جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العلمي والبحث العلمي

كلية العلوم الإنسانية والاجتماعية

جامعة محمد بوضيـــاف – المسيـــلة

قسم الفلسفة

الموضوع:

جدلية أساس الرياضيات في الفكر الفلسفي المعاصر

مذكرة مكملة لنيل شهادة الماستر في الفلسفة

من إعداد الطالبة:

– سعد الدين شهرة

إشراف الأستاذ:

حسن أحمد

السنة الجامعية: 2019/2018

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العلمي والبحث العلمي

كلية العلوم الإنسانية والاجتماعية

جامعة محمد بوضيـــاف – المسيـــلة

قسم الفلسفة

الموضوع:

جدلية أساس الرياضيات في الفكر الفلسفي المعاصر

مذكرة مكملة لنيل شهادة الماستر في الفلسفة

من إعداد الطالبة:

– سعد الدين شهرة

إشراف الأستاذ:

حسن أحمد

السنة الجامعية: 2019/2018

بسم الله الرحمن الرحيم

إهداء

أهدي هذا البحث إلى كل باحث في مثل هذا الموضوع.

شكر وعرفان

أشكر الله عز وجل على توفيقه لي على إنجاز هذا العمل.

ومن باب الاعتراف بالجميل، أتوجه بالشكر إلى المشرف لما قدمه لي من نصائح وتوجيهات خاصة في اختيار المراجع.

مقدمة

مقدمة:

إن المتتبع لتاريخ الفكر الفلسفي، والمتأمل لمساره التطوري يجد بأن الرياضيات كبناء وثيق، لها تاريخ طويل وعريق يمتد بجذوره إلى الحضارتين المصرية والبابلية اللتين عرفتا الرياضيات العملية، ولم تنشأ الرياضيات كعلم نظري إلا مع اليونانيين في القرن السادس قبل الميلاد، لتشهد ميلاد أول نسق علمي موحد على يد إقليدس الذي سيطر على الفلسفة القديمة لردح من الزمن ليتوالى بعد ذلك الوعي بأهمية البناء الرياضي في بقية الفلسفات التي استندت عليها بغية الوصول إلى الدقة في مختلف المعارف شبيهة بدقة وبداهة الحقائق الرياضية، لكن هذه الأخيرة وبعدما كانت العلم الذي لا يشك فيه اصبحت مع بداية القرن التاسع عشر محل شك ومساءلة ،نتيجة لتعرضها لأزمة وبالتالي أصبحت الرياضيات مهددة بالعقم، فكيف لهذا العلم أن يكون محل نقد؟ لكن الجدير بالذكر أنه بفضل تلك الأزمة أعيد النظر في تلك المطلقيات واليقينيات، كذلك بفضلها شهد الفكر الرياضي تحولات جذرية أهمها ظهور الهندسات اللاإقليدية ونظرية المجموعات.

بيد أنه مع الوقت أضحت أزمة الأسس أزمة زائفة لتصبح الأزمة الحقيقية هي النقائض التي حدثت في نظرية المجموعات، وهذا ما أدى بالرياضيين إلى البحث في التركيب الداخلي للرياضيات، أما في الفكر الفلسفي المعاصر فقد أخذ على عاتقه مهمة إيجاد حلول لهذه الأزمة التي وقعت فيها الرياضيات ،واحتدم الصراع بين الرياضيين وفلاسفة الرياضيات حول هذه المشكلة، وقد تبلورت هذه الحلول في شكل نزعات فلسفية تتصارع فوق مسرح الأبحاث الفلسفية، وكل نزعة ترى بأنها الحل.

وتتمثل هذه النزعات في:

أولا: النزعة المنطقانية: التي ترى بأن القضايا الرياضية مجرد قضايا من المنطق الصوري.

ثانيا: النزعة الأكسيوماتيكية: التي ترى بأن المنطق والرياضيات ينبعان معا من أصل واحد قبلهما هو الطريقة الأكسيوماتيكية.

ثالثا: النزعة الحدسانية: وهي النزعة التي ترفض النزعتين السابقتين وترجع الحقائق الرياضية إلى الحدس الرياضي .فإلى أي حد ساهمت النزعات الفلسفية المعاصرة في حل أزمة الأسس الرياضية ؟ وهل أعيد اليقين للعلم الرياضي بعدما فقده؟

وقد قسمنا هذا البحث إلى ثلاثة فصول:

الفصل الأول: ماهية الرياضيات

تحدثنا فيه عن مفهوم الرياضيات ومنهجها ،كذلك التطرق إلى النشأة التاريخية للرياضيات ،واحتلالها مكانة كبيرة في الأنساق الفلسفية .

الفصل الثاني: أزمة اليقين في الهندسة الاقليدية

كان التركيز عن الأزمة التي وقعت فيها الرياضيات مما تسبب في ظهور الهندسات اللاإقليدية، وزوال فكرة الإتصال ،كذلك إكتشاف الدالة المنفصلة وظهور مشكلة اللانهائي في الرياضيات إلى غير ذلك من القضايا.

الفصل الثالث: تجاوز أزمة الأسس الرياضية في الفكر الفلسفي المعاصر

وفيه تحدثنا عن بعض الحلول التي اقترحت من قبل المناطقة والرياضيين لحل أزمة الأسس الرياضية متمثلة في النزعات الفلسفية الثلاث،كذلك الحديث عن حلول لنقائض نظرية المجموعات.

وتطلب منا هذا البحث الإعتماد على المنهج التحليلي في ضبط دلالة المفاهيم وتتبع مسار تطور الأفكار، والمنهج المقارن في إبراز الإختلاف بين الحقيقة في الرياضيات الكلاسيكية والحقيقة في الرياضيات المعاصرة.وواجهت عدة صعوبات في انجاز البحث منها صعوبة ودقة المصطلح في الرياضيات وأيضا صعوبة فهم النظريات الرياضية لكن بفضل الإستعانة بمراجع مهمة تجاوزت هذه الصعوبات و أتمنى أن يكون هذا البحث جديرا بالمناقشة.

الفصل الأول: ماهية الرياضيات

المبحث الأول: مفهوم الرياضيات وموضوعاتها

المبحث الثاني: منهج الرياضيات

المبحث الثالث: نشأة الرياضيات

الفصل الأول: ماهية الرياضيات

الرياضيات علم استقل عن الفلسفة بعدما حدد لنفسه موضوعا ومنهجا، ولا أحد ينكر أنها نموذجا للدقة واليقين، حتى أن الأنساق الفلسفية تعتبرها ركيزة تستند عليها في بناء صروحها الفلسفية، لكن بالعودة إلى نشأة الرياضيات التاريخية، نجد لها تاريخا طويلا وعريقا يمتد من الحضارات الشرقية القديمة. ولعل أعرق حضارتين هما الحضارة المصرية وحضارة بلاد الرافدين اللتين اِهتمتا بعلم الهندسة والحساب، لكن هذا الاهتمام حتى وإن كان معترف به ومعظم الفلاسفة والمفكرين الذين أتوا بعدهم أخذوا من علمهم، لا تعدوا أن تكون مجرد نظريات متفرقة غير مبرهنة. ففرضياتهم تجريبية عملية نشأت تحت ضغط الحاجات، حتى أن بعض النظريات الممارسة من قبلهم قليلة جدا ولا يضمها نسق واحد، إلّا أن التنظير الفلسفي للرياضيات بدأ ميلاده مع اليونانيين، حيث كان الحكماء الأوائل علماء رياضيين أمثال طاليس وفيثاغورس والفيلسوف أفلاطون الذي ذهب إلى القول أن الإنسان رياضي بالفطرة، ولا يدخل علينا إلا من كان رياضيا وأما أرسطو فقد ثار على أستاذه المثالي وبنى فلسفته العلمية بطريقة واقعية، لنمر بعد ذلك إلى إقليدس واضع أول نسق رياضي والذي تدين له الفلسفات اللاحقة، المبني على مجموعة مبادئ هي البديهيات والمسلمات والتعريفات، وتقوم هندسته على المكان المسطح.

وعند العرب نجد الخوارزمي واضع علم الجبر. أما الفلسفات العقلانية فكانت واعية بضرورة الرياضيات في طرح الإشكاليات المعرفية لأنها نموذجا لليقين. وحسب ديكارت الإنسان يمتلك أفكارا فطرية أزلية، فلا يضل ولا يقع في الخطأ، وقد شك في كل شيء إلا المعارف الفطرية، ويأتي بعده الديكارتيان العقلانيان اِسبينوزا الذي أخذ الشق الأول (الهندسة) وبرهن به على الأخلاق بطريقة هندسية، أما ليبنيتز فقد أخذ الشق الثاني (الجبر) وكان غرضه أن ينتج الفكر يقينا رياضيا، فشبه الفكر بعملية الحساب.

المهم أن الهدف من كل المحاولات السابقة للرياضيين تاريخيا هو البحث أو التوصل إلى البداهة واليقين الرياضي، (هذا ما يختلف في الطرح الفلسفي المعاصر الذي ذهب إلى إيجاد حلول للأزمة التي وقعت فيها الرياضيات).

المبحث الأول: مفهوم الرياضيات وموضوعاتها.

أولا/ مفهوم الرياضيات:

أ- المفهوم اللغوي:

الرياضيات mathématics نفسها ليست سوى شكل خاص للرياضي وهي مشتقة من الفعل راضَ، أي درس، تمرّن، تعلم « يأتي الرياضي das mathématische في صيغته اللفظية من اللفظ اليوناني ta mathémata، ما هو قابل للتعلم وبالتالي أيضا للتعليم».[1]

ب- المفهوم الإصطلاحي:

عرف جميل صليبا الرياضيات في معجمه الفلسفي بقوله: «الرياضيات هي علم المقادير الكمية».[2] (القابلة للقياس).

هي علوم فرضية استنتاجية، أي من وضع الإنسان (نابعة من فكره).

ج- طبيعة الجمل في الرياضيات:

يمكن القول بأن « الجمل في الرياضيات، هي جمل خبرية إما أن تكون صحيحة فقط أو خطأ فقط، ولا يجوز أن تكون صحيحة وخطأ في آن واحد، تسمى الجمل في الرياضيات عبارات ولكي نقبل صحة عبارة ما لابد من إثبات صحتها، اعتمادا على صحة عبارات أخرى سبقتها، والعبارات الأخرى ستعتمد في صحتها على عبارات سبقتها أيضا، وهكذا وسيقودنا هذا الأمر أيضا

[1] مارتن هايدغر: السؤال عن الشيء حول نظرية المبادئ الترندنستالية عند كنت تر: إسماعيل المصدق، المنظمة العربية للترجمة، مركز دراسات الوحدة العربية، بيروت، لبنان، ط1، 2012، ص ص 109، 110.

[2] جميل صليبا: المعجم الفلسفي، بالألفاظ العربية والفرنسية والإنجليزية واللاتينية، ج1، مادة الرياضيات، دار الكتاب اللبناني، بيروت، لبنان، ط1، 1982، ص 631.

إلى عبارات نقبلها ونسلم بصحتها دون برهان تسمى مسلمات نعتمد عليها في إثبات صحة عبارات أخرى تسمى مبرهنات».[1] فالمسلمة بدايتها بديهية ونهايتها مبرهنة .

أما مفهوم الرياضة البحتة عند برتراند رسل فتظهر في قوله: «الرياضيات البحتة هي باب جميع القضايا التي صورتها « ق يلزم عنها ك» حيث ق. ك قضيتان تشتملان على متغير واحد أو جملة متغيرات، هي بذاتها في القضيتين، علما بأن كلا من ق، ك لا تشتمل على الثوابت غير الثوابت المنطقية، والثوابت المنطقية هي كل المعاني التي يمكن تعريفها بدلالة اللزوم».[2]

«وما يقصده رسل بطبيعة الرياضيات البحتة هي: تلك الصبغة المنطقية للرياضيات، أي إلتحام المنطق والرياضيات على وجه أصبح معه في الإمكان اشتقاق الرياضيات البحتة بأكملها من مقدمات منطقية، وتصبح بذلك جزءا من المنطق».[3] أي إلتحام المنطق بالرياضيات وصعوبة وضع حد فاصل بينهما.

ثانيا / موضوع الرياضيات:

موضوع الرياضيات متنوع ومتعدد لكن يمكن حصر موضوعها في: «الكم، فإذا كان الكم متصلا كالامتداد، سمي العلم الذي يبحث فيه بعلم الهندسة، وإذا كان منفصلا كالعدد، سمى العلم الذي يبحث فيه بعلم العدد، وهو يشمل الحساب والجبر».[4]

---

[1] فاضل سلامة شطناوي: أسس الرياضيات والمفاهيم الهندسية الأساسية، دار المسيرة، عمان، الأردن، ط1، 2008 ، ص 16.

[2] برتراند رسل: أصول الرياضيات، ج1، تر: محمد مرسي أحمد وأحمد فؤاد الأهواني، دار المعارف، مصر، [د: ط]، 1958، ص29.

[3] محمد مهران: فلسفة برتراند رسل، دار المعارف، مصر، القاهرة، [د:ط]، 1119، ص 195.

[4] جميل صليبا: المعجم الفلسفي، ج1، ص 631.

* علم يقوم على حدس الزمان./ محمد عابد الجابري: مدخل إلى فلسفة العلوم، العقلانية المعاصرة وتطور الفكر العلمي، مركز دراسات الوحدة العربية، بيروت، لبنان، ط1، 2010، ص 122.

بما أن الرياضيات هي علم المقادير الكمية، وموضوعها الكم هنا إشارة إلى أنها تتناول جانب الزيادة والنقصان (القياس)، كما تتناول جانب النظام والترتيب (العدد)، وبالتالي تنقسم الرياضيات إلى علم الهندسة (كم متصل) وعلم الحساب* والجبر (كم منفصل).

والجمع بين الكم المتصل والكم المنفصل يعود إلى الفيلسوف رنيه ديكارت بما يعرف بالهندسة التحليلية* – إذن الرياضيات تنقسم إلى رياضيات القياس ويمكننا التمييز فيها بين مجموعتين رياضيات المقدار ورياضيات العدد، «فالرياضة من حيث أن موضوعها هو القياس تنقسم إلى رياضة المقادير (الهندسة والميكانيكا) ورياضة العدد (الحساب والجبر) ورياضة العدد الذي يطبق على المقادير وعلى الحجوم (الهندسة والميكانيكا التحليليتان)، والمكان الذي هو رمز ومقياس لكل المقادير.

