



RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF- M'SILA
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

N° d'ordre:

THÈSE

Présentée pour l'obtention de grade de docteur en sciences

Spécialité:

Mathématiques

Option:

Mathématiques Appliquées

Par:

SABAH BENMEHDI

Intitulée:

Estimation bayésienne de l'exposant de Hurst

Soutenue publiquement le : 03 / 07 / 2016, devant le jury :

D. ACHOUR,	Prof., Univ. de M'Sila,	Président
N. BENHAMIDOUCHE,	Prof., Univ. de M'Sila,	Rapporteur
M. HOLSCHNEIDER,	Prof., Univ. de Potsdam (Allemagne),	Co-Rapporteur
N. ZAOURAR ,	Prof., L'USTHB, Alger,	Examineur
M. HAMOUDI ,	Prof., L'USTHB, Alger,	Examineur

Année universitaire: 2015 / 2016

REMERCIEMENTS

Ce travail de recherche a été réalisé au laboratoire mathématiques appliquées à l'université de Potsdam en Allemagne. Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude à mon encadreur, Monsieur N. Benhamidouche, Professeur à l'université de M'Sila, pour sa patience, ses encouragements et ses conseils pour la rédaction de cette thèse.

Je remercie très particulièrement à mon Co-encadreur Monsieur M.Holschneider, Professeur à l'université de Potsdam, pour m'avoir accueillie au sein de son laboratoire. je le remercie très sincèrement pour son aide ,ses orientations,pour ses encouragements illimités pendant les années de préparation de ma thèse.

J'exprime mes vifs remerciements à Monsieur D. Achour, Professeur à l'université de M'Sila, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

J'adresse mes plus vifs remerciements à Madame N.Zaourar et à Monsieur M, Hamoudi, Professeurs à l'université STHB d'Alger, d'avoir bien voulu faire partie du jury et d'avoir accepté d'examiner mon travail.

Un grand très remerciements à toutes l'équipe du Professeur M. Holschneider, en particulier Dr. M. Hayn ,Dr.J. Baerenzung, V.Gustav et K. Ferrat, pour leur aide et leur soutien.

Je tiens à remercier aussi tout les enseignants du Département de Mathématiques à l'université de M'Sila et de Bourdj-Bouarreridj.

Enfin, mes remerciements les plus sincères s'adressent à tout les membres de ma famille en particulier ma chère mère et mon mari, pour leur soutien moral et leur patience pendant les moments difficiles dans la réalisation de cette thèse.

DÉDICACE

Je dédie ce travail

A la mémoire de mon chère père.

A ma très chère mère.

A mes frères et mes soeurs.

A mon mari et ma fille : Sajida.

A toute ma famille.

A tous mes amis.

TABLE DES MATIÈRES

Table des figures	v
Liste des tableaux	vii
Introduction générale	1
I Le Mouvement Brownien Fractionnaire et le Bruit Gaussien Fractionnaire	4
1 Introduction	4
2 Le Mouvement brownien fractionnaire	5
3 Le bruit gaussien fractionnaire	8
4 Méthode de simulation	10
5 Exemple des processus non gaussiens auto-similaires à accroissements stationnaires	11
6 Données réelles de la rivière de Nil :	15
7 Conclusion :	17
II Méthode d'estimation de l'exposant de Hurst	18
1 Introduction	18
2 La méthode du Hurst(R/S)	20
3 Méthode de la variance agrégée	22
4 Périodogramme	22
5 Méthode de Robinson	25
6 Méthode basée sur les ondelettes introduite par Abry et Veitch :	29
7 Conclusion :	36

III Estimation bayésienne	37
1 Introduction	37
2 Estimation bayésienne pour le modèle de bruit gaussien fractionnaire .	42
3 Conclusion :	53
IV Conclusion générale	59
Annexe	61
1 Exemple du processus stationnaire	61
2 La régression linéaire :	61
Bibliographie	66

TABLE DES FIGURES

I.1	L'auto-similarité du mouvement brownienne fractionnaire	7
I.2	Simulation du bruit gaussien fractionnaire par décomposition du cholesky	11
I.3	Simulation du mouvement brownienne fractionnaire par décomposition du cholesky	12
I.4	Simulation du mouvement de Levy α stable avec ses accroissements . .	15
I.5	La fonction d'autocorrelation du données réeles de la revière du Nil. . .	15
I.6	Les données réelles de la revière du Nil avec sa série integrée	16
II.1	Régression linéaire pour la méthode du périodogramme classique (a) et cumulé (b), pour le bruit gaussien fractionnaire pour $N = 1000$ et $H = 0.8$	24
II.2	Régression linéaire pour la méthode du périodogramme classique (a) et cumulé (b) pour les données réeles de la revière du Nil.	24
II.3	Comparaison des densités du noyau Gaussien entre la méthode du pé- riodogramme classique et cumulé pour le BGF pour $H = 0.6$, $N = 1000$ et un nombre $R = 10.000$ de réalisations	25
II.4	L'histogramme de la deuxième méthode de Robinson pour un BGF avec $H = 0.7$, et $N = 70(a), 256(b), 1000(c)$ et pour un nombre $R = 10.000$ de réalisations.	28
II.5	L'histogramme de la méthode de d'Abry et Veitch pour un BGF pour $H = 0.7$, pour $N = 70(a), 256(b), 1000(c)$ et pour un nombre $R = 10.000$ de réalisations.	35
III.1	Exemple du signal de BGF de type III.18.	45

III.2	la distribution marginale a posteriori dans le plan (H, λ) . Notons que la distribution a posteriori est bien localisée autour du point correspondant à la vraie valeur (le point blanc). La ligne du contour blanc indique que 90% de la région de confiance de posteriori. Sur les axes correspondant aux distributions marginales.	46
III.3	L'histogramme de la méthode Bayésienne pour un BGF pour $H = 0.7$, pour $N = 70(a)$, $256(b)$ pour un nombre $R = 10.000$ de réalisations et $N = 1000(c)$ pour un nombre $R = 5000$	47
III.4	L'erreur quadratique moyenne pour $H = 0.7$ avec 500 réalisations . . .	48
III.5	La distribution a posteriori marginalisée sur respectivement β , H et λ . Sur l'axe, les distributions marginales de H , λ et β sont visualisées. La ligne de contour blanc présente 90% de la probabilité a posteriori. . . .	54
III.6	La comparaison entre : la méthode Bayésienne, la méthode d'Abry et Veitch et la deuxième méthode de Robinson pour le BGF et pour $H = 0.7$, $N = 70$	55
III.7	Série des 20% trous des données de la rivière du Nil avec sa série originale.	55
III.8	Estimation de l'exposant de Hurst de la série des 20% trous des données de la rivière du Nil.	56
III.9	Distribution de l'estimateur par la densité du noyau gaussien pour la série des 60% des trous des données de la rivière du Nil avec un nombre $R = 500$ de réalisations.	56
III.10	Les increments de Levy α stable, $\alpha = 1.4$, $N = 500$	57
III.11	Densité du noyau Gaussien pour la méthode bayésienne pour les accroissements du mouvement de Lévy α stable, $\alpha = 1.4(H \simeq 0.71)$, $N = 500$ et nombre de réalisations $R = 1000$	57
III.12	Boxplot pour les accroissements du mouvement de Lévy α stable, pour α varie de 1.1 à 2 avec un pas de 0.1 et une taille de l'échantillonnage $N = 500$ et un nombre $R = 1000$ de réalisations.	58

LISTE DES TABLEAUX

II.1	Estimation de l'exposant de Hurst pour BGF pour $N=10.000$ avec R/S	21
II.2	Estimation de l'exposant de Hurst pour BGF artificielle avec $H=0.8$ par périodogramme classique et cumulé	23
II.3	Estimation de l'exposant de Hurst pour les données réelles de la rivière du Nil.	24
II.4	Estimation de l'exposant de Hurst par la deuxième méthode de Robinson.	28
II.5	Estimation de l'exposant de Hurst par la méthode d'Abry et Veitch . .	36
III.1	Exemple de la distribution a priori conjuguée	40
III.2	Estimation de l'exposant de Hurst par la méthode bayésienne	47
III.3	Les intervalles sur les paramètres estimés	49
III.4	Estimation de l'exposant de Hurst pour différentes méthodes	49

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'intérêt de l'exposant de Hurst (noté H , tel que $0 < H < 1$) nommé aussi l'indice d'auto-similarité, provient de sa capacité à caractériser la propriété d'auto similarité ou d'invariance d'échelle, d'espace et de temps, observables dans de nombreuses séries temporelles, et en particulier dans le mouvement brownien fractionnaire (MBF). Historiquement, ce processus a été introduit par Mandelbrot et Van Ness (1968) comme une généralisation du mouvement brownien qui est décrite par Kolmogorov en 1940, les accroissements de ce processus sont stationnaires, ce dernier est nommé bruit gaussien fractionnaire. Les deux types de processus stochastique, le MBF et le BGF, permettent de décrire de nombreux phénomènes naturels, étudiés dans des domaines aussi variés que l'hydrologie [48], la biologie [53], ou encore l'économie [47].

Pour cette raison, l'estimation de l'exposant de Hurst est devenue un sujet de recherche majeur depuis les années 1950. L'hydrologue Hurst [34] fût le premier à introduire une méthode appelée analyse des étendues normalisées, ou rescaled range analysis (R/S) dans le but de modéliser l'évolution temporelle du niveau du Nil. Par la suite, d'autres techniques ont été proposées par différents auteurs, elles peuvent être classifiées en trois catégories :

1. Les méthodes spectrales : log périodogramme[30], estimateur de Whittle[77].
2. Les méthodes basées sur les ondelettes : méthode d'ondelette du maximum de vraisemblance (Wavelet maximum Likelihood, WML)[46], estimateur d'Abry-Veitch [2, 73].
3. Les méthodes temporelles : méthode des variances agrégées[70], méthode d'analyse des fluctuations redressées(Detrended Fluctuation Analysis,DFA)[53, 31].

Une nouvelle méthode d'estimation de l'exposant de Hurst est basée sur l'inférence bayésien a été introduite dans notre travail [7, 43] et plus généralement l'estimation bayésienne du paramètre de l'auto-similarité introduite dans la thèse de Makarava [42]. L'avantage de l'approche Bayésienne donne la possibilité de traiter les séries tem-

porelles avec tendance sans la déplacer [7, 43], De plus elle permet de prendre en compte des séries avec trous [42] et donc des signaux irréguliers, ce que d'autres méthodes d'estimations ne peuvent faire qu'au prix d'une dégradation de l'évaluation de l'exposant de Hurst (voir [33]).

Dans notre thèse nous nous sommes intéressé plus particulièrement à utiliser l'approche Bayésienne pour estimer l'exposant de Hurst associé à un bruit gaussien fractionnaire. Cela nous permet de considérer directement le signal étudié au lieu d'utiliser la série temporelle intégrée et ensuite appliquer les méthodes d'estimations habituelles [7]. Nous avons ensuite utilisé notre méthode sur les données réelles que forment la série temporelle associée à l'évolution du niveau du Nil pour la période 622-1284. Ce phénomène, qui a suscité l'intérêt de nombreux chercheurs depuis Hurst en 1951, est à l'origine du développement de plusieurs méthodes permettant d'estimer l'exposant de Hurst d'un BGF. Ainsi, Liu et al (2009)[40] ont proposé une modification de la méthode du périodogramme, qu'ils ont comparé à cette dernière, ils l'ont également comparé à l'estimateur de Whittle, à la méthode d'ondelette du maximum de vraisemblance, et à la méthode de variations discrètes du MBF. Nous avons utilisé les résultats qu'ils ont obtenus afin d'évaluer l'approche bayésienne que nous avons développée. Cette étude est présentée en détail dans le troisième chapitre de cette thèse.

En se basant dans notre étude sur les aspects statistiques utilisés dans les travaux de [51]. En outre au lieu de comparer la méthode bayésienne avec la première méthode de Robinson [61] qui a été introduite dans [7, 42], on utilise la deuxième méthode [60] par le fait que l'auteur a prouvé que sa deuxième méthode est asymptotiquement plus efficace que sa première méthode. Notre thèse est divisée en trois chapitres. Dans le premier chapitre, nous introduisons quelques propriétés élémentaires des processus stochastiques de mouvement brownien fractionnaire et de bruit gaussien fractionnaire. Nous rappelons également comment simuler exactement ce type de trajectoire à l'aide d'une méthode basée sur la décomposition de Cholesky[23, 18].

nous introduisons également un exemple de processus non Gaussien auto-similaire à accroissements stationnaires, il s'agit du processus de Levy α stable [49, 4, 50, 42] avec la méthode de simulation de ce type de processus [19]. Nous présentons dans le deuxième chapitre quelques méthodes usuelles d'estimations de l'exposant de Hurst(cite web de Taqqu). Nous nous intéressons en particulier à la deuxième méthode de Robinson [60] ainsi qu'à la méthode basée sur les ondelettes introduites par Abry et Veitch [2, 73], nous utilisons ensuite la simulation du Monte Carlo pour vérifier empiriquement la convergence et la normalité asymptotique de ces estimateurs.

Dans le chapitre trois, nous introduisons l'approche bayésienne pour le modèle de bruit gaussien fractionnaire (BGF) avec une application sur des données artificielles et on effectue une comparaison avec les méthodes d'estimations qui sont introduites dans

le deuxième chapitre , ensuite et de la même manière et comme il a été mentionné précédemment, on applique l'approche bayésienne sur les données réelles de la rivière de Nil pour estimer l'exposant de Hurst, enfin on teste notre méthode sur deux types de signaux, le premier concerne la série temporelle avec trous qui sont distribuées uniformément dans la série originale de la rivière de Nil, le deuxième est lié aux données synthétiques des accroissements de processus de Levy α stable.

Les techniques utilisées dans l'estimation de l'exposant de Hurst sont basées sur la méthode de régression linéaire donnée en l'annexe.

CHAPITRE I

LE MOUVEMENT BROWNIEN FRACTIONNAIRE ET LE BRUIT GAUSSIEN FRACTIONNAIRE

1 Introduction

Le mouvement Brownien fractionnaire(ou MBF), fut introduit par Mandelbrot et Van Ness en 1968 comme une généralisation du mouvement Brownien standard. C'est un processus stochastique paramétré par H ($0 < H < 1$), appelé exposant de Hurst. Le terme mouvement Brownien se réfère au nom du botaniste Robert Brown qui observa en 1827 le mouvement irrégulier de particules de pollen en suspension dans un liquide. Près d'un siècle plus tard, en 1923, Wiener proposait une formulation mathématique décrivant ce mouvement. Le mouvement brownien fractionnaire a été lui introduit par Kolmogorov en 1940 [37] dans son étude des spirales de Wiener dans l'espace de Hilbert, Mandelbrot et Van Ness en 1968 l'on rendu célèbre. Le processus de MBF est caractérisé par les propriétés suivantes : il est autosimilaire, à accroissements stationnaires. Ces propriétés rendent son champ d'application très vaste. Ainsi ce processus est employé dans différents domaines tels qu'en économie, en biologie, ou encore dans les télécommunications (voir [67, 48, 47, 53] et leurs références) Dans ce premier chapitre, nous donnons les définitions et les propriétés du MBF les plus courantes, adaptées des références([24, 66, 65, 69, 67].

Définition 1 : Un processus stochastique $X = (X_t)_{t \in T}$ est une famille de variables aléatoires X_t indexée par un ensemble T et définie sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeur dans un espace mesurable (E, \mathcal{E}) . Le processus est à valeurs réelles

lorsque $E = \mathbb{R}$ où $E = \mathbb{R}^d$. En général $(E, \mathcal{E}) = (E, \mathcal{B}(E))$ tels que $\mathcal{B}(E)$ est la tribue borélienne sur E [12, 15]. Un processus $X(t, \omega)$ noté $X_t(\omega)$ dépend de deux paramètres : t le temps et une variable aléatoire $\omega \in \Omega$.

- Pour $t \in T$ fixé, $\omega \in \Omega \mapsto X_t(\omega)$ est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
- Pour $\omega \in \Omega$ fixé, $t \in T \mapsto X_t(\omega)$ est une fonction à valeur réelle, appelée trajectoire (ou réalisation) du processus.

Lorsque $T = \mathbb{N}$ ou \mathbb{Z} , le processus est dit en temps discret, et pour $T = \mathbb{R}^+$ ou \mathbb{R} le processus est en temps continu.

Définition 2 : Etant donné un processus stochastique $(X_t)_{t \in T}$, les lois finies dimensionnelles de X sont les lois de tous les vecteurs $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ pour $t_1, \dots, t_n \in T$ et $n \in \mathbb{N}$

Définition 3 : Un processus est dit gaussien si toutes ses lois finies dimensionnelles $l(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ sont gaussiennes ($\forall n \in \mathbb{N}, \forall t_1, \dots, t_n \in T$). Autrement dit, $X = (X_t)_t$ est gaussien si toute combinaison linéaire $a_1 X_{t_1} + \dots + a_n X_{t_n}$ suit une loi gaussienne (pour tout $n \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_n \in T$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$).

Définition 4 Un processus gaussien est parfaitement défini par son espérance $\mathbb{E}(X_t)$ et sa covariance $cov(X_s, X_t)$.

2 Le Mouvement brownien fractionnaire

Définition : Soit $0 < H \leq 1$. Le mouvement brownien fractionnaire (MBF) de l'exposant de Hurst H , noté $(B_t^H)_{t \geq 0}$ est le processus gaussien centré tel que :

$$B^H(0) = 0.$$

de covariance :

$$\Sigma^H(t, s) = Cov(B_t^H, B_s^H) = \frac{\sigma^2}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}), t, s \geq 0. \quad (I.1)$$

où $\sigma^2 = Var(B_1^H)$ est appelée MBF standard dans le cas $\sigma^2 = 1$.

Remarque : Dans le cas $H = 1/2$, le MBF correspond au mouvement brownien. Ainsi, la covariance :

$$Cov(B_t^H, B_s^H) = \min(s, t).$$

Avant d'exposer les principales propriétés du MBF, nous présentons ses représentations par les intégrales stochastiques, en terme de mouvement brownien standard. Les démonstrations ainsi que l'ensemble des propriétés ne sont pas détaillés dans cette thèse, ils peuvent être trouvées dans les références citées précédemment.

Représentation du mouvement Brownien fractionnaire

Les formulations suivantes du MBF permettent de relier le MBF au mouvement brownien standard (pour plus détails sur l'utilisation de ces expressions voir [67]).

a) Représentation par moyenne mobile

Mandelbrot et Van Ness [45] ont défini le MBF à travers l'intégrale de Wiener suivante :

$$X(t) = \sigma \sqrt{C_1(H)} \int_{\mathbb{R}} ((t-s)_+^{H-\frac{1}{2}} - (-s)_+^{H-\frac{1}{2}}) B(ds)$$

où $C_1(H) = \frac{\Gamma(2H+1)\sin(\pi H)}{\Gamma(H+\frac{1}{2})^2}$, B est un mouvement brownien standard et pour $u \in \mathbb{R}$, $(u)_+ = \max(0, u)$.

b) Représentation Harmonisable

La transformation de Fourier de la formule du MBF par moyenne mobile donne la représentation en harmonique [66] suivante :

$$X(t) = \frac{1}{C_2(H)} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it\xi} - 1}{|\xi|^{H+\frac{1}{2}}} \hat{B}(d\xi)$$

où $C_2(H) = \left(\frac{\pi}{H\Gamma(2H)\sin(H\pi)} \right)^{1/2}$ et \hat{B} est la transformée de Fourier du mouvement brownien standar.

Propriété d'autosimilarité

Un objet est dit auto-similaire, si les propriétés statistiques de ses structures sont identiques quelque soit l'échelle à laquelle on l'observe (voir [22]).

Définition Un processus $\{Y_t, t \geq 0\}$ est auto-similaire de paramètre d'auto-similarité $H > 0$ si pour tout $a > 0$ le processus $\{Y_{at}, t \geq 0\}$ est caractérisé par la même distribution que le processus $\{a^H Y_{at}, t \geq 0\}$. On peut alors écrire $Y_{at} \simeq a^H Y_t$, où \simeq représente une égalité des distributions de dimension finie, et on dira que Y_t est H -ss (H self similar).

On peut facilement vérifier que le processus MBF est auto-similaire en calculant ses moment d'ordre 2. Figure I.1 illustre cette propriété dans le mouvement brownien fractionnaire (pour $a = 2$).

