^{1/q} \left(\int_0^\infty \lambda^q \left\|\chi_{\{x\in\mathbb{R}^n : |f(x)|>\lambda\}}\right\|_p^q \frac{d\lambda}{\lambda}\right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

On utilise le fait que $\int_0^\infty ... = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2^{k-1}}^{2^k} ...$, on obtient

$$\|f\|_{L^{p,q}(\mathbb{R}^n)} \approx p^{1/q} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{kq} \left\|\chi_{\left\{x\in\mathbb{R}^n : |f(x)|>2^k\right\}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^q\right)^{1/q}. \tag{2.3.1}$$

**Exemple 2.3.1** *Soit $A$ n'importe quel ensemble mesurable de mesure finie. Alors*

$$\|\chi_A\|_{pq} = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}} \mu(A)^{\frac{1}{p}},$$

*pour $0 < p < \infty$ et $0 < q < \infty$ si $0 < p < \infty$ et $q = \infty$ nous obtient*

$$\|\chi_A\|_{p,\infty} = \mu(A)^{\frac{1}{p}}.$$

**Théorème 2.3.1** *L'espace de Lorentz $L^{(p,q)}$ est un espace vectoriel et $\|\cdot\|_{pq}$ est un quasi-norme.*

**Preuve.** Pour prouver que $L^{(p,q)}$ est un espace vectoriel nous besoin de montrer que $f + g \in L^{(p,q)}$ et $\alpha f \in L^{(p,q)}$ pour tout $f, g \in L^{(p,q)}$ et tout scalaire $\alpha$. Par suite $f$ et $g$ sont deux éléments sur $L^{(p,q)}$ nous commençant avec le cas $0 < p < \infty$ et $0 < q < \infty$ et on obtient par théorème 2.2.2 que

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{pq} &= \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}}\left(f+g\right)^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}}\left[f^*(t/2)+g^*(t/2)\right]\right)^q \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{q}} \\
&= \left[\int_0^\infty \left((2\mu)^{\frac{1}{p}}\left[f^*(\mu)+g^*(\mu)\right]\right)^q \frac{d\mu}{\mu}\right]^{\frac{1}{q}} \\
&\leq 2^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^\infty \left(2\max\left[\mu^{\frac{1}{p}}f^*(\mu),\mu^{\frac{1}{p}}g^*(\mu)\right]\right)^q \frac{d\mu}{\mu}\right]^{\frac{1}{q}} \\
&\leq 2^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^\infty 2^q\left(\left[\mu^{\frac{1}{p}}f^*(\mu)\right]^q+\left[\mu^{\frac{1}{p}}g^*(\mu)\right]^q\right) \frac{d\mu}{\mu}\right]^{\frac{1}{q}} \\
&= 2^{\frac{1}{p+1}}\left(\|f\|_{pq}^q+\|g\|_{pq}^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq 2^{\frac{1}{p+1}}\left[2\max\left(\|f\|_{pq}^q,\|g\|_{pq}^q\right)\right] \\
&\leq 2^{\frac{1}{(p+1)(1+q)}}\left(\|f\|_{pq}+\|g\|_{pq}\right).
\end{aligned}$$

De plus, pour tout scalaire $\alpha$ nous avons clairement que

$$\|\alpha f\|_{pq} = |\alpha|\,\|f\|_{pq}$$

donc, soit $0<p\leq\infty$ et $q=\infty$, alors, encore par le théorème 2.2.2, nous obtient que

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{p\infty} &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}}\left(f+g\right)^*(t) \\
&\leq \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}}\left(f^*(t/2)+g^*(t/2)\right) \\
&= \sup_{\mu>0}(2\mu)^{\frac{1}{p}}\left(f^*(\mu)+g^*(\mu)\right) \\
&\leq 2^{\frac{1}{p}}\left(\sup_{\mu>0}\mu^{\frac{1}{p}}f^*(\mu)+\sup_{\mu>0}\mu^{\frac{1}{p}}g^*(\mu)\right) \\
&= 2^{\frac{1}{p}\left(\|f\|_{p\infty}+\|g\|_{p\infty}\right)}
\end{aligned}$$

dans ce cas on a aussi que

$$\|\alpha f\|_{pq} = |\alpha|\,\|f\|_{p\infty}$$

donc, $L^{(p,q)}$ est un espace vectoriel pour tout $0<p\leq\infty$ et $0<q<\infty$, de plus de preuve ci-dessus suite que le fonctionnelle $\|\cdot\|_{pq}$ est un quasi-norme. ■

**Théorème 2.3.2** $\|\cdot\|_{pq}$ *est une norme ssi chaque* $1 \leq q \leq p$ *ou* $p = q = \infty$.

**Preuve.** Voir[8, p 44] . ■

**Lemme 2.3.1** *Soit* $h$ *est une fonction décroissante sur* $(0, \infty)$. *Si* $0 < \alpha \leq 1$ *et* $\beta \geq 0$, *alors*

$$\left(\int_0^\infty t^{\beta-1} h(t)\, dt\right)^\alpha \leq \alpha\beta^{1-\alpha} \int_0^\infty t^{\alpha\beta-1} h(t)^\alpha\, dt.$$

**Preuve.** Voir[8, p 52] . ■

**Théorème 2.3.3** *Soit* $0 < p < \infty$ *et* $0 < q_1 \leq q_2 \leq \infty$, *alors*

$$\|f\|_{pq_2} \leq c\, \|f\|_{pq_1}$$

*pour tout* $f \in L^{(p,q_1)}$ *avec*

$$c = \left(\frac{q_2}{p}\right)^{1/q_2} \left(\frac{q_1}{p}\right)^{-1/q_1}.$$

*Donc*

$$L^{(p,q_1)} \overset{c}{\hookrightarrow} L^{(p,q_2)}.$$

**Preuve.** On utilise le lemme 2.3.1 avec $h(t) = f^*(t)^{q_2}$, $\alpha = \frac{q_2}{q_1}$ et $\beta = \frac{q_2}{p}$ nous obtenons que

$$\begin{aligned}
\|f\|_{pq_2}^{q_1} &= \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p} f^*(t)\right)^{q_2} \frac{dt}{t}\right)^{q_1/q_2} \\
&= \left(\int_0^\infty t^{q_2/p-1} f^*(t)^{q_2}\, dt\right)^{q_1/q_2} \\
&\leq \frac{q_1}{q_2} \left(\frac{q_2}{p}\right)^{\frac{1-q_1}{q_2}} \int_0^\infty t^{q_1/p-1} f(t)^{q_1}\, dt \\
&= \left(\frac{q_1}{p}\right) \left(\frac{p}{q_2}\right)^{q_1/q_2} \|f\|_{pq_1}^{q_1}
\end{aligned}$$

on prend les deux côtés à la puissance de $1/q_1$,

$$\|f\|_{pq_2} \leq \left(\frac{q_1}{p}\right)^{1/q_1} \left(\frac{p}{q_2}\right)^{1/q_2} \|f\|_{pq_1}.$$