- **رياضيات المقدار**: وهي الهندسة والميكانيكا الأوليتان، وموضوع الهندسة هو المكان، أما الميكانيكا فتدرس الزمان والحركة والقوة، فنحن ندرك المكان عن طريق الرسم، ثم عن طريق الهندسة التي هي رسم عقلي وبعد ذلك ننتقل انتقالا طبيعيا إلى الميكانيكا». [1]
- **رياضيات العدد**: وهي: العلم الأول للعدد وهو الحساب الذي يُعنَى بدراسة الأعداد والعمليات عليها، والطرح والضرب والقسمة والرفع إلى القوى وإيجاد الجذور، وكذلك تطبيق هذه العمليات في مسائل الحياة اليومية.[2]

ثالثا/ قيمة الرياضيات:

إن الرياضيات أداة للعلوم الأخرى ولغة لها: فأي بحث من الأبحاث مهما كان موضوعه ما لم يعبر عن مضمونه بلغة الأرقام لا يعتبر علما، وقياسا عليه فإن علمي الفيزياء والكيمياء يتقنان هذه اللغة جيدا، وقد اكتسبتها البيولوجيا مؤخرا، أما العلوم الإنسانية فلا زالت تتعثر.[1]

---

* Géomitric analytique علم يعبر عن الأشكال والخواص الهندسية بالمعادلات الجبرية خلافا للهندسة التركيبية التي تعتمد على الحدس في أحكامها./ جميل صليبا: المعجم الفلسفي، ج1، مادة الهندسة التحليلية، ص 256.

[1] بول موي: المنطق وفلسفة العلوم، تر: فؤاد حسن زكرياء، دار النهضة، مصر، القاهرة، [د:ط]، [د:ت]، ص ص 110، 112.

[2] عطية عبد السلام عاشور: معجم الرياضيات، Mathematis Dictonary ، مطابع الدار الهندسية، مصر، القاهرة، [د:ط]، 1995، ص 94.

المبحث الثاني: منهج الرياضيات.

من المعروف أن منهج الرياضيات الكلاسيكية يبنى على اليقين وقائم على الحدس* والاستنباط**. والحدس هو الذي يمد الرياضيات بعنصر الخصوبة، والاستنتاج الذي يمنحها التماسك المنطقي.

وتجدر الإشارة أنه في الرياضيات الكلاسيكية يجب التمييز بين الموضوع والمنهج وهذا ما سيتغير في العصر الحديث والمعاصر، أي تحقيق الوحدة العضوية بين الموضوع والمنهج.

عموما منهج الرياضيات إما أن يكون منهجا تحليليا أو منهجا تركيبيا.

1- المنهج التحليلي:

هو منهج للحصول على معرفة جديدة، ويتخذ التحليل أشكالا مختلفة طبقا لطبيعة الموضوع الجاري دراسته أي إرجاع الكل إلى الجزء، أي تقسيم الموضوع إلى أجزاءه المكونة يكشف عن بنيانه، وتقسيم ظاهرة معقدة إلى عناصر أبسط، يمكن الباحث من الفصل الجوهري عن غير الجوهري فيها، ومن تحويل المركب إلى البسيط، والغرض من التحليل إدراك الأجزاء كعناصر لكل مركب، وإقامة الروابط بينها والتحليل يضفي إلى عزل الأشياء.[2]

بمعنى أن التحليل كمنهج هو وسيلة يتم من خلالها الحصول على معرفة جديدة، وذلك طبقا للأشكال المختلفة التي يتجسد فيها التحليل انطلاقا من الموضوع المراد تحليله، حيث تتم عملية التحليل بالتدرج من الكل إلى الجزء، وذلك بتفتيت الكل إلى جملة أجزائه حيث يتم فصل الجوهري

---

[1] رضا سعادة: الفلسفة ومشكلات الإنسان، منافذ إلى الحقيقة والحرية والعدالة الاجتماعية، دار الفكر اللبناني، بيروت، لبنان، ط1، 1990، ص 58.

* لغة: السرعة في السير، إصطلاحا: التصور الذي يقوم في ذهن خالص منتبه بدرجة من السهولة والتمييز، لا يبقى معها مجال لريب،/ جميل صليبا: معجم فلسفي، ج1، مادة الحدس، ص 452.

** إنتقال الذهن من قضية أو عدة قضايا هي المقدمات إلى قضية أخرى هي النتيجة للانتقال من الأخص إلى الأعم،/ إبراهيم مدكور: المعجم الفلسفي، الهيئة العامة لشؤون المطابع الأميرية، مصر، القاهرة،[د:ط]، 1983، ص 19.

[2] روزنتال، يودين: الموسوعة الفلسفية، وضع لجنة من العلماء والأكاديميين، تر: سمير كرم، مراجعة: صادق جلال العظم وجورج طرابيشي، دار الطليعة للطباعة والنشر، بيروت، [د:ط]، [د:ت]، ص ص 115، 116.

عن غيره، وتبسيط المركب والهدف من وراء التحليل هو: عملية استيعاب ووعي الأجزاء بوصفها عناصر تكون شيئا مركبا، ووصل العلاقات بينها وتتم إضافة عزل الأشياء إلى التحليل.

2- المنهج التركيبي أو التوليفي :

مسيرة العقل الذي ينطلق من المفاهيم أو القضايا الأبسط إلى الأعقد، أي من قضايا يقينية إلى قضايا أخرى نتيجتها الواجبة، ويكمن حصر المنهج (التوليفي) في الانطلاق من قضايا معترف بصحتها، واستخلاص قضايا منها، بوصفها نتائج واجبة ثم الإستخلاص من هذه قضايا جديدة، وهكذا دواليك حتى الوصول إلى القضية التي تكون هي ذاتها معروفة بصحتها.[1]

أي أن العقل في مسيرته يتحرى الإنطلاق من البسيط إلى المعقد بحيث يتنقل من قضايا مسلم بصحتها وصدقها إلى قضايا أخرى نابجة عنها، وهذا ما يشكل المنهج التركيبي الذي ينهج نهج الإنتقال من قضايا يقينية لا يتسرب إليها الشك إلى قضايا أخرى نابجة عنها. وتتواصل هذه العملية حتى نصل في آخر المطاف إلى قضية تفرض صحتها ويقينها بذاتها.

المبحث الثالث: نشأة الرياضيات.

لقد كان علماء الرياضيات الأوائل رجالا عمليين، نجارين وبنائين، فالرياضة تقع جذورها في الخبرة العادية للحياة اليومية، إذا أمكنك أن تقتفي أثر الطريق الذي تطورت به الألفاظ الرياضية بالتدريج من الكلمات التي تستخدمها يوميا، فإنك ستتمكن من فهم ماهية الرياضيات، النقطة الأساسية التي يجب اِستيعابها هي أن التدليل الرياضي لا يفترق عن قدرات العقل الأخرى، كما أن الرياضة غير منفصلة عن أمور الحياة الأخرى، على العكس تماما: الرياضة نمت من ظروف الحياة.[2]

[1] أندريه لالاند: موسوعة لالاند الفلسفية، تعر: خليل أحمد خليل، منشورات عويدات، بيروت، باريس، ط2، 2001، ص 1411.

[2] وو، سوير: متعة الرياضي، الألف كتاب، تر: عطية عاشور، إدوارد ميخائيل، مر: محمد مرسي أحمد، دار سعد، مصر، القاهرة، [د:ط]، [د:ت]، ص ص، 19-51.

1- الرياضيات عند المصريين والبابليين:

قد نشأ علم الرياضيات في مصر وبلاد الرافدين تحت ضغط الحاجات، فكلا الحضارتين عرفت الهندسة والحساب وتدل بعض الأبحاث أن الرياضيات كانت متقدمة عند البابليين، فلقد استعملوا الحساب والهندسة في دراسة حركة الكواكب والنجوم وقياس الزمن وفي تنظيم الملاحة والفلاحة. أما المصريين ففيضانات وادي النيل دفعتهم إلى ابتكار طرق وأساليب هندسية لتحديد مساحات الحقول، وتنظيم الزراعة والري كذلك اهتمامهم ببناء الأهرامات جعلهم يتقدمون في استخدام الخطوط والحساب.[1]

2-منزلة الرياضيات عند اليونانيين:

أ- منزلة الرياضيات عند طاليس:

طاليس Thales (المولود في ميليتوس والذي عاش حوالي عام 600 ق. م)

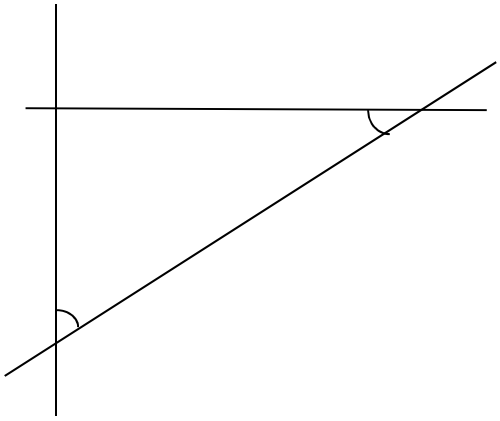
أول الحكماء الأوائل الذين نَظَّرُوا للرياضيات (مع فيثاغورس) حيث وضع الأسس العلمية للرياضيات، وأهم المبادئ التي وضعها:

- أنه لو تقاطع خطان مستقيمان فإن الزوايا المتقابلة تكون متساوية.
- إن الزاوية المرسومة على نصف قطر الدائرة لابد أن تكون قائمة الزاوية.

وهذه النقلة النوعية التي أحدثها طاليس في علم الرياضيات والتي لم تحدث من قبل، تتيح لنا القول أن طاليس انتقل إلى تفسيرات مقنعة قابلة للتحليل النقدي، لكن ما ينقصها هو التجربة العلمية.[2]

[1] محمد ثابت الفندي: فلسفة الرياضة، دار النهضة العربية، بيروت، ط1، 1969، ص ص 56،57.

[2] لويس وولبرت: طبيعة العلم غير الطبيعية، تر: سمير حنا صادق، الهيئة العامة لشؤون المطابع الأميرية، القاهرة، [د:ط]، 2001، ص ص 29،30.



ب- منزلة الرياضيات عن فيثاغورس:

فيثاغورس وأتباعه يردون كل شيء للعدد فكل شيء له صفة العدد حتى أن كل ما تقع عليه أعيننا مركب من أعداد: فما دام العدد هو الحقيقية المعقولة المفسرة لظاهرة الصوت المحسوسة أو العقلية، العلة والحقيقة المفسرة للموجودات ليست المادة ولكن العدد الذي يمكن أن نعبر عنه بالشكل الهندسي، أو كما كان يسمى باليونانية بالإيدوس Eidos أي الصورة المرئية.[1]

أي أن الفيثاغوريين بزعامة فيثاغورس يصبغون كل شيء بصبغة العدد، فكل شيء حسبهم ما هو إلا خاصية للعدد مهما كان تركيبه، فالعدد هو المكون لظاهرة الصوت الحسية (الموسيقى)، وهو كذلك المكون لكل حقيقية معقولة للأشياء، فهو الذي يفسر كل شيء سواءا كان ماديا أو عقليا بحيث يتم التعبير عن العدد بشكل هندسي، أي كل الموجودات هي عبارة عن أشكال هندسية.

يُكنَّى بالإيدوس في اللغة اليونانية أي الصورة المرئية.

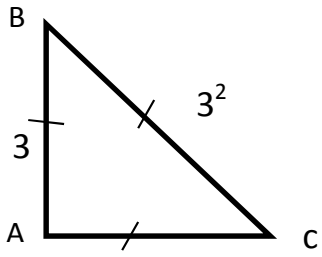
- إن المدرسة الفيثاغورية اِهتمت بالرياضيات، ولكن اِهتمامها كان من باب تفسير الكون أما أهم النظريات التي ابتكروها في مجال العدد والهندسة ما يلي:
- الربط بين الأعداد والأشكال الهندسية: كل ما تقع عليه عيناك مركب من أعداد أي كل شيء في الوجود هو شكل هندسي حتى أن العالم الطبيعي يشتق من الأعداد.

[1] فاروق عبد المعطي: فيثاغورس، فيلسوف علم الرياضيات، دار الكتب العلمية، بيروت، لبنان، ط1، 1994، ص ص 30- 41.

كذلك برهن فيثاغورس على أن مربع الوتر في كل مثلث قائم الزاوية مساو لمجموع مربعي الضلعين الآخرين[1].

لكن الأزمة التي وقع فيها الفيثاغوريين هي اكتشافهم لأعداد لا عقلية غير قابلة للقياس. وتسمى اليوم الأعداد الجذرية، وهذا عندما حاول فيثاغورس تطبيق نظريته اكتشف أن: « وتر المثلث القائم الزاوية يكون في بعض الحالات غير قابل للقياس بوحدات صحيحة. فإذا كان لدينا مثلث قائم الزاوية الضلعان المتجاوران يساويان على التوالي 3 و4 فإن مربع وتر هذا المثلث يساوي $5^2=25=16+9=4^2+3^2$

وبالتالي فإن الوتر يساوي 5، وهو عدد صحيح <معقول> أي متصور بتمامه إذا كان الضلعان المتجاوران يساويان على التوالي 5 و7 فإن مربع الوتر يساوي $5^2 + 7^2$ أي 25+ 49، أي 74، وإذا أردنا استخراج وتر هذا المثلث أي الجذر التربيعي للعدد 74 فإننا نحصل على عدد صحيح <معقول>[2].



3x3=9

الوتر=3^2

كذلك أرجع فيثاغورس أصل الكون إلى العدد واحد، ومنه تخرج الأعداد ومنها تخرج النقط، ومن النقط تخرج الخطوط، ومن الخطوط السطوح ومن السطوح الأجسام، ومن الأجسام العناصر الأربعة وهي: النار والهواء والماء والتراب، التي تركب منها العالم، وكان يقول أن الأرض مستديرة.

أما في التناظر فيقول أنه لو رسم خط من قدم أي إنسان إلى أسفل الكرة، لوقع قدم إنسان يقابله ولكوّن ذلك الخط قطرا للكرة.

[1] فاروق عبد المعطي: فيثاغورس فيلسوف علم الرياضيات، ص 41.

[2] محمد عابد الجابري: مدخل إلى فلسفة العلوم العقلانية المعاصرة وتطور الفكر العلمي، ص ص 59، 60.

وهذا يعنى أن الفيثاغوريين برهنوا على عدة نظريات لكنهم لم يفلحوا في وضعها في نسق علمي موحد، أيضا ما يعاب عليهم أنهم اعتبروا الواحد والنقطة شيئا واحدا، أما اليوم فنحن نفرق بين الواحد الحسابي الذي هو وحدة العدد والنقطة التي هي وحدة الهندسة، فالمائة من الكتب تتكون من آحاد ولكل واحد منها وجود حقيقي، أما الخط المستقيم فمكون من نقط مفروضة فقط وليس لها وجود حقيقي.[1]

ج- منزلة الرياضيات في الفلسفة الأفلاطونية:

لقد صبغت فلسفة أفلاطون بالأفكار الرياضية، « فالرياضة في نظر أفلاطون لها من الأهمية ما يستدعي أن يكون هناك قانون يحتم دراستها على من يتولون أمور الحكم»[2]

أي أن الرياضيات عنده تكتسي أهمية بالغة ولا أدلّ على ذلك من جعل أفلاطون تعلم الرياضيات ومعرفة قوانينها ونظرياتها شرطا مهما وضروريا يجب توفره في الحاكم، بل أكثر من ذلك، حاول سن قانون يحتم على الحاكم تعلم ومعرفة الرياضيات، ولا يوجد أكبر دليل على حبه وإعجابه بعلم الرياضيات أكثر من مقولته الشهيرة: «**لا يدخل بابنا إلا من كان رياضيا أو مهندسا**». لأن الفيلسوف بين قومه يكشف للناس بعد أن يرتفع من إدراك المحسوس إلى المعقول معتمدا في ذلك على منهج الجدل الذي يبدأ بالمران على التصورات الرياضية ثم يرتفع منها إلى إدراك المثل العقلية إلى أن يصل قمة عالم المثل الذي هو مثال للخير[3].