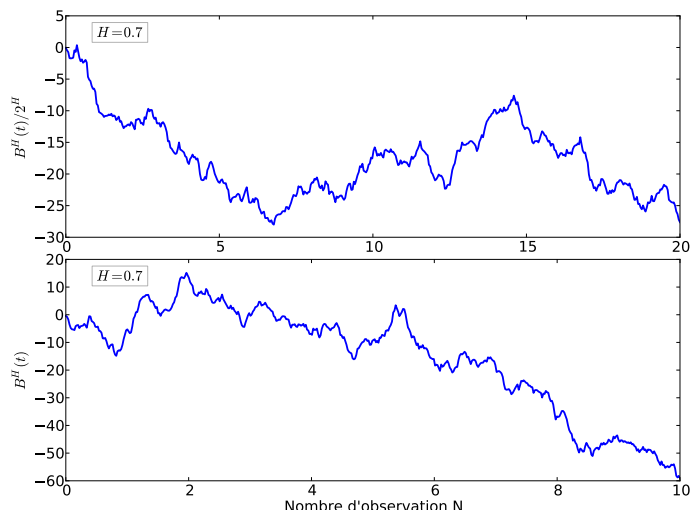


Figure I.1 – L’auto-similarité du mouvement brownienne fractionnaire

A accroissements stationnaires

La notion de stationnarité est très importante dans la prédiction de séries temporelles. Un processus stochastique $\{Y_t, t \geq 0\}$ est dit stationnaire si les distributions jointes $F_Y(y_{t_1}, \dots, y_{t_n})$ sont invariantes par translation en temps, de telle sorte que : $F_Y(y_{t_1+k}, \dots, y_{t_n+k}) = F_Y(y_{t_1}, \dots, y_{t_n})$ pour tout $k > 0$, et quelque soient t_1, \dots, t_n (voir [12]). Le concept de stationnarité faible ou du second ordre est caractérisé par les conditions suivantes :

- i) L’espérance ainsi que la variance du processus sont constantes au cours de temps : $E(Y_t) = m, Var(Y_t) = \sigma^2, \forall t \in N$.
- ii) La fonction d’autocovariance ne dépend pas du temps, elle ne dépend que de la différence k entre les observations i.e : $cov(Y_t, Y_{t+k}) = \rho(k)$.

Si l’une de ces conditions n’est pas vérifiée on dit que le processus est non-stationnaire. Certains processus sont non-stationnaires mais leurs accroissements sont stationnaires. Tel est le cas, comme nous allons le voir dans la définition suivante, du mouvement brownien fractionnaire. Les figures I.3, I.2 illustrent les différences entre processus stationnaires et processus non-stationnaires mais dont les accroissements sont stationnaires. Pour plus détails sur les caractéristiques des processus stationnaires, se référer au chapitre 4 du livre [3]

Définition Un processus $\{Y_t, t \geq 0\}$ est dit à accroissements stationnaires, si pour tout $h > 0$ le processus $\{Y_{t+h} - Y_h, t \geq 0\}$ et $\{Y_t - Y_0, t \geq 0\}$ ont la même distribution. On écrit alors $Y_{t+h} - Y_h \simeq Y_t - Y_0$.

Remarque : Le mouvement brownien standard a des accroissements indépendants. La formulation suivante relie processus autosimilaires et les processus stationnaires.

Proposition : Soit X_t H-auto-similaire, alors le processus

$$Y_t = e^{tH} X(e^t), t \in \mathbb{R}$$

est stationnaire. Réciproquement, si le processus $\{Y_t, t \geq 0\}$ est stationnaire, alors le processus

$$X(t) = t^H Y(\ln t), t \geq 0$$

est $H - ss$.

3 Le bruit gaussien fractionnaire

Le bruit gaussien fractionnaire est parmi les processus les plus connus dans les domaines de recherche. Avec le processus FARIMA (Fractionally Autoregressive Integrated Moving Average) ils sont souvent utilisés pour détecter la présence de mémoire longue ou 'long range dependance' dans les séries temporelles [51]. Par définition le processus $\{X_i^H, i \geq 1\}$ discrétisé en temps est l'incrément du mouvement brownien fractionnaire, on le nomme bruit gaussien fractionnaire (BGF) à savoir : $X_i^H = B_{i+1}^H - B_i^H, i \geq 1$.

Définition : Le bruit gaussien fractionnaire de paramètre $0 < H < 1$ est un processus stochastique gaussien centré stationnaire, sa fonction d'autocorrélation $\rho(k)$ de décalage où "lag" k est :

$$\rho(k) = Cov(X_i^H, X_{i+k}^H) = \frac{\sigma^2}{2}((k+1)^{2H} + |k-1|^{2H} - 2k^{2H}), k \in \mathbb{N} \quad (I.2)$$

Remarque : Pour $H = 1/2$, $\rho(k) = 0, \forall k \neq 0, \rho(0) = \sigma^2$ et le bruit gaussien fractionnaire s'appelle bruit blanc.

Propriétés des processus à mémoire longue

La présence de mémoires longue dans les séries temporelles permet de prédire les réalisations futur à partir d'observations passées. Les séries temporelles qui possèdent cette propriété sont dénommées séries persistantes. Pour ce type de série, la dépendance entre observations actuelles et observations passées est très forte. Cette propriété qui caractérise un grand nombre de phénomènes dans différent domaines, est connue depuis que l'hydrologue Hurst (1951) l'ait mise en évidence à partir d'une étude qu'il mena sur l'évolution en temps du niveau d'eau du Nil. Une des conséquences directes de cette propriété de mémoire longue d'un processus stochastique, est que la

fonction d'autocorrélation du processus décroît lentement vers zéro. A l'inverse, un processus à mémoire courte sera caractérisé par une fonction d'autocorrélation tendant très rapidement vers zéro. Finalement certains processus sont à mémoire nulle, c'est à dire que chaque observation est totalement indépendante l'une de l'autre, tel est le cas pour le bruit blanc. Un processus à mémoire longue peut être caractérisé par sa fonction d'autocorrélation, exprimée dans le domaine réel ou spectrale. Nous introduisons à présent les définitions de la fonction d'autocorrélation les plus utilisées selon la littérature [47, 78, 16]. Pour plus de détails, voir le livre [8].

a) Domaine temporel

Définition : Un processus stationnaire X_t d'ordre 2 est a mémoire longue si sa fonction d'autocorrélation ρ_k décroît vers zéro de manière hyperbolique lorsque le retard augmente de la manière : $\rho(k) \sim ck^{-\alpha}$ quand $k \rightarrow \infty$ pour $c > 0$ et $0 < \alpha < 1$, où \sim représente l'équivalence asymptotique qui signifie :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\rho_k}{ck^{-\alpha}} = 1$$

Par conséquent, la série des autocorrélations est divergente i.e :

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \rho(k) = +\infty$$

La transformation de Fourier de la fonction d'autocorrélation permet de trouver une autre définition du processus à longue mémoire dans le domaine spectral.

b) Domaine spectral

Définition Un processus stationnaire X_t et un processus à mémoire longue s'il existe un nombre réel $\beta, 0 < \beta < 1$ et une constante $a, a > 0$, vérifiant :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\lambda)}{a|\lambda|^{-\beta}} = 1$$

avec $f(\lambda)$, la densité spectrale (la transformation de Fourier de la fonction d'autocovariance). Comme on peut l'observer, la densité spectrale présente un pôle à la fréquence zéro.

Pour un processus à mémoire courte, la fonction d'autocorrélation associée décroît de manière exponentielle, ainsi la densité spectrale est finie à l'origine et la série des autocorrélations est finie i.e : $\sum_{k \in \mathbb{N}} \rho(k) < \infty$.

Remarque La fonction d'autocorrélation du BGF peut s'écrire sous la forme [23] : $\rho(k) = \frac{1}{2}k^{2H}h(1/k)$ pour $k \geq 1$ ou $h(x) = (1-x)^{2H} - 2 + (1+x)^{2H}$ ainsi le développement de

Taylor autour de l'origine de cette fonction donne pour $H \neq 1/2$ la relation asymptotique suivante :

$$\rho(k) \sim H(2H - 1)k^{2H-2} \quad (\text{I.3})$$

La densité spectrale pour le processus BGF est donnée par [66] :

$$f(\lambda) = C_H \left(2 \sin \frac{\lambda}{2}\right)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\lambda + 2\pi k|^{2H+1}} \sim C_H |\lambda|^{1-2H} \text{ quand } \lambda \rightarrow 0 \quad (\text{I.4})$$

où, C_H est une constante.

Les relations I.3, I.4 montrent que le bruit gaussien fractionnaire (les accroissement du mouvement brownien fractionnaire) est capable de détecter la présence de mémoire longue dans les séries temporelles selon les valeurs de l'exposant de Hurst H .

- i) Si $H = 1/2$, les autocorrélations sont nulles, la densité spectrale est constante et le processus n'a aucune dépendance à long terme.
- ii) Si $0 < H < 1/2$ les autocorrélations sont positivement corrélées, le processus est à mémoire longue, on dit alors qu'il est *persistant*.
- iii) Si $1/2 < H < 1$ les autocorrélations sont négativement corrélées, le processus est à mémoire courte, on le qualifie alors *d'antipersistant*.

4 Méthode de simulation

Nombreuses méthodes ont été proposées dans la littérature pour la simulation de FBM, ainsi que du BGF. Ces méthodes dites exacte sont basées sur la matrice de covariance, il s'agit : de la méthode de Wood et Chan, la méthode de décomposition de Cholesky, la méthode de Levinson. dans tous ces cas la covariance du modèle continu coïncide avec la covariance du modèle dans le cas discrétisé (voir les thèses suivantes : [23, 17]), dans le cas où la covariance est approximative on trouve d'autres méthodes dites approximatives qui sont basées sur les ondelettes, la densité spectrale, la représentation stochastique [10, 17, 18] ainsi que d'autres méthodes [54]. Pour notre travail nous utilisons la décomposition de cholesky.

Décomposition de Cholesky

Soit $\Sigma = \Gamma(t_i, t_j)$ la matrice de covariance du MBF standard discrétisé en temps avec $t_i = i, t_j = j$, pour $i, j = 1, \dots, N - 1$. D'après la formule I.1, la matrice de covariance est une matrice symétrique et définie positive, elle peut donc être décomposée

I.5 Exemple des processus non gaussiens auto-similaires à accroissements stationnaires

par la méthode de Cholesky de telle sorte que :

$$\Sigma = LL^t$$

où L est une matrice triangulaire inférieure. Si Z est un vecteur de $N - 1$ variables aléatoires gaussiennes indépendantes centrées réduites, alors le vecteur $(0, (LZ)^t)^t$ définit une trajectoire de longueur N d'un MBF aux instants $(0, t_1, \dots, t_{N-1})$. De la même manière pour générer un signal de BGF aux instants $0, 1, \dots, N - 1$, on remarque que la matrice de covariance de la formule I.2 est de la forme :

$$\Sigma_{ij} = \rho(i - j)_{i,j=0,1,\dots,N-1}.$$

Ainsi le vecteur LZ , où L est la matrice triangulaire inférieure issue de la décomposition de Cholesky de la matrice de covariance Σ_{ij} du BGF, définit une trajectoire du BGF aux instants désirés. Les Figures ?? représentent des exemples de la simulation du MBF et du BGF respectivement pour les exposants de Hurst $H = 0.3, H = 0.5, H = 0.8$. Voici maintenant des exemples des processus non gaussiens auto-similaires à

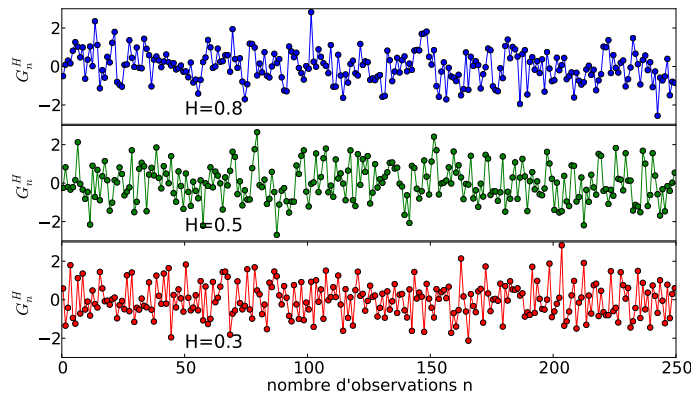


Figure I.2 – Simulation du bruit gaussien fractionnaire par décomposition du cholesky

accroissements stationnaires.

5 Exemple des processus non gaussiens auto-similaires à accroissements stationnaires

Parmi les processus qui ont des applications dans divers domaines sont les processus qui ont une distribution stable dits aussi processus de Levy α stable en particulier en finance ou l'hypothèse du gaussiennité dans les séries des données est rejetée (les données empiriques de rendement de marché) [27], par le fait que celle ci dépend de

I.5 Exemple des processus non gaussiens auto-similaires à accroissements stationnaires

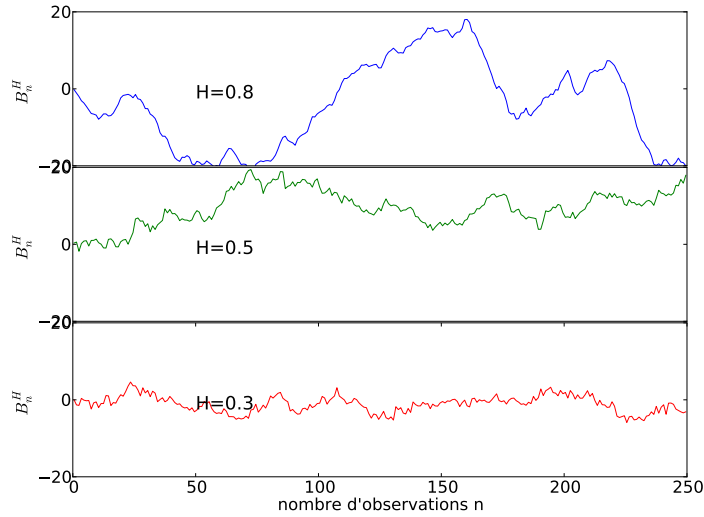


Figure I.3 – Simulation du mouvement brownienne fractionnaire par décomposition du cholesky

deux paramètres la moyenne μ et la variance σ qui est finie par contre les processus de Levy α stable dépend de quatre paramètres $(\alpha, \sigma, \beta, \mu)$ le premier paramètre α désigne l'épaisseur des queues de distribution, le paramètre β est le skewness qui mesure l'assymetrie de distribution, les deux autres paramètres σ, μ jouent le rôle respectivement de la variance et de la moyenne dans la distribution gaussienne. La propriété de stabilité qui signifie la somme des deux variables aléatoires indépendentes ayant des distributions stables avec indice de stabilité α reste aussi une distribution stable avec le même indice de stabilité α . Autre propriété intéressante qui est l'auto-similarité avec l'indice d'auto-similarité est $H = \frac{1}{\alpha}$. Notons que le processus de Levy α stable est une généralisation du processus gaussien (quand $\alpha = 2$). Nous donnons brièvement des définitions élémentaires pour les processus de Levy α stables et pour plus détails voir les références ([4, 49, 50, 42]).

Distribution stable : Une variable aléatoire X est dite de distribution α stable s'il existe $\alpha \in]0, 2], \beta \in [-1, 1], \sigma \geq 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$ telle que la fonction caractéristique de la variable aléatoire X , soit de la forme :

$$\mathbb{E}(e^{i\theta X}) = \begin{cases} \exp(-\sigma^\alpha |\theta|^\alpha [1 - i\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2} (\text{sign}(\theta)) + i\mu]) & \alpha \neq 1 \\ \exp(-\sigma |\theta| [1 + i\beta \frac{2}{\pi} (\text{sign}(\theta)) \ln |\theta|] + i\mu) & \alpha = 1 \end{cases} \quad (\text{I.5})$$

avec $\mathbb{E}(\cdot)$ est l'espérance mathématique et

$$\text{sign}\theta = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta > 0 \\ 0 & \text{si } \theta = 0 \\ -1 & \text{si } \theta < 0 \end{cases}$$

I.5 Exemple des processus non gaussiens auto-similaires à accroissements stationnaires

La distribution stable de quatre paramètres $(\alpha, \sigma, \beta, \mu)$ notée par $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ tel que le paramètre α s'appelle indice de stabilité, σ est le paramètre d'échelle (dit aussi paramètre de dispersion), β est le paramètre d'asymétrie (le skewness), la valeur négative de β ou positive signifie que la distribution est décalée vers la gauche ou vers la droite respectivement et μ est le paramètre de localisation.

– Pour $\beta = \mu = 0$ la distribution α stable est dite *symétrique* et on note $X \sim S_\alpha S$ et la fonction caractéristique devient simplement

$$\mathbb{E}(e^{i\theta X}) = \exp(-\sigma^\alpha |\theta|^\alpha) \quad (\text{I.6})$$

Le mouvement de Levy α stable

Le mouvement α stable est le processus stochastique $L_t^{\alpha, \beta}$ qui vérifie les propriétés suivantes [9] :

- $L(0) = 0$ presque sûrement (p.s)
- Les incréments sont indépendants, tels que $L(t) - L(s) \sim S_\alpha((t-s)^{\frac{1}{\alpha}}, \beta, 0)$ pour tout $0 \leq s < t < \infty$ et $0 < \alpha \leq 2, -1 \leq \beta \leq 1$, si $\beta = 0$ le mouvement est dit symétrique.

Nous présentons dans ce qui suit la méthode de la simulation, nous commençons tout d'abord par une variable aléatoire à distribution α stable.

Simulation d'une variable aléatoire à distribution α stable

La difficulté de trouver la forme explicite de la fonction de densité pour une variable aléatoire (seulement pour certains cas $\alpha = \frac{1}{2}, 1, 2$ respectivement, distribution de Levy, Cauchy et distribution gaussienne) pose un problème de simulation et différentes méthodes ont été proposées dans la littérature voir [39]. La propriété de la stabilité permet de simuler une variable aléatoire ($Y \sim S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$) à partir de la simulation d'une variable aléatoire X telle que $X \sim S_\alpha(1, \beta, 0)$ avec Y défini par la dernière expression dans l'algorithme ci-dessous. La simulation se fait en quatre étapes [74, 75]

1. Générer une variable aléatoire U de distribution uniforme sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
2. Générer une variable aléatoire W de distribution exponentielle de moyenne 1 et indépendante de U .
3. Pour $\alpha \neq 1$ calculer

$$X = S(\alpha, \beta) \frac{\sin \alpha(U + B(\alpha, \beta))}{(\cos U)^{\frac{1}{\alpha}}} \cos \left(\frac{(U - \alpha(U + B(\alpha, \beta)))^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{W} \right)$$

I.5 Exemple des processus non gaussiens auto-similaires à accroissements stationnaires

tels que :

$$S(\alpha, \beta) = 1 + \beta^2 \tan^2\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)$$

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\arctan(\beta \tan(\frac{\pi\alpha}{2}))}{\alpha}$$

4. Pour $\alpha = 1$ calculer :

$$X = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \beta U\right) \tan U - \beta \ln\left(\frac{\frac{\pi}{2}W \cos U}{\frac{\pi}{2} + \beta U}\right)$$

5. Poser :

$$Y = \begin{cases} \sigma X + \mu & \text{pour } \alpha \neq 1 \\ \sigma X + \frac{2}{\pi}\beta\sigma \ln \sigma + \mu & \text{pour } \alpha = 1 \end{cases}$$

Pour une variable aléatoire symétrique $X \sim S\alpha S(\beta = 0)$, alors l'algorithme se réduit en trois étapes et l'expression de X devient simplement :

$$X = \frac{\sin \alpha U}{(\cos U)^{\frac{1}{\alpha}}} \cos\left(\frac{(1-\alpha)U}{W}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

Méthode de simulation

La méthode de simulation du mouvement de Levy α stable est basée simplement sur l'approximation du mouvement avec la marche aléatoire [52, 64, 19, 55]. En effet, pour simuler $X(t_1), \dots, X(t_n)$ pour un nombre de temps fixé t_1, \dots, t_n en suivant l'algorithme donné en [19].

1. générer n variables aléatoires U_i indépendantes et identiquement distribuées selon la loi uniforme sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
2. générer n variables aléatoires W_i indépendantes et identiquement distribuées selon la loi exponentielle.
3. Pour tout $i = 1, \dots, n$ calculer :

$$\Delta X_i = (t_i - t_{i-1})^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\sin \alpha U_i}{(\cos U_i)^{\frac{1}{\alpha}}} \cos\left(\frac{(1-\alpha)U_i}{W}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

avec $t_0 = 0$

4. Poser

$$X(t_i) = \sum_{k=1}^i \Delta X_k$$

Un simple code en R pour la simulation du mouvement de Levy α stable se trouve dans la référence suivante [68], (page 136). La figure I.4 présente un exemple de simulation

obtenu par code de python.