■

**Théorème 2.3.4** *Si $\mu(\Omega) < \infty$ alors*

$$\begin{aligned} L^{(p,q)} &\hookrightarrow L^{(r,s)} \text{ pour tout } 0 < r < p < \infty \text{ et tout } 0 < q, s \leq \infty \\ L^{(p,q)} &\hookrightarrow L^{(p,s)} \text{ pour tout } 0 < q \leq s \leq \infty \text{ et tout } 0 < p < \infty. \end{aligned}$$

**Preuve.** Pour prouver la première inclusion il suffit de montre que si $0 < u \leq p_1 < p_2 \leq \infty$ alors $L^{(p_2,\infty)} \hookrightarrow L^{(p_1,u)}$ et $\|f\|_{p_1,u} \leq c\|f\|_{p_2,\infty}$ pour $f \in L^{(p_2,\infty)}$, avec $c > 0$. Puisque $\mu(\Omega)$ est fini, par hypothèse, on a pour toute fonction $f \in L^{(p_1,u)}$ que

$$\begin{aligned} \|f\|_{p_1,u} &= \left(\int_0^{\mu(\Omega)} \left(t^{1/p} f^*(t)\right)^u \frac{dt}{t}\right)^{1/u} \\ &= \left(\int_0^{\mu(\Omega)} t^{u/(p_1-u)(p_2-1)} \left(t^{1/p_2} f^*(t)\right)^u dt\right)^{1/u} \\ &\leq \left(\int_0^{\mu(\Omega)} t^{u/(p_1-u)(p_2-1)} \left(\sup_{s>0} s^{1/p_2} f^*(s)\right)^u dt\right)^{1/u} \\ &= \|f\|_{p_2\infty} \left(\int_0^{\mu(\Omega)} t^{u/(p_1-u)(p_2-1)} dt\right)^{1/u} \\ &= \frac{\mu(\Omega)^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}}{\left(\frac{u}{p_1}-\frac{u}{p_2}\right)^{\frac{1}{r}}} \|f\|_{p_2\infty}, \end{aligned}$$

alors $L^{(p_2,\infty)} \hookrightarrow L^{(p_1,\mu)}$. Prendre $p_1 = r$ et $p_2 = p$ nous obtenons par le théorème 2.3.3, et le fait que nous pouvons toujours choisit $u \leq s$ que

$$L^{(p,q)} \hookrightarrow L^{(p,\infty)} \hookrightarrow L^{(r,u)} \hookrightarrow L^{(r,s)}.$$

■

## 2.4 Norme équivalente

Nous commençons par une définition formelle de $\|\cdot\|_{pq}^*$.

**Définition 2.4.1** *Pour tout $f \in L^{(p,q)}$ la fonctionnel $\|\cdot\|^*$est définie par*

$$\|f\|_{pq}^* = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p} f^{**}(t)\right) dt\right)^{1/q} & si\ 0 < p < \infty, 0 < q < \infty; \\ \sup_{t>0} t^{1/p} f^{**}(t) & si\ 0 < p \leq \infty, q = \infty. \end{cases}.$$

***Lemme 2.4.1 (L'inégalité de Hardy)*** *Soit $h$ une fonction décroissante positive sur $(0,\infty)$, $q \geq 1$ et $r > 0$, alors*

*(i)* $\left(\int_0^\infty \left(\int_0^t h(u)\,du\right)^q t^{-r-1}dt\right)^{1/q} \leq \frac{q}{r}\left(\int_0^\infty (th(t))^q t^{-r-1}dt\right)^{1/q}$.

*(ii)* $\left(\int_0^\infty \left(\int_t^\infty h(u)\,du\right)^q t^{r-1}dt\right)^{1/q} \leq \frac{q}{r}\left(\int_0^\infty (th(t))^q t^{r-1}dt\right)^{1/q}$.

**Preuve.** Voir[8, $p$ 58] ■

**Théorème 2.4.1** *Si $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ ou $p = q = \infty$, alors $\|\cdot\|_{pq}^*$ est une norme en $L^{(p,q)}$ et donc $\left(L^{(p,q)}, \|\cdot\|_{pq}^*\right)$ est un espace normé. Plus précisément*

$$\|f\|_{pq} \leq \|f\|_{pq}^* \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_{pq}.$$

*qui est, les quasi-normes $\|\cdot\|_{pq}$ et $\|\cdot\|_{pq}^*$ sont équivalentes.*

**Preuve.** Le premier inégalité suite directement du fait que $f^*(t) \leq f^{**}(t)$ pour tout $t > 0$. Pour prouver le deuxième inégalité nous commençons par le cas quand $1 < p < \infty$ et $1 < q < \infty$. Si nous appliquons l'inégalité de Hardy, avec $r = q\left(1 - \frac{1}{p}\right)$alors

$$\begin{aligned}
\|f\|_{pq}^* &= \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p}f^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^q \\
&= \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t f^*(s)\,ds\right)^q t^{-q\left(1-\frac{1}{p}\right)-1}dt\right)^{1/q} \\
&\leq \frac{1}{1-\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty (tf^*(t))^q t^{-q\left(1-\frac{1}{p}\right)-1}dt\right)^{1/q} \\
&= \frac{p}{p-1}\|f\|_{pq}.
\end{aligned}$$