إن مهمة الفيلسوف حسب وجهة نظر أفلاطون تتمثل في فضح الوهم الذي سيطر على عقول الناس. فهو الأنسب لهذه المهمة لأنه ارتفع عن ما هو محسوس إلى العالم المجرد المعقول، وكانت

[1] فاروق عبد المعطي: فيثاغورس فيلسوف علم الرياضيات، ص ص 30- 46.

[2] جورج سارتون: تاريخ العلم القديم في العصر الذهبي لليونان، ج3، تر: توفيق الطويل وآخرون، الهيئة العامة لشؤون المطابع الأميرية، القاهرة، مصر، [د:ط]، 2010، ص 85.

[3] أميرة حلمي مطر: جمهورية أفلاطون، مطابع الهيئة المصرية العامة، [د:ط]، 1994، ص34.

وسيلته في هذا الإرتقاء هو ما أسماه بالجدل الصاعد والنازل، بحيث تشكل التصورات الرياضية بداية مرانه في عملية ارتقائه حتى يصل إلى محطته الأخيرة ألا وهي عالم المثل، وعالم الخير.

كما أن أفلاطون يفرق بين الظن (الظواهر الحسية) وبين العلم (المعرفة اليقينية) التي تدرك بالحقائق العقلية أو المثل.

«وقد خصّ الحديث حول الرياضة البحتة التي تبصر بالحقيقة الخالدة; فإذا ما عرفنا الدائرة بأنها منحنٍ مستو مقفل، تبعد كل نقطة فيه بعدا ثابتا عن نقطة داخله. فإننا نخلق مثالا هو الدائرة المثالية، أو الحلقة التي لا يمكن لأية دائرة مرسومة أن تبلغها».[1]

بعد أن يفرق أفلاطون بين الظن الذي تكون حدوده الظواهر الحسية، وبين العلم الذي يتميز بيقينيته، لأنه يدرك الحقائق العقلية.

تطرق إلى مفهوم الرياضيات البحتة، حيث تعمل هذه الأخيرة على إدراك الحقائق الخالدة، ويضرب مثالا بالدائرة المثالية غير الموجودة في الواقع المحسوس المزيف.

إذا أفلاطون كان معجبا بالطراز الهندسي المرتبط بقواعد رياضية ثابتة، وربما كان أفلاطون أول من أدرك الحاجة إلى إكمال التحليل بالتركيب، حيث كان يجد في الاستدلال الرياضي المبرهن على عالم المثل.

فللحساب والهندسة مكانة هامة في فلسفة أفلاطون، والحساب بوجه خاص، لأن الواحد وهو أساس العدد امتزج بالمثال وتطورت نظرية أفلاطون إلى القول أن المثل أعدادا، فكلما وجد العدد وجد الترتيب والنظام، العدد الخالص أصدق من العدد المحسوس، كذلك الرياضيات كالمثل أزلية وثابتة، وقد أعطى أفلاطون مكانة هامة للتعريفات كتعريفه النقطة بأنها ليس لها وجود في الواقع المحسوس، والتعريف للحقائق الرياضية واحد لا يتغير، والتعريفات هي أساس العلوم الرياضية، ونقطة البداية في

[1] جورج سارتون: تاريخ العلم القديم في العصر الذهبي لليونان، ص 86.

منهجه، وحجر الزاوية في الجدل، ويتصل بالتعريف منهج اشتهر به أفلاطون هو القسمة الثنائية مثل قسمة العدد إلى فرد وزوج، المثل الأعلى للقسمة من جهة أن النوعين متساويين تماما.

ومن التعريف والقسمة ينشأ منهج التحليل ثم التركيب حتى أنه فسر العالم تفسيرا رياضيا، وعارضه أرسطو ومدرسته فأصبحنا إزاء تفسيرين للعالم أحدهما رياضي والآخر طبيعي.[1]

د- منزلة الرياضيات عند أرسطو:

المعروف أن أبو المنطق – آلة تعصم الذهن من الوقوع في الخطأ- لم يكن له مؤلفات في الرياضيات حيث أن البحث عن الرياضيات في نسقه العلمي أشبه بالمستحيل بدون أن نتطرق إلى المنطق، وبالضبط في معالجته للقياس*، هذا الأخير الذي يعتبر قلب نظرية أرسطو العلمية.

« في معالجته للقياس يلجأ إلى استخدام الرموز symbols، والتحليلات تكشف عن ذلك بوضوح تام، فإذا أشرنا للحدود "حيوان"، "وفان"، و" إنسان" بالرموز أ-ب-ج على التوالي اتخذ القياس الصورة التالية: كل أ هي ب، كل ج هي أ كل ج هي ب، ونحن نشير إلى الرموز أ، ب، ج، في الرياضيات بأنها متغيرات variables، وهنا تكمن أهمية أرسطو»[2]، لكن أرسطو هنا لم يمض في تحليلاته على أساس رياضي، بل المتغيرات أي استخدام أرسطو للثوابت المنطقية مثل: الواو، كل..، لكن نظرية أرسطو في القياس هي أولى المحاولات التي قامت لبيان المبدأ الصوري للاستدلال.

أما في ترتيبه للعلوم فقد جعل الرياضيات العلم الأقرب إلى علم المبادئ الأولى (الميتافيزيقا)، وعلى هذا الأساس جعل الرياضيات أولا، وجعل فيها الحساب قبل الهندسة، لقد استطاع بوضعه

---

[1] أحمد فؤاد الأهواني، أفلاطون: نوابغ الفكر الغربي، دار المعارف، القاهرة، ط4، 1119، ص ص 67، 70.

* عرف أرسطو القياس قائلا: " أما القياس فهو قول logos، إذا وضعت فيه أشياء أكثر من واحد لزم شيء آخر من الإضطرار لوجود تلك الأشياء الموضوعة بذاتها".

[2] ماهر عبد القادر محمد علي: فلسفة العلوم، المنطق الرياضي، ج3، دار النهضة العربية للطباعة والنشر، بيروت، [د:ط]، 1985، ص 17.

أسس النسق الإستنباطي في المنطق أن يضع في نفس الوقت أسس النسق الإستنباطي للهندسة الإقليدية.[1]

حيث كان تمييزه في نظرية القياس، بين أشكال كاملة، وأشكال ناقصة، يبرهن عليها بواسطة مجموعة البديهيات مع قواعد الإستنباط، ولأرسطو الفضل في تطوير العلوم الرياضية وخاصة علم الهندسة حيث ميز بين عناصر البرهان العلمي الثلاثة التعريفات والبديهيات (أو المبادئ والفروض في التحليلات الثانية)، وتمييزه كذلك بين البديهيات أو (المبادئ) المشتركة بين كل العلوم; كمبدأ عدم التناقض وبين المسلمات أو المبادئ الخاصة بكل علم على حدة، وكان ذلك هو الأساس الذي جعل إقليدس يؤسس الهندسة كعلم استنباطي منفصل، وكذلك بداية إنفصال العلوم الرياضية عن الفلسفة منذ ذلك التاريخ.[2]

هـ – النسق الرياضي في هندسة إقليدس Euclid

مع إقليدس يختلف الوضع فبعد أن كان الحكماء يقومون بأعمال في الرياضيات والفلاسفة أمثال أفلاطون وأرسطو، إلا أنهم لم يستطيعوا وضع نظرياتهم في نسق موحد إلا مع إقليدس.

لكننا لا ننكر تأثره بسابقيه واستفادته منهم خاصة أرسطو: « نحن لا نستطيع أن نحدد تأثر إقليدس بأرسطو ولا كيف أخذ عنه ولكن الأثر أكيد وواضح وكما بين أرسطو في تحليلاته كل نظرية يقينية أو برهانية إنما تقوم على عدد قليل من المقدمات أو المبادئ تبدأ منها البرهنة على كل القضايا للبرهان، بينما تبقى تلك المقدمات خارج البرهان وغير قابلة له في نطاق القائم عليها».[3]

هندسة إقليدس ظلت هي المسيطرة على الفلسفات القديمة قائمة على المكان المسطح، وتقوم على المبادئ التالية: التعريفات والمسلمات والبديهيات التي وضحها إقليدس في كتابه الأصول وعرض فيه نسقه قائلا: « إن كتاب الأصول يعرض في الواقع نموذجا لعلم حق، يبدأ بمجموعة من القضايا

[1] مصطفى النشار: نظرية العلم الأرسطية، دراسات في منطق المعرفة العلمية عند أرسطو، دار المعارف، القاهرة، ط2، 1995، ص 135.
[2] نفسه: ص ص 136،137.
[3] محمد ثابت الفندي: فلسفة الرياضة، ص 46.

الأولية، يعبر عنها على نحو من الممكن أن يقبله الجميع، ومع أن هذه القضايا قليلة العدد ما أمكن إلا أنها قادرة على ضمان تشييد البناء الرياضي كله وهذا التشييد يذهب من البسيط إلى المركب، بواسطة البرهان، فهو يبدأ بإثبات خصائص للأشكال الأولية ثم يبرهن بواسطتها على خصائص الأشكال الأكثر تعقيدا، فإقليدس ينهج نهجا تركيبيا يذهب من البسيط إلى المركب، يذهب من الأشكال الأكثر بداهة وأولية كي ينتهي إلى الأشكال الأكثر تعقيدا.»[1]

أي أن مؤلف الأصول لإقليدس يحوي بين طياته علم سيكون له شأن كبير، وذلك لأنه سيكون محل إتفاق الجميع، لأن هذا العلم يستهدف أن تكون قضاياه التي ينطلق منها ويؤسس بها كيانه ونظرياته قضايا بسيطة وأولية يسهل للجميع فهمها وتقبلها والإقناع بها.

حيث تعمل هذه القضايا على بناء النسج الرياضي رغم أنها قليلة العدد ويكون هذا البناء متدرجا حيث يتدرج من البسيط إلى المركب، مستخدما في ذلك البرهان، الذي يهدف في بدايته على إقرار وتبرير سمات الأشكال الأولية ليتدرج بعدها في برهانه إلى إقرار وتبرير القضايا الأكثر تعقيدا ومن ممثلي هذا المنهج نجد إقليدس حيث ينتقل من البسيط الأولي إلى المركب المعقد ويسمى هذا المنهج بالمنهج التركيبي.

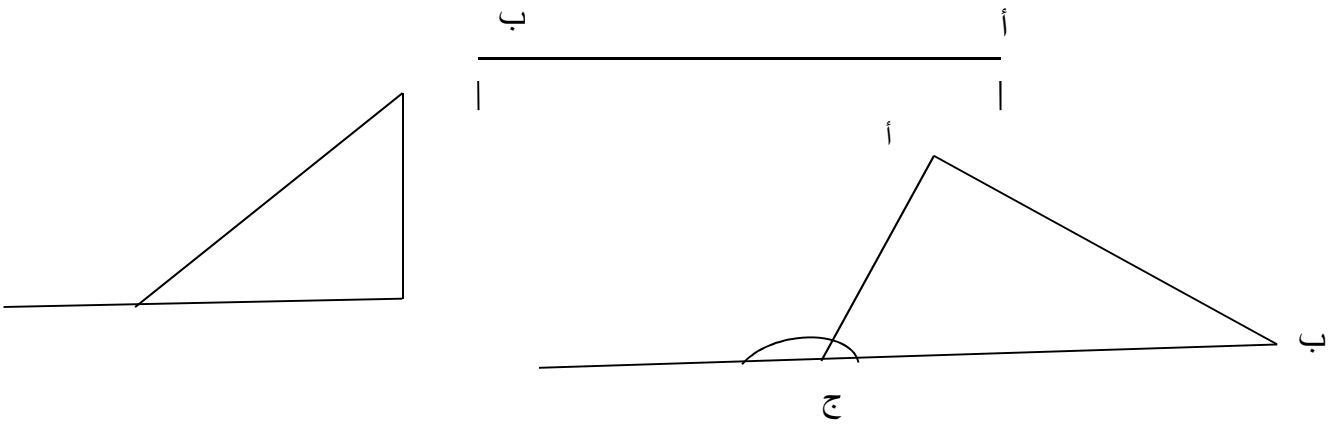
ننطلق هنا من الحديث عن خصائص البينة الرياضية لهندسة إقليدس « فالبنية الرياضية لهندسة إقليدس بنية إفتراضية تبدأ بمجموعة من التعابير والمصطلحات تقبل دون تعريف (مثل نقطة، مستقيم، مستوي،...) ترتبط بعلاقات تسمى مسلمات يسلم بصحتها دون برهان».[2]

فهندسة إقليدس بناها على سطح مستوٍ: يكون فيها الخط المستقيم أقصر مسافة بين نقطتين كما أن مجموع زوايا المثلث يساوي قائمتين.[3]

[1] كامل محمد محمد عويضة: إقليدس بين الفلسفة والمنهج الرياضي، دار الكتب العلمية، بيروت، لبنان، ط1، 1994، ص ص 70، 71.

[2] فاضل سلامة شطناوي: أسس الرياضيات والمفاهيم الهندسية الأساسية، ص 16.

[3] رضا سعادة: الفلسفة ومشكلات الإنسان، منافذ إلى الحقيقية والحرية والعدالة الاجتماعية، دار الفكر اللبناني، بيروت، لبنان، ط1، 1990، ص 49.



لا نعرف عن حياة إقليدس الكثير لكنه اشتهر عن طريق كتابه الأصول*، كما أنه اسمه كثيرا ما يقترن بالهندسة، بل يمكن القول أن اِسمه يساوي كلمة الهندسة في حد ذاتها حتى أن الهندسة حظرت في حين أصبح اِسمه في طي النسيان.