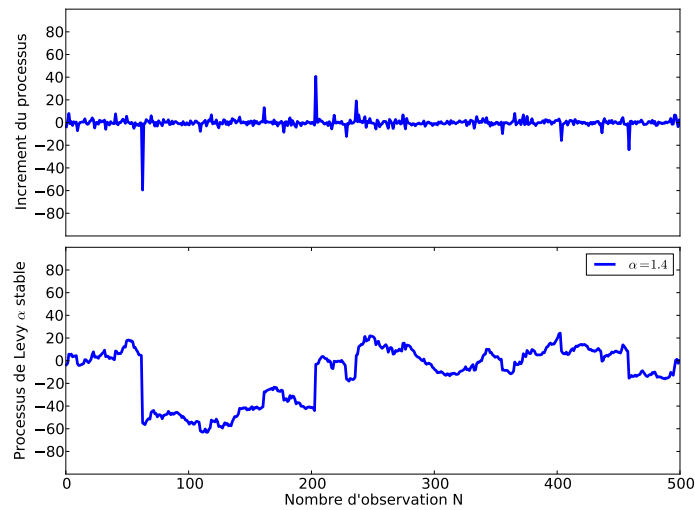


Figure I.4 – Simulation du mouvement de Levy α stable avec ses accroissements

6 Données réelles de la rivière de Nil :

Historiquement, Hurst a mesuré les niveaux d'eau pour les années 622-1281 A.D dans la rivière de Roda Guge près du Caire. Ces données sont disponibles dans le site web :<http://lib.stat.cmu.edu/S/beran>, ensuite Mandelbrot et all[45] ont introduit le bruit gaussien fractionnaire comme un modèle de cette série temporelle. La Figure

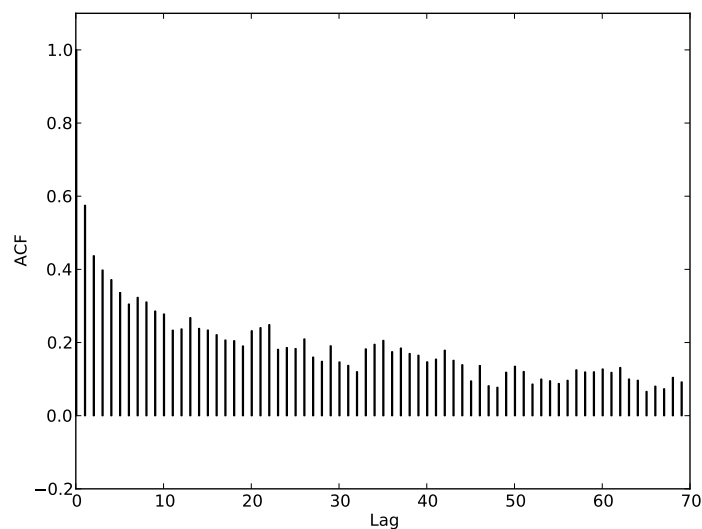


Figure I.5 – La fonction d'autocorrelation du données réeles de la revière du Nil.

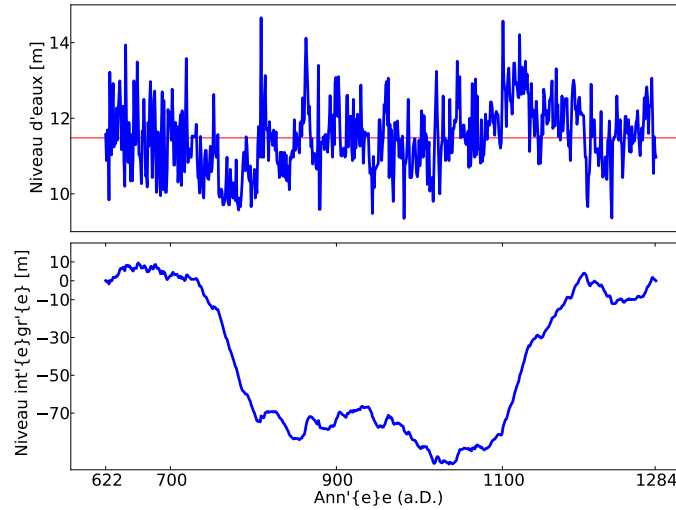


Figure I.6 – Les données réelles de la rivière du Nil avec sa série intégrée

I.5 montre que la fonction d'autocorrelation décroît lentement lorsque le décalage augmente, ce qui signifie que l'exposant de Hurst doit être dans l'intervalle $H \in]\frac{1}{2}, 1[$. La figure I.6 illustre les données réelles de la rivière de Nile avec sa série intégrée qui s'obtient par l'expression suivante :

$$L(k) = \sum_{i=1}^{i=k} (X_i - \bar{X}), \quad k = 1, \dots, N \quad (\text{I.7})$$

7 Conclusion :

Dans ce chapitre, on a présenté les notions mathématiques élémentaires nécessaires pour le mouvement brownien fractionnaire comme un exemple de processus gaussien auto-similaire à accroissements stationnaires, qui s'appelle le bruit gaussien fractionnaire. On a présenté aussi la méthode de simulation, où on a choisit la méthode de décomposition de cholesky. On a introduit également un exemple de processus non gaussien qui possède la même propriété du mouvement brownien fractionnaire, c'est le processus de Levy α stable et la méthode de simulation de ce type de processus. De plus on a donné un exemple dans le domaine d'application en hydrologie modélisé par le bruit gaussien fractionnaire, c'est les données historiques de la rivière du Nil mesurées près du Cairo pour les années 622-1281 A.D.

CHAPITRE II

MÉTHODE D'ESTIMATION DE L'EXPOSANT DE HURST

1 Introduction

L'exposant de Hurst caractérise les processus auto-similaires ainsi que les processus à mémoire longue ce qui explique les différentes méthodes qui ont été proposées dans la littérature pour l'estimer, depuis le hydrologyste Hurst qui a introduit la méthode de l'analyse des étendues normalisées (rescaled range analysis) notées R/S. Ces méthodes peuvent se regrouper en trois catégories :

1. Les méthodes spectrales : log périodogramme [30], estimateur de Whittle [77].
2. Les méthodes basées sur les ondelettes : la méthode d'ondelette de vraisemblance maximale (Wavelet maximum Likelihood, WML) [46], la méthode d'Abry-Veitch [2, 73].
3. Les méthodes temporelles : la méthode des variances agrégées [70], la méthode d'analyse des fluctuations redressées (Detrended Fluctuation Analysis, DFA) [53, 31].

Dans le but de faire une comparaison avec la méthode Bayésienne introduite dans le troisième chapitre. On s'intéresse ici à appliquer quelques méthodes populaires d'estimations de l'exposant de Hurst, sur le modèle de bruit gaussien fractionnaire avec une application sur les données réelles de la rivière du Nil. Notons que plusieurs méthodes sont déjà appliquées sur ce modèle ainsi que le modèle FARIMA(0, d , 0), où d est le paramètre de différenciation fractionnaire (voir l'annexe pour la définition), ce paramètre d est lié à l'exposant de Hurst par la relation $d = H - \frac{1}{2}$. Dans le but d'avoir la performance de ces estimateurs, à titre d'exemple les études de Taqqu et al [70], où ils

ont généré 50 réalisations indépendantes des échantillonnages de longueur $N = 10.000$ pour l'exposant de Hurst qui varie entre 0.1 et 0.9 avec un pas 0.1. Les deux types de processus sont simulés par l'algorithme de Durbin-Levinson, la description de cet algorithme se trouve dans les références [70, 13, 32]. Les méthodes qui sont testées sont : l'analyse R/S, la méthode de la variance agrégée, la méthode des valeurs absolues de la série agrégée, la méthode de Higuchi, la technique des résidus, la méthode de Geweke et Porter-Hudak (GPH), la méthode du périodogramme, le périodogramme modifié et l'estimateur de Wittle. Pour les codes de programmation de ces méthodes, voir le site web de Taqqu.

Divers auteurs ont été intéressés à faire une comparaison des estimateurs appliqués sur les deux modèles avec des résultats théoriques sur les propriétés asymptotiques de ces estimateurs [57, 56, 51].

Dans ce chapitre, on s'intéresse à appliquer la deuxième méthode de Robinson [60] et la méthode d'Abry et Veitch [2, 73]. L'avantage de ces méthodes est de donner en plus du point d'estimation \hat{H} , l'intervalle de confiance que d'autres méthodes ne pouvaient le faire car ils souffrent de l'absence de cette propriété (analyse de R/S, la méthode de la variance agrégée, la méthode du périodogramme). En outre, Abry et Veitch [2, 73], Robinson [60] ont prouvé que ses estimateurs sont efficaces et asymptotiquement sans biais. Par ailleurs plusieurs travaux ont montré que l'estimateur d'Abry et all est le meilleur estimateur par rapport aux autres [35]. En plus, on introduit quelques méthodes en mentionnant quelques résultats obtenus dans les références [8, 63, 51, 35, 57]. La simulation du processus de bruit gaussien fractionnaire est effectuée par la méthode de Cholesky. Avant de commencer la présentation des méthodes qui nous intéressent dans ce chapitre, nous donnons quelques notions sur les critères d'un estimateur qui permettent de connaître le bon estimateur.

Qualités d'un estimateur

Nous citons ici quelques critères qui garantissent la qualité d'un estimateur.

Estimateur sans biais : Un estimateur \hat{H} du paramètre H est dit sans biais(ou non biaisé) lorsque son espérance mathématique est égale à la valeur vraie du paramètre H . Autrement dit, le biais d'un estimateur est la différence entre sa valeur moyenne et la vraie valeur que l'on veut estimer.

$$b_{\hat{H}} = \mathbb{E}(\hat{H}) - H$$

Généralement, on recherche un estimateur sans biais. L'estimateur est dit *asymptotiquement non biaisé* si le biais diminue lorsque la taille n de l'échantillon augmente :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(\hat{H}) = H$$

Estimateur efficace : La variance de l'estimateur \hat{H} est la quantité suivante qui doit être minimisée.

$$var_{\hat{H}} = \mathbb{E}((\mathbb{E}(\hat{H}) - \hat{H})^2)$$

Estimateur consistant

Un estimateur est dit consistant si le biais et la variance tend vers zéro lorsque le nombre d'observations tend vers l'infinie.

2 La méthode du Hurst(R/S)

Cette méthode est appelée analyse des étendues normalisées ou bien Rescaled Range Analysis (R/S), qui a été introduite par Hurst en 1951 [34], elle a été modifiée par Lo en 1991 [41]. Pour une série temporelle : $X(i), i = 1, \dots, n$, de moyenne $\bar{X} = n^{-1} \sum_{i=1}^n X(i)$, la statistique R/S se définit comme l'étendue R de la série centrée et intégrée $Y(k) = \sum_{j=1}^k (X_j - \bar{X}), k = 1, \dots, n$ normalisée au moyen d'une division par l'écart type S de la série originale, telle que : $S^2 = n^{-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2$. L'étendue R est définie comme la différence entre le maximum et le minimum de la série $Y(k)$ qui s'écrit comme suit :

$$R = \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^k (X_j - \bar{X}) - \min_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^k (X_j - \bar{X})$$

La statistique R/S est donnée par le rapport $R/S = \frac{R}{S}$. Hurst a trouvé que cette statistique dépend de la longueur de l'échantillonnage n par l'expression suivante :

$$(R/S)_n \sim cn^H$$

pour $n \rightarrow \infty$ et c une constante positive qui ne dépend pas de n .

Alors la détermination de H par la statistique R/S se procède comme suit [76] :

- On divise la série originale de longueur N en d bloc de taille n .
- Pour chaque bloc $m, m = 1, \dots, d$, on calcule la statistique R_m/S_m .

- On calcule la moyenne empirique de R_m/S_m , pour tout les blocs de taille n .

$$(R/S)_n = d^{-1} \sum_{m=1}^{m=d} R_m/S_m$$

- Pour un ensemble des valeurs de n , on trace le graphe $\log(R/S)_n$ en fonction de $\log(n)$.
- On détermine la pente de la droite dont l'expression est : $\log((R/S)_n) = c + H \cdot \log(n)$ par la méthode des moindres carrés ordinaires.

L'inconvénient majeur de cette méthode est qu'on ne peut pas distinguer la série de mémoire courte, à cause de cette difficulté, la méthode a été modifiée par Lo (1991) [41], appelée R/S modifiée. Par contre cette méthode peut détecter la présence de mémoire longue dans une série temporelle non gaussienne [5].

Application

a) Données artificielles

Cette méthode est déjà appliquée sur un échantillonnage du bruit gaussien fractionnaire du taille $N=10.000$, pour les valeurs de $H \in \{0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9\}$. Nous citons ici les résultats obtenus dans la référence [63], qui sont illustrés dans le tableau II.1 suivant :

H	$\hat{H}_{R/S}$
0.5	0.51
0.6	0.61
0.7	0.67
0.8	0.77
0.9	0.87

Tableau II.1 – Estimation de l'exposant de Hurst pour BGF pour $N=10.000$ avec R/S

b) Données réelles de la rivière de Nil

Notons ici que Beran [8] a mentionné l'inconvénient de cette méthode qui réside dans la difficulté de choisir le point seuil pour le calcul de l'exposant de Hurst comme par exemple pour les données réelles de la rivière du Nil, pour les trois choix suivants : $K \geq 10$, $K \geq 50$ et $K \geq 100$, avec K , la taille du bloc. Les exposants de Hurst \hat{H} sont respectivement 0.856, 0.910, 0.972 et 1.174, où la dernière valeur est à l'extérieur de l'intervalle $]0, 1[$ (les valeurs possibles de H).

3 Méthode de la variance agrégée

L'idée principale de cette méthode est de diviser la série temporelle originale $X(i), i = 1, \dots, N$ en $\frac{N}{m}$ blocs de taille m , où N est le nombre d'observations : Pour chaque bloc de taille m , on calcule la série $X^{(m)}(k)$

$$X^{(m)}(k) = \frac{1}{m} \sum_{i=m(k-1)+1}^{km} X(i), k = 1, 2, \dots, \frac{N}{m}$$

On calcule ensuite la variance de cette série $X^{(m)}(k)$:

$$\text{var}(X^{(m)}) = \frac{1}{N/m} \cdot \sum_{k=1}^{N/m} (X^{(m)}(k) - \bar{X})^2$$

On répète cette procédure pour différentes valeurs de m . D'après la relation asymptotique suivante : [47]

$$\text{var}(X^{(m)}) \sim c.m^{2H-2}$$

où c est une constante.

Alors l'estimation de l'exposant de Hurst est obtenu en faisant la régression linéaire de $\log(\text{var}(X^{(m)}))$ sur $\log(m)$.

4 Périodogramme

La méthode de périodogramme est une méthode très connue parmi d'autres méthodes appliquées dans le domaine spectrale, cette dernière a été introduite par Schuster en 1898 [6]. Le périodogramme pour la fréquence λ d'une série temporelle $X_j, j = 1, \dots, N$ [70, 61] est défini par l'expression suivante :

$$I(\lambda) = |TF_X|^2$$

avec TF_X est la transformation de Fourier discrète, qui est définie de la façon suivante :

$$TF_X(\lambda) = (2\pi N)^{-1/2} \sum_{j=1}^N X_j \exp(-ij\lambda)$$

Où $i^2 = -1$. Cette méthode est dite méthode de *Périodogramme classique*. Comme on a vu dans le chapitre 1, la densité spectrale du bruit gaussien fractionnaire $f(\lambda)$ est proportionnelle à $|\lambda|^{1-2H}$ pour λ proche de l'origine. En général, $I(\lambda)$ est calculé pour les fréquences $\lambda_j = \frac{2\pi j}{N}$ avec $j = 1, \dots, [\frac{N-1}{2}]$. Où $[\]$ désigne la partie entière.

Donc, la régression linéaire du logarithme du périodogramme sur logarithme de la fréquence donne la pente qui est égale à $1 - 2H$ [8]. **Remarque :** Le périodogramme est un estimateur biaisé, c'est un estimateur non consistant pour la densité spectrale de la puissance(dsp) puisque la variance ne tend pas vers zéro lorsque la taille de l'échantillon augmente [14]. Plusieurs méthodes existent pour diminuer la variance du périodogramme et réduire le biais de cet estimateur, l'une des méthodes est d'intégrer la fonction du périodogramme en utilisant *le périodogramme cumulé*. Cette nouvelle fonction doit être proportionnelle à $c.\lambda^{2-2H}$, pour plus de détails sur d'autres versions du périodogramme voir le cite web de Taqqu.

Application

Premièrement nous voulons vérifier que la méthode de périodogramme cumulé réduit le biais par rapport à la méthode du périodogramme classique, pour cette raison nous appliquons les deux types de la méthode du périodogramme pour un signal de bruit gaussien fractionnaire pour différents longueurs de la série $N = 256$ et $N = 1000$, et pour nominal $H = 0.8$. Ensuite pour les données réelles de la rivière de Nil, on a utilisé les mêmes structures de code du périodogramme en R introduit par le Prof Murad Taqqu en python, où il a proposé de prendre le pourcentage des fréquences 10% [70].

Tableau II.2 – Estimation de l'exposant de Hurst pour BGF artificielle avec $H=0.8$ par périodogramme classique et cumulé

n	\hat{H} Périodogramme classique	\hat{H} Périodogramme cumulé
n=256	1.012726	0.7696
n=1000	0.956	0.823

Les résultats obtenus sont illustrés dans le tableau II.2 La figure II.1 ci-dessous montre la régression linéaire pour la donnée artificielle du bruit gaussien fractionnaire pour un nombre d'observations $N = 1000$ et $H = 0.8$. Remarquons ici que dans les deux types de la méthode du périodogramme, les résultats dépendent de la longueur de la série, la plus grande taille de l'échantillon réduit le biais.

Données réelles de la rivière du Nil

Pour les données réelles de la rivière de Nil, on remarque qu'il y a une amélioration dans la valeur de H , la méthode du périodogramme classique pour le choix 10% des fréquences donne une valeur à l'extérieur de l'intervalle $]0, 1[$, par contre la méthode du périodogramme cumulé donne une valeur admissible, comme il est mentionné dans le tableau II.3 suivant :

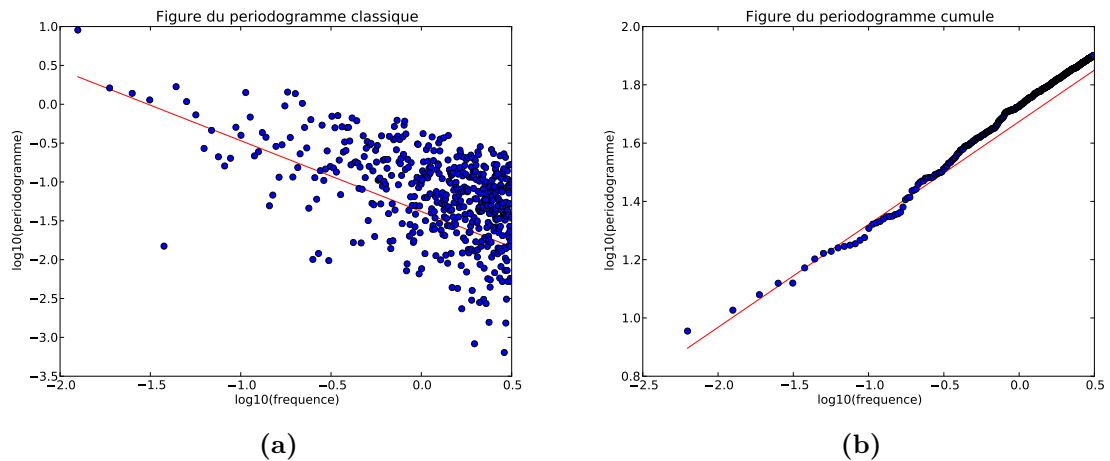


Figure II.1 – Régression linéaire pour la méthode du périodogramme classique (a) et cumulé (b), pour le bruit gaussien fractionnaire pour $N = 1000$ et $H = 0.8$

Tableau II.3 – Estimation de l'exposant de Hurst pour les données réelles de la rivière du Nil.