Si $1 < p < \infty$ and $q = \infty$ alors

$$\begin{aligned}
\|f\|_{pq}^* &= \sup_{t>0} t^{1/p}f^{**}(t) = \sup_{t>0} t^{1/p-1}\int_0^t f^*(s)\,ds \\
&= \sup_{t>0} t^{1/p-1}\int_0^t s^{-1/p}s^{1/p}f^*(s)\,ds \\
&\leq \sup_{t>0} t^{1/p-1}\int_0^t s^{-1/p}\left(\sup_{u>0} u^{1/p}f^*(u)\right)ds \\
&= \|f\|_{p,\infty}\sup_{t>0} t^{1/p-1}\int_0^t s^{-1/p}ds \\
&= \frac{p}{p-1}\|f\|_{p\infty}.
\end{aligned}$$

Quand $p = q = \infty$ on utilise le fait que les deux $f^*$et $f^{**}$sont décroissantes pour obtenir que

$$\|f\|_{\infty\infty}^* = \sup_{t>0} f^{**}(t) = \lim_{t\to 0_+} \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\, ds = f^*(0) = \|f\|_{\infty\infty},$$

ceci termine la démonstration du théorème. ■

## 2.5 Les propriétés topologiques de l'espace de Lorentz

Maintenant nous sommes prêts à prouver état complet, séparable et dual de L'espace de Lorentz normé.

**Théorème 2.5.1** *L'espace de Lorentz $L^{(p,q)}$ avec la quasi-norme $\|\cdot\|_{pq}$ est complet pour tout $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$, en particulier, si $1 < p < \infty, 1 \leq q \leq \infty$, $p = q = 1$ ou $p = q = \infty$, alors l'espace norme $L^{(p,q)}$ est un espace de Banach.*

**Preuve.** Soit $\{f_n\}$ est une suite de Cauchy en $\left(L^{(p,q)}, \|\cdot\|_{pq}^*\right)$. alors

$$\|f_m - f_n\|_{pq} \to 0 \text{ comme } n,\ m \to \infty,$$

et par théorème 2.3.3

$$\|f\|_{p\infty} \leq \|f\|_{pq}$$

ainsi

$$\|f_m - f_n\|_{p\infty} = \sup_{t>0} t^{1/p} (f_n - f_m)^*(t) \to 0 \text{ comme } m,\ n \to \infty$$

et que

$$\begin{aligned}\sup_{t>0} t^{1/p} (f_n - f_m)^*(t) &= \sup_{t>0} \lambda \mu_{f_n - f_m}(\lambda)^{1/p} \\ &= \sup_{t>0} \lambda \mu\left(\{x \in \Omega : |f_n - f_m| > \lambda\}\right)^{1/p}\end{aligned}$$

ceci implique que

$$\mu\left(\{x \in \Omega : |f_m - f_n| > \lambda\}\right) \to 0 \text{ comme } m,\ n \to \infty.$$

pour tout $\lambda > 0$, ce est-à, $\{f_n\}$est une suite de Cauchy dans la mesure $\mu$, donc on peut appliquer le théorème de Riez .F et de conclue qu'il existe une fonction mesurable $f$ et $f_n$ converge vers $f$ , en $\Omega$.

Soit $\varepsilon > 0$ être arbitraire, puisque $\{f_n\}$ est une suite de cauchy, il existe $N$ telle que

$$\|f_n - f_N\|_{pq} > \varepsilon$$

pour tout $n > N$ et $f_{nk} - f_N$ converge vers $f - f_N$ sur $\Omega$, il s'ensuit donc par le théorème 2.1.1 que

$$(f - f_N)^* (t) \leq \liminf_{k \to \infty} (f_{n_k} - f_N)^* (t)$$

pour tout $t > 0$ et par conséquent nous obtenons en utilisant le lemme de Fatou

$$\begin{aligned}
\|f - f_N\|_{pq} &= \left( \int_0^\infty \left( t^{1/p} (f - f_N)^* (t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\
&\leq \left( \int_0^\infty \left( t^{1/p} \liminf_{k \to \infty} (f_{n_k} - f_N)^* (t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\
&\leq \liminf_{k \to \infty} \left( \int_0^\infty \left( t^{1/p} (f_{n_k} - f_N)^* (t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\
&= \liminf_{k \to \infty} \|f_{n_k} - f_N\|_{pq}
\end{aligned}$$

alors

$$\|f - f_N\|_{pq} \to 0 \text{ comme } N \to \infty$$

depuis aussi $f = f - f_N + f_N, f \in L^{(p,q)}$ et cela prouvé que $L^{(p,q)}$ est complet pour tous $0 < p < \infty$ et $0 < q \leq \infty$,pour $1 < p < \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$, $L^{(p,q)}$ peut être considéré comme un espace normé par théorème 2.4.1 comme il est complet par la première partie de la démonstration il se ensuit que $L^{(p,q)}$ est un espace de Banach. ■

**Théorème 2.5.2** *L'ensemble des fonctions intégrables simples $S$ est dense sur $L^{(p,q)}$ pour $0 < p < \infty$, $0 < q < \infty$.*

**Preuve.** Voir[8, 66] ■

**Théorème 2.5.3 (Dual )** *Soit $1 < p < \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$ or $p = q = 1$, alors l'espace de tous les formes linéaires bornée sur $L^{(p,q)}$, notée $\left[L^{(p,q)}\right]^*$, est isomorphe à $L^{\left(p',q'\right)}$,quand $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ et $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.*

**Preuve.** Voir $[8, p\ 68]$. ■

**Corollaire 2.5.1 (Réflexivité)** *L'espace de Lorentz $L^{(p,q)}$ est réflexive pour $1 < p < \infty$ et $1 < q < \infty$.*

## 2.6 La fonction maximale

**Définition 2.6.1** *Soit $f$ est une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}^n$ la fonction maximale de Hardy-Littlewood $\mathcal{M}f$ de $f$ est définie par*

$$(\mathcal{M}f)(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy$$

*pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ où le supremum est pris sur tous les cubes $Q$, contenant $x$ et avec ses côtes parallèles aux axes des coordonnées.*