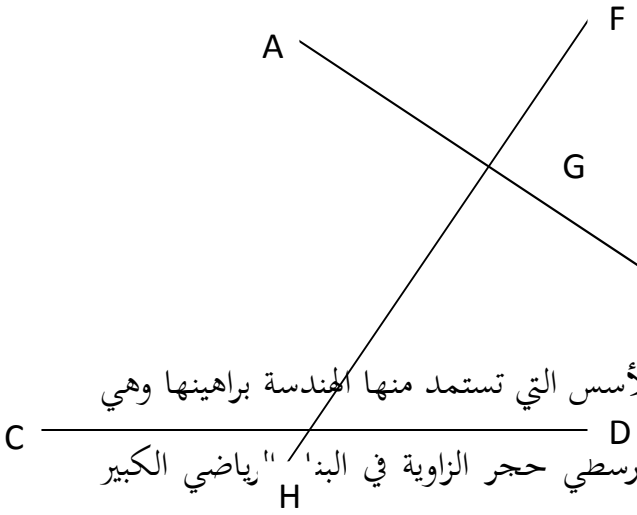
- **تأثر إقليدس بأرسطو في اختياره للمصادرات**

كان أرسطو هو المثل الذي احتذاه إقليدس « فقد كان أرسطو كثير العناية بالنظر في المبادئ الرياضية، وقد بين ضرورة استخدام المصادرات والحاجة إلى ردها إلى أقل عدد ممكن، ومع ذلك فإقليدس هو الذي يرجع إليه فضل اختيار المصادرات».[1] ولعل اختيار المصادرة الخامسة بنوع خاص هو أعظم النتائج التي حققها ونصها: "إذا وقع خط مستقيم على خطين مستقيمين فصَيَّرَ الزاويتين الداخليتين في جهة واحدة أقل من قائمتين فالخطان يلتقيان إن أخرجا إلى غير حد في تلك الجهة بعينها".

* التعريف بكتاب الأصول للإقليدس: المعروف أن الأصول تتألف من ثلاثة عشر كتابا معظمها ليس ذا طبيعة هندسية، على الرغم من اِستعمالها الإصطلاحات الهندسية، فالكتاب الخامس مكرّس للنظرية العامة للروابط والنسب، والكتب من السابع إلى التاسع تتناول علم الحساب ونظرية الأعداد، وأخيرا يحتوي الكتاب العاشر على نظرية تتعلق ببعض أنواع الأعداد الصماء من الدرجة الثانية والكتب الأخرى من الأصول تعالج علم الهندسة، فالكتب الأول والرابع والسادس مخصصة للهندسة المسطحة، والكتب من الحادي عشر إلى الثالث عشر للهندسة الفراغية،/ رشدي راشد: موسوعة تاريخ العلوم العربية الجزء الثاني، الرياضيات والعلوم الفيزيائية، بيروت، لبنان، ط1، 2001،ص 145.

[1] جورج سارتون: العلم القديم والمدنية الحديثة، تر: عبد الحميد صبرة، تقديم: أحمد فؤاد باشا، إشراف: جابر عصفور، المركز القومي للترجمة، مصر، القاهرة، ط1، 2010، ص ص، 62، 63.

وتشكل« المصادرة الخامسة، وهي أصل نظرية الخطوط المتوازية، هي الأكثر تعقيدا، وهذه المصادرة تقرأ هكذا "إذا كان خط مستقيم (EF) يتقاطع مع خطين مستقيمين (AB و CD) موجودين في المستوي حيث يوجد الخط (EF) وإذا كان هذا الخط يكوّن زوايا داخلية ومن جهة واحدة (BGH و GHD) أقل من زاويتين قائمتين، فإن الخطين (AB و CD) الممتدين إلى ما لا نهاية يتقاطعان من جهة (BD) التي تقع فيها الزاويتان الأقل من زاويتين قائمتين».[1]



إقليدس الذي أفاد من تحليلات أرسطو الرائعة للأسس التي تستمد منها الهندسة براهينها وهي التعريفات والأصول والمسلمات، فكان هذا التحليل الأرسطي حجر الزاوية في البنا' "رياضي الكبير الذي أقامه إقليدس طبقا لذلك التحليل، كما كانت المسائل التي أثارها المنهج المشترك بين أرسطو وإقليدس هي عين المسائل التي سيثيرها المحدثون بشأن الرياضة وأسسها.[2]

- **تأثر أرسطو بالرياضيات:**

الرياضة كانت مصدر وحي مباشر أو غير مباشر لأرسطو، والقياس المنطقي ليس إلا إحدى مراحل البرهان الرياضي أو المنهج الاستنتاجي بمعناه العام.[3]

- **أهم الفروق بين الرياضة ومنطق أرسطو:**

تظهر أهم الفروق بين الرياضة ومنطق أرسطو في طريقة التفكير في كل منهما، حقا إن التفكير الرياضي تفكير قياسي [استنتاجي] ومعنى هذا أن التفكير القياسي المنطقي ينتقل من العام

[1] رشدي راشد: موسوعة تاريخ العلوم العربية الجزء الثاني، الرياضيات والعلوم الفيزيائية، ص 16.
[2] محمد ثابت الفندي: فلسفة الرياضة، ص ص ، 17، 18.
[3] محمود قاسم: المنطق الحديث ومناهج البحث، مكتبة الأنجلو المصرية، ط2، 1999، ص 229.

إلى الخاص، أما التفكير الاستنتاجي الرياضي فيسلك أحيانا مسلكا مخالفا فهو يعتمد على عملية التعميم التي تعد جوهر التفكير الاستقرائي.[1] وقد رأى إقليدس بعبقريته ضرورة استخدام هذه المصادر فوقع اختياره بالحدس على أبسط صيغة لها[2].

يقول جاوس Gaux (1790) نقلا عن جوروج سارتون: « العلم القديم والمدينة الحديثة، لو استطعت البرهنة على أن في الإمكان أن يوجد مثلث مستقيم الأضلاع مساحته أكبر من أية مساحة مفروضة، لكان في مقدوري أن أبرهن على الهندسة برمتها تامة الأحكام».[3]

ونفهم من هذا القول أنه يريد أن يبين عدم الحاجة إلى المسلمة الخامسة إذا وفقط إذا استطاع البرهنة على وجود مثلث مستقيم الأضلاع ومساحته أكبر من°180.

اما المنهج الإقليدي فيتكون من:

1- التعريفات:

بعض تعريفات إقليدس:

- النقطة هي ما ليس له أجزاء، أو هي ما ليس له مقدار.
- الخط طول دون عرض.
- نهاية الخط نقطتان.

2- المسلمات:

من مسلمات إقليدس:

-من الممكن رسم مستقيم بين نقطتين.

-من الممكن مد مستقيم محدود إلى أي طول.

-من الممكن رسم دائرة من أي مركز.

[1] نفسه: ص 231.

[2] جورج سارتون: العلم القديم والمدنية الحديثة، تر: عبد الحميد صبرة، تقديم: أحمد فؤاد باشا، إشراف: جابر عصفور، المركز القومي للترجمة، مصر، القاهرة، ط1، [د:ت]، ص 210.

[3] نقلا عن: جورج سارتون: العلم القديم والمدنية الحديثة، ص 67.

ج- البديهيات الإقليدية: هي قضايا نقبلها دون أن نطالب بالبرهنة عليها لشدة وضوحها، ونؤمن بصدقها لأننا ندرك مضمونها بالحدس.

من بين بديهيات إقليدس:

-الأشياء المساوية لشيء واحد متساوية فيما بينها.

-إذا أضفنا أشياء متساوية إلى أشياء متساوية فالنواتج الكلية متساوية.

-إذا طرحنا أشياء متساوية من أشياء متساوية فبواقي الطرح تكون متساوية.

-إذا أضفنا أشياء متساوية إلى أشياء غير متساوية فالنواتج الكلية تكون متساوية.[1]

3- منزلة الرياضيات عند العرب

سيتم التركيز هنا على ظهور علم الجبر مع الخوارزمي:

الخوارزمي محمد ابن موسى من بين علماء العرب الذين استفادوا من تراث سابقيهم، الذي برع في علم الجبر والحساب، ولا أدل على ذلك من اقتران الحساب باسمه: Algorithmi، نسبة إلى الخوارزمي وكان أول من استعمل كلمة أصم لتدل على العدد الذي لا جذر له.[2]

-ظهر علم الجبر مع الخوارزمي في كتابه الجبر* والمقابلة**، الغرض منه حسب قول الخوارزمي: «الحاجة العملية للناس في معاملاتهم، ألفت كتاب الجبر والمقابلة كتابا مختصرا حاصرا للطيف الحساب وجليله لما يلزم الناس من الحاجة إليه في مواريثهم ووصاياهم وفي مقاسمتهم وأحكامهم وتجارتهم وفي جميع ما يتعاملون به بينهم من مساحة الأرضين وكرى الأنهار والهندسة وغير ذلك من وجوهه وفنونه».

يقول أيضا: « لما نظرت فيما يحتاج إليه الناس وجدت جميع ذلك عددا»[3]، والأعداد التي يحتاجها الناس في حساب الجبر والمقابلة على ثلاثة ضروب وهي: جذور، وأموال وعدد مفرد لا

[1] كامل محمد محمد عويضة: إقليدس بين الفلسفة والمنهج الرياضي، ص ص، 72- 78.

[2] عبد الحليم منتصر: تاريخ العلم ودور العلماء العرب في تطوره، الهيئة المصرية العامة للكتاب، القاهرة،[د:ط]، 2012، ص 61.

* الجبر: حسب الخوارزمي هو تغيير موضع عنصر من المعادلة سواء أكان جذرا أو مربعا أم عددا للجانب الآخر مغيرا إشارته.

** المقابلة: هي طرح العنصر الموجب من كلا الجانبين.

ينسب إلى جذر ولا إلى مال، فالجذر كل شيء مضروب في نفسه من الواحد وما فوقه من الأعداد وما دونه من الكسور.

-والمال كل ما اجتمع من الجذر المضروب في نفسه.

-والعدد المفرد كل ملفوظ به من العدد بلا نسبة إلى الجذور ولا إلى مال، وهو العدد الخالي من س.[1]

وأكبر دليل على إمامة الخوارزمي في علم الجبر تكرار استخدام معادلاته في الكثير من المؤلفات الجبرية:

مثال: $س^2 + 10س = 39$ $س^2 + 21 = 10$ س.

$$س^2 = س + 3س$$

أما حديثا فتكتب مثلا: $س^2 = س + 3س$

$$X^2 = 4+x3$$

$$X^2 = 4+3x$$

الخوارزمي وجد معادلات من الدرجة الأولى وبحث في معادلات من الدرجة الثانية.

أما في باب المساحة حسب كل سطح متساوي الأضلاع فإن أحد أضلاعه في أحد جذره في إثنان جذراه صفر هذا السطع، أو أكبر وكل مثلث متساوي الأضلاع، فإن ضربك عموده ونصف القاعد التي يقع عليه العمود هو تكبير ذلك المثلث.[2]

---

[3] محمد بن موسى الخوارزمي: كتاب الجبر والمقابلة، تقديم وتعليق علي مصطفى ومحمد مرسي أحمد، مطبعة بول يلكية، الجامعة المصرية، [د:ط]،1938، ص 30.

[1] عبد الحليم منتصر، تاريخ العلم ودور العلماء العرب في تطوره، ص 65.

[2] محمد بن موسى الخوارزمي: كتاب الجبر والمقابلة، ص 71.

4- منزلة الرياضيات في الفلسفة العقلانية

أ- رنيه ديكارت: René descartes

بنى فلسفته العقلانية على المنهج الرياضي الذي يقوم على الحدس والإستنباط، حينما اقتنع بحاجة الفلسفة إلى منهج دقيق مثمر للبحث، وأخذ هذا المنهج عن الرياضيات بعد أن سحرته دقتها ويقينيتها الذي وضعه في خطوات أربع: هي: البداهة، التحليل، التركيب، الإحصاء.

كان ديكارت يروض نفسه على تطبيق منهجه على معضلات العلوم الرياضية وكان يجتهد في تخليص معضلات العلوم الأخرى من مبادئها، وتحليلها إلى ما يشبه معضلات الرياضيات.[1]

ب- باروخ اسبينوزا: Baruch spinoza (أخذ الشق الأول الهندسة، إصلاح الفهم، البرهنة على الأخلاق بطريقة هندسية)

«إسبينوزا هو الديكارتي الوحيد الذي استطاع أن يطبق المنهج الديكارتي تطبيقا جذريا في المجالات التي استبعدها ديكارت من منهجه خاصة في مجال الدين»[2] لأن إسبينوزا تعرض لمحاولات اغتيال بينما ديكارت كان صديقا لرجال الدين، المعروف بمقولته: "عاش سعيدا من عاش متخفيا".

إتبع المنهج الهندسي في معالجة قضايا فلسفية، ذلك أن الهندسة في عصره كانت مثالا للعلم التام منذ أن وضع إقليدس مبادئ هذا العلم، وقد تبنى اسبينوزا هذا المنهج اعتقادا منه إمكانية الوصول إلى الله.

فاسبينوزا في نظرية المعرفة انتهج الطريقة الإستنباطية الرياضية لأن الرياضيات إستهوته حتى إعتقد بأنها المفتاح الأمثل لحل أسرار الكون واكتشاف قوانينه، لذلك إتخذ من الهندسة نموذجا بنى على غراره فلسفته، فكما أن الهندسة تبدأ بقضايا صادقة بذاتها لا تحتاج إلى برهان مثل البديهيات

[1] إبراهيم مصطفى إبراهيم، الفلسفة الحديثة من ديكارت إلى هيوم، دار الوفاء لدنيا الطباعة والنشر، الإسكندرية، [د:ط]، [د:ت]، ص ص 84-96.

[2] باروخ إسبينوزا: رسالة في اللاهوت والسياسة، تر: حسن حنفي، مراجعة: فؤاد زكريا، دار التنوير للطباعة والنشر والتوزيع، بيروت، ط1، 2005، ص9.

والمسلمات والمصادرات فكذلك البحث عن الحقيقة ينبغي أن يبدأ بقضايا صادقة بذاتها تتخذها نقطة إنطلاق من أجل أن تبني صرحا معرفيا بشريا.[1] (برهن على كتابه الأخلاق بطريقة هندسية).

ج- لبينيتز جوتفريد فلهلم: Gottfried wilhelm von leibinz

(أخذ الشق الثاني عن طريق آلية الحساب الجبر)

- يعتبر ليبنيتز مؤسس المنطق الرياضي، وقد تعلق بالرياضيات على أمل أن يكشف نوعا من الرياضيات المعممة التي سماها الكليات المميزة، وهي التي بواسطتها يستعرض بعمق التفكير بالحساب.

- يقول: « إذا كانت لدينا، لكان في مستطاعنا أن نستبدل في الميتافيزيقا وفي الأخلاق بنفس الطريقة تقريبا التي نستبدل بها في الهندسة وفي التحليل».[2](قانون التناقض، قانون السبب الكافي كلاهما يعتمد على فكرة قضية تحليلية).