Méthode	\hat{H}
Périodogramme classique	1.049
Périodogramme cumulé	0.8290

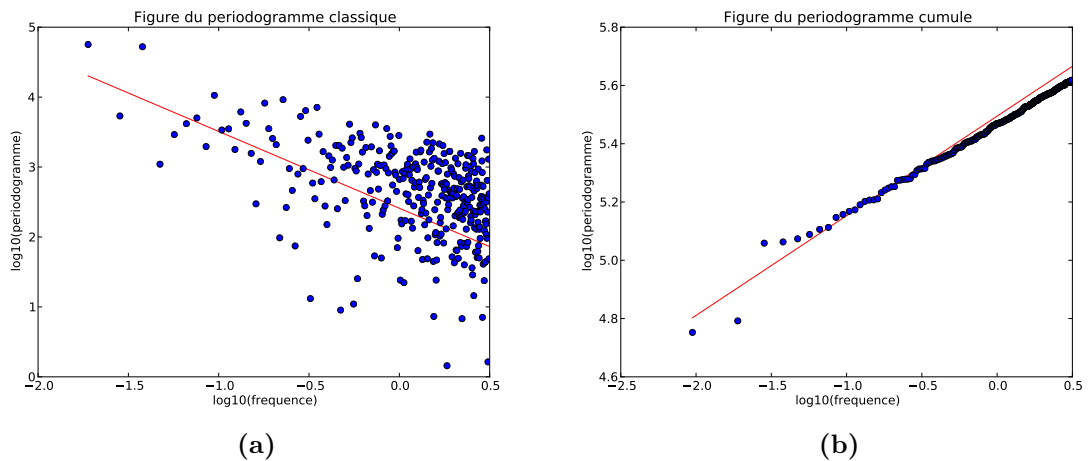


Figure II.2 – Régression linéaire pour la méthode du périodogramme classique (a) et cumulé (b) pour les données réelles de la rivière du Nil.

Figure II.2 montre que la régression linéaire pour les données réelles de la rivière du Nil, pour les deux méthodes. Les résultats obtenus pour les deux méthodes pour une seule réalisation ne conduit pas à dire que la méthode du périodogramme cumulé est meilleure que la méthode du périodogramme classique, ainsi nous voulons voir la distribution asymptotique pour les deux méthodes.

On génère un échantillonnage de longueur $N = 1000$, $H = 0.6$ et pour un nombre $R = 10.000$ de réalisations, en visualisant la distribution de l'échantillonnage à l'aide de densité du noyaux gaussien (Gaussian kernel density notée GKD) qui est une généralisation de l'histogramme [79].

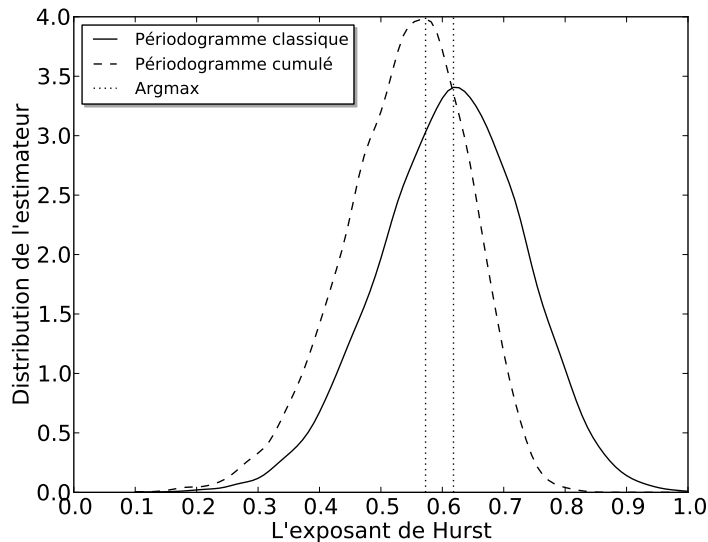


Figure II.3 – Comparaison des densités du noyau Gaussien entre la méthode du périodogramme classique et cumulé pour le BGF pour $H = 0.6$, $N = 1000$ et un nombre $R = 10.000$ de réalisations .

Les résultats sont présentés dans la figure II.3 ci-dessus, celle-ci nous montre que la méthode du périodogramme classique est positivement biaisée, par contre la méthode du périodogramme cumulé est négativement biaisée, cette dernière réduit la variance mais le biais reste plus grand que la méthode classique, nos résultats (avec un biais minimum) coïncident avec les résultats dans la référence [70], où la méthode du périodogramme classique a un biais minimum et une variance minimale par rapport à la méthode du périodogramme modifiée.

5 Méthode de Robinson

Deux méthodes sont proposées par Robinson dans son travail [61, 60] pour estimer l'exposant de Hurst, la première méthode est une modification de l'estimateur du Geweke et Porter-Hudak (GPH) [30].

L'application de cette méthode ainsi qu'une comparaison avec la méthode bayésienne et la méthode d'Abry et Veitch est réalisée dans notre article [7] et dans le travail [42]. Robinson [60] a montré que la deuxième méthode est asymptotiquement plus efficace par rapport à la méthode de GPH et à la première méthode. En outre, l'application de

ces trois méthodes avec une comparaison sur le modèle de bruit gaussien fractionnaire simulé par l'algorithme de Davies et Harte [21] est réalisée dans son travail pour différents longueurs de l'échantillon $N = 64, 128, 256$ et pour H varie de 0.1 a 0.9 avec un pas 0.2 et pour 5000 simulations du Monte Carlo. En outre l'auteur a appliqué cet estimateur pour les données historiques de la rivière du Nil, où il a trouvé des résultats différents et qui dépendent du choix du paramètre m dans l'équation ci-dessous II.3, telle que la croissance de m donne la décroissance dans la valeur estimée de l'exposant de Hurst (voir [60] pour plus de détails). Pour l'application des deux méthodes sur le modèle de FARIMA(p,d,q) voir [51]. Pour le processus simple FARIMA(0,d,0)

Première méthode

Cette méthode [61] est basée sur log périodogramme, l'élimination des l premières basses fréquences $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ dans la version simple de l'équation de l'estimateur proposée par GPH qui est donnée par l'équation II.1, qui donne ainsi la première méthode de Robinson [60], qui décrite par l'équation II.2.

$$\hat{d}_{GPH} = \frac{\sum_{j=1}^m (y_j - \bar{y}) \log(I(\lambda_j))}{\sum_{j=1}^m (y_j - \bar{y})^2} \quad (\text{II.1})$$

avec $I(\lambda_j)$, le périodogramme classique,

$$y_j = -\log(4 \sin^2(\lambda_j/2))$$

et

$$\bar{y} = m^{-1} \sum_{j=1}^m y_j$$

Donc l'estimateur de Robinson

$$\hat{d}_{Rb} = \frac{\sum_{j=l+1}^m (y_j - \bar{y}) \log(I(\lambda_j))}{\sum_{j=l+1}^m (y_j - \bar{y})^2}, 0 \leq m < l < n \quad (\text{II.2})$$

Où

$$\bar{y} = (m - l)^{-1} \sum_{j=l+1}^m y_j$$

Le paramètre d est lié à l'exposant de Hurst par la relation $d = H - \frac{1}{2}$. L'auteur [61] a montré sous certaines conditions et sous l'hypothèse de gaussianité du processus, les propriétés statistiques de cet estimateur : la convergence et la normalité asymptotique. Par contre la difficulté de cet estimateur est l'absence d'un critère de choix optimal des paramètres l et m .

Deuxième méthode

Cet estimateur est un estimateur semiparamétrique gaussien [60] pour le paramètre H dans le modèle paramétrique $f(\lambda) = G|\lambda|^{1-2H}$, $G \in]0, +\infty[$ et $H \in]0, 1[$ et contrairement à la première méthode, cet estimateur ne suppose pas la gaussianité du processus. L'estimation par cette méthode se déroule comme suit : pour une fonction définie par l'expression suivante :

$$R(H) = \log \hat{G}(H) - (2H - 1) \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \log \lambda_j \quad (\text{II.3})$$

tel que \hat{G} est l'estimateur de G , qui est défini comme suit :

$$\hat{G}(H) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \lambda_j^{2H-1} I_j \quad (\text{II.4})$$

Où $I_j = I(\lambda_j)$, le périodogramme classique. L'estimateur \hat{H} est donné par :

$$\hat{H} = \operatorname{argmin}_{H \in \Theta} R(H) \quad (\text{II.5})$$

avec $\Theta = [\Delta_1, \Delta_2]$, Δ_1, Δ_2 qui sont choisis arbitrairement entre 0 et 1 tels que $0 < \Delta_1 < \Delta_2 < 1$. Avec le choix $m = \frac{N}{2}$ pour N pair, $m = \frac{N-1}{2}$ pour N impair, avec N la taille de l'échantillon. Par ailleurs la normalité asymptotique de cet estimateur est assurée par l'expression suivante :

$$m^{\frac{1}{2}}(\hat{H} - H) \rightarrow \mathcal{N}(0, 1/4) \quad (\text{II.6})$$

où $\mathcal{N}(0, 1/4)$ désigne la loi normale centrée de variance 1/4.

Application

Nous nous intéressons ici à appliquer la deuxième méthode de Robinson pour différents longueurs de la série. On va vérifier la compatibilité des résultats empiriques avec les résultats théoriques. De plus dans le travail de Robinson [60], on choisit de simuler le BGF pour différentes tailles de l'échantillonnage suivants : $N = 70, 256, 1000$ et via la simulation du Monte et Carlo, nous répétons l'expérience avec un nombre $R = 10.000$ de réalisations pour voir la distribution de l'échantillonnage, la figure II.4 illustre les histogrammes pour le Nominal $H = 0.7$ de cet estimateur.

On remarque que les résultats s'améliore (avec un minimum biais et une variance minimale) lorsque la taille de l'échantillonnage augmente, ainsi que la normalité asymptotique de cet estimateur.

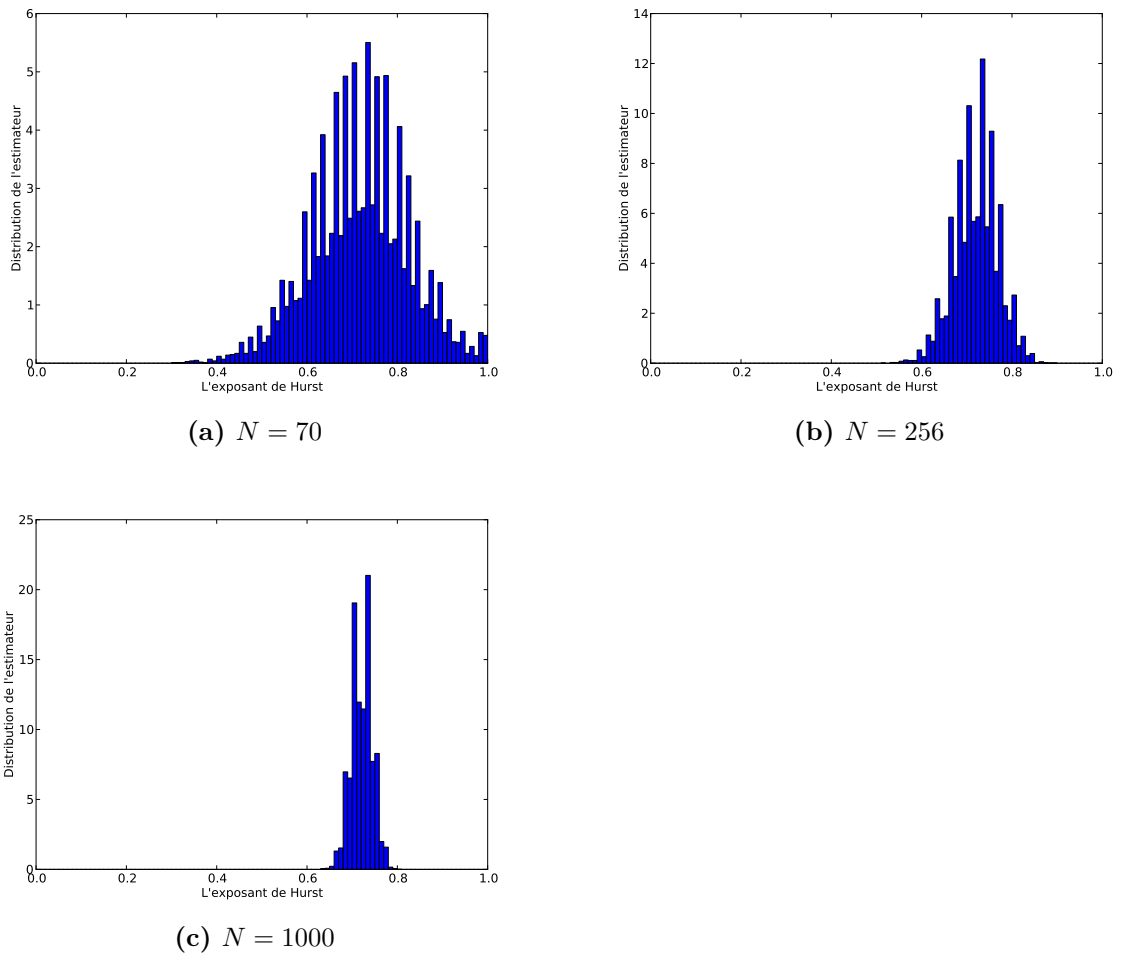


Figure II.4 – L’histogramme de la deuxième méthode de Robinson pour un BGF avec $H = 0.7$, et $N = 70(a)$, $256(b)$, $1000(c)$ et pour un nombre $R = 10.000$ de réalisations.

Tableau II.4 – Estimation de l’exposant de Hurst par la deuxième méthode de Robinson.

Nominal H	\hat{H}_{Rob}	Intervale de Confiance 95%
0.1	0.1	[0.056,0.144]
0.2	0.142	[0.098,0.186]
0.3	0.268	[0.224,0.312]
0.4	0.422	[0.3785,0.466]
0.5	0.534	[0.491,0.578]
0.6	0.633	[0.5888,0.676]
0.7	0.696	[0.6518,0.739]
0.8	0.857	[0.813,0.902]
0.9	0.927	[0.883,0.971]
Les données réelles de la rivière du Nil	0.871	[0.825,0.912]

En plus, nous testons cette méthode pour une seule réalisation pour $N = 1000$ et

II.6 Méthode basée sur les ondelettes introduite par Abry et Veitch :

H varie entre 0.1 et 0.9 avec un pas de 0.1 et pour chaque valeur de H , on calcule l'intervalle de confiance qui réduit la relation ci-dessus de la normalité asymptotique (II.6) de cet estimateur. Le tableau II.4 présente ces résultats.

On remarque ici que pour $H \geq 0.4$, l'estimateur est sur-estimé (sauf pour une seule valeur $H = 0.7$) avec une marge de l'erreur entre $\Delta H = \hat{H} - H = 0.022$ et $\Delta H = 0.057$, par contre les autres valeurs sont sous-estimées, la vraie valeur de l'exposant de Hurst (sauf pour $H = 0.1$) est estimée avec une marge de l'erreur qui ne dépasse pas 0.06. On peut déduire ici que la valeur estimée de l'exposant de Hurst pour les données de la rivière du Nil $\hat{H} = 0.871$ est sur-estimé.

On constate ici que les choix des paramètres m, Δ_1, Δ_2 jouent un rôle important dans cet estimateur, et ceci influe sur les résultats d'estimations.

6 Méthode basée sur les ondelettes introduite par Abry et Veitch :

Cette méthode a été introduite par Abry et Veitch en 1998[2], qui est basée sur la décomposition en ondelettes discrètes, plus précisément sur la régression linéaire de la variance des coefficients d'ondelettes, avec le choix de l'ondelette de Daubechie. Abry et Veitch [2] ont prouvé que cet estimateur est asymptotiquement sans biais avec une variance minimale ainsi que la présence de la tendance polynomiale dans la série temporelle qui est sans effet sur l'estimation de l'exposant de Hurst par le fait que l'ondelette mère choisie présente un nombre convenable des moments nuls. Veitch et Abry[73] ont amélioré cet estimateur par une petite correction sur le biais, qu'on va introduire ici.

Tout d'abord, nous introduisons les notions de base des ondelettes pour plus de détails voir la référence [20].

Définition : Une ondelette est une fonction ψ de $L^2(\mathbb{R})$ oscillante de moyenne nulle et a support finie, i.e :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$$

et doit remplir la condition d'admissibilité.

Condition d'admissibilité : La condition d'admissibilité est donnée par

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{\xi} d\xi < +\infty$$

où $\hat{\psi}$ désigne la transformée de Fourier de ψ .

Condition de la régularité : L'ondelette mère ψ vérifie la propriété que les moments

d'ordre N sont nuls si est seulement si :

$$\int t^k \psi(t) dt \equiv 0, k = 0, \dots, N - 1$$

Exemple d'ondelette : L'ondelette mère de Haar est la plus simple, c'est une fonction constante par morceaux, définie par l'expression suivante :

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < 1/2 \\ -1 & \text{si } 1/2 \leq t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) La transformation en ondelette continue :

La transformation en ondelette continue de la fonction $x(t)$ est donnée par la formule suivante :

$$W_x(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi_{a,b}(t) dt$$

La fonction $\psi_{a,b}(t)$ est obtenue par la translation b et la dilatation a de l'ondelette mère ψ .

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a > 0$. La transformation en ondelette inverse est donnée par :

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{W_x(a, b)}{a^2} \psi_{a,b}(t) da db \quad (\text{II.7})$$

b) La transformation en ondelettes discrète :

La transformation en ondelettes discrète (DWT, discret wavelet transform) est une version discrétisée de la transformation en ondelette continue avec une utilisation d'un échantillonnage dyadique, tel que : $a = 2^{-j}$ et $b = k2^{-j}$ où j, k sont des entiers.

L'analyse de Multirésolution (AMR)

L'Analyse multirésolution [20] est une suite des sous espaces $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ fermés et emboîtés de l'espace $L^2(\mathbb{R})$ qui vérifie les propriétés suivantes :

i) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}, \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$

ii) $V_j \subset V_{j-1}$

iii) $x(t) \in V_j \Leftrightarrow x(2^j t) \in V_0$

iv) il existe une fonction $\phi(t)$ de l'espace V_0 qui s'appelle fonction d'échelle ou l'ondelette père telle que la famille $\{\phi(t - k), k \in \mathbb{Z}\}$ forme une base de Riesz pour

II.6 Méthode basée sur les ondelettes introduite par Abry et Veitch :

V_0 .

La première propriété assure l'existence de la projection d'une fonction f de $L^2(\mathbb{R})$ sur l'espace V_j , la deuxième propriété indique qu'il existe un sous espace complémentaire W_j de V_j dans V_{j-1} i.e :

$$V_{j-1} = W_j \oplus V_j \quad (\text{II.8})$$

Notons que, j s'appelle la résolution, c'est le niveau d'analyse d'une fonction f de $L^2(\mathbb{R})$, V_j sont appelés l'espace d'approximation (les basses fréquences), W_j sont appelés espace détails (les hautes fréquences). Par itérations de l'équation II.8, on trouve :

$$V_J = V_K \oplus W_K \oplus \dots \oplus W_{J+1}, J < K \quad (\text{II.9})$$

Alors l'espace $L^2(\mathbb{R})$ peut s'écrire sous la forme :

$$L^2(\mathbb{R}) = V_J \oplus \{\oplus_{j=-\infty}^J W_j\}$$

La troisième propriété de la dilatation et la quatrième propriété permettent d'affirmer que la famille $\{\phi_{j,k}(t) = 2^{-j/2}\phi(2^{-j/2}t - k), k \in \mathbb{Z}\}$ forme une base orthonormée de l'espace V_j .

Ainsi l'opérateur de la sommation directe dans l'équation II.8 peut montrer l'existence d'une fonction ψ appelée ondelette mère telle que la famille $\{\psi(t - k), k \in \mathbb{Z}\}$ forme une base orthonormée de W_0 .

Par conséquent la famille $\{\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2}\psi(2^{-j/2}t - k), k \in (\mathbb{Z})\}$ forme une base orthonormée de l'espace W_j .

L'analyse multirésolution (AMR) permet de réécrire une fonction x de $L^2(\mathbb{R})$ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} x(t) &= approx_J(t) + \sum_{j=1}^{j=J} detail_j(t) \\ &= \sum_k a_x(J, k)\phi_{J,k}(t) + \sum_{j=1}^J \sum_k d_x(j, k)\psi_{j,k}(t) \end{aligned}$$

Les $a_x(j, k)$, s'appellent les coefficients d'échelles et $d_x(j, k)$ s'appellent les coefficients d'ondelettes, ils sont donnés par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} a_x(j, k) &= \langle x, \phi_{j,k} \rangle \\ d_x(j, k) &= \langle x, \psi_{j,k} \rangle \end{aligned}$$

où \langle, \rangle désigne le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R})$. Il existe plusieurs algorithmes, le plus connu est ancien, c'est l'algorithme de Mallat(pyramidal), que nous introduisons ici.

Par la suite, nous utiliserons les notations $a_n^j = \langle x, \phi_{j,n} \rangle, d_n^j = \langle x, \psi_{j,n} \rangle$ correspondent respectivement aux coefficients d'ondelettes et d'échelles.