La fonction maximale de Hardy-Littlewood n'est pas borné sur $L^1$. Malgré cela,

$$\|\mathcal{M}f\|_{1,\infty} \leq c\, \|f\|_1$$

où $c$ est une constante positive indépendante de $f$. la fonction maximale de Hardy-Littlewood, Il ya des constantes positives $c_1$et $c_2$ indépendante de $f$ telle que

$$c_1 f^{**}(t) \leq (\mathcal{M}f)^*(t) \leq c_2 f^{**}(t). \tag{2.6.1}$$

**Théorème 2.6.1** *Si $1 < p < \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$ ou $p = q = \infty$, alors il existe une constante positive $c$ indépendante de $f$ telle que*

$$\|\mathcal{M}f\|_{pq} \leq c\, \|f\|_{pq} \text{ pour tout } f \in L(p,q).$$

**Preuve.** Par l'estimation (2.6.1) et le théorème 2.4.1 on a

$$\|\mathcal{M}f\|_p \leq c_2 \|f^{**}\|_{pq} = c_2 \|f\|_{pq}^* \leq c_2 \frac{p}{p-1} \|f\|\, pq.$$

■

**Corollaire 2.6.1** *Si $1 < p \leq \infty$, alors il existe une constante positive $c$ de $f$ telle que$\|\mathcal{M}f\|_p \leq c\, \|f\|_p$ pour tout $f \in L^p$.*

# Chapitre 3

# L'espace de Lorentz avec des exposants variables

Dans ce chapitre, on représenté l'espace de Lorentz avec des exposants variables et leurs propriétés.

## 3.1 Propriétés de base

**Définition 3.1.1** *Soit $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ est un exposant variable avec $0 < p^- \leq p^+ \leq \infty$ et soit $0 < q \leq \infty$, alors $L_{p(\cdot),q}$ est l'ensemble de toutes les fonctions mesurables $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ telle que :*

$$\|f\|_{L^{p(\cdot),q}} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \lambda^q \left\|\chi_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>\lambda\}}\right\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^q \frac{d\lambda}{\lambda}\right)^{1/q}, & si\ q < \infty \\ \sup\limits_{\lambda>0} \lambda \left\|\chi_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>\lambda\}}\right\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}, & si\ q = \infty \end{cases}$$

*est finie.*

Nous utilisons maintenant le modulaire $\rho_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)}$ pour définit les espaces de Lorentz $L^{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

**Définition 3.1.2** *Soit $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ deux exposants variables avec $0 < p^- \leq p^+ \leq \infty$ et $0 < q^- \leq q^+ \leq \infty$, alors $L^{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble de toutes les fonctions mesurables $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ telle que*

$$\|f\|_{L^{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \rho_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)}\left(2^k \chi_{\left\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|/\lambda>2^k\right\}}\right) \leq 1\right\} \leq \infty. \qquad (3.1.1)$$

Avant de discuter les propriétés de ces nouveaux espaces fonctionnels nous dérivons une expression équivalente pour $\|f\|_{L^{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$ .

**Lemme 3.1.1** *Soit* $p,q \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *deux exposants variables avec* $0 < p^- \leq p^+ \leq \infty$ *et* $0 < q^- \leq q^+ \leq \infty$, *alors*

$$\|f\|_{L^{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \approx \left\| \left( 2^k \chi_{\left\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>2^k\right\}} \right)_{k=-\infty}^{\infty} \right\|_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)} . \tag{3.1.2}$$

**Preuve.** Si $\lambda = 2^j$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$, nous obtenons

$$\rho_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)} \left( 2^k \chi_{\left\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|/\lambda>2^k\right\}} \right) = \rho_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)} \left( \frac{2^k \chi_{\left\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>2^k\right\}}}{\lambda} \right)$$

le reste de la preuve est simple. ■

**Remarque 3.1.1** *Si* $q(\cdot) = q$ *est une fonction constante, par* (2.3.1) *et* (3.1.2) *nous obtenons que les deux définitions* 3.1.1 *et* 3.1.2 *sont équivalentes.*

On outre, nous observons par (3.1.2) et (3.1.3) que pour des fonctions constantes $p(x) = p$ et $q(x) = q$ nous obtenons une norme équivalente pour les espace de Lorentz $L^{p,q}(\mathbb{R}^n)$, chaque fois que $p,q < \infty$. Un calcul similaire justifie ce fait même si $p < q = \infty$, si $p = \infty$, alors les espaces de Lorentz habituelles $L_{\infty,q}(\mathbb{R}^n)$ définie par définition 3.1.2 composé uniquement de la fonction nulle avec $0 < q < \infty$.

En résumé, les $L^{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ sont équivalentes aux espace de Lorentz classique $L^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ si $p(\cdot) = p$ et $q(\cdot) = q$ sont des fonctions constantes.

**Proposition 3.1.1** *On a les propriété suivantes:*

*(i)* Soit $p, p_0, q_1 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ avec $q_0(\cdot) \leq q_1(\cdot)$. Alors

$$L^{p(\cdot),q_0(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p(\cdot),q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n).$$

*(ii)* Soit $q \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Alors $L^{\infty,q(\cdot)}(\mathbb{R}^n) = L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

*(iii)* Soit $p_0, p_1, q_0, q_1 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ avec $p_0^+ < \infty$ et $\alpha := (p_1/p_0) > 1$. Alors

$$\|f\|_{L^{p_0(\cdot),q_0(\cdot)}} \leq c\,\|f\|_{L^{p_1(\cdot),q_1(\cdot)}} \tag{3.1.3}$$

détient pour tout $f$ mesurable avec supp $f \subset [0,1]^n$ avec $c$ indépendant de $f$.

$(iv)$ Soit $p_0, p_1, q \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ avec $p_0(\cdot) \leq p_1(\cdot)$. Alors

$$\|f\|_{L^{p_0(\cdot),q(\cdot)}} \leq c\,\|f\|_{L^{p_1(\cdot),q(\cdot)}} \tag{3.1.4}$$

détient pour tout $f$ mesurable avec supp $f \subset [0,1]^n$ avec $c$ indépendant de $f$.

**Preuve.** La première résulte est par l'inclusion

$$\ell^{q_0(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right) \hookrightarrow \ell^{q_1(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right).$$

Pour prouver (ii), il suffit d'utilisé l'inclusion ci-dessus sous la forme

$$L^{\infty,q^-}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\infty,q(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n) = L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$$

et le fait que $L^{\infty}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\infty,q^-}(\mathbb{R}^n)$, qui est directement à partir de la définition 3.1.3 et le lemme3.1.1.