- ليبنيتز أراد ان ينتج الفكر يقينا رياضيا وفق مشروع اللغة الرمزية الشاملة، فشبه الفكر بعملية الحساب، ليبنيتز: « رأى ضرورة الإهتمام بالإستدلال الرياضي الذي يساعد على تحليل وتركيب أفكارنا، فالتحليل في نظره – يجب ان يشمل الحقائق الضرورية والعرضية على السواء، أي يجب أن يعتمد على مبدأي عدم التناقض والسبب الكافي، استخدام علامات الحساب (+، =، ≠) كثوابت».[3]

ليبنيتز أراد من الفكر أن يكون رياضيا، كذلك عولمة اللغة أي إيجاد لغة شاملة مثل الفيزيائيين لهم لغة واحدة لكن هذا المشروع باء بالفشل لأن الناس لا يملكون لغة واحدة ولا منطقا واحدا. لقد كان ليبنيتز يحلم بإخضاع الحدود التي نستخدمها في تركيب القضايا المنطقية، لحساب دقيق كالذي

[1] إبراهيم مصطفى إبراهيم، الفلسفة الحديثة من ديكارت إلى هيوم، ص 196.

[2] برتراند رسل: تاريخ الفلسفة الغربية، الكتاب الثالث، الفلسفة الحديثة، تر: محمد فتحي الشنيطي، المصرية العامة للكتاب، القاهرة، الإسكندرية،[د:ط]، 1977، ص ص، 152، 153.

[3] إبراهيم مصطفى إبراهيم، الفلسفة الحديثة من ديكارت إلى هيوم، ص 238.

نراه قائما بين الرموز الجبرية، في علم الجبر، ولو دققنا النظر في مدى دقة الحساب لاستطعنا أن نعرف إلى أي مدى تحقق لليبنيتز حلمه.

كما اهتم ليبنيتز بالقضية التحليلية التي اهتم بها أرسطو وديكارت وريمون ليل من قبل، وجملة آراء هؤلاء مؤداها أننا إذا استطعنا أن نعبر بوضوح كامل عن أفكارنا بالرموز كتلك التي نستخدمها في الحساب مثلا، فإننا نستطيع السير في كل العلوم تماما كما نسير في الحساب، وهذه الرموز ذات الخصائص المعبرة عن أفكارنا سوف تكون لهجة جديدة، أو لغة جديدة يمكن استخدامها نطقا وكتابة وفهما، ومن الواضح أننا لو توصلنا إلى تلك اللغة العامة أو الهجاء العام في جميع المعارف، والعلوم فإننا سنصل إلى نفس الدقة والوضوح التي تمتاز بهما الرياضيات في جميع معارفنا وعلومنا.[1]

[1] نفسه: ص ص 239-240.

الفصل الثاني: أزمة اليقين في الهندسة الاقليدية

المبحث الأول: ظهور الهندسات اللاإقليدية

المبحث الثاني: ظهور الهندسة التحليلية واكتشاف الدالة المنفصلة

المبحث الثالث: مشكلة اللانهائي في الرياضيات

المبحث الرابع: نظرية المجموعات ونقائضها

الفصل الثاني: أزمة اليقين في الهندسة الاقليدية

تربع إقليدس على عرش الهندسة لمدة تفوق 15 قرنا، وساد الإعتقاد أن الهندسة الإقليدية هندسة مطلقة ولا يشوبها أي شك، وأن الهندسة الإقليدية مثال في الدقة واليقين، وأنها لا تقبل معارضا أو مخالفا، وتأسست هندسة إقليدس على فكرة أن الأرض مسطحة ، لكن بعد اِنهيار هذه الفكرة تصدّعت هندسة إقليدس وظهرت هندسات لا إقليدية.

المبحث الأول: ظهور الهندسات اللاإقليدية.

إن البرهنة على مصادرة إقليدس المتعلقة بالمتوازيان لقيت الحظ الوافر من الدراسة من قبل العلماء، لم يسبق له مثيلا في تاريخ الهندسة خصوصا والرياضيون عامة، وذلك أن طريقة صياغتها في حد ذاتها معقدة مقارنة بغيرها من المسلمات. إنّ المراجعة لهندسة إقليدس تسبب بظهور هندسات لا إقليدية. «إن الكثيرين ممن علقوا على أعمال إقليدس رأوا أن مسلمة التوازي يجب ألا تكون مسلمة بل نظرية أي أنه يجب بطريقة ما أن يكون بالإمكان البرهنة عليها من تعريفات ومسلمات أخرى».[1]

وإن مسلمات إقليدس قد تعرضت لنقد اليونانيين أنفسهم لتضمنها لحشو، أو لانطوائها على غموض ولأن بعضها من الممكن في نظر بعضهم أن تشتق من غيرها فلا تحقق الاستقلال.

«كما انتقد منهج إقليدس لأنه يفترض قضايا هندسية لم تكن موضوعة بين بديهيات أو مسلمات ولم يبرهن على أنها تشتق من غيرها».[2]

وقد استنتج إقليدس من المسلمة الخامسة الخصائص الآتية:

[1] جاكلين ستيدال: تاريخ الرياضيات، مقدمة قصيرة جدا، تر: محمد عبد العظيم سعود، مر: محمد فتحي خضر، مصر، القاهرة، ط1، [د:ت]، ص 107.

[2] كامل محمد عويضة، إقليدس بين الفلسفة والمنهج الرياضي، ص 91، 92.

- من نقطة لا يمكن أن نرسم إلا موازيا واحدا لمستقيم معلوم.
- مجموع زوايا المثلث يساوي قائمتين.
- هناك أشكال مشابهة لشكل معلوم.

واستخدم إقليدس المسلمة الخامسة لأول مرة عند البرهنة على القضية التاسعة والعشرين، ومنطوق هذه القضية: « إذا وقع الخط المستقيم على خطين متوازيين صارت الزاويتان المتبادلتان متساويتين، وصارت الزاوية الخارجية مساوية للزاوية الداخلية المناظرة لها، وصار مجموع الزاويتين الداخليتين مساويا لقائمتين».[1]

1/ نقد لهندسة إقليدس:

إن هندسة إقليدس قائمة على الحدس الحسي أي أنّ الأشياء التي تؤكدها الحواس، فهي غير قائمة حقيقة لأن الحواس غالبا ما تخدع المراقب. ويستخدم إقليدس أيضا في البرهنة على هذه القضية تعريفه للخطين المتوازيين بأنهما الخطان المستقيمان المشتركان في سطح واحد ولا يلتقيان مهما امتدا، في أي من جهتيهما، وقد برهن إقليدس بالاعتماد على القضية التاسعة والعشرين القضايا التي تتألف من مجموعها ما يعرف باسم نظرية التوازي وغيرها من القضايا العامة، ومنها القضية القائلة أن مجموع زوايا المثلث يساوي قائمتين، وإن كان منطوقها لا يوحي بأنها تتعلق بالخطوط المتوازية.[2]

[1] كامل محمد عويضة، إقليدس بين الفلسفة والمنهج الرياضي، ص 93.
[2] نفسه: ص 93.

وقد كانت هندسة إقليدس هي الأنموذج الأعظم لليقين بكل معاني اليقين ودلالاته، الإبستيمولوجية والأنطولوجية، لكن أثار نسق الهندسة الإقليدية مشاكل أدت إلى الخروج منه إلى أنساق هندسية أخرى، وهي المشاكل الخاصة بالمسلمة الخامسة.[1]

2/ اكتشاف الهندسات اللا إقليدية:

لاكتشافها دلالة فلسفية لأنها تفند نظرية كانط عن طبيعة قبلية (أولية) لمفهوم المكان والرأي الميتافيزيقي عن المكان، باعتباره جوهرا غير قابل للتحول وتبرهن الهندسات اللاإقليدية على وجهة النظر الجدلية في المكان باعتباره شكلا لوجود المادة قادرا على التغير معها، يقول كانط: «التفكير الرياضي ليس صوريا بالمعنى الدقيق، لكنه يستخدم دائما الحدوس، أي المعرفة الأولية بالمكان والزمان».[2]

إن هندسة كلا من ريمان ولوباتشفيسكي أدت إلى مراجعة مفهوم المكان الذي كانت قائمة عليه الهندسة الإقليدية، وبالتالي لم تعد هندستهما خاضعة للمكان المطلق أو آخر، حدسية ثابتة تتغير تبعا لتطور الهندسة.

إن « الهندسة الإقليدية والهندسة اللاإقليدية كلاهما صحيح على حد سواء من وجهة نظر الرياضة البحتة، إذ في كل منهما لا تثبت شيئا غير اللزوم وجميع القضايا الخاصة بما هو واقع فعلا، مثل المكان الذي نعيش فيه هي من موضوعات العلوم التجريبية، أو العلوم التي تقوم على التجربة، وليس من موضوعات الرياضة البحتة».[3] لكن ما دامت ثبتت صحة قضية رياضية في إطار نسقها، أي ما دام ثبت الارتباط بين المقدم والتالي فيها فسوف تظل صحيحة إلى أبد الآبدين،

[1] يمنى طريف الخولي: فلسفة العلم في القرن العشرين، الأصول- الحصاد- الآفاق المستقبلية، عالم المعرفة، الكويت، ط1، 2000، ص 205.
[2] برتراند رسل: أصول الرياضيات، ج1، ص 33.
[3] نفسه: ص 32.

وتتمتع القضية الرياضية داخل نسقها بثبات صدق وضرورة منطقية تميزها عن قضايا العلوم التجريبية.[1]

«والنتيجة الهامة التي نخلص إليها مما تقدم، فيما يختص بأسس الهندسة هي إذن أن المسلمة الخامسة مستقلة منطقيا عن بقية مسلمات إقليدس، وفكرة الاستقلال هذه هامة جدا، لأنها تسمح لنا بأن نستبدل المسلمة الخامسة بغيرها ويكون البديل عنها إما نقيضا أو نفيا لها (ريمان) وأما مختلفا فقط (لوباتشفيسكي)».[2]

وهكذا انحصرت أو تقلصت فكرة الحقيقة في الهندسة عن ميدان المطابقة بين قضايا الهندسة والعالم الواقعي، وانحصرت في فكرة ((عدم التناقض)) بين قضايا هندسة واحدة بعينها، أعني انحصرت في الإنسجام المنطقي لقضايا نسق الهندسي ما فيما بينها. و « لم تعد تقاس الحقيقة فيها بمدى صلتها بالمكان أو مطابقتها له وإنما تقاس فقط بميزان منطقي صرف هو عدم تناقضها فيما بينها في داخل كل هندسة على حدة، هذا هو معنى الحقيقية الذي أدت إليه نشأة الهندسات وتطورها، نتيجة لحركة النقد الباطني التي كانت المسلمة الإقليدية الخامسة نقطة الانطلاق فيها».[3]

من بين الذين انتقدوا المسلمة الخامسة لإقليدس:

- **جبرولا موسا ساتشيري: ((ساكيري)) 1667-1733**

هو أستاذ رياضيات، بحث في قضية: ماذا يحدث لو تصورنا أن مجموع زاويا المثلث إما أقل من 180° درجة وإما أكبر، آملا بالطبع أن تكون النتائج منافية للعقل بحيث يسهل رفضها، بَيْدَ أنه

[1] يمنى طريف الخولي: فلسفة العلم في القرن العشرين، الأصول- الحصاد- الآفاق المستقبلية، ص 205.
[2] ثابت الفندي: فلسفة الرياضة، ص ص 58، 59.
[3] نفسه: ص ص63، 64.

كان مخطئا فقد قاده افتراض أن مجموع زوايا المثلث أقل من 180 درجة إلى بعض النتائج الغريبة لكنها متسقة[1].

- **نصير الدين الطوسي** (**1201-1274م**) يعتبر أحد علماء الرياضيات العرب، الذي أوحى بإكمال نظام المقدمات الأولية للإقليدس بموضوعات جديدة تتعلق بوجود النقاط والخطوط المستقيمة وغيرها من الأشكال الهندسية التي حددها إقليدس في السطور الأولى من الكتاب الأول من الأصول.[2]
- **عباس الجوهري:**

المعاصر للخوارزمي افترض أنه بالإمكان وعبر نقطة من داخل الزاوية رسم خط يتقاطع مع ضلعيها، وفيما بعد استعان عدة هندسيين بهذا الإعلان لبرهنة المصادرة الخامسة.[3]

- **عمر الخيام:**

ليس مستحيلا أن يكون ذكر عمر الخيام في كتابه، شرح ما أشكل من مصادرات كتاب إقليدس أن سبب الخطأ الذي ارتكبه علماء لاحقون في برهان هذه المقدمة (مصادرة إقليدس الخامسة) ،يعود إلى أنهم لم يعيروا الإنتباه للمبادئ المقتبسة عن الفيلسوف (أي أرسطو)، وقد قدم عمر الخيام خمسة من هذه المبادئ:

1-يمكن تقسيم الكميات إلى ما لا نهاية أي أنها لا تقسم إلى أجزاء لا انقسامية.

2-يمكن رسم خط مستقيم إلى ما لا نهاية.

3-الخطان المستقيمان المتقاطعان ينفرجان ويتباعدان بابتعادهما عن رأس زاوية تقاطعهما.

[1] جاكلين ستيدال: تاريخ الرياضيات، مقدمة قصيرة جدا، ص 107.

[2] رشدي راشد: موسوعة تاريخ العلوم العربية الجزء الثاني، الرياضيات والعلوم الفيزيائية، ص 162.

[3] نفسه: ص164.

4-الخطان المستقيمان المتقاربان يتقاطعان، ومن المستحيل عن خطين مستقيمين متقاربين أن يتباعدا في نفس اتجاه تقاربهما.

5-يمكن مضاعفة الكمية الصغرى من بين كميتين غير متساويتين ومحدودتين، بحيث تتجاوز الكمية الكبرى.[1]

وقد انتقد عمر الخيام برهان ابن الهيثم واستبدله بآخر، رفض الخيام استعمال الحركات في الهندسة وبرهن المصادرة الخامسة بالاستناد إلى مصادرة أخرى واضحة اعتبرها أكثر بساطة، وهي المبدأ الرابع من الخمسة (المبادئ العائدة للفيلسوف أرسطو) وهكذا تجنب الخيام الخطأ المنطقي الذي ارتكبه أسلافه، وفيما بعد إستخدم رباعي أضلاع له زاويتان قائمتان للزاويتين المتساويتين الباقيتين.[2]

2- ثابت بن قرة:

اقترح برهانا يرتكز على الافتراض الذي يقول: « إذا برسمهما باتجاه معين تقارب خطان مقطوعان بخط ثالث (أو تباعدا) فإنهما يتباعدان (أو يتقاربان) تواليا، في الاتجاه الآخر.[3]

وبواسطة هذه المقولة برهن ثابت بن قرة وجود متوازي الأضلاع، ومن هنا استنتج المصادرة الخامسة.

3- ابن الهيثم:

يعطي ابن الهيثم فيما بعد استنتاجا مبتكرا للمسلمة الخامسة، ويبدأ بدراسة حركة خط عمودي، على امتداد خط مستقيم، وانطلاقا من تبنيه مفهوم " الحركة البسيطة" التي ارتكز عليها

[1] نفسه: ص 163.

[2] رشدي راشد: موسوعة تاريخ العلوم العربية الجزء الثاني، الرياضيات والعلوم الفيزيائية، ص 166.