L'algorithme pyramidal de Mallat

Cet algorithme [44] est un algorithme récursif qui décompose le signal en somme de deux filtres : haute fréquence g et basse fréquence h . Le premier filtre fournira les coefficients d'ondelettes et le deuxième filtre donne les coefficients d'échelles. L'idée principale est de décomposer les coefficients d'échelles $a_n^j = \langle x, \phi_{j,n} \rangle$ en fonction de $a_n^{j-1} = \langle x, \phi_{j-1,n} \rangle$, et comme ϕ est une fonction de V_0 avec $V_0 \subset V_{-1}$, donc la fonction d'échelle ϕ peut s'écrire dans la base de V_{-1} , i.e :

$$\phi(t) = \sum_n h[n] \phi_{-1,n}(t), n \in \mathbb{Z} \quad (\text{II.10})$$

tel que $\phi_{-1,n}(t) = 2^{1/2} \phi(2t - n)$ et $h[n] = \langle \phi, \phi_{-1,n} \rangle$ de la même manière, la décomposition une fonction d'échelle quelconque $\phi_{j,n}$ est :

$$\phi_{j,n} = \sum_k h[k] \phi_{j-1,k+2n}$$

Par conséquent, l'équation récursive peut être déterminée en calculant des coefficients d'échelle à la résolution j en fonction des coefficients d'échelle à la résolution $j - 1$ suivante (pour plus de détails du calcul voir [71, 44]) :

$$a_n^j = \sum_l \tilde{h}[2n - l] a_l^{j-1} \quad (\text{II.11})$$

où $\tilde{h}[n] = h[-n]$. D'une manière analogue pour les coefficients d'ondelettes d_n^j où à partir de la décomposition de l'ondelette ψ , de l'espace W_0 dans la base de V_{-1} telle que :

$$\psi = \sum_n g[n] \phi_{-1,n}$$

avec $g[n] = \langle \psi, \phi_{-1,n} \rangle$, on peut déterminer l'équation récursive du calcul des coefficients d'ondelettes à la résolution (octave) j en fonction des coefficients d'échelles à la résolution $j - 1$.

$$d_n^j = \sum_l \tilde{g}[2n - l] a_l^{j-1} \quad (\text{II.12})$$

avec $\tilde{g}[n] = g[-n]$. Inversement, l'équation de la reconstruction s'écrit :

$$a_n^{j-1} = \sum_k h[n - 2k] a_k^j + \sum_k g[n - 2k] d_k^j \quad (\text{II.13})$$

II.6 Méthode basée sur les ondelettes introduite par Abry et Veitch :

Notons que les filtres \tilde{h} et \tilde{g} s'appellent les filtres miroirs de h et g respectivement.

Remarque La fonction d'autocorrélation $\gamma(k)$ d'un processus stationnaire à longue mémoire vérifie la relation asymptotique suivante :

$$\gamma(k) \sim c_\gamma |k|^{-(1-\alpha)}, \alpha \in]0, 1[. \quad (\text{II.14})$$

De façon équivalente dans le domaine spectral, la densité spectrale $f(\xi)$ vérifie la relation asymptotique :

$$f(\xi) \sim c_f |\xi|^{-\alpha}, |\xi| \rightarrow 0. \quad (\text{II.15})$$

et

$$c_f = 2(2\pi)^{-\alpha} c_\gamma \Gamma(\alpha) \sin((1-\alpha)\pi/2) \quad (\text{II.16})$$

où Γ est la fonction d'Euler. L'exposant de Hurst H , relié à α par $H = (\alpha + 1)/2$. L'analyse de ces deux propriétés dans le domaine des ondelettes est effectuée dans les travaux d'Abry et al [1].

Méthode d'estimation

La variance des coefficients d'ondelette d'un processus stationnaire et à longue mémoire, vérifie l'équation d'invariance d'échelle suivante [72, 73] :

$$\mathbb{E}(d_x(j, \cdot))^2 = 2^{j\alpha} c_f C \quad (\text{II.17})$$

avec c_f est donné par l'équation II.16 et $C = \int |\xi|^\alpha |\Psi_0(\xi)|^2 d\xi$ où $\Psi_0(\xi)$ est la transformation de Fourier de l'ondelette mère ψ_0 . D'où :

$$\log_2(\mathbb{E}(d_x(j, \cdot))) = \alpha j + \log_2(c_f C) \quad (\text{II.18})$$

La variance empirique μ_j des coefficients d'ondelette $\mathbb{E}(d_x(j, \cdot))$ à l'échelle j est :

$$\mu_j = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} |d_x(j, k)|^2 \quad (\text{II.19})$$

où $n_j = n2^{-j}$, le nombre de coefficient à l'échelle j et n , le nombre d'observation. Soit la variable aléatoire $y_j, j = j_1, \dots, j_2$ définie par :

$$y_j \equiv \log_2(\mu_j) - g(j)$$

et vérifie :

$$\mathbb{E}y_j = \alpha j + \log_2(c_f C)$$

$$\text{var}(y_j) = \zeta(2, n_j/2)/\log^2 2$$

où le facteur

$$g(j) = \Psi(n_j/2)/\log 2 - \log_2(n_j/2)$$

Ψ , la fonction digamma, $\Psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ et $\Gamma(\cdot)$ la fonction de gamma. La régression linéaire pondérée dans le diagramme $(\log_2 2^j = j, y_j)$, permet d'obtenir l'expression de l'estimation de l'exposant du Hurst suivante. Soient les quantités suivantes :

$$S = \sum_{j=j_1}^{j_2} 1/\sigma_j^2$$

$$S_x = \sum_{j=j_1}^{j_2} j/\sigma_j^2$$

$$S_{xx} = \sum_{j=j_1}^{j_2} j^2/\sigma_j^2$$

où σ_j^2 désigne la variance de y_j . Soient les pondérations w_j :

$$w_j = \frac{(Sj - S_x)/\sigma_j^2}{SS_{xx} - S_x^2} \quad (\text{II.20})$$

satisfons : $\sum_{j=j_1}^{j_2} w_j = 0$ et $\sum_{j=j_1}^{j_2} jw_j = 1$ Alors

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=j_1}^{j_2} y_j w_j + 1 \right) \quad (\text{II.21})$$

Sous l'hypothèse Gaussienne, l'intervalle de confiance de niveau 95% est calculé par la formule suivante :

$$\hat{H} - \sigma_{\hat{H}} z_\beta \leq H \leq \hat{H} + \sigma_{\hat{H}} z_\beta \quad (\text{II.22})$$

avec $\sigma_{\hat{H}}^2 = \frac{1}{4} \sum_{j=j_1}^{j_2} \sigma_j^2 w_j^2$, z_β est $1 - \beta$ quantile de la loi normale centrée réduite ($\beta = 2.5\%$).

Application

Pour des raisons de comparaison avec la deuxième méthode de Robinson, nous effectuons les mêmes procédures de la simulation. Nous commençons tout d'abord par simuler un signal de bruit gaussien fractionnaire de différents longueurs $N = 70, 256, 1000$ par la méthode de Cholesky et via la simulation du Monte Carlo pour un nombre de réalisations $R = 10.000$ pour voir la distribution de l'échantillonnage. Nous utilisons le même code en Matlab d'Abry et Veitch dans le cite web de Darry.Veitch.

II.6 Méthode basée sur les ondelettes introduite par Abry et Veitch :

La figure II.5 présente l'histogramme de l'échantillonnage pour Nominal $H = 0.7$.

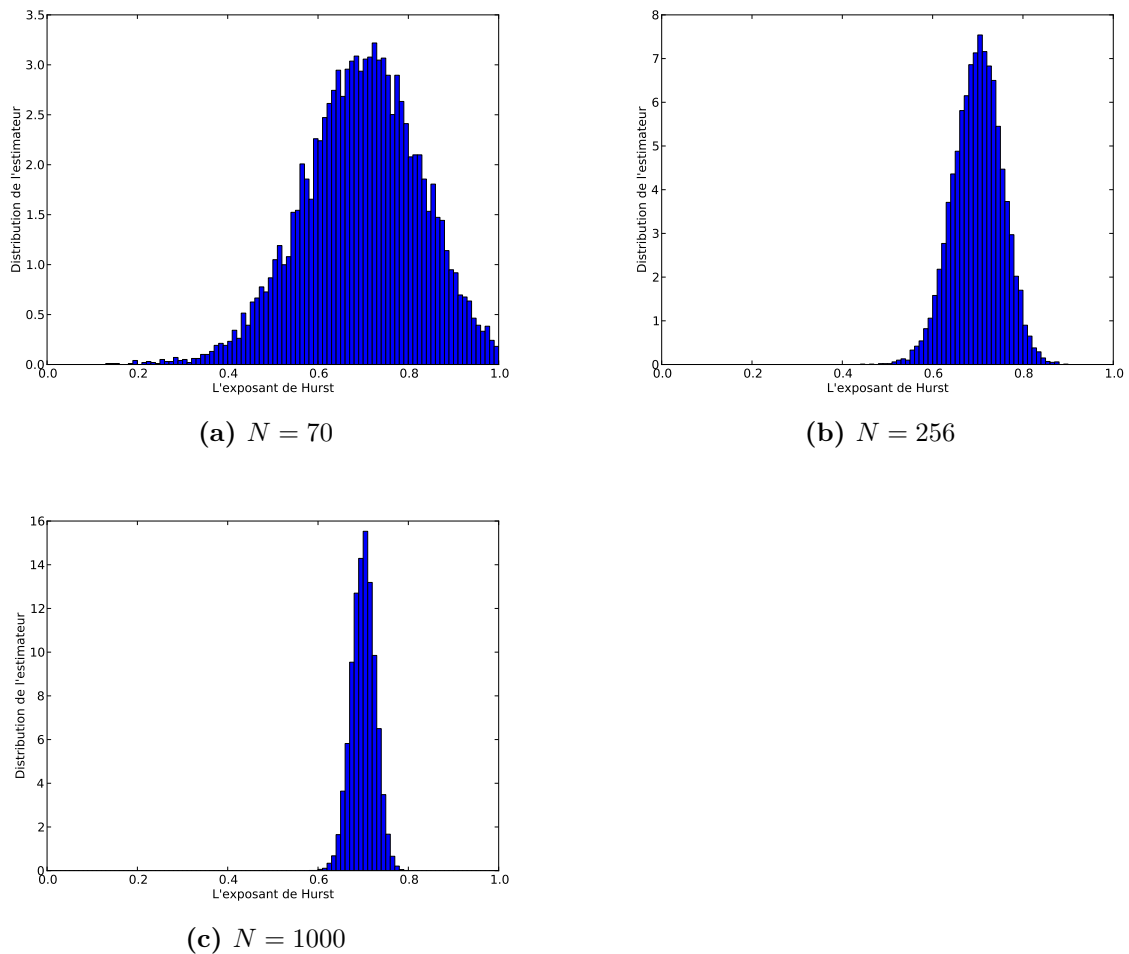


Figure II.5 – L'histogramme de la méthode de d'Abry et Veitch pour un BGF pour $H = 0.7$, pour $N = 70$ (a), 256(b), 1000(c) et pour un nombre $R = 10.000$ de réalisations.

Deuxièmement, nous voulons vérifier la pertinence de la méthode pour une seule réalisation pour un échantillonnage de longueur $N = 1000$ et pour H varie de 0.1 à 0.9 avec un pas de 0.1 et à partir de l'inéquation II.22, on calcule l'intervalle de confiance pour chaque valeur de H . Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau II.5 ainsi que l'application de cette méthode sur les données réelles de la rivière du Nil.

On remarque ici que la marge de l'erreur entre la valeur théorique de H et la valeur estimée pour une seule réalisation de l'estimateur d'Abry et Veitch ne dépasse pas 0.019 pour toutes les valeurs de H sauf pour une seule valeur où la marge de l'erreur est 0.039.

Tableau II.5 – Estimation de l'exposant de Hurst par la méthode d'Abry et Veitch

Nominal H	\hat{H}_{AV}	Intervalle de Confiance 95%
0.1	0.083	[0.032,0.0135]
0.2	0.219	[0.168,0.271]
0.3	0.288	[0.237,0.340]
0.4	0.4	[0.348,0.451]
0.5	0.501	[0.449,0.552]
0.6	0.602	[0.55,0.653]
0.7	0.739	[0.687,0.790]
0.8	0.789	[0.734,0.838]
0.9	0.881	[0.830,0.933]
Les données réelles de la rivière du Nil	0.845	[0.782,0.908]

7 Conclusion :

Dans ce chapitre, on a présenté certaines méthodes d'estimation de l'exposant de Hurst telle que la méthode d'analyse des étendues normalisées (rescaled range analysis, (R/S)), la méthode de variance agrégée, la méthode du périodogramme classique, la méthode du périodogramme cumulé, la deuxième méthode de Robinson [60], méthode d'Abry et Veitch [73]. On a basé notre application sur les deux dernières méthodes dans le but de faire une comparaison avec l'estimation bayésienne. À travers la simulation de Monte et Carlo, les résultats de l'application de ces méthodes ont vérifié la coïncidence entre les résultats théoriques (la convergence et la normalité asymptotique) et les résultats empiriques. On a vu aussi que la régression linéaire est très importante pour la plupart des méthodes d'estimation.

CHAPITRE III

ESTIMATION BAYÉSIENNE

1 Introduction

Deux façons pour traiter les statistiques : l'approche fréquentielle qui repose sur les observations des données $x = (x_1, \dots, x_n)$ qui contiennent toutes les informations sur les paramètres associés aux modèles paramétriques étudiés. Cette connaissance est formée par la fonction de vraisemblance. Ensuite l'approche bayésienne qui repose sur l'information a priori [25, 58, 26, 28] c'est à dire sur les paramètres indépendamment de l'observation des données. L'incertitude sur les paramètres est exprimée par le fait de traiter ces paramètres comme des variables aléatoires. Contrairement à l'approche fréquentielle qui sont considérés comme des inconnues constantes, ce traitement nécessite la détermination de la distribution de probabilité a priori, et le choix de cette distribution est basé sur les informations a priori disponibles sur les paramètres qui sont adoptés de la connaissance de l'expert du phénomène étudié. A l'aide du théorème de Bayes, l'incorporation de la distribution a priori avec la vraisemblance donne la distribution a posteriori, cette combinaison permet de réviser l'information sur les paramètres estimés. La connaissance de la distribution a posteriori permet de calculer : le mode, la médiane, l'espérance ainsi que l'intervalle de la crédibilité qui est une interprétation de l'intervalle de confiance dans le statistique classique, ce dernier permet d'obtenir la précision de l'estimation. Plus formellement, pour un échantillon d'observations $x = (x_1, \dots, x_n)$ qui représente une réalisation de n variables aléatoires x_i indépendantes et identiquement distribuées (abregée (i.i.d) de la même loi de densité $f(x_i|\theta)$, alors x est distribuée selon $f(x|\theta)$ telle que :

$$f(x|\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta)$$

où θ est un paramètre inconnu appartenant à un espace de dimension fini, $\theta \in \Theta$. Dans ce cas, où seulement le paramètre θ est inconnu dans la distribution des observations $f(x|\theta)$, le modèle statistique est dit un *modèle statistique paramétrique*. Lorsque la distribution des observations $f(x|\theta)$ est vue comme une fonction du paramètre θ , cette fonction s'appelle la fonction de *Vraisemblance*, (Likelihood function) notée $L(\theta|x)$ telle que :

$$L(\theta|x) = f(x|\theta)$$

L'inversion de probabilité introduite dans le théorème de Bayes est la base de l'analyse bayésienne, où la combinaison de la distribution a priori avec la fonction de vraisemblance.

Distribution a posteriori

La distribution de l'échantillonnage $f(x|\theta)$ et la distribution a priori de θ , $\pi(\theta)$ permettent de trouver les deux distributions suivantes qui sont intéressantes dans la construction de la distribution a posteriori notée $\pi(\theta|x)$:

a) La distribution conjointe de (θ, x) est

$$\pi(\theta, x) = f(x|\theta)\pi(\theta)$$

b) La distribution marginale de x est

$$\pi(x) = \int_{\Theta} f(x|\theta)\pi(\theta)d\theta$$

L'utilisation de la formule de Bayes donne :

$$\pi(\theta|x) = \frac{\pi(x, \theta)}{\pi(x)} = \frac{f(x|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} f(x|\theta)\pi(\theta)d\theta} \quad (\text{III.1})$$

La distribution marginale de x , $\pi(x)$ s'appelle aussi une constante de normalisation où l'on rend la probabilité a posteriori est égale à un.

La formule III.1 montre que la distribution a posteriori $\pi(\theta|x)$ est proportionnelle à $f(x|\theta)\pi(\theta)$. Ce qui permet de la réécrire sous la forme suivante :

$$\pi(\theta|x) \propto f(x|\theta)\pi(\theta)$$

où \propto est le symbole de la proportionnalité, on peut écrire également :

$$\textit{Posteriori} \propto \textit{Vraisemblance} * \textit{Priori}$$

Distribution a priori

La distribution a priori du paramètre θ est noté $\pi(\theta)$, les paramètres de cette distribution s'appellent *hyperparamètres*. La détermination de cette distribution est très importante dans l'inférence bayésienne et le choix de cette distribution est un point critique de cette analyse par le fait de l'influence de ce choix sur les résultats obtenus. Les techniques qui existent pour déterminer cette distribution sont basées sur la quantité de l'information disponible sur les paramètres. Dans le cas où il n'y a pas assez d'informations, cette distribution est dite distribution *non informative*, qui est basée sur la distribution des observations, à titre d'exemple de cette distribution est la distribution a priori de Jeffery, où la construction est déduite de la log vraisemblance. Dans le cas contraire la distribution est dite *informative*. Nous citons ici quelques exemples de la distribution a priori dans le cas informatif et non informatif et pour plus détails voir les références [58, 62, 29, 11].

a) Distribution a priori non informative

Dans le cas de de l'absence de l'information ou encore la difficulté d'interpréter la quantité des informations sous forme d'une distribution de probabilité où l'intégrale est infinie :

$$\int_{\Theta} \pi(\theta) d\theta = +\infty$$

Alors dans ce cas, la distribution a priori est dite impropre et la construction de ce type de distributions est fondée souvent sur une mesure σ finie sur l'espace des paramètres Θ (pour plus détails, voir le livre de Dreesbeke [25]). Cette technique est souvent utilisée pour obtenir une distribution a priori dans le contexte bayésien non informatif, l'exemple le plus connu et utilisable d'une distribution a priori impropre est la distribution uniforme.

Mesure a priori de Jeffrey : cette méthode a été proposée par Jeffrey en 1961, elle est définie comme suit :

$$\pi(\theta) = \sqrt{\det I(\theta)}$$

où I est une matrice de l'information de Fischer définie par la dérivée seconde de la fonction log de vraisemblance comme suit :

$$I_{ij}(\theta) = -\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 \log \pi(x|\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right)$$

L'avantage de loi a priori de Jeffrey est la propriété d'invariance par transformation bijective. Nous donnons un exemple d'application pour le calcul de la loi a priori de Jeffrey.

Exemple

Pour une variable aléatoire x distribuée selon la loi Normale du moyenne μ et de variance σ^2 , on écrit $x \sim N(\mu, \sigma^2)$, le paramètre $\theta = (\mu, \sigma^2)$ est supposé inconnu et nous cherchons la loi a priori de Jeffrey. La matrice de Fischer s'écrit comme suit :

$$I(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma^2} \end{pmatrix}$$

il vient que $\pi(\theta) \propto \frac{1}{\sigma^2}$

b) Distribution a priori informative

Une distribution a priori informative est une distribution qui n'est pas dominée par la fonction de vraisemblance et a l'influence sur la distribution a posteriori.

Priori Conjuguée

Pour des raisons de calculabilité , la technique est de choisir la distribution a priori appartenant à la même famille de fonctions de la vraisemblance, une telle famille s'appelle famille conjuguée, plus profondément, on donne la définition suivante en [58].

Tableau III.1 – Exemple de la distribution a priori conjuguée

$f(x \theta)$	$\pi(\theta)$	$\pi(\theta x)$
Normale $N(\theta, \sigma^2)$	Normale $N(\mu, \tau^2)$	Normale $N(\varrho(\sigma^2\mu + \tau^2x), \varrho\sigma^2\tau^2)$ $\varrho^{-1} = \sigma^2 + \tau^2$
Poisson $P(\lambda)$	Gamma $\Gamma(\alpha, \beta)$	Gamma $\Gamma(\alpha + x, \beta + 1)$
Gamma $\Gamma(\alpha, \beta)$	Gamma $\Gamma(\mu, \eta)$	Gamma $\Gamma(\alpha + \mu, \eta + x)$

Définition : Une famille F de distributions de probabilité sur Θ est dite conjuguée (ou fermée par l'échantillonnage) par une fonction de vraisemblance $f(x|\theta)$ si, pour tout $\pi \in F$, la distribution a posteriori $\pi(\cdot|x)$ appartient également à F . Pour une distribution de la famille exponentielle (Gamma, Poisson, Normale,...etc.) est une famille conjuguée. Le tableau ci-dessus III.1 donne quelques exemples [58].