La preuve de la troisième cas est basé sur le fait que. Pour tout $A \subset \mathbb{R}^n$ avec $\mu(A) \leq 1$, on a

$$\|\chi_A\|_{L^{p_0(\cdot)}} \leq \|\chi_A\|^{\alpha}_{L^{p_1(\cdot)}}, \tag{3.1.5}$$

avec $\alpha = (p_1/p_0)^- > 1$. Pour Montrer $(3.1.3)$, il suffit de supposer que $q_1(\cdot) = \infty$ et

$$\|f\|_{L^{p_1(\cdot),\infty}(\mathbb{R}^n)} \approx \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^k \left\|\chi_{\{|f|>2^k\}}\right\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = 1.$$

Par (3.1.5), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^{p_0(\cdot),q_0(\cdot)}} &\lesssim \|f\|^{q_0^-}_{L^{p_0(\cdot),q_0^-}} \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{kq_0^-}\left\|\chi_{\{|f|>2^k\}}\right\|^{q_0^-}_{L^{p_0}} \\
&\leq \sum_{k=-\infty}^{0} 2^{kq_0^-} + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{kq_0^-}\left\|\chi_{\{|f|>2^k\}}\right\|^{\alpha q_0^-}_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq c + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{kq_0^-}\left(2^{-k}\|f\|^{\alpha q_0^-}_{L^{p_1(\cdot),\infty}(\mathbb{R}^n)}\right)^{\alpha q_0^-} \leq c'
\end{aligned}$$

avec une modification évidente si $q_0^- = \infty$.

Pour la preuve de la quatrième propriétés, nous commençons avec $f$ telle que:

$$\|f\|_{L^{p_1(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \approx \left\|\left(2^k\chi_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>2^k\}}\right)_{k=-\infty}^{\infty}\right\|_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p_1(\cdot)}\right)} = 1.$$

Nous utilisons le support de $f$ pour obtenir .

$$\begin{aligned}\left\|\left(2^k\chi_{\left\{x\in\mathbb{R}^n:|f|>2^k\right\}}\right)_{k=-\infty}^{0}\right\|_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p_0(\cdot)}\right)} &\leq \left\|\left(2^k\chi_{[0\cdot1]^n}\right)_{k=-\infty}^{0}\right\|_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p_0(\cdot)}\right)}\\ &\lesssim \left\|\left(2^k\chi_{[0\cdot1]^n}\right)_{k=-\infty}^{0}\right\|_{\ell^{q^-}\left(L^{p_0(\cdot)}\right)}\lesssim 1.\end{aligned}$$

La deuxième partie avec $k\in\mathbb{N}$ peut être estimée directement,

$$\left\|\left(2^k\chi_{\left\{|f|>2^k\right\}}\right)_{k=1}^{\infty}\right\|_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p_0(\cdot)}\right)}\leq\left\|\left(2^k\chi_{\left\{|f|>2^k\right\}}\right)_{k=1}^{\infty}\right\|_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p_1(\cdot)}\right)}\lesssim 1,$$

qui se termine le preuve de (3.1.4) . ■

**Théorème 3.1.1** *Soit $p,q\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Alors $L_{p(.),q(.)}(\mathbb{R}^n)$ sont des espaces quasi-Banach .*

**Preuve.** Pour prouver que (3.1.1) est un quasi-norme , il suffit de montrer que l'inégalité triangulaire. On sait que

$$\begin{aligned}\left\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)+g(x)|>2^k\right\} &\subset \left\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|+|g(x)|>2^k\right\}\\ &\subset \left\{x\in\mathbb{R}:|f(x)|>2^{k-1}\right\}\cup\left\{x\in\mathbb{R}^n:|g(x)|>2^{k-1}\right\}.\end{aligned}$$

Nous obtenons

$$\chi_{\left\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|+|g(x)|>2^k\right\}}\leq\chi_{\left\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>2^{k-1}\right\}}+\chi_{\left\{x\in\mathbb{R}^n:|g(x)|>2^{k-1}\right\}}.$$

Cela implique

$$\begin{aligned}&\|f+g\|_{L^{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\\ \approx\ &\left\|\left(2^k\chi_{\left\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)+g(x)|>2^k\right\}}\right)_{k=-\infty}^{\infty}\right\|_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)}\\ \leq\ &\left\|\left(2^k\chi_{\left\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>2^{k-1}\right\}}\right)_{k=-\infty}^{\infty}+\left(2^k\chi_{\left\{x\in\mathbb{R}^n:|g(x)|>2^{k-1}\right\}}\right)_{k=-\infty}^{\infty}\right\|_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)}\\ \leq\ &c\left\{\left\|\left(2^k\chi_{\left\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>2^{k-1}\right\}}\right)_{k=-\infty}^{\infty}\right\|_{\ell_{q(\cdot)}\left(L_{p(\cdot)}\right)}+\left\|\left(2^k\chi_{\left\{x\in\mathbb{R}^n:|g(x)|>2^{k-1}\right\}}\right)_{k=-\infty}^{\infty}\right\|_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)}\right\}\\ \lesssim\ &\|f\|_{L^{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}+\|g\|_{L^{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

Pour montrer que les espaces $L^{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ sont complet nous prenons une suite de Cauchy $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}\subset L^{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. On choisit une sous suite $\left(\text{que l'on note } (f_i)_{i\in\mathbb{N}}\right)$ avec

$$\|f_{i+1}-f_i\|_{L_{p(\cdot),q(\cdot)}}\leq\frac{1}{2^{2i}},\quad i\in\mathbb{N}.$$

On pose $f_0 = 0$. Nous considérons la fonction

$$g(t) := \sum_{i=0}^{\infty} |f_{i+1}(t) - f_i(t)|.$$

Comme

$$\chi_{\{g>\lambda\}}(x) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \chi_{\{|f_{i+1}-f_i|>\lambda/2^{i+1}\}}(x).$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned}
\left\|\chi_{\{g>\lambda\}}\right\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{r} &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \left\|\chi_{\{|f_{i+1}-f_i|>\lambda/2^{i+1}\}}\right\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{r} \\
&\leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^{(i+1)r}}{\lambda^r} \|f_{i+1} + f_i\|_{L^{p(.),\infty}}^{r} \lesssim \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^{(i+1)r}}{\lambda^r} 2^{-2ir}
\end{aligned}$$

avec $r = \min(p^-, 1)$ et nous avons utilisée l'inclusion $L^{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p(\cdot),\infty}(\mathbb{R}^n)$. Comme la dernière somme estconverge , nous obtenons

$$\left\|\chi_{\{g>\lambda\}}\right\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \to 0$$

pour $\lambda \to \infty$ et $g$ est finie presque partout . Par conséquent , les séries