[3] نفسه: ص 164

ثابت بن قرة برهن ابن الهيثم، أن طرف الخط العمودي الذي يبقى طرفه الآخر على نفس الخط يرسم خطا مستقيما، ويعلن أن كل نقاط الخط العمودي ترسم خطوطا متساوية ومتشابهة، وبما ان طرف هذا الخط يتحرك على امتداد خط مستقيم، فإن الطرف الآخر يتحرك بالمثل، يكمن تحديد ابن الهيثم في إدخاله مضلعا رباعيا فيه ثلاث زوايا قائمة.[1]

4- أزمة الهندسة الإقليدية:

أتت المشاكل من المسلمة الخامسة، وهي مسلمة الخطين المتوازيين وأبسط صورها ،الخطان المتوازيان لا يلتقيان مهما امتدا، أي من نقطة خارج مستقيم معلوم لا يمكن رسم إلا مستقيم واحد يوازيه، فقد شك الرياضيون في كونها مسلمة، وراودهم الاعتقاد بأنها يمكن أن تكون نظرية مبرهنة نثبتها، فحاولوا إثباتها باستخدام المسلمات الأخرى، ولم ينجحوا في إثباتها.[2]

وبصفة عامة يمكن القول ان البراهين المباشرة تعرب عن فشلها للوهلة الأولى، فلم يكن أمام الرياضيين إلا برهان الخلف، وهو منهج أثير لديهم، يعني إثبات صدق القضية عن طريق إثبات كذب نقيضها، أو عكسها، فإذا أُثبتَ كذب (لا "أ") معنى هذا أننا أثبتنا أن "أ" (صادقة)، وبالتالي إذا أثبت الرياضيون خطأ أو كذب القضية: الخطان المتوازيان يلتقيان ،كان هذا إثباتا لصدق القضية القائلة إنهما لا يلتقيان مهما امتدا أي تلك المسلمة المذكورة.[3]

إن علم الرياضيات قد انتهى إلى أزمة في نهاية القرن التاسع عشر، وهي أزمة لن تكون أقل عمقا ولا أقل أهمية في نتائجها من أزمة علم الفيزياء.[4]

---

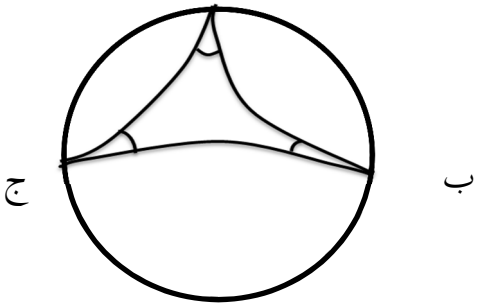
[1] نفسه: ص 165.

[2] يمنى طريف الخولي: فلسفة العلم في القرن العشرين، الأصول- الحصاد- الآفاق المستقبلية، ص 207.

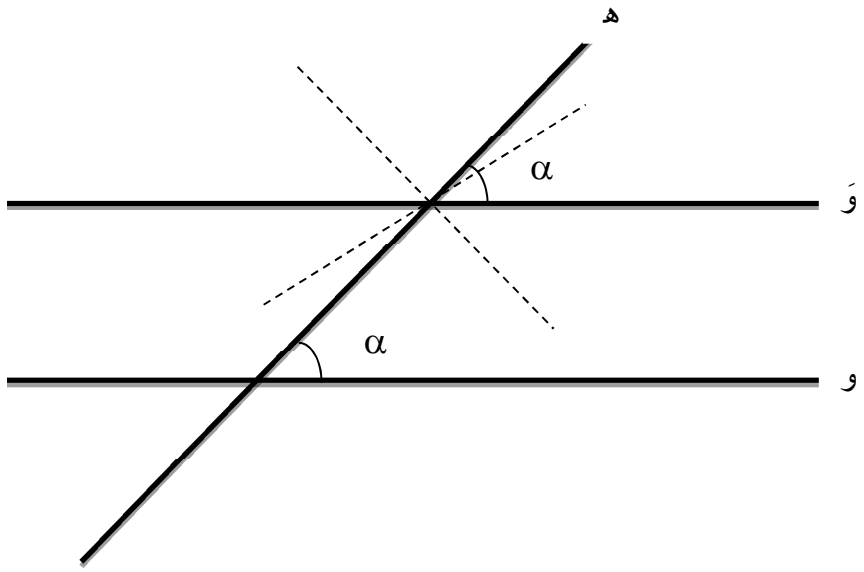
[3] نفسه، ص 208.

[4] بوشنسكي: الفلسفة المعاصرة في أوروبا، تر: عزت قرني، عالم المعرفة، الكويت، ط1، 1992، ص 38.

***– هندسة لوباتشفسكي:** وفي « هندسة لوباتشفيسكي: lobatchevsky يقل مجموع زوايا المثلث عن قائمتين في هندسة العالم الرياضي الروسي لوباتشفيسكي الذي يبني هندسته على السطح المنحني السالب (المقعر) ».[1]



هذا النوع من الهندسة يدعي أن هناك عددا لا حصر له من الخطوط المستقيمة التي لا تتقاطع مع و، والتي تنحصر داخل زاوية معينة حول وَ.[2]



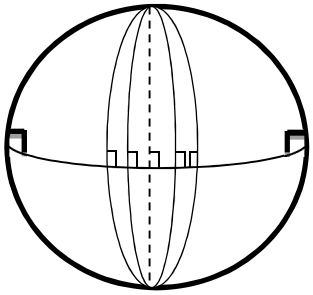
لوباتشوفيسكي يقول: «إنه من نقطة ما خارج مستقيم، يمكن إقامة عدد لا ينتهي من المتوازيات».[3]

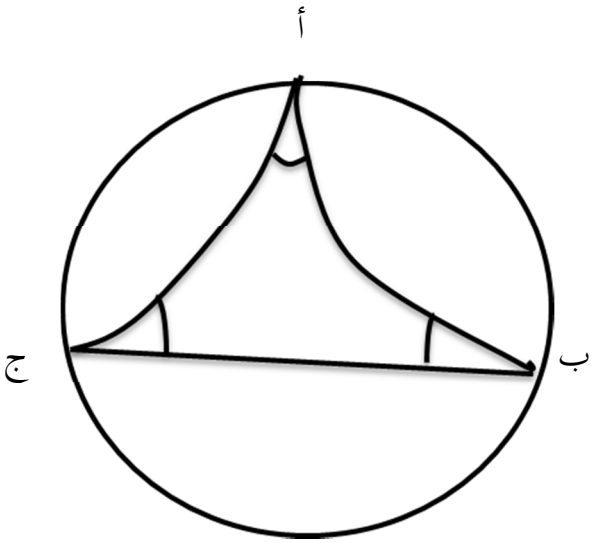
[1] رضا سعادة: الفلسفة ومشكلات الإنسان، ص 49.

[2] فيليب فرانك: فلسفة العلم، الصلة بين العلم والفلسفة، تر: علي ناصف، المؤسسة العربية للدراسات والنشر، بيروت، ط1، 1983، ص 97.

[3] محمد ثابت الفندي: فلسفة الرياضة، ص 59.

- «هندسة ريمان:Reman**: أما هندسة العالم الرياضي الألماني المبنية على السطح المنحني الموجب (المنفتح) ،السطح الخارجي للكرة الأرضية، فإن أقصر مسافة بين نقطتين هو خط منحن، وأن مجموع زوايا المثلث يزيد عن قائمتين، فكل خطوط الطول التي تلتقي في نقطتي القطبين تؤلف زوايا قائمة مع خط الاستواء».[1]





فهندسة ريمان هندسة غير إقليدية تنفي إمكانية وجود خطوط متوازية بل كل الخطوط حسب هذه الهندسة الريمانية تتقاطع، فحسبه كل متوازيين لابد أن يلتقيا عند امتدادهما، إذًا: هما مجرد مستقيمين على سطح كروي واحد.[2]

المبحث الثاني/ ظهور الهندسة التحليلية واكتشاف الدالة المنفصلة.

[1] رضا سعادة: الفلسفة ومشكلات الإنسان، ص 49.

[2] محمد ثابت الفندي: فلسفة الرياضة، ص 59.

أولا/ ظهور الهندسة التحليلية.

إن علم الأشكال أو الهندسة كان العلم الرياضي الذي نضج منذ البداية، والذي كانت تحل بواسطته مشكلات الرياضة اليونانية وإليه أُخضع الحساب.[1]

و« الهندسة التحليلية، يطلق هذا الاسم على نوع جديد من الهندسة اهتدى إليه رنيه ديكارت، كما يطلق عليه اسم التحليل الرياضي أو الهندسة " الكارتيزية" نسبة إلى مخترعها " ديكارت" ويختلف هذا النوع الجديد عن هندسة إقليدس، لأن هذه الأخيرة تهدف إلى بيان الخواص الداخلية لأحد الأشكال، كالمثلث أو الدائرة أو المخروط أو خواص أي شكل هندسي آخر يمكن تخيله».[2]

وظهرت الهندسة التحليلية التي هي معالجة للمشاكل الهندسية بالطرق الجبرية، فأصبح علم التحليل الجبري بنظرياته في الدوال الرياضية المختلفة، العلم الذي له الغلبة على علم الأشكال الهندسية، بل تراجعت هذه شيئا فشيئا حتى لم تعد هناك أشكال في الهندسات المعاصرة وإنما النظر كله فيها منصب على أعداد فحسب بل وعلى تصورات منطقية خالصة.[3]

ويعتقد ديكارت أنه استطاع الجمع بين هذين العلمين اللذين كانا منفصلين أحدهما عن الآخر فكان الجبر على حد تعبيره "لا يستطيع تدريب العقل دون أن يجهد الخيال، وذلك لشدة تجريده وبعده عن الأمور الحسية أما الهندسة فقد استخدمت أنواعا خاصة من المصطلحات

والأشكال التي تهبط العقل دون أن تثقفه" لكن من الممكن أن يتجنب الرياضي هذين العيبين وأن يؤلف بين الهندسة والجبر.[4]

---

[1] نفسه: فلسفة الرياضة، ص 36

[2] محمود قاسم: المنطق الحديث ومناهج البحث، ص 247.

[3] محمد ثابت الفندي: فلسفة الرياضة، ص 37.

[4] محمود قاسم: المنطق الحديث ومناهج البحث، ص 247.

«كل شكل هندسي يمكن التعبير عنه بمعادلة جبرية أو بمجموعة من المعادلات التي تقرر علاقة بين إحداثياته، وأن كل معادلة وظيفية يمكن التعبير عنها بشكل هندسي، وهذا هو موضوع الهندسة التحليلية التي تؤلف بين الهندسة والجبر وتعبر عن الكم المتصل بالكم المنفصل».[1]

ثانيا/ اكتشاف الدالة المنفصلة:

اكتشاف دوال رياضية منفصلة، أي لا تشهد "بالاتصال" أو الاستمرار، وكان يظن أن الدوال كلها متصلة، أي تجتاز قيما عددية متتابعة لا فجوات فيها، وبذلك تعبر خطا هندسيا متصلا".[2] ففكرة الدالة بالغة الأهمية، والغالب أن بحثها كان مقتصرا على علاقتها بالأعداد.

وكانت الدالة أساسا وبعد أن بطلت أن تكون مجرد قوة، شيئا يمكن التعبير عنه في صيغة، وكان من المعتاد البدء بعبارة تشتمل على متغير س، دون ذكر شيء عن ماهية س، خلاف هذا الفرض المفهوم ضمنا من أن س نوع ما من العدد، وأي تحديدات بعد ذلك لـ س فهي مشتقة إن وجدت من الصيغة نفسها، ولذلك اتجهت الرغبة إلى استبعاد مثل تلك التحديدات التي أفضت إلى تعميمات شتى عن العدد.[3]

إن التعميم الجبري حل الآن محله بحث أكثر ترتيبا، تعرّف فيه جميع الفصول بواسطة الأعداد الصحيحة، دون أن تدخل الصيغ في العملية، ومع ذلك فللصيغة أهمية خاصة عند استخدام الدوال حيث تكون المتغيرات المستقلة والتابعة فصولا لا متناهية.

---

[1] نفسه: ص 249.

[2] ثابت الفندي: فلسفة الرياضة، ص 19.

[3] برتراند رسل: أصول الرياضيات، ج2، تر: محمد مرسي أحمد وأحمد فؤاد الأهواني، دار المعارف، مصر،[د:ط]، 1958، ص 89.

والصيغة بمعناها العام جدا أو بالأحرى دالة قضية تشتمل على متغير أو أكثر من متغير".[1]

إن مشكلة الإتصال قد فصلت إلى حد كبير عن مشكلة اللانهاية، وكان المعتقد فيما سبق – وهنا تقوم القوة الحقيقية في فلسفة كانط الرياضية، أن للاتصال تعلقا جوهريا بالمكان والزمان، وأن الحساب التحليلي يفترض من بعض الوجوه الحركة، أو على الأقل التغير، وطبقا لهذه الوجهة في النظر فلسفة المكان والزمان أسبق من الإتصال.[2]

فظهرت منذ ذلك الوقت في منتصف القرن الماضي حاجة ملحة عند الرياضيين إلى التخلي عن الحدس الهندسي برمته الذي يمثله في التحليل ذلك الاتصال، فنبذ الرياضيون فكرة الاتصال كأساس للتحليل. واتجهوا إلى الأعداد الحسابية المعروفة، يلتمسون فيها أساسا وثيقا لعلم التحليل فأصبح هذا الاتجاه محتوما منذ اكتشاف الأعداد التخيلية.[3]

"يقال لدالة د (س) أنها مطلقة الاتصال على فترة مطلقة [أ، ب] إذا كان لكل عدد موجب E يوجد عدد موجب آخر c_0 بحيث أنه إذا كانت (أ1 ، ب1) ، (أ2، ب2) ..... (أ ن، ب ن) فئة نهائية من الفترات غير المتقاطعة التي مجموع أطوالها أقل من c_0، فإن مجـ ~=1/ د(أ ر) – د (ب ر)/ رE_c". [4]

ثالثا/ ظهور المنهاج الأكسيوماتيكي.

أسرع بحركة النقد الذاتي في الوقت عينه وعند الرياضيين أنفسهم لعلمهم إلى تصور جديد "للحقيقة الرياضية"، التي لم تعد عندهم مطابقة المسلمات للواقع وإنما فقط عدم تناقض مسلمات كل هندسة على حدة فيما بينها، بغض النظر عن الواقع أو المكان لأنه لا واحدة من الهندسات أولى من غيرها بادعاء المطابقة، كما أدى بهم أيضا إلى تقصي مسلمات كل هندسة على حدة.

[1] نفسه: ص ص 89، 90.
[2] نفسه: ص 79.
[3] محمد ثابت الفندي: فلسفة الرياضة، ص 19.
[4] عطية عبد السلام عاشور: معجم الرياضيات، Mathematis Dictonary، ص 8.

وحصر النظريات المترتبة عليها، وإلى الاقتصاد في عدد المسلمات وتخفيضها إلى أدنى حد ممكن، وهذا ما عرف آنذاك بمباحث تأسيس الهندسة أو "الأكسيوماتيك".