Estimation ponctuelle

La distribution a posteriori résume toutes les informations sur le paramètre θ , cette distribution permet de trouver les trois points d'estimation intéressants dans l'analyse bayésienne : la moyenne, le mode et la médiane.

Estimateur de MAP

L'estimateur du maximum a posteriori noté (MAP) est obtenu, en cherchant le mode de la distribution a posteriori du paramètre θ il est défini de la manière suivante :

$$\hat{\theta}_{MAP} = \text{Arg max}_{\theta} \pi(\theta|x)$$

Estimateur de EAP

Cet estimateur consiste à calculer l'espérance mathématique de la distribution a posteriori notée (EAP) qui est donné par la formule suivante :

$$\hat{\theta}_{EAP} = \int \theta \pi(\theta|x) d\theta$$

Simulation de Monte Carlo

Dans la plus part des cas, il est très difficile de calculer analytiquement ou numériquement l'intégrale définie dans la formule III.1. Nous présentons ici le principe de la méthode classique du Monte et Carlo. La simulation du Monte et Carlo par chaine de Markov (MCCM), où il s'agit de deux algorithmes : l'algorithme de Gibbs et l'algorithme de Hastings-Metropolis on les trouve en détails dans les références [59, 38]. Le principe général est de générer une suite de variables aléatoires *i.i.d* suivant la distribution à posteriori. Pour évaluer l'intégrale :

$$\mathbb{E}[h(X)] = \int h(x)f(x)dx$$

où $\mathbb{E}(\cdot)$ est l'espérance mathématique, f est la fonction de densité et h est une fonction. Soit $x = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_m)$, où $m \geq 1$, un vecteur aléatoire de densité $f(x)$, alors l'approximation de cette intégrale est donnée par la formule de la moyenne empirique

de h :

$$\bar{h}_m = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m h(x_j)$$

et l'estimation de la variance est :

$$v_m = \frac{1}{m} \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (h(x_j) - \bar{h}_m)^2$$

2 Estimation bayésienne pour le modèle de bruit gaussien fractionnaire

Nous considérons la série temporelle en temps discret de la forme :

$$X_n = \lambda G_n^H + \beta, n = 1, 2, \dots \quad (\text{III.2})$$

où G_n^H est un bruit gaussien fractionnaire (BGF), $H \in]0, 1[$ est un exposant de Hurst, $\lambda > 0$ est l'amplitude et $\beta \in \mathbb{R}$ est le décalage (offset). Pour un nombre d'observations $X_n, n = 1 \dots N$ donné, le problème que nous voulons traiter est de savoir comment obtenir des estimateurs pour tous les paramètres concernés. Pour cela, nous utilisons le théorème de Bayes qui est donnée comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\beta, \lambda, H | \{X_n\}, n = 1, \dots, N) = \\ C L(\beta, \lambda, H | \{X_n\}_{n=1, \dots, N}) \mathbb{P}(\beta, \lambda, H), \end{aligned}$$

où $L(\beta, \lambda, H | X_n) = \mathbb{P}(\{X_n\}_{n=1, \dots, N} | \beta, \lambda, H)$ est la fonction de vraisemblance, C est une constante de normalisation et $\mathbb{P}(\beta, \lambda, H)$ est l'information a priori sur les paramètres. En cas d'absence de telles informations, nous proposons d'utiliser la loi a priori non informative, $\mathbb{P}(\beta, \lambda, H) \simeq \lambda^{-1}$ où, on utilise la loi a priori de Jeffreys pour le paramètre λ . Pour les paramètres fixes, les observations $X = [X_1, \dots, X_N]^t$ sont gaussiens multivariés avec la valeur moyenne et la covariance sont données par :

$$\mathbb{E}(X) = F \beta, \quad \mathbb{E}(X X^t) = \Sigma,$$

avec Σ donnée par l'équation suivante :

$$\mathbb{E}(G^H(i+k)G^H(k)) = \frac{\sigma^2}{2} ((k+1)^{2H} + |k-1|^{2H} - 2k^{2H}), k \in \mathbb{N} \quad (\text{III.3})$$

et $F^t = [1, \dots, 1]$ est le vecteur avec N composantes, où $[.]^t$ désigne la transposée. La fonction de vraisemblance pour les paramètres λ, β, H peuvent s'écrire maintenant

III.2 Estimation bayésienne pour le modèle de bruit gaussien fractionnaire

comme suit :

$$L(\lambda, \beta, H|X) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \lambda^N |\Sigma|^{1/2}} e^{-(X-F\beta)^t \Sigma^{-1} (X-F\beta)/2\lambda^2} \quad (\text{III.4})$$

D'après le théorème de Bayes, on obtient maintenant la densité a posteriori de nos paramètres.

$$\mathbb{P}(\lambda, \beta, H|X) = C \frac{1}{\lambda^{N+1} |\Sigma|^{1/2}} e^{-(X-F\beta)^t \Sigma^{-1} (X-F\beta)/2\lambda^2} \quad (\text{III.5})$$

La constante de normalisation C est choisie de telle sorte que l'intégrale de la densité de la probabilité a posteriori est égale à un. Ensuite, le numérateur de l'exposant peut s'écrire comme le polynôme quadratique en fonction de β comme suit :

$$F^t \Sigma^{-1} F \beta^2 - 2\beta F^t \Sigma^{-1} X + X^t \Sigma^{-1} X$$

On peut voir que la distribution a posteriori peut être écrite sous la forme "Gaussienne" suivante :

$$\mathbb{P}(\lambda, \beta, H|X) = C \frac{1}{\lambda^{N+1} |\Sigma|^{1/2}} e^{-R^2/2\lambda^2} e^{-\frac{\gamma^2(\beta-\beta^*)^2}{2\lambda^2}} \quad (\text{III.6})$$

$$= C' \frac{e^{-R^2/2\lambda^2}}{\gamma \lambda^N |\Sigma|^{1/2}} f_{\beta^*, \lambda^2/\gamma^2}(\beta) \quad (\text{III.7})$$

ici f_{μ, σ^2} est la densité de probabilité de la loi gaussienne unidimensionnelle de moyenne μ et de variance σ^2 . Remarquons que la covariance Σ dépend de H , et on note $\Sigma = \Sigma_H$ et par conséquent, le résidu R^2 et le mode β^* dépendent de H par

$$\gamma^2 = F^t \Sigma_H^{-1} F \quad (\text{III.8})$$

$$\beta^* = \frac{F^t \Sigma_H^{-1} X}{\gamma^2}, \quad (\text{III.9})$$

$$R^2 = X^t \Sigma_H^{-1} X - \gamma^2 \beta^{*2} \quad (\text{III.10})$$

Eq. III.6 décrit l'ensemble des informations que nous avons sur tous les paramètres conjoints. Dans le cas, où nous sommes intéressés seulement par un seul paramètre, nous pouvons traiter les autres paramètres comme des inconnus et on intègre sur ces paramètres, pour obtenir les distributions marginales. En intégrant sur λ , cela nous donne :

$$\mathbb{P}(\beta, H|X) = \frac{C_1}{|\Sigma_H|^{1/2} (R^2 + \gamma^2(\beta - \beta^*)^2)^{N/2}} \quad (\text{III.11})$$

III.2 Estimation bayésienne pour le modèle de bruit gaussien fractionnaire

La marginalisation sur le décalage (offset) β , nous donne :

$$\mathbb{P}(\lambda, H|X) = \frac{C_2}{\gamma(H)\lambda^N|\Sigma_H|^{1/2}} e^{-R(H)^2/2\lambda^2} \quad (\text{III.12})$$

La marginalisation sur H nous donne ainsi :

$$\mathbb{P}(\beta, \lambda|X) = C_3\lambda^{-N-1} \int_0^1 \frac{e^{-(R(H)^2+\gamma^2(H)(\beta-\beta^*(H))^2)/2\lambda^2}}{|\Sigma_H|^{1/2}} dH.$$

L'intégrale sur λ dans Eq. III.12 donne la distribution a posteriori de H :

$$\mathbb{P}(H|X) = \frac{C_4}{\gamma(H)|\Sigma_H|^{1/2} R^{N-1}}. \quad (\text{III.13})$$

Avec un calcul numérique de cette intégrale, on prend la position maximale de la densité a posteriori, on trouve l'estimation de l'exposant de Hurst H . La même procédure se fait pour les autres paramètres : λ et β

$$\mathbb{P}(\lambda|X) = C_5 \lambda^{-N} \int_0^1 \frac{e^{-R(H)^2/2\lambda^2}}{\gamma(H)|\Sigma_H|^{1/2}} dH \quad (\text{III.14})$$

et

$$\mathbb{P}(\beta|X) = C_6 \int_0^1 \frac{e^{-\gamma(H)^2(\beta-\beta^*)^2}}{R(H)^N|\Sigma_H|^{1/2}} dH \quad (\text{III.15})$$

A partir de ces expressions, on peut aussi produire les points d'estimations. Par exemple on peut définir le point d'estimation de H :

$$\hat{H} = \operatorname{argmax} \mathbb{P}(H|X). \quad (\text{III.16})$$

De même pour le point d'estimation de décalage (offset) β :

$$\hat{\beta} = \beta^*(\hat{H}). \quad (\text{III.17})$$

Notons ici que les calculs doit être effectués numériquement. le code de programmation en python, C++ est réalisé par le Professeur M. Holschneider. Dans ce chapitre on utilise son code en python, ainsi notre code de programmation est basé sur son code.

Applications

Exemple simple

Premièrement, nous appliquons cette méthode pour l'exemple suivant :

$$X_n = 1.5 G_n^{0.3} + 8.0, \quad n = 1, \dots, N = 100 \quad (\text{III.18})$$

avec une simulation de ce signal par la méthode de décomposition de Cholesky [23, 36]. $\Sigma_H = L^t L$ où on applique $L^t Z$, avec $Z = [Z_1, \dots, Z_N]^t$ un vecteur aléatoire de N variables aléatoires indépendantes de la loi Gaussienne standard.

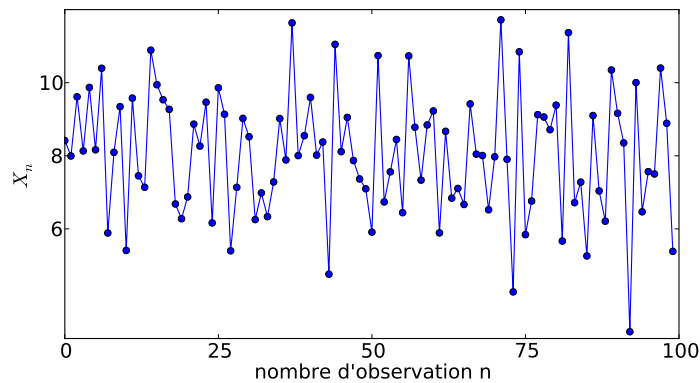


Figure III.1 – Exemple du signal de BGF de type III.18.

La Figure III.1 illustre ces données.

Nous avons donc calculé les distributions a posteriori de λ et H en même temps avec leur distribution marginale (voir Figure III.2). Nous pouvons voir que, l'information a posteriori est bien localisée autour des données qui génèrent les paramètres. Notons que la distribution a posteriori est calculée à partir d'une réalisation aléatoire, alors son maximum ne coïncide pas nécessairement avec la vraie valeur mais fluctuée aléatoirement autour d'elle.

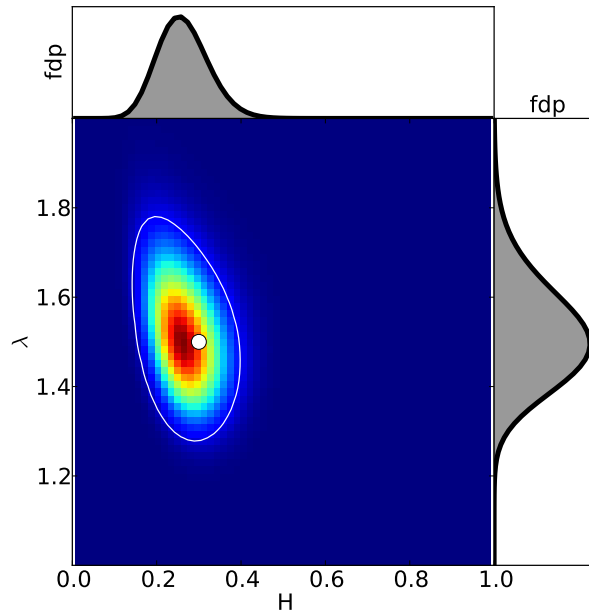


Figure III.2 – la distribution marginale a posteriori dans le plan (H, λ) . Notons que la distribution a posteriori est bien localisée autour du point correspondant à la vraie valeur (le point blanc). La ligne du contour blanc indique que 90% de la région de confiance de posteriori. Sur les axes correspondant aux distributions marginales.

Le cas général

Nous simulons un échantillonnage de bruit gaussien fractionnaire par la méthode de décomposition de Cholesky de longueur $N = 1000$ pour H varié de 0.1 à 0.9 avec un pas de 0.1 et nous calculons l'intervalle de confiance à partir de la distribution a posteriori. Les résultats obtenus sont illustrés dans le tableau III.2. On constate que la largeur de l'intervalle confiance ne dépasse pas 0.077. Figure III.3 présente l'amélioration des résultats lorsque la taille de l'échantillonnage augmente.

III.2 Estimation bayésienne pour le modèle de bruit gaussien fractionnaire

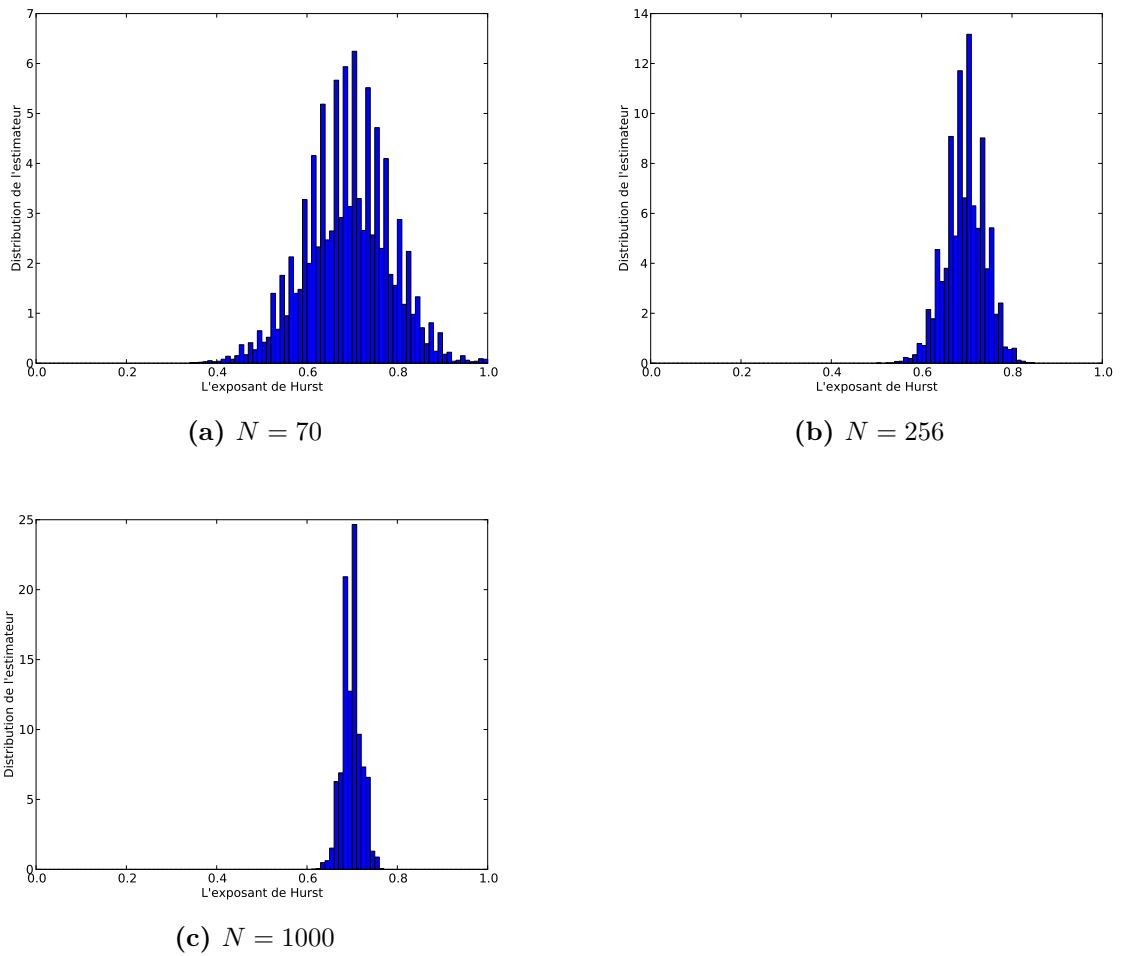


Figure III.3 – L’histogramme de la méthode Bayésienne pour un BGF pour $H = 0.7$, pour $N = 70$ (a), 256(b) pour un nombre $R = 10.000$ de réalisations et $N = 1000$ (c) pour un nombre $R = 5000$.

Tableau III.2 – Estimation de l’exposant de Hurst par la méthode bayésienne

Nominal H	\hat{H}_{bayes}	Intervalle de Confiance 95%
0.1	0.1	[0.1,0.114]
0.2	0.198	[0.177,0.233]
0.3	0.289	[0.261,0.317]
0.4	0.401	[0.373,0.436]
0.5	0.506	[0.471,0.541]
0.6	0.612	[0.576,0.647]
0.7	0.703	[0.675,0.745]
0.8	0.794	[0.759,0.836]
0.9	0.889	[0.857,0.934]

Figure III.4 montre que l’erreur quadratique moyenne de l’estimateur bayésien décroît exponentiellement vers zéro lorsque la taille de la série augmente. Remarquons

III.2 Estimation bayésienne pour le modèle de bruit gaussien fractionnaire

ici que le nombre de points est seulement $N = 70$ ce qui évalue la précision de la méthode bayésienne.

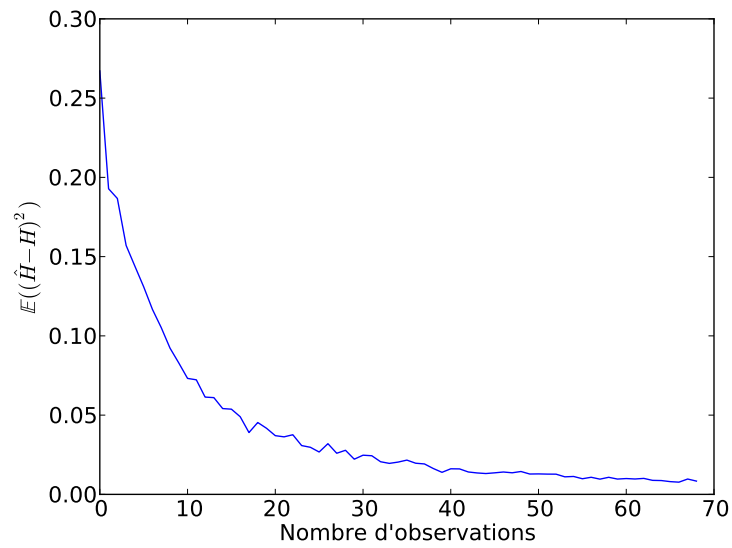


Figure III.4 – L'erreur quadratique moyenne pour $H = 0.7$ avec 500 réalisations

Application aux données réelles : le niveau d'eaux de la rivière du Nile

Nous appliquons notre méthode pour la série temporelle de minima annuel des eaux de la rivière du Nil pour les années 622-1284 A.D (663 observations). Ces données ont été étudiées par plusieurs auteurs pour estimer l'exposant de Hurst à titre d'exemple dans la référence [40] où l'estimateur de périodogramme modifié (MPE) est utilisé et une comparaison est présentée avec les estimateurs suivants : l'estimateur du periodogramme (PE), estimateur de Whittle, estimateur d'ondelette maximale (the wavelet maximum likelihood (WML)) et l'estimateur basé sur le mouvement brownien fractionnaire (FBM). On a calculé la distribution a posteriori selon l'équation III.6. Pour des raisons de visualisation, nous avons calculé les distributions a posteriori marginales sur H , λ et β , qui sont par la suite des fonctions seulement de deux autres variables. Les résultats sont visibles dans la figure III.5. On trouve donc les points d'estimations du maximum a posteriori de nos paramètres avec leur 90% D'intervalles de confiance (tableau III.3).

Tableau III.3 – Les intervalles sur les paramètres estimés

paramètre	est.	inférieur	supérieur
\hat{H}	0.83	0.78	0.87
$\hat{\beta}$	11.51	10.9	12.1
$\hat{\lambda}$	0.89	0.81	1.04

Nous donnons un résumé des résultats connus dans la référence [40] ainsi que notre résultat dans le tableau III.4.