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_{i+1}(x) + f_i(x) \ \text{ et } \ \tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_{i+1}(x) + f_i(x) = f(x) - f_1(x), \ x \in \mathbb{R}^n$$

converge aussi presque par tout. Il reste à montre que $f \in L^{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ et $f_i \to f$ sur $L^{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. L'estimation

$$2^k \chi_{\{|\tilde{f}|>2^k\}} \leq \sum_{i=1}^{\infty} 2^k \chi_{\{|f_{i+1}-f_i|>2^{k-1}\}}$$

implique que

$$\begin{aligned}
\left\|2^k \chi_{\{|\tilde{f}|>2^k\}}\right\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})}^{\rho} &\lesssim \sum_{i=1}^{\infty} \left\|2^k \chi_{\{|f_{i+1}-f_i|>2^{k-i}\}}\right\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})}^{\rho} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i\rho} \left\|2^{k-1} \chi_{\{|f_{i+1}-f_i|>2^{k-1}\}}\right\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})}^{\rho} \\
&\lesssim \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i\rho} - 2^{-2i\rho} < \infty,
\end{aligned}$$

quand $\rho > 0$ est choisit suffisamment petit, donc, $\tilde{f} \in L^{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ et $f = \tilde{f} + f_1 \in L^{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Enfin, pour $i \in \mathbb{N}$ fixé, nous considérons

$$f - f_i = \sum_{m=i}^{\infty} (f_{m+1} - f_m).$$

L'estimation

$$\chi_{\left\{|f-f_i|>2^k\right\}} \leq \sum_{m=i}^{\infty} \chi_{\left\{|f_{m+1}-f_m|>2^{k-(m-i+1)}\right\}}$$

implique la convergence

$$\|f - f_i\|_{L^{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \to 0 \text{ pour } i \to \infty.$$

■

On donne maintenant la relation entre l'espace de Lorentz avec des exposants variables $L^{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ et l'espace de Lebesgue $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

**Théorème 3.1.2** *Si $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, alors on a $L^{p(\cdot),p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) = L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.*

**Preuve.** On montre que

$$\begin{aligned} \rho_{p(\cdot)}(f/2) &\leq \rho_{\ell^{p(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)}\left(\left(2^k \chi_{\left\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>2^k\right\}}\right)_{k=-\infty}^{\infty}\right) \\ &\leq \rho_{p(\cdot)}(cf), \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

avec $c = \left(1 - 2^{-p^-}\right)^{-1/p^-}$. Ce qui implique

$$\frac{1}{2}\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L^{p(\cdot),p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \lesssim c\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.$$

Comme $p(\cdot) = q(\cdot)$ on a

$$\begin{aligned} \rho_{\ell^{p(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)}\left(\left(2^k \chi_{\left\{|f|>2^k\right\}}\right)_{k=-\infty}^{\infty}\right) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\| \left|2^k \chi_{\left\{|f|>2^k\right\}}\right|^{p(x)} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\left\{k\in\mathbb{Z}:2^k<|f(x)|\right\}} 2^{kp(x)} dx. \end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ fixé avec $|f(x)| > 0$ nous choisissons l'unique $k_x \in \mathbb{Z}$ avec $2^{k_x p(x)} < |f(x)|^{p(x)} \leq 2^{(k_x+1)p(x)}$ et d'obtenir

$$\sum_{\left\{k\in\mathbb{Z}:2^k<|f(x)|\right\}} 2^{kp(x)} = \sum_{k=-\infty}^{k_x} \left(2^{-p(x)}\right)^{-k} = 2^{k_x p(x)} \frac{1}{1 - 2^{-p(x)}} \tag{3.1.7}$$

on utilise $1 \leq \frac{1}{1-2^{-p(x)}}$ nous obtenons

$$\begin{aligned}
\rho_{\ell^{p(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)}\left(\left(2^{k}\chi_{\left\{|f(x)|>2^{k}\right\}}\right)_{k=-\infty}^{\infty}\right) &= \int_{\mathbb{R}^{n}}\sum_{\left\{k\in\mathbb{Z}:2^{k}<|f(x)|\right\}}2^{kp(x)}dx \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^{n}}2^{k_{x}p(x)}dx=\int_{\mathbb{R}^{n}}2^{(k_{x}+1)p(x)}2^{-p(x)}dx \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^{n}}\left|\frac{1}{2}f\left(x\right)\right|^{p(x)}dx=\rho_{p(\cdot)}\left(f/2\right).
\end{aligned}$$

Pour l'inégalité inverse on utilise encore (3.1.7) avec $\frac{1}{1-2^{-p(x)}} \leq \frac{1}{1-2^{-p^{-}}}$ et on trouve

$$\begin{aligned}
\rho_{\ell^{p(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)}\left(\left(2^{k}\chi_{\left\{|f(x)|>2^{k}\right\}}\right)_{k=-\infty}^{\infty}\right) &= \int_{\mathbb{R}^{n}}\sum_{\left\{k\in\mathbb{Z}:2^{k}<|f(x)|\right\}}2^{kp(x)}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n}}2^{k_{x}p(x)}\frac{1}{1-2^{-p(x)}}dx\leq\int_{\mathbb{R}^{n}}2^{k_{x}p(x)}\frac{1}{1-2^{-p^{-}}}dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^{n}}\left|f\left(x\right)\right|^{p(x)}\left(\frac{1}{1-2^{-p^{-}}}\right)^{\frac{p(x)}{p^{-}}}dx=\rho_{p(\cdot)}\left(cf\right),
\end{aligned}$$

avec $c=\left(1-2^{-p^{-}}\right)^{-\frac{1}{p^{-}}}$. ■

## 3.2 L'interpolation réelle

Soient $X_0$ et $X_1$ deux espaces vectoriels normés. On suppose qu'il existe un espace topologique $Y$ muni d'une topologie de Haussdörff qui contient $X_0$ et $X_1$. L'espaces $X_0+X_1$ est définit comme l'ensemble des $x \in Y$, telle que: $x = x_0 + x_1$ avec $x_0 \in X_0$ et $x_1 \in X_1$. Pour tout $a \in X_0 + X_1$ on définit la $K$-fonction associée à $a$ par

$$K\left(t,a,X_{0},X_{1}\right)=\inf_{a=a_{0}+a_{1}}\left(\left\|a_{0}\right\|_{X_{0}}+t\left\|a_{1}\right\|_{X_{1}}\right).$$