"الأكسيوماتيك، هي الحركة التي أسفرت آخر الأمر عن تجريد المسلمات عن كل المعاني الهندسية الدالة على أشكال، وإحالتها تماما إلى تصورات من المنطق الصوري وحده، وعند هذا الحد أصبح لزاما على المنطق الصوري أن يتطور أيضا إلى علم رياضي، كما أن اختيار طائفة من المسلمات لإقامة هندسة ما اتضح بأنه يجب أن يخضع إلى شروط منطقية معينة.[1]

الأكسوماتيك إذن: هو منظومة من الأوليات، يقوم عليها بناء رياضي معين، بناء يختلف عن بناء رياضي مماثل باختلاف الأوليات التي يقوم عليها كل منهما، فالهندسة الاقليدية، وهندسة لوباتشفسكي وهندسة ريمان وغيرها من الهندسات اللاإقليدية الأخرى تشكل كلا منها أكسيوماتيكا خاصا يختلف عن غيره باختلاف أولياته أو بعض منها أو إحداها.[2]

إن الباحث الرياضي الذي يطبق المنهاج الأكسيومي ينصرف بكامل اهتمامه إلى "البنيات" التي هي أدواته في العمل والبحث.[3]

- **إرجاع الرياضيات إلى أوليات:**

إن الأوليات الهندسية ليست بالأحكام التركيبية القبلية ولا بالواقع التجريبية، إنها مجرد اتفاقات، وإن اختيارنا لاتفاق معين من بين المواضعات الممكنة يخضع لمقتضيات الوقائع التجريبية ولكنه يظل اختيارا حرا لا تحده إلا ضرورة تجنب الوقوع في التناقض.[4]

[1] محمد ثابت الفندي: فلسفة الرياضة، ص ص 18، 19.

[2] محمد عابد الجابري: مدخل إلى فلسفة العلوم العقلانية المعاصرة وتطور الفكر العلمي، ص ص 80، 81.

[3] عبد السلام بن عبد العالي، محمد سبيلا: المعرفة العلمية، دفاتر فلسفية، نصوص مختارة، ص 58.

[4] نفسه: ص 48.

"إن الأوليات في نظر بوانكاريه ليست سوى تعاريف مقنعة، ولذلك يكون التساؤل عما إذا كانت هندسة إقليدس أو هندسة ريمان صحيحة أو غير صحيحة تساؤلا لا معنى له، إن من يطرح هذا السؤال هو كمن يسأل أيهما صحيح؟.

القياس بالمتر أو القياس باليادرة، أو الذراع؟ ومن هنا يستخلص بوانكاريه النتيجة التالية وهي:" إن هندسة ما لا يمكن أن تكون صحيحة أكثر من الأخرى بل يمكن فقط أن تكون أكثر ملاءمة، إن الهندسة الإقليدية في نظره أكثر ملاءمة لنا لأنها أكثر بساطة من جهة، ولأنها من جهة ثانية تنطبق على خصائص الأجسام الصلبة الطبيعية".[1]

رابعا / تحسيب الرياضة:

بدأ الرياضيون يردون الرياضة كلها إلى الحساب، وأصبح العدد الصحيح المقياس الوحيد لليقين الرياضي، وهذا ما عرف في تاريخ الرياضة، في القرن الماضي بحركة تحسيب الرياضيات، أو المذهب الحسابي فردوا الأعداد التخيلية للعدد الصحيح، كما ردوا إليه أنواع الأعداد جميعا ومن أهمها الأعداد الصماء. و"ربطوا الهندسة بواسطة الأعداد الصماء التي تشهد بالاتصال إلى الأعداد الصحيحة، فأصبحت الرياضة كلها قائمة على الأعداد الصحيحة وعملياتها، واكتسبت الرياضة منها يقينها كذلك، وهكذا أضفى المذهب الحسابي على الرياضيات وحدة وتماسكا ويقينا مستمدا من يقين الأعداد".[2]

وقد أثبت كل من ديدكند وكانتور وبيانو كيف يؤسس الحساب والتحليل على متسلسلة من نوع خاص، أي على خواص الأعداد المتناهية.

[1] محمد عابد الجابري: مدخل إلى فلسفة العلوم العقلانية المعاصرة وتطور الفكر العلمي، ص 77.

[2] ثابت الفندي: فلسفة الرياضة، ص 19.

وتم رد التحليل إلى الأعداد، وتأسيسه على علم الحساب المعروف، ليكتسب التحليل يقينا مستمدا من يقين الأعداد، ومبتعدا بذلك كله عن حدس الاتصال الهندسي الذي استبقاه ديكارت، ثم تحطم شيئا فشيئا كأساس سليم وثيق للتحليل.

"إن تعميم فكرة العدد الحقيقي وامتدادها إلى جميع الأعداد كالتخيلية والصماء أصبح أمرا واقعيا على أيدي رياضي الربع الثالث من القرن الماضي، فهؤلاء الرياضيون الذين تعرضوا لتحسيب التحليل، بينوا إمكان تركيب أو تأليف الأعداد كلها ابتداءً من العدد الصحيح وحده والامتداد به، إلى كافة العداد، وبما أن احداثيات الدوال تتضمن دوما خليطا من تلك الأعداد، فيمكن القول بأن التحليل أصبح منذ ذلك الوقت متحسبا ولا يحتاج إلى حدس الاتصال".[1]

- **الحساب:**

اقترن علم الحساب بالهندسة وألحق بها، حتى أن الحساب كان خاضعا للهندسة و "علم الأشكال أو الهندسة كان العلم الرياضي الذي نضج منذ البداية، والذي كانت تحل بواسطته مشكلات الرياضة اليونانية وإليه أخضع الحساب، وحتى في حضارة العصر الاسكندري الذي ورث اليونان والشعوب القديمة الأخرى والذي ابتدأت الرياضيات فيه بأخطر كتاب في الرياضة القديمة وهو "الأصول" لإقليدس، نجد أن الهندسة هو موضوع الكتاب الأساسي وأن علم الحساب ألحق بها كآخر فصل من فصولها ومشتق منها".[2] يلعب الحساب دورا صغيرا جدا في الرياضة،

وعلى الخصوص في الرياضة العالية الهندسة، يمكن دراستها مباشرة من الرسوم التي غالبا ما ترتبط بالأعداد البسيطة 3، 4، 5، وكلما تقدم الانسان أصبح احتمال استخدام الحساب يقل.[3]

[1] نفسه: ص ص 109، 110.

[2] ثابت الفندي: فلسفة الرياضة، ص 36.

[3] و.و سوير: متعة الرياضي، ص 94.

"تحسيب الرياضيات والمقصود هنا، هو رد الرياضيات إلى الحساب، أي اشتقاق الرياضيات بكاملها من الأعداد، وهو اكتشاف حديث ولو أن الرأي كما يقول رسل قد اتجه إليه منذ أمد بعيد، وذلك أن فيثاغورس كان يعتقد أن الرياضيات وكل شيء يمكن أن يستنبط من الأعداد، وبذلك كشف عن أعظم عقبة في سبيل تحسيب الرياضيات".[1]

إذن; الحساب مصطلح يطلق على العلم النظري الذي يدرس الأعداد وخواصها والعلاقات التي تربط بينها، ويصدق معنى العدد على كل من الأعداد الصحيحة والكسور والأعداد الدائرة والأعداد الخيالية.

- **الجبر**: يلعب الجبر دورا في الرياضيات يمكن مقارنته بالكتابة أو بالاختزال في الحياة العادية، يمكن استخدام الجبر، إما لذكر عبارة، وإما لإعطاء تعليمات وذلك في صيغة مختصرة.[2]

وقد اهتدى فرانسوا فييت (1540-1603) إلى استعمال الحروف الهجائية كرموز للكميات الحسابية، فاستغنى بذلك ليس فقط عن الكلام العادي بل أيضا عن الأعداد الحسابية، وأدخل بعض العلامات كرموز للعمليات التي تجري على تلك الحروف، وبذلك ارتفع بالرياضيات درجة أخرى من التجربة ففتح آفاق التطور والنمو واسعة رحبة.[3]

و"ذكرت مسائل الجبر في قالب هندسي، وحلت بالطرق الهندسية ونضرب مثلا لذلك بأن حاصل ضرب أ . ب قد مثلت بمستطيل طول ضلعيه أ. ب، كما أن استخراج المربع قد اختزل إلى إيجاد مربع يساوي مستطيلا معينا، وهكذا وقد برهن قانونا التوزيع والتبادل في الجبر هندسيا،

[1] محمد مهران: فلسفة برتراند رسل، دار المعارف، مصر، القاهرة، [د:ط]، 1119، ص 208.
[2] و.و سوير: متعة الرياضي، ص 137.
[3] محمد عابد الجابري: مدخل إلى فلسفة العلوم العقلانية المعاصرة وتطور الفكر العلمي، ص 66.

كما أنه استطاع أن يقدم لنا كثيرا من المتطابقات، حتى ما كان منها كثير التعقيد، في صورة هندسية بحتة ونضرب مثلا لذلك $2(أ^2 + ب^2) = (أ + ب)^2 + (أ - ب)^2$ ".[1]

إن العقبة التي كانت تعترض الجبر كعلم تجريدي محض هو ارتباطه بالأشكال الهندسية وحدسها، فكان لا بد من تخليصه منها بعد أن خلصه "فييت" من الكلام العادي، وما يقوم مقامه من أعداد حسابية، ذلك ما قام به ديكارت بعد حوالي نصف قرن وكانت خطوته الأولى والمهمة هي اكتشافه لطريقة تمكن من التعبير عن الأشكال الهندسية بحروف جبرية، أي دمج الهندسة في الجبر.[2]

وحول ديكارت الهندسة إلى جبر، فصار بالإمكان دراسة الأشكال الهندسية بواسطة الدوال وحدها. غير أن الدوال لا بد فيها من ذلك المستقيم الذي استبقاه ديكارت إلى جميع الأشكال الهندسية.

المبحث الثالث: مشكلة اللانهائي في الرياضيات.

لم يهتم الفيثاغوريون بالعمليات الحسابية العادية، في حين كانت آرائهم الهندسية تعتمد إلى حد كبير على خصائص الأعداد، فالنقطة عندهم مجرد وحدة ذات وضع وأي شكل هندسي ابتداءً من الخط المستقيم يمكن تصوره وتمثيله مؤلفا من نقط عديدة، فيثير هذا التصور الذهني مشكلة الاتصال ومشكلة قابلية التقسيم إلى مالا نهاية.[3] وهذا ما يظهر في حجج زينون ضد الحركة.

1- حجج زينون ضد الحركة:

[1] جورج سارتون: تاريخ العلم، العلم والحضارة الهلنستية في القرون الثلاثة الأخيرة قبل الميلاد، ج4، تر: محمد خلف الله أحمد وآخرون، إشراف: جابر عصفور، المركز القومي للترجمة، القاهرة، [د:ط]، 2010، ص 91.

[2] محمد عابد الجابري: مدخل إلى فلسفة العلوم العقلانية المعاصرة وتطور الفكر العلمي، ص 66.

[3] جورج سارتون: تاريخ العلم، العلم القديم في العصر الذهبي لليونان، ج2، القرن الخامس، تر: جورج حداد وآخرون، إشراف: جابر عصفور، المركز القومي للترجمة، [د.ط]، 2010، ص 104.

"القسمة الثنائية" إنك لا تستطيع أن تمر بعدد لا متناهٍ من النقط في زمن محدود، فعليك أن تقطع نصف أية مسافة معينة قبل أن تقطع المسافة كلها، وعليك أيضا أن تقطع نصف هذا النصف قبل أن تقطعها ويستمر هذا التقسيم إلى ما لا نهاية.[1] "أخيل" وهي الحجة الثانية والمشهورة بأحجية أخيل والسلحفاة وفيها ينبغي أن يصل أخيل أولا إلى الموضوع الذي انطلقت منه السلحفاة، وفي أثناء ذلك تكون السلحفاة قد تقدمت قليلا من موضوعها الأول.

فعلى أخيل إذن أن يقطع المسافة الأولى، التي قطعتها السلحفاة ولكن في خلال ذلك تكون السلحفاة قد قطعت مسافة قليلة ولا تزال متقدمة عليه إن أخيل يقترب دائما من السلحفاة أكثر فأكثر ولكنه لن يلحق بها".[2]

2- اللانهائية في الرياضيات:

لقد كانت فكرة اللانهائية مصدر قلق وإرباك أكثر من الفي عام، فاليونانيون القدماء مثلا أبدوا محاولاتهم للتعرف عليها والوصول إلى ماهيتها، ولكنهم لم يتوصلوا إلى نتائج مرضية بسبب التناقضات التي تفرزها تلك الفكرة وتداخلها في المجالات الدينية والفلسفية، ورغم ما أحرزه الاغريق من تقدم يثنى عليه فإن الفكرة لم تتبلور تماما إلا في القرن التاسع عشر، وبالذات في أعمال بلزانو وفيرشتراس وكانتور.[3]

3- التعريف التقليدي للانهائية:

[1] نفسه: ص 107.

[2] جورج سارتون: تاريخ العلم، العلم القديم في العصر الذهبي لليونان، ج2، القرن الخامس، ص 107.

[3] عبد اللطيف يوسف الصديقي: مسألة اللانهائية في الرياضيات، نظرية جورج كانتور، دار الشروق للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، ط1، 1999، ص 8.

اللانهائية كلمة تعبر عن معناها تعبيرا حرفيا، ف "لا" النافية ونهاية حد أو آخر أو طرف، وإذن ما لا حد له أو ما لا آخر أو طرف له. فيقال لشيء أنه لا نهائي إذا لم يوجد له حد أو نهاية، وعكسه الشيء المنتهي أو المحدد. فاللانهائية تعني الشيء الذي لا يحده شيء أي بلا حدود، وهي ليست بعدد صحيح وإنما هي كمية أو مقدار عن حالة غير منتهية".[1]

تعريف الرياضي السويسري سيمون لوهلير: "اللانهائية هي الهاوية التي تتداخل فيها أفكارنا".[2] يظهر من مباحث كانتور أن هناك اعتبارين بهما تختلف الأعداد اللامتناهية عن المتناهية، وأول الإعتبارين ينطبق على الأصليات والترتيبات على حد سواء، وهو أنهما لا يخضعان للإستنباط الرياضي، والإعتبار الثاني الذي إنما ينطبق على الأصليات فقط، فهو أن المجموع المكون من عدد لا نهائي من الحدود يشتمل دائما على جزء يتكون من نفس عدد الحدود، والإعتبار الأول يكون التعريف الصحيح للمتسلسلة اللانهائية أو ما يمكن أن نسميه الحدود اللانهائية في متسلسلة.[3]

4- تطوير كانتور لنظرية المجموعة:

طور كانتور هذه النظرية على أساس عملية أساسية جدا، ألا وهي عملية تناظر واحد لواحد correspondence one to –one، وبتحديد أكثر إذا قمنا بتأسيس عملية تناظر واحد لواحد بين سلسلة الأعداد الصحيحة وسلسلة العداد الزوجية، فإننا نحصل على عدد لا هو صحيح ولا هو زوجي، وإنما نحصل على عدد أو متناه يسمى ألف صفر Aleph zero[4].