Tableau III.4 – Estimation de l'exposant de Hurst pour différentes méthodes

Estimateur	\hat{H}
MPE	0.85
PE	0.90
Whittle	0.84
WML	0.82
FBM	0.80
Méthode Bayésienne	0.83

On constate dans ce tableau, que les valeurs obtenues par les autres méthodes sont dans l'intervalle de confiance de notre résultat, sauf pour la valeur obtenue par l'estimateur du périodogramme. En plus, notre méthode nous a fourni des estimations pour tous les

paramètres intervenant dans le modèle et nous avons obtenu aussi les barres d'erreurs pour chaque paramètre.

Etude comparative

On a vu l'application de trois méthodes (deuxième méthode de Robinson, méthode d'Abry et Veitch et méthode Bayésienne) pour différentes tailles des échantillonnages, ainsi que la simulation de Monte et Carlo pour voir la distribution de l'échantillonnage et la compatibilité des résultats empiriques avec les résultats théoriques de ces méthodes. On va ici baser notre étude comparative sur les deux points suivants :

- *série Courte* : On compare les trois méthodes pour une petite taille de l'échantillonnage $N = 70$ et pour $H = 0.7$ pour un nombre de réalisations $R = 10.000$ et on visualise les données à l'aide de la densité du noyau Gaussien. La figure III.6 illustre cette comparaison. Les schémas de cette figure indiquent que la méthode bayésienne est plus efficace, elle est sans biais et avec une variance minimale, la méthode de Robinson a une petite variance par rapport à la méthode d'Abry et Veich mais positivement biaisée.
- *L'étroitesse de l'intervalle de confiance* : En se basant sur l'application des trois méthodes précédentes pour une seule réalisation pour la taille de l'échantillonnage $N = 1000$ et pour H varie de 0.1 au 0.9 avec un pas 0.1. D'après les tableaux III.2, II.4 et II.5 des études précédentes dans le deuxième chapitre, on constate que les largeurs de l'intervalle de confiance pour les trois méthodes : la méthode de Robinson, la méthode d'Abry et Veich et la méthode bayésienne sont respectivement : 0.088, 0.103, 0.077. On remarque ici que l'intervalle de confiance le plus étroit est celui de la méthode bayésienne ensuite l'intervalle de la méthode de Robinson est plus étroit que celui de la méthode d'Abry et Veich. Un intervalle de confiance étroit indique la précision de l'estimateur. Ce qui explique la précision de la méthode bayésienne ainsi que la méthode de Robinson qui est plus précis que la méthode d'Abry et Veitch.

Série temporelles avec trous

Souvent les séries empiriques dans le domaine économique sont des séries temporelles avec trous (gaps), pour cette raison nous voulons tester la méthode bayésienne pour voir à quel point la méthode est sensible pour telles séries. Notons que pour les séries temporelles avec trous modélisées par le mouvement brownien fractionnaire est réalisé dans [43]. Dans notre travail, on construit 20% des trous de façon aléatoirement uniformément distribuée dans la série originale des données de la rivière du Nil. La figure III.7 ci-dessous illustre les deux séries, ainsi la distribution à posteriori pour la

série avec trous est présenté dans la figure III.8, on déduit que l'estimation de l'exposant de Hurst de cette série est $\hat{H} = 0.822$. On remarque ici que cette valeur est incluse dans l'intervalle de confiance de H pour la série originale, $[0.78, 0.87]$, la différence est moins significative. Nous répétons cette expérience 500 fois pour avoir la distribution de l'échantillonnage et cette fois ici, nous augmentons le pourcentage des trous dans la série originale, 60% des trous et comme précédemment nous utilisons la densité du noyau gaussien (GKD) pour visualiser cette distribution.

On prend le point maximum de cette distribution (Argmax) ce qui donne $\hat{H} = 0.782$.

Les résultats sont illustrés dans la figure III.9 suivante. On remarque ici que l'existence des trous dans la série des données n'ont pas d'influence significative sur l'estimation de l'exposant de Hurst par la méthode bayésienne.

Par le fait que la valeur $\hat{H} = 0.782$ reste encore dans l'intervalle de confiance de la série originale qui est $[0.78, 0.87]$, de plus le pourcentage des trous ici est plus que la moitié de la série.

Dans la suite nous voulons voir l'estimation bayésienne pour certains processus non gaussiens, pour voir la pertinence de cette méthode.

Données produites d'un processus non gaussien

On prend comme un exemple de processus non gaussien les accroissements du mouvement de Levy α stable, $0 < \alpha \leq 2$ (gaussien seulement pour le cas $\alpha = 2$). Ce mouvement est auto-similaire d'indice d'auto-similarité $H = \frac{1}{\alpha}$. La relation entre l'exposant du Hurst H et l'indice de stabilité α incite les chercheurs intéressés de voir la robustesse de différentes méthodes d'estimation de l'exposant de Hurst pour estimer l'indice de stabilité telle que Barunik et al [5], ils ont testé les méthodes suivantes : la méthode d'analyse des étendues normalisées (rscaled range analysis, (R/S)), analyse multifractale des fluctuations redressées (multifractal detrended fluctuation analysis, (MF-DFA)), la méthode de la moyenne mobile (detrended moving average, (DMA)) et la méthode de l'approche généralisée de l'exposant de Hurst (generalized Hurst exponent approach, (GHE)) sur différentes longueurs des séries temporelles à partir de 2^9 au 2^{16} et les valeurs de α sont variées entre $1.1 \leq \alpha \leq 2$ avec un pas 0.1 et pour un nombre de réalisations 1000. Leurs résultats indiquent que les méthodes de R/S et GHE sont plus robustes que d'autres méthodes à la présence des queues lourdes dans les données. D'autre part la statistique de la méthode de GHE (un biais minimum et une variance minimale) est meilleures par rapport à d'autres méthodes (DMA, MF-DFA, DFA). Ces méthodes donnent une sous-estimation de l'indice α .

En outre, la méthode bayésienne est testé sur le mouvement de Levy α stable dans [42] ainsi que sur le processus de Roseblatt [7, 43, 42]. Dans cette section nous volons

III.2 Estimation bayésienne pour le modèle de bruit gaussien fractionnaire

tester aussi la méthode bayésienne pour les données artificielles des accroissements du mouvement de Lévy α stable. Pour Nominal $\alpha = 1.4$, et l'indice d'auto-similaire $H \simeq 0.71$. Nous simulons un échantillonnage de longueur $N = 500$ (III.10) et pour un nombre $R = 1000$ de réalisations. La visualisation de la distribution de l'échantillonnage est effectuée au moyen de la densité du noyau gaussien (Gaussian Kernel Density, GKD). Ce résultat est présenté dans la figure III.11. On remarque que l'estimation de H est $\hat{H} \simeq 0.49$. Ce résultat est indépendant du l'indice de stabilité α .

En effet, on simule les données des accroissements de Levy α stable pour une taille de l'échantillonnage $N = 500$ et pour différente valeur de l'indice de stabilité α qui varie de 1.1 au cas gaussien $\alpha = 2$ avec un pas de 0.1 et pour chaque valeur de α nous répétons l'expérience avec un nombre de réalisation $R = 1000$ et cette fois ici nous interprétons nos résultats avec les boites de moustaches (boxplot). La Figure III.12 illustre ces résultats.

On remarque que la valeur estimée de l'exposant de Hurst est toujours fixée et approximée à 0.5 et ceci pour toutes les valeurs de l'indice de stabilité α , on constate que la méthode bayésienne est sensible pour ce type de processus. D'après les figures qui représentent un exemple de bruit gaussien fractionnaire et les accroissements de Levy α stable respectivement on peut distinguer les deux modèles à travers seulement ses graphes à cause des sauts dans les processus de Levy. On conclut que pour des données réelles, il faut tout d'abord dessiner les graphes avant de faire l'estimation par la méthode bayésienne pour voir si ces données peuvent être modélisées par le bruit gaussien fractionnaire ou par levy α stable.

3 Conclusion :

Dans ce chapitre, on a présenté l'estimation de l'exposant de Hurst par la méthode bayésienne pour le modèle de bruit gaussien fractionnaire. Une application sur des données synthétiques de ce processus pour différentes tailles d'échantonnage est effectuée, ainsi que l'application sur les données réelles de niveau d'eaux de la rivière du Nil. En plus une comparaison avec les méthodes les plus courantes dans la littérature et qui ont des bases théoriques (normalité asymptotique et efficace). De plus on a testé notre méthode pour la série des données réelles de la rivière du Nil présentant des trous artificielles, ainsi que les données synthétiques générés par les accroissements du mouvement de Levy α stable.

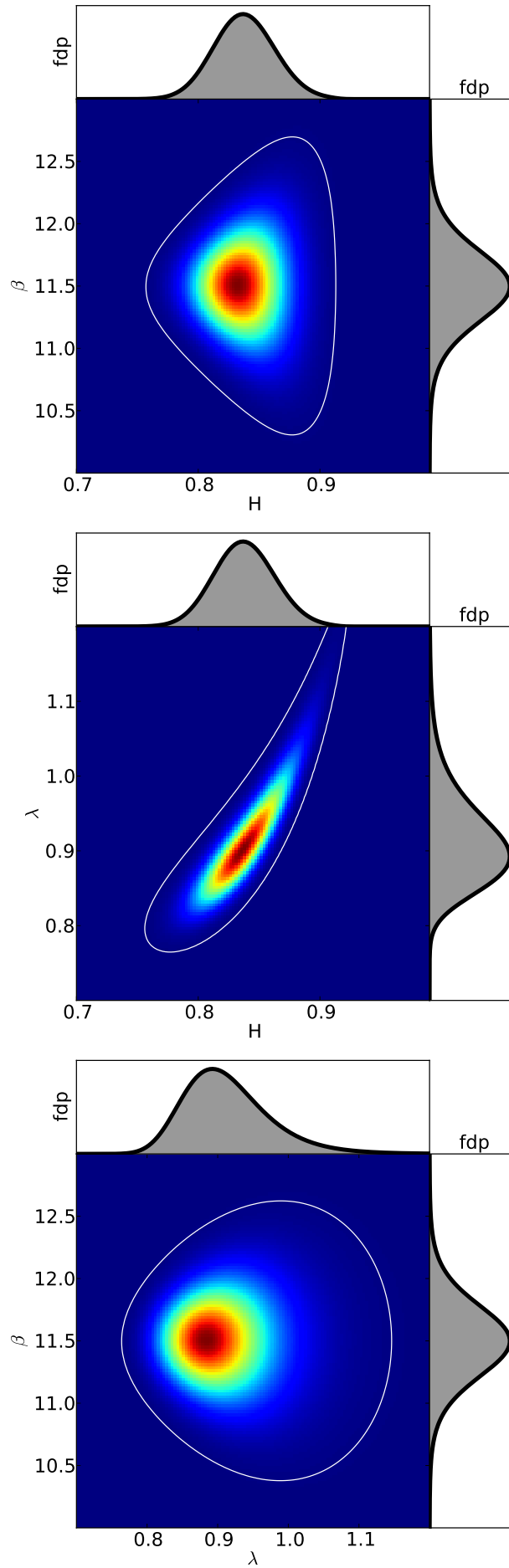


Figure III.5 – La distribution a posteriori marginalisée sur respectivement β , H et λ . Sur l'axe, les distributions marginales de H , λ et β sont visualisées. La ligne de contour blanc présente

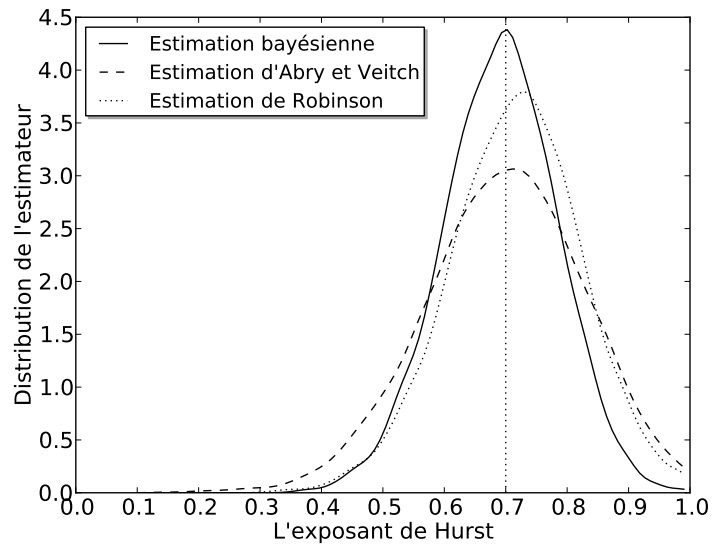


Figure III.6 – La comparaison entre : la méthode Bayésienne, la méthode d’Abry et Veitch et la deuxième méthode de Robinson pour le BGF et pour $H = 0.7$, $N = 70$

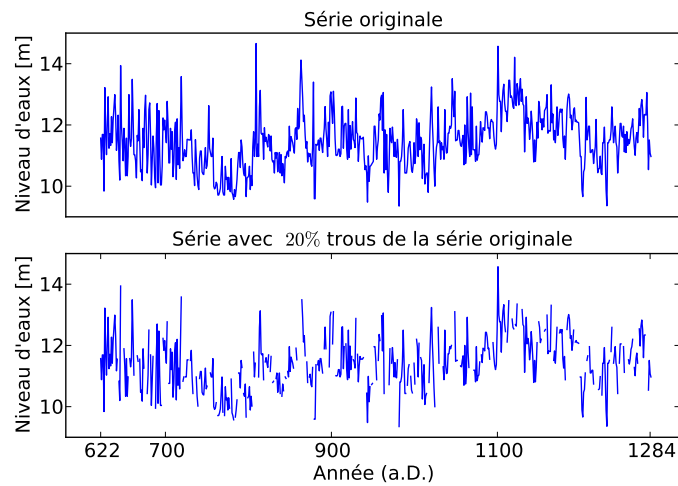


Figure III.7 – Série des 20% trous des données de la rivière du Nil avec sa série originale.

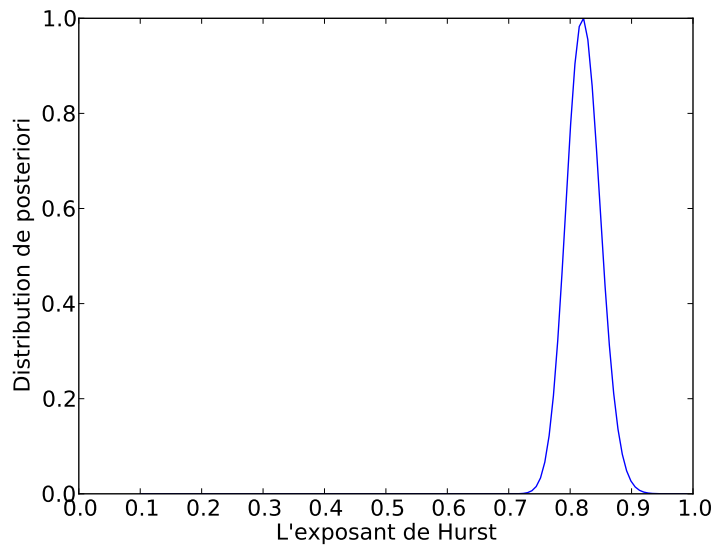


Figure III.8 – Estimation de l'exposant de Hurst de la série des 20% trous des données de la rivière du Nil.

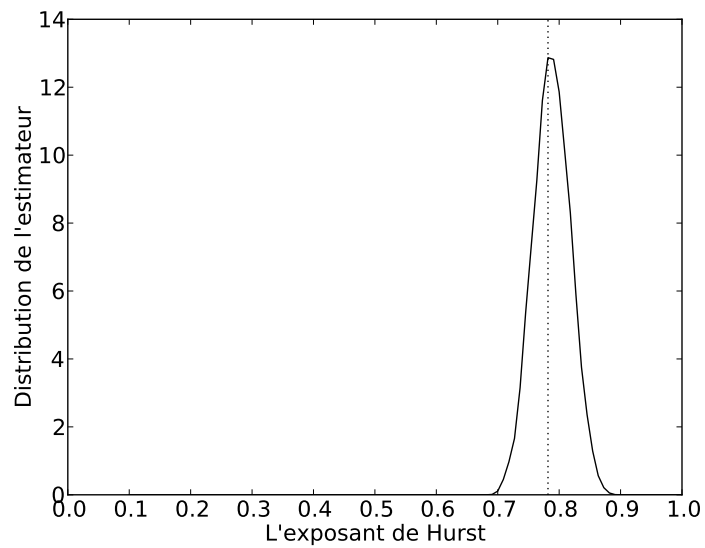


Figure III.9 – Distribution de l'estimateur par la densité du noyau gaussien pour la série des 60% des trous des données de la rivière du Nil avec un nombre $R = 500$ de réalisations.

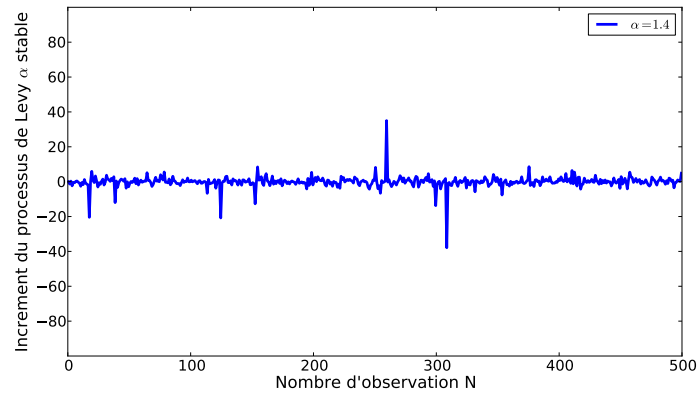


Figure III.10 – Les increments de Levy α stable, $\alpha = 1.4$, $N = 500$

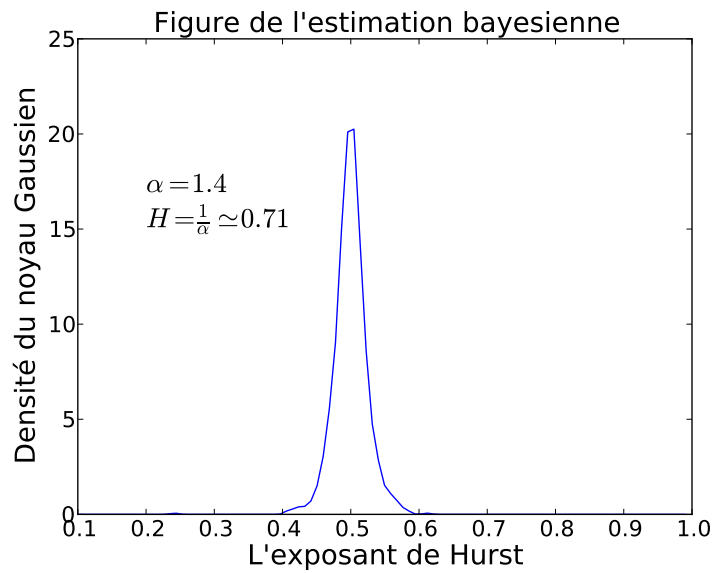


Figure III.11 – Densité du noyau Gaussien pour la méthode bayésienne pour les accroissements du mouvement de Lévy α stable, $\alpha = 1.4 (H \simeq 0.71)$, $N = 500$ et nombre de réalisations $R = 1000$

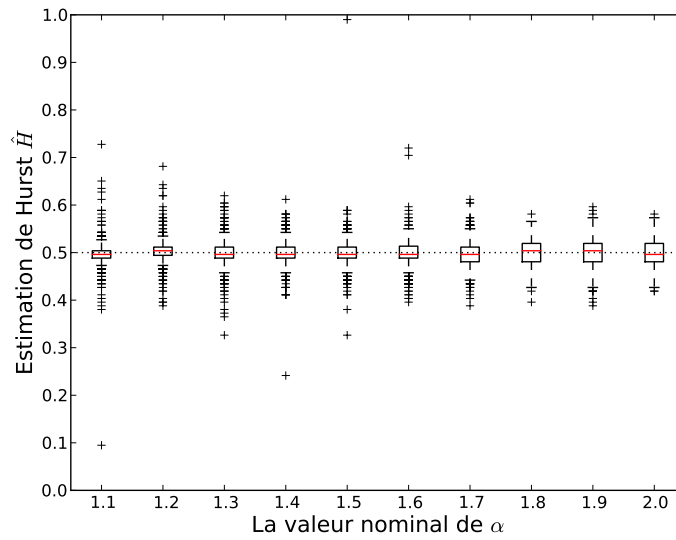


Figure III.12 – Boxplot pour les accroissements du mouvement de Lévy α stable, pour α varie de 1.1 à 2 avec un pas de 0.1 et une taille de l'échantillonnage $N = 500$ et un nombre $R = 1000$ de réalisations.