**Définition 3.2.1** *Soit $X_0$ et $X_1$ deux espaces quasi-Banach. On suppose qu'il existe un espace topologique $Y$ muni d'une topologie de Haussdörff qui contient $X_0$ et $X_1$. L'espace d'interpolation réelle $(X_0, X_1)_{\theta,q}$ est définit comme l'ensemble de toute $x \in X_0 + X_1$, telle que:*

$$\|x\|_{(X_{0},X_{1})_{\theta,q}}=\begin{cases}\left(\int_{0}^{\infty}t^{-\theta q}K\left(x,t\right)^{q}\frac{dt}{t}\right)^{1/q}, & if\ q<\infty,\\ \sup_{t>0}t^{-\theta}K\left(x,t\right), & if\ q=\infty\end{cases}\tag{3.2.1}$$

*est finie.*

Pour plus des informations sur ce sujet, voir .

**Théorème 3.2.1** *Soit* $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *avec* $p^+ < \infty$. *Soit* $0 < q < \infty$ *et* $0 < \theta < 1$ *et*

$$\frac{1}{\tilde{p}(\cdot)} = \frac{1-\theta}{p(\cdot)}.$$

*Alors*

$$\left(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n), L^{\infty}(\mathbb{R}^n)\right)_{\theta,q} = L^{\tilde{p}(\cdot),p}(\mathbb{R}^n).$$

**Preuve.** Etape 1. Nous allons montrer que

$$\left(L^{p(\cdot),\infty}(\mathbb{R}^n), L^{\infty}(\mathbb{R}^n)\right)_{\theta,q} \hookrightarrow L^{\tilde{p}(\cdot),p}(\mathbb{R}^n) \tag{3.2.2}$$

c'est-à dire que

$$\int_0^{\infty} \lambda^q \left\|\chi_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>\lambda\}}\right\|^q_{L_{\tilde{p}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \frac{d\lambda}{\lambda} \lesssim \int_0^{\infty} t^{-\theta q} K(f,t)^q \frac{dt}{t}.$$

Nous allons utilisée

$$\begin{aligned} K(f,t) &= \inf\left\{\left\|f^0\right\|_{p(.),\infty} + t\left\|f^1\right\|_{\infty} : f = f^0 + f^1\right\} \\ &= \inf_{\mu>0}\left\{\left\|(|f(x)|-\mu)_+\right\|_{p(\cdot),\infty} + t\left\|\min(|f(x)|,\mu)\right\|_{\infty}\right\} \\ &\geq \inf_{\mu>0}\left\{\mu\left\|\chi_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|\geq 2\mu\}}\right\|_{p(\cdot)} + t\left\|\min(f(x),\mu)\right\|_{\infty}\right\} \end{aligned}$$

pour chaque $t > 0$. On pose $h(\lambda) = \left\|\chi_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>\lambda\}}\right\|_{p(\cdot)}$ pour $\lambda > 0$ et $f_*(t) = \sup\{\lambda > 0 : h(\lambda) \geq t\}$. On sait que $p^+ < \infty$, on obtient que $h(f^*(t)) \geq t$ pour tous $t > 0$. Ensuite, nous choisissons $\mu$, $\mu = f^*(t)/2$. Donc $K(f,t) \geq f^*(t)\,h(f^*(t))/2 \geq t f^*(t)/2$. Alors

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \lambda^q h(\lambda)^{(1-\theta)q} \frac{d\lambda}{\lambda} &\approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\lambda:2^k<h(\lambda)\leq 2^{k+1}} \lambda^q h(\lambda)^{(1-\theta)q} \frac{d\lambda}{\lambda} \\ &\lesssim \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k(1-\theta)q} \int_{\lambda:2^k\leq h(\lambda)} \lambda^q \frac{d\lambda}{\lambda} \lesssim \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k(1-\theta)q} \int_0^{f^*(2^k)} \lambda^q \frac{d\lambda}{\lambda} \\ &\lesssim \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k(1-\theta)q} f^*\left(2^k\right)^q \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} t^{-\theta q} K(f,t)^q \frac{dt}{t} \\ \geq\ &\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2^k}^{2^{k+1}} t^{(1-\theta)q} f^*(t)^q \frac{dt}{t} \gtrsim \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k(1-\theta)q} \int_{2^k}^{2^{k+1}} f^*\left(2^k\right)^q \frac{dt}{t} \\ \gtrsim\ &\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{(k+1)(1-\theta)q} f^*\left(2^{k+1}\right)^q = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k(1-\theta)q} f^*\left(2^k\right)^q. \end{aligned}$$

par une modification simple si $q = \infty$.

Etape 2: on démontre que

$$L^{\tilde{p}(\cdot),p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \left(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n), L^{\infty}(\mathbb{R}^n)\right)_{\theta,q} \tag{3.2.3}$$

c-à-d

$$\int_0^{\infty} t^{-\theta q} K(f,t)^q \frac{dt}{t} \lesssim \int_0^{\infty} \lambda^q \left\|\chi_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>\lambda\}}\right\|^q_{L^{\tilde{p}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \frac{d\lambda}{\lambda}. \tag{3.2.4}$$

Nous commençons par une reformulation de $K(f,t)$

$$\begin{aligned}
K(f,t) &= \inf\left\{\left\|f^0\right\|_{p(.)} + t\left\|f^1\right\|_{\infty} : f = f^0 + f^1\right\} \\
&= \inf_{\mu>0}\left\{\left\|(|f(x)|-\mu)_+\right\|_{p(\cdot)} + t\left\|\min(|f(x)|,\mu)\right\|_{\infty}\right\} \\
&\leq \inf_{\mu>0}\left\{\left\|f\chi_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>\mu\}}\right\|_{p(\cdot)} + t\mu\right\} \\
&\lesssim \inf_{\mu>0}\left\{\left\|\sum_{j=0}^{\infty} 2^j\mu\chi_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>2^j\mu\}}\right\|_{p(\cdot)} + t\mu\right\} \\
&\leq \inf_{\mu>0}\left\{\sum_{j=0}^{\infty} 2^j\mu\left\|\chi_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>2^j\mu\}}\right\|_{p(\cdot)} + t\mu\right\} \\
&= \inf_{\mu>0}\left\{\sum_{j=0}^{\infty} 2^j\mu h\left(2^j\mu\right) + t\mu\right\},
\end{aligned}$$

Remarquons que nous avons supposé $p^- \geq 1$ dans le calcul ci-dessus. La modification dans le cas $p^- < 1$ est simple. Pour fixé $t > 0$, nous choisissons $\mu = \mu(t)$ par

$$\mu(t) := \inf\left\{\mu > 0 : \sum_{j=0}^{\infty} 2^j h\left(2^j\mu\right) \leq t\right\}.$$

Comme la fonction $h$ est continue à droite , nous obtenons $\sum\limits_{j=0}^{\infty} 2^j h\left(2^j\mu(t)\right) \leq t$ donc nous estimons le côté droite de (3.2.5). On a

$$\int_0^{\infty} \lambda^q \left\|\chi_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>\lambda\}}\right\|^q_{L^{\tilde{p}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \frac{d\lambda}{\lambda} \gtrsim \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{kq} h\left(2^k\right)^{(1-\theta)q}.$$

Nous estimons le côté gauche de (3.2.5),

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} t^{-\theta q} K(f,t)^q \frac{dt}{t} &\leq \int_0^{\infty} t^{-\theta q} t^q \mu(t)^q \frac{dt}{t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{kq} \int_{t:2^k<\mu(t)\leq 2^{k+1}} t^{(1-\theta)q}\frac{dt}{t} \\
&\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{kq} \int_{t:2^k<\mu(t)} t^{(1-\theta)q}\frac{dt}{t}.
\end{aligned}$$

Si $\mu(t) > 2^k$, nous obtenons

$$t \leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^j h\left(2^{j+k}\right),$$

par conséquent, nous continuons

$$\int_0^\infty t^{-\theta q} K(f,t)^q \frac{dt}{t} \lesssim \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{kq} \int_0^{\sum_{j=0}^{\infty} 2^j h\left(2^{j+k}\right)} t^{(1-\theta)q} \frac{dt}{t} \lesssim \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{kq} \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^j h\left(2^{j+k}\right)\right)^{(1-\theta)q}.$$

Si $(1-\theta)q \leq 1$, nous pouvons écrire ($\ell = j+k$)

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty t^{-\theta q} K(f,t)^q \frac{dt}{t} &\lesssim \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{kq} \sum_{j=0}^{\infty} \left(2^j h\left(2^{j+k}\right)\right)^{(1-\theta)q} \\
&= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{(\ell-j)q} 2^{j(1-\theta)q} h\left(2^\ell\right)^{(1-\theta)q} \\
&= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} 2^{\ell q} h\left(2^\ell\right)^{(1-\theta)q} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j\theta q} \lesssim \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} 2^{\ell q} h\left(2^\ell\right)^{(1-\theta)q}.
\end{aligned}$$

Si $(1-\theta)q > 1$, nous utilisons une méthode similaire avec l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty t^{-\theta q} K(f,t)^q \frac{dt}{t} &\lesssim \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{kq} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(1+\epsilon)(1-\theta)q} h\left(2^{j+k}\right)^{(1-\theta)q} \\
&= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{(\ell-j)q} 2^{j(1+\epsilon)(1-\theta)q} h\left(2^\ell\right)^{(1-\theta)q} \\
&= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} 2^{\ell q} h\left(2^\ell\right)^{(1-\theta)q} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{jq(-1+(1+\epsilon)(1-\theta))} \\
&\lesssim \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} 2^{\ell q} h\left(2^\ell\right)^{(1-\theta)q},
\end{aligned}$$

où nous avons supposé que $\epsilon > 0$ était assez petit pour obtenir $-1 + (1+\epsilon)(1-\theta) = -\theta + \epsilon(1-\theta) < \theta$. $\blacksquare$

**Conclusion 3.2.1** *Dans ce mémoire, nous avons représenter les espaces de Lorentz classique et avec exposants variables, et on montre que l'espace de Lorentz classique* $L^{(p,q)}$ *avec la quasi-norme* $\|\cdot\|_{pq}$ *est complet et nous avons donne leurs norme équivalente* $\|\cdot\|_{pq}^{*}$ *et leurs propriétés plus importantes. Aussi,on donne la définition de l'espace de Lorentz avec exposants variables* $L^{p(\cdot),q(\cdot)}$*, et on montre que cette espace est quasi-Banach. Nous allons étudie Interpolation pour ces espaces.*

# Bibliographie


[1] A. Almeida, P. Hästo, Besov spaces with variable smoothness and integrability, J. Funct. Anal. 258 no. 5 (2010), 1628–1655.

[2] J. Bergh, J. Lofstrom, Interpolation Spaces, Berlin Heidelberg, New York, 1976.

[3] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Masson, Paris, 1987.

[4] V. David, A. Fiorenza, Variable Lebesgue Spaces, Foundations and Harmonic Analysis, Birkhäuser., 2013.

[5] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, M. Růžička . Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2017, Springer-Verlag, Berlin, 2011.

[6] H. Kempka, J.Vybríral, Lorentz space with variable exponents, arXiv:1210.1738v1.

[7] H. Kempka, Function spaces with variable exponents, September 22nd. 2014.2014.fsdona2011.uni-jena.de/proc/kempka_ln.pdf.

[8] E. Kristiansson, Decreasing Rearrangement and Lorentz $L(p, q)$ Spaces, Master Thesis, December 2002, Department of Mathematics, Luleå University of Technology.