ومكنت هذه العملية الأولية جدا (التناظر واحد لواحد) كانتور من أن يمضي خلف سلسلة العدد المتناهي والذي كان يعتبر حتى عصره عددا واحدا فقط.

---

[1] نفسه: ص 8.

[2] نفسه: ص 8.

[3] برتراند رسل: أصول الرياضيات، ج2، ص 80.

[4] جان بياجي: الإبستمولوجيا التكوينية، تر وتق وتع: السيد نفادى، مر: محمد علي أبو ريان، دار التكوين، بيروت، [د:ط]، 2004، ص 37.

- **اللانهائية عند كانتور:**

اللانهائية تبرز عنده في شكلين مختلفين، لا نهائية غير تامة تتجاوز حدود الكميات في الكبر والصغر ولكن تبقى نهائية، ويمكن أن يقال عنها "متغير نهائي"، وهذا ما يطلق عليه "اللانهائية الممكنة"Polential Infinite والأخرى كمية محددة ثابتة، يمكن تصورها بمفاهيم مختلفة في الهندسة وفي نظرية الدوال بنقطة لانهائية في المستوى المركب، هذه هي اللانهائية الحقيقية Actual Infinité".[1] "إنني أراها ولكنني لا أصدقها"، كتب كانتور إلى ديدكند.

المبحث الرابع: نظرية المجموعات ونقائضها.

أولا/ تعريف نظرية المجموعات:

هي فرع من فروع الرياضيات، يتناول المقولات الرئيسية للفلسفة والمنطق والرياضيات بالمناهج الدقيقة. وقد تأسست النظرية على يد جورج كانتور، وموضوعات نظرية المجموعات هي خواص المجموعات التي تكون في معظمها لامتناهية، والمبدأ الرئيسي في نظرية اللامتناهيات هو إنشاء "نظم" مختلفة للاتناهي وتنطلق نظرية المجموعات التقليدية من إدراك إنطباق مبادئ المنطق التي لا جدال فيها في مجال المتناهي على المجموعات اللامتناهية.[2]

ثانيا/ المفارقات التي حدثت في بعض فروع نظرية المجموعات:

[1] عبد اللطيف يوسف الصديقي: مسألة اللانهائية في الرياضيات، نظرية جورج كانتور، ص 41.

[2] روزنتال، يودين: الموسوعة الفلسفية، وضع مجموعة من العلماء والأكاديميين السوفياتيين، تر: سمير كرم، مراجعة صادق جلال العظم، جورج طرابيشي، مادة: المفارقات، دار الطليعة للطباعة والنشر، بيروت، [د:ط]، [د:ت]، ص 541.

عندما ظهرت نظرية المجموعات بدا أنه من الممكن تأسيس الرياضيات عليها ونجحت النظرية في استيعاب مختلف فروع العلم الرياضي وجمع شتاته وتحقيق الوحدة والانسجام بين كافة أجزائه ولكن ها هي نظرية المجموعات نفسها تعاني نقائض خطيرة ."وفيما يخص نظرية المجموعات فقد اكتشف الرياضيون عند انتهاء القرن التاسع عشر ميلادي ما يسمى "بالمفارقات" Paradoxes، أي استنتاجات متناقضة، ابتداءً من مسلمات بسيطة وواضحة في الظاهر رغم كون البراهين المستخدمة صحيحة، وهكذا انتهى الحال إلى تهافت أسس علم الرياضيات ذاته".[1]

المفارقات التي اكتشفت على يد جورج كانتور في عام 1895، وسيزار بورالي فوتي في عام 1897، لكن المفارقة الأكثر شهرة كانت على يد برتراند رسل عام 1902".

- **مفارقة ملاعق الشاي:**

فئة ملاعق الشاي ليست في حد ذاتها ملعقة شاي، ولذلك ليست عضوا لنفسها، ولكن فئة الأشياء من غير ملاعق الشاي، هي فرد من نفسها لأنها ليست ملعقة شاي، ماذا إذا بخصوص الفئة التي تضم كل الفئات التي ليست أفرادا لنفسها؟ إذا لم تكن هذه الفئة فردا لنفسها، تصبح بالتبعية فردا من نفسها، وإذا كانت فردا من نفسها.[2] إذن فهي فرد من نفسها وليست فردا من نفسها في الآن عينه.

ثالثا/ الحلول المقترحة لنقائض نظرية المجموعات.

[1] بوشنسكي: الفلسفة المعاصرة في أوروبا، ص 39.

[2] إيه سي جرايلينج: برتراند رسل، مقدمة قصيرة جدا، تر: إيمان جمال الدين الفرماوي، مؤسسة هنداوي للتعليم والثقافة، مصر، القاهرة، ط1، 2014، ص 45.

هناك طرق مختلفة ممكنة لحل مشكلة إزالة المفارقات من النظريات العلمية: بناء نظرية الأنماط، وتحديد مبدأ التجريد. وهكذا فإنه لإزالة المفارقات من نظرية المجموعات خلقت نظرية مجموعات بديهية أدخلت فيها، قيود كافية لاستبعاد المفارقات المعروفة (كان أول نسق فلسفي من اقتراح زير ميلو في العام 1908) ومشكلة الفهم الفلسفي وإيجاد الحل الحسي للمفارقات، مشكلة منهجية هامة من مشكلات المنطق الصوري والمبدأ المنطقي في الرياضيات.

وفي هذا الصدد يرى "زيرميلو" أنه من الممكن التغلب على النقائض دون التضحية بأي شيء من الرياضيات الكلاسيكية، ودون اللجوء إلى تعقيدات منطقية كما فعل رسل، خاصة عندما اِضطر إلى ترقيع نزعته المنطقية بنظرية الأنماط، والوسيلة إلى ذلك هي الإنطلاق من عدد من المسلمات، تسمح بتحديد مفهوم المجموعة بشكل لا يسمح ببناء المجموعات المتناقضة في الوقت الذي يتيح لنا فيه انشاء جميع المجموعات الضرورية.[1]

1- مفارقة منطقية:

من بين النقائض التي وضعها رسل هي نقيضة الحلاق، ومضمونها أن حلاق في قرية معينة يحلق فقط لكل الأشخاص في القرية الذين لا يحلقون ذقونهم لأنفسهم فهل هو يحلق ذقنه لنفسه؟

ولما كان تناقضا منطقيا صوريا يهدم الإستدلال كوسيلة للعثور على الحقيقة والبرهنة عليها، فإنه تنشأ مهمة كشف مصادر المفارقات وإيجاد الطرق لإزالتها".[2] عندما نبحث عن أسباب مثل هذه التناقضات، نجد أن المسألة تتعلق بحلقة مفرغة، ذلك لأن تعريف الشيء هنا يتم بالرجوع إلى مجموعة كلية بشكل هو نفسه أحد أعضائها أو جزءًا من أجزائها. إن تعريف الجزء بالكل الذي ينتمي إليه لا يمكن أن يكون له معنى إلا إذا كان الكل نفسه قائما بنفسه مستقلا عن أجزائه".[3]

[1] محمد عابد الجابري: مدخل إلى فلسفة العلوم، العقلانية المعاصر وتطور الفكر العلمي، ص 116.
[2] روزنتال، يودين: الموسوعة الفلسفية، وضع مجموعة من العلماء والأكاديميين السوفياتيين، ص 487.
[3] محمد عابد الجابري: مدخل إلى فلسفة العلوم، العقلانية المعاصر وتطور الفكر العلمي، ص 108.

وفي هذا الصدد يقول بوانكاريه:" إذا كان تعريف مفهوم ما، وليكن ن يتوقف على جميع الأشياء التي نرمز إليها بحرف "أ" مثلا، فإن هذا التعريف يمكن أن يقع في حلقة مفرغة إذا كان هناك ضمن تلك الأشياء التي رمزنا لها بحرف أ، أشياء لا يمكن تعريفها دون الاستعانة بمفهوم ن نفسه".[1]

إن التغلب على نقائض نظرية المجموعات وغيرها من النقائض المماثلة، يأتي رسل بنظرية في الأصناف، وهي نظرية تعترضها صعوبات ولا يعتبرها رسل نفسه مكتملة ولا نهائية، تقوم هذه النظرية على تصنيف الأشياء إلى أنواع مرتبة ترتيبًا هرميا.

"إن نظرية الأصناف هذه تحل فعلا مشكلة النقائض ولكنها تثير صعوبات كثيرة، من بينها أن تعريف العدد كما قدمناه قبل يصبح باطلا حسب هذه النظرية نفسها، ذلك لأننا سنكون أمام كثرة من العدد مثلا. لأنه سيكون علينا أن نميز بين فصل الأزواج الخاص بالأشياء عن فصل الأزواج الخاص بفصول الأزواج".[2]

"النتيجة التي يصل إليها رسل من هذه المناقشات هي أن علاقة واحد بواحد يمكن تعريفها دون أن نفترض العدد " 1"، ففي أصول الرياضيات يقدم تعريفا لهذه العلاقة عن طريق الهوية دون الإشارة إلى واحد على الوجه التالي: "تكون العلاقة ع علاقة واحد بواحد إذا ما حدث وكانت س، سَ لهما نفس العلاقة ع مع ص، وكانت س لها العلاقة ع مع ص، صَ لكانت س، صَ، متطابقتين، وكذلك ص، صَ.

واكتشف رسل أنه يتعذر مواصلة محاولة استنتاج النظريات الرياضية من بديهيات منطقية بحتة بدون وجود بديهيات إضافية تتيح إثبات نظريات معينة في علم الحساب ونظرية المجموعات، ويوجد بديهيان من بين البديهيات الإضافية هما بديهية "اللانهائية"، وتقول إنه يوجد مجموعات

[1] نفسه: ص 108.

[2] محمد عابد الجابري: مدخل إلى فلسفة العلوم، العقلانية المعاصر وتطور الفكر العلمي، ص 109.

غير متناهية في العالم وبديهية "التغير" وتقول بأن داخل كل مجموعة من المجموعات غير المتوالية غير الفارغة توجد مجموعة تتقاسم عضوا واحدا بالضبط مع كل من المجموعات الفردية الأخرى، توجد حاجة إلى وجود البديهيات حتى يتسنى تعريف الأعداد من حيث الفئات.[1]

وبهذا يكون رسل قد وجد حلّا، وهو يتناول التعبيرات الرياضية باعتبارها جملا شرطية، أي باعتبارها جملا بصيغة " إذا ... إذن"،على أن تشغل البديهيات الفراغ الموجود بعد "إذا" وكأنها تقول " إذا سلمت بصحة هذه البديهية، إذنْ ...." ونظرا لأن هذه الجمل الشرطية قابلة للإستنتاج من بديهيات المنطق ،فلا يهم الاستعانة الظاهرية بالاعتبارات الوجودية".[2]

وبرهن "جوديل"، على أن أي نظام منهجي يلائم نظرية الأعداد ينطوي على معادلة غير قابلة للتحديد، بمعنى أنها معادلة لا يمكن إثبات صحتها أو إثبات نفيها. ومن النتائج المباشرة لهذه النظرية أن يتعذر إثبات إتساق مثل هذا النظام داخل النظام، لذلك لا يستطيع المرء افتراض أن الرياضيات يمكن تزويدها بمجموعة من البديهيات الكافية لإنتاج كل حقائقها، وتبرهن أعماله على أن المنهج القائم على البديهيات ينطوي على عوائق شديدة متأصلة، وأن الطريقة الوحيدة لإثبات إتساق الكثير من أنواع أنظمة الإستدلال هي استخدام نظام إستنتاج معقد إلى حد يجعل إتساقه هو نفسه محل شك بالقدر نفسه.[3]

2- حل النقائض المتعلقة بالأعداد:

"إن العدد (2) لم يعد له وجود، فقد انبرى له نصل أوكام وطرحه بعيدا لتحتل فئة الإزدواج محل هذا الكائن الميتافيزيقي الذي نلهث وراءه دون أن يكون باستطاعتنا أن نمسك به;

[1] إيه سي جرايلنج : برتراند رسل، مقدمة قصيرة جدا، ص 46.
[2] إيه سي جرايلنج : برتراند رسل، مقدمة قصيرة جدا، ص 46.
[3] نفسه: ص48.

فهذا العدد لا نعرفه على وجه اليقين فكل ما نحن على يقين منه هو فئة الأزواج، فلابد أن نستبدل بذلك الكائن الميتافيزيقي هذه الفئة التي نعرفها معرفة يقينية.

إن تحليل رسل هنا يذكرنا بتحليله للموضوعات الفيزيقية في حدود مظاهرها، فالتحليل في كل حالة منها مزود بنصل أوكام".[1]

هذا التعريف يخلصنا من الأعداد بوصفها كائنات ميتافيزيقية، وتصبح مجرد وسائل لغوية مريحة لا تعبر عن أي جوهر إلا بمقدار ما تعبر عنه ألفاظ مثل "إلخ" و "أي أن" وبهذا التعريف يرتد الجهاز الأولي الذي يستخدمه الرياضي إلى حدود منطقية خالصة من أمثال (أو) و(لا) و(كل)، وكانت هذه كما يقول رسل أول مرة أعرف فيها نصل أوكام والتقليل من عدد الحدود".[2]

"وقد تغلب العلم في عصرنا الحاضر على كافة الصعاب، واستطاع العلم الحديث بفضل "كانتور" أن يحلل الأعداد اللانهائية ويقربها إلى الإفهام، عندما نعلم الأعداد وطبيعتها وتعرف تعريفا ينطبق عليها جميعا النهائية واللانهائية على حد سواء، وتمكنت الدراسات الحديثة في المنطق الرياضي من تحليل فكرة الجمع التي يرمز إليها بالإشارة +، ولم يعد بالإمكان إهمال هذا الرمز كأنه شيء لا يتطلب التعرف أو شيء يتعذر تحليله أو تعريفه، فأصبح بمقدورنا أن نعرف الصفر والواحد بنفس الطريقة التي تعرف بها سائر الأعداد".[3]

يمكن القول في النهاية أن الرياضيات المعاصرة قامت على أسس مغايرة على تلك التي شهدناها في الهندسات القديمة فانتقلنا من التسليم بالبديهيات و مطلقية البرهان الهندسي الإقليدي إلى التعدد النسقي أو ما يعرف بالأكسيوماتيك ، إذ فتح المجال واسعا أمام التعدد النسقي، و لم تعد الحقيقة في الرياضيات المعاصرة ذات أساس واحد و إنما تعددت أسسها بتعدد

[1] محمد مهران: فلسفة برتراند رسل، ص 218.
[2] محمد مهران: فلسفة برتراند رسل، ص 219.
[3] مصطفى غالب: برتراند رسل