CHAPITRE IV

CONCLUSION GÉNÉRALE

On a présenté dans notre thèse une technique d'estimation du paramètre de Hurst, il s'agit de la méthode bayésienne, ce paramètre qui caractérise les processus auto-similaires à accroissement stationnaires, plus précisément on a introduit les accroissements du processus gaussien, le mouvement brownien fractionnaire qui s'appelle le bruit gaussien fractionnaire. On a utilisé directement l'application de la méthode sur ce processus au lieu de faire l'intégration et puis appliquer une méthode d'estimation. Pour les mêmes propriétés, nous avons donné un exemple de processus non gaussien, il s'agit du processus de Lévy α stable où l'indice de stabilité α est relié par l'exposant de Hurst avec l'expression $H = \frac{1}{\alpha}$. On a introduit ensuite quelques méthodes d'estimation de l'exposant de Hurst dont on a appliqué pour différents échantillonnages du modèle de bruit gaussien fractionnaire et pour des données réelles de niveau d'eaux de la rivière du Nil. La plupart de ces méthodes (la méthode d'analyse des étendues normalisées (rescaled range analysis, (R/S)), la méthode de la variance d'agrégation, la méthode de périodogramme) donnent seulement le point d'estimation, les autres méthodes (méthode d'Abry et Veitch, la deuxième méthode de Robinson) donnent en plus l'intervalle de confiance. On a vérifié que la méthode du périodogramme reste meilleure par rapport à la méthode du périodogramme cumulée celle-ci réduit la variance et augmente le biais et ceci pour les données synthétiques de bruit gaussien fractionnaire, par contre pour les données de la rivière du Nil, le périodogramme cumulé donne un résultat convenable et le périodogramme classique donne une valeur hors de l'intervalle des valeurs possibles de l'exposant de Hurst ($0 < H < 1$), ce résultat dépend du choix de point seuil dans la régression linéaire, ici on a pris 10% des données, ce choix est proposé par Taqqu [70]. Le point critique de ces deux méthodes est le choix de point seuil. On a choisi les deux dernières méthodes (méthodes (méthode d'Abry

et Veitch, la deuxième méthode de Robinson) pour faire une comparaison avec la méthode bayésienne à cause de la bonne propriété statistique de ces deux estimateurs (la normalité asymptotique, l'efficacité), ainsi d'après nos résultats notre étude montre que la méthode bayésienne est un bon estimateur de l'exposant de Hurst précisément pour les processus gaussiens, elle permet de donner les deux estimations, le point et l'intervalle de confiance en même temps. En plus l'intervalle de confiance est plus étroit par rapport aux autres. Ainsi la marginalisation du distribution a posteriori, permet d'estimer tous les paramètres intervenant dans le modèle étudié. En outre, elle permet d'estimer l'exposant de Hurst sans éliminer la tendance dans les données, plus particulièrement ici la tendance linéaire. En plus la méthode est efficace pour une taille très petite de l'échantillonnage où on a vu que l'erreur moyenne quadratique converge avec une vitesse exponentielle vers zéro, on a aussi testé la méthode bayésienne pour les séries temporelles avec trous où on a généré de façon aléatoirement et distribués uniformément dans la série originale des données de la rivière du Nil. Les résultats montrent que l'écart de l'estimation de Hurst dans la série originale et la série avec trous est moins significatif. Par contre, le test de notre méthode sur les données synthétiques des accroissements de Levy α stable montre que pour différentes valeurs de α la valeur estimée de H est fixée et approximativement égale au cas gaussien ($\alpha = 2$ et $H = 0.5$) ceci montre la sensibilité de la méthode pour ce type de processus (processus avec saut).

ANNEXE

1 Exemple du processus stationnaire

Processus FARIMA On dit que X_t est un processus FARIMA(p,d,q)[51] équivalente Fractionally Auto-Regressive Moving Average (auto régressif moyenne mobile fractionnaire) s'il vérifie l'équation suivante :

$$\phi(B)(1 - B)^d(X_t - \mu) = \theta(B)\varepsilon_t \quad (1)$$

Avec $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$, $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$ d est un nombre fractionnaire, B est backshift opérateur qui est défini comme suit :

$$By_t = y_{t-1}$$

ε_t est un bruit blanc centré de variance σ_ε^2

2 La régression linéaire :

Pour un ensemble des données (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$ qui peuvent être représentés dans le plan (x, y) par un nuage de points. La régression consiste à chercher une relation entre les x et les y si la relation est affine c-à-d la droite $y = ax + b$ la régression est dite une régression linéaire. Les expressions de \hat{a} et \hat{b} sont obtenues par la méthode de moindres carrés ordinaires ce sont des valeurs qui minimisent la quantité suivante :

$$\sum_{i=1}^n (y_i - b - ax_i)^2$$

et le plus important pour les méthodes d'estimation de l'exposant de Hurst est la pente a . Le calcul donne :

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

et

$$\hat{b} = \bar{y} - a\bar{x}$$

tels que : $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ et $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$.

Remarquons que l'expression : $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ c'est la covariance empirique de variable aléatoire X et Y notée $cov(X, Y)$ et $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ est la variance empirique de X notée $S(X)$

d'où l'expression de la pente a est donnée par la relation suivante : $a = \frac{cov(X, Y)}{S^2(X)}$

Résumé :

L'objectif de cette thèse est d'estimer le paramètre de Hurst associé au bruit gaussien fractionnaire (bgf), en utilisant une méthode d'inférence bayésienne. Le bruit gaussien fractionnaire peut être considéré comme le processus des incréments du mouvement brownien fractionnaire (mbf). C'est un processus gaussien stationnaire, auto-similaire d'indice $H \in]0, 1[$. Nous proposons une technique d'estimation prenant en compte la structure de corrélation complète de ce processus. Au lieu d'utiliser la série temporelle intégrée, et d'appliquer un estimateur pour déterminer son exposant de Hurst, nous proposons d'utiliser le signal directement. Nous appliquons ensuite cette méthode aux données historiques de l'évolution du niveau du Nil. À travers une simulation de Monte Carlo, nous comparons notre approche à la deuxième méthode de Robinson et à la méthode d'Abry Veitch en utilisant différentes tailles d'échantillons. Nous testons également notre méthode sur les données de l'évolution du niveau du Nil présentant des trous artificielles, ainsi que sur des données synthétiques générés par les accroissements du mouvement de Levy α stable.

Mots clés : exposant de Hurst, mouvement brownien fractionnaire, bruit gaussien fractionnaire, estimation Bayésienne, Levy α stable, Méthode d'Abry et Veitch, deuxième méthode de Robinson, simulation de Monte et Carlo, données de la rivière de Nil.

Abstract :

The aim of this thesis is to estimate the Hurst parameter of Fractional Gaussian Noise (FGN) using Bayesian inference. The Fractional Gaussian Noise can be viewed as the increment process of Fractional Brownian Motion (FBM). It is stationary Gaussian process, self-similar with index $H \in]0, 1[$. We propose an estimation technique that takes into account the full correlation structure of this process. Instead of using the integrated time series and then applying an estimator for its Hurst exponent, we propose to use the noise signal directly. As an application we analyze the historical dataset of the evolution of the Nile river's level. Via Monte Carlo simulation we compare the proposed method with the second method of Robinson and Abry Veitch method using different sample size. We also test our method for dataset of the evolution of the Nile river's level with artificial gaps and for synthetic data generated by the increments of α stable Levy motion .

Keywords : Hurst exponent, fractional brownian motion, fractional gaussian noise, bayesian estimation, Levy α stable, Abry Veitch method, second method of Robinson, the Monte Carlo simulation, dataset of the Nile river.

الملخص

الهدف من هذه الرسالة هو تقدير الوسيط هرست المرفق لضوضاء غوص الكسرية باستعمال تحليل بايز. ضوضاء غوص الكسرية يمكن ان يعتبر عملية لتزايدات الحركة البروانية الكسرية (ح . ب . ك) الذي هو عبارة عن عملية غوص الثابت ذاتي التماثل ذو دليل H

نقترح تقنية التقدير ياخذ بعين الاعتبار بنية الارتباط التام لهذه العملية بدلا استخدام سلسلة زمنية متكاملة و تطبيق مقدر لتحديد اس هرست لها نقترح استخدام اشارة الضوضاء مباشرة ثم تطبيق هذه الطريقة لبيانات التاريخية للتغيرات في مستوى نهر النيل

من خلال محاكاة مونت كارلو نقارن طريقتنا مع الطريقة الثانية لرينسون و طريقة ابري فيتش باستعمال اطوال مختلفة للعينة . نختبر ايضا طريقتنا على السلاسل زمنية ذات ثقوب فضلا عن البيانات الاصطناعية الناتجة عن عملية لفي الفا مستقر

الكلمات الرئيسية: اس هرست, الحركة البروانية الكسرية, ضوضاء غوص الكسرية, تقدير بايز, ليفي الفا مستقر, طريقة ابري فيتش, الطريقة الثانية لرينسون, محاكاة مونت كارلو, بيانات نهر النيل

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. Abry, P. Flandrin, M. Taqqu, and D. Veitch. Theory and applications of long range dependence. In Oppenheim Doukhan and Taqqu, editors, *Self similarity of long rang dependence*, pages 527–556. birkhäuser, Boston, 2002.
- [2] P. Abry and D. Veitch. Wavelet analysis of long-range-dependent traffic. *IEEE Transactions on Information*, 44 :2–15, 1998.
- [3] Y. Aragon. *Séries temporelles avec R*. Springer-Verlag France, 2011.
- [4] N. Azzaoui. *Analyse et estimation spectrales des processus α stables non stationnaire*. PhD thesis, Université de Bourgogne à Dijon, 2006.
- [5] J. Barunik and L. Kristoufek. On hurst exponent estimation under heavy-tailed distribution. *Physica A :Statistical Mechanics and its Applications*, 389(18) :3844–3855.3844–3855., 2010.
- [6] Benesty.J. *Estimation spectrale,méthodes non paramétriques*.
- [7] S. Benmehdi, N. Makarava, N. Benhamidouche, and M. Holschneider. Bayesian estimation of the self-similarity exponent of the Nile river fluctuation. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 18 :441–446, 2011.
- [8] J. Beran. Statistics for long-memory processes. *Chapman & Hall New York*, 1994.
- [9] J. and Ghosh.S Beran, Feng.Y, and Kulik.R. *Long-Memory Processes :Probalistic Properties and Statical Methods*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.
- [10] H. Bierme. *Champs aléatoires :autosimilarité,anisotropie et étude directionnelle*. PhD thesis, Université d’Orléans, 2005.
- [11] J.J. Boreux, E. Parent, and J. Bernier. *Pratique de calcul bayésiën*. Springer, 2010.
- [12] J.C Breton. Processus gaussiens. Technical report, Université de la Rochelle, 2006.
- [13] P.J Brockwell and R.A. Davis. *Time Series :Theory and Method*. Springer,2nd edition, 1991.
- [14] Brossier.J.M. *Analyse spectrale.*, 2006.
- [15] M. G.

- [16] M. Chtioui. L'exploitation de l'auto-similarité pour la prédiction du trafic internet. Technical report, Université du Québec à Montréal, 2006.
- [17] J. F. Coeurjolly. *Inférence statistique pour les mouvements browniens fractionnaires et multifractionnaires*. PhD thesis, Université de Joseph Fourier, 2000.
- [18] J. F. Coeurjolly. Simulation and identification of the fractional brownian motion : a bibliographical and comparative study. *J. Stat. Softw.*, 5(7) :1–53, 2000.
- [19] Cont.R and Tankov.P. *Financial Modelling with jump processes*. Chapman&Hall/CRC Financial Mathematics Series., 2004.
- [20] I. Daubechies. *Ten Lecture on wavelets*. Philadelphia, PA : SIAM, 1992.
- [21] R.B Davies and D.S. Harte. Tests for hurst effect. *Biometrika.*, 74 :95–101, 1987.
- [22] Delignères.D. *Analyse des séries temporelles.*, 2007.
- [23] Ton Dieker. *Simulation of Fractional Brownian motion*. PhD thesis, Twente University, 2004.
- [24] P. Doukhan, G . Openheim, and M.S. Taqqu. *Theory and applications of long range dependence*. Birkhauser,Boston, 2003.
- [25] J.J Drosbeke, J. Fine, and G. Saporta. *Méthodes bayésiennes en statistique*. Editions TECHNIP, 2002.
- [26] E. Duflos. Modélisation et inférence bayésienne, part i : Formalisation., 2011.
- [27] Focardi.S.M.and Fabozzi.F.J.F and Bali.T. *Mathematical Method for Finance*. The Frankj.Fabozzi Series, 2001.
- [28] L.R. Franca. Statistique bayésienne :éléments de culture générale., 2009.
- [29] D. Gajda. *Optimisation des methodes algorithmiques en inférence bayésienne.Modélisation dynamique de la transmission d'une infection au sein d'une population hétérogène*. PhD thesis, Université Paris XI, 2011.
- [30] K. Geweke and S. Porter-Hudak. The estimation and application of long memory time series models. *Time Series Anal*, 4 :221–238, 1983.
- [31] A. L. Goldberger, L .A. N. Amaral, L. Glass, J.M. Hausdorff, P.Ch. Ivanov, R.G. Mark, J.E. Mietus, G.B. Moody, C.K. Peng, and H.E. Stanley. Components of a new research resource for complex physiologic signals. *PhysioBank, PhysioToolkit, and Physionet*, *Circulation* 101(23) :e215-e220, 2000.
- [32] J. Haslett and A.E. Raftery. Space-time modelling with long-memory dependence :assessing irlands wind power resource. *Applied Statistics*, 38 :1–50, 1989.
- [33] S. Hidot, C. Saint-Jean, and J.Y. Lafaye. Etude expérimentale de l'influence d'un échantillonnage irrégulier dans l'estimation du paramètre de hurst. *Journal de la société Française de statistique*, 149(1) :81–95, 2008.
- [34] H.E. Hurst. Long-term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 116 :770–799, 1951.
- [35] J.S.R. Jeong, H.D.J.and Lee, D. McNickle, and K. Pawlikowski. Comparison of various estimators in simulated fcn. *Simulation Modelling Practice and Theory*

- [36] S.D Kang. *Simulation of The Fractional Brownian Motion*. PhD thesis, J.W.Goethe University, 2008.
- [37] A.N. Kolmogorov. The wiener spiral and some other interesting curves in hilbert space. *Dokl.Akad.Nauk SSSR.*, 26 :2 :115–118, 1940.
- [38] Kroese.D.P, Taimre.T, and Botev.Z.I. *Handbook of Monte Carlo methods*. Weley Series in Probability and Statistics., 2011.
- [39] M. Leccardi. Comparison of three algorithms for lévy noise generation., 2005.
- [40] Y. Liu, Y. Liu, K. Wang, L. Yang, and T. Jiang. Modified periodogram method for estimating the hurst exponent of fractional gaussian noise. *Phys Rev E*, 80, 2009.
- [41] A.w. Lo. Long-term memory in stock market prices. *Econometrica*, 59 :1279–1313, 1991.
- [42] N. Makarava. *Bayesian estimation of self-similarity exponent*. PhD thesis, University of Potsdam, 2012.
- [43] N. Makarava, M. Holschneider, and S. Benmehdi. Bayesian estimation of self-similarity exponent. *Phys Rev E*, 84, 2011.
- [44] S. Mallat. *A wavelet tour of signal processing*. Academic Press,San Diego,2ème edition., 1999.
- [45] B . Mandelbrot and J. Van Ness. Fractional brownian motion, fractional noises and application. *SIAM Review*, 10 :422–437, 1968.
- [46] E.J. McCoy and A.T. Walden. Wavelet analysis and synthesis of stationary long-memory processes. *Comput. Graph. Stat*, 5 :26–56, 1996.
- [47] V. Mignon. Méthode d’estimation de l’exposant de hurst. application aux rentabilités boursières. *Economie & prévision*, pages 193–214, 1998.
- [48] S. Millen and R. Beard. Estimation of the hurst exponent for the burdekin river using the hurs-mandelbrot rescaled range statistic. In *Proceedings of the First Queensland Statistics Conference*, 2003.
- [49] Nielsen.O.E.B. *Levy processes :Theory and application*. Birkhauser, 2001.
- [50] Nolan.J.P. *Stable Distribution :Models for Haivy Tailed Data*. Birkhauser,Boston, 2011.
- [51] L. Nouira, M. Boutahar, and V. Marimoutou. Les méthodes d’estimation du paramètre de mémoire longue :evidence numérique, 2003.
- [52] Pantaleo.E, Facchi.P, and Pascazio.S. *Simulations of Lévy flights*.
- [53] C-K Peng, S.V. Buldyrev, S. Havlin, M. Simons, H .E. Stanley, and A.L. Goldberger. Mosaic organization of dna nucleotides. *Phys Rev E*, 49 :1685–1689, 1994.
- [54] E. Perrin, R. Harba, R. Jennane, and I. Iribarren. Synthèse exacte et efficace du mouvement brownien fractionnaire 1d. In *Colloques sur le traitement du signal et des images*, 2001.
- [55] Phoa.W. Professional perspectives on fixed income portfolio management. In *Credit*

- [56] W. Rea and J. Oxley, L. and Brown. The empirical properties of some popular estimators of long memory processes. In *19th International Congress on Modelling and Simulation. Perth. Australia.*, 2011.
- [57] W. Rea, L. Oxley, and M. Reale. Estimators for long range dependence :an empirical study. *Electronic Journal of Statistics*, 0 :1935–7524, 2009.
- [58] Robert.C.P. *Le choix bayésien : Principes et pratique.* Springer-Verlag France, Paris, 2006.
- [59] Robert.C.P and Casella.G. *Méthodes de Monte-Carlo avec R.* Springer-Verlag France., 2011.
- [60] P.M. Robinson. Gaussian semiparametric estimation of long range dependence. *The Annals of Statistics*, 23 :1630–1661, 1995.
- [61] P.M. Robinson. Log-periodogram regression of time series with long range dependence. *The Annals of Statistics*, 23 :1048–1072, 1995.
- [62] F. Ronquist. Bayesian inference., 2005.
- [63] O. Rose. Estimation of the hurst parameter of long-range dependent time series. Technical report, University of Wurzburg, 1996.
- [64] Rosinski.J. *Simulations of Lévy processes.*
- [65] G. Samorodnitsky. *Long range dependence.* Foundation and Trend in Stochastic Systems, 2006.
- [66] G. Samorodnitsky and M.S. Taqqu. *Stable non Gaussian random processes.* Chapman&Hall/CRC, 1994.
- [67] N. Savy. *Mouvement Brownien fractionnaire, applications aux télécommunications. Calcul stochastique relativement à des processus fractionnaires.* PhD thesis, Université de Rennes 1, 2003.
- [68] Meerschaert.M.M.and Sikorskii.A. *Stochastic Model for Fractional Calculus.* De Gruyter, 2011.
- [69] T. Sottinen. *Fractional Brownian motion in finance and queueing.* PhD thesis, Helsinki University, 2003.
- [70] M. Taqqu, V. Teverovsky, and W. Willinger. Estimators for long range dependence :an empirical study. *Fractals*, 3 :785–798, 1995.
- [71] F. Truchetet. *Ondelettes pour le signal numérique.* Editions Hermes, Paris., 1998.
- [72] D. Veitch and P. Abry. Estimation conjointe en ondelette des paramètres du phénomènes de dépendance longue. In *16ime Colloque GRETSI, Grenoble, France.*, 1997.
- [73] D. Veitch and P. Abry. A wavelet based joint estimator of the parameters of long-range dependence. *IEEE Trans. Info. Theory, special issue Multiscale Statistical Signal Analysis and its Applications*, 45 :878–897, 1999.
- [74] R Weron. On the chambers-mallows-stuck methods for simulating skewed stable random variables. *Statistics and Probability Letters*, 28 :165–171, 1996.

- [75] R Weron. Levy-stable distribution revisited :tail index >2 does not exclude the levy-stable regime. *International Journal of Modern Physics C.*, 12(2) :209–223, 2001.
- [76] R Weron. Estimating long-range dependence : finite sample properties and confidence intervals. *Physica A.*, 312 :285–299, 2002.
- [77] P. Whittle. Estimation and information in stationary time series. *Ark, Mat*, 2 :423–434, 1953.
- [78] L. Zhiping. *Analyse des Processus Longue memoire stationnaires et non-stationnaires :Estimation, Application et Previsions.* PhD thesis, L'ecole Normale Superieure de Cahen, 2009.
- [79] Zucchini.W. Applied smoothing techniques.part 1 :kernel density estimation., 2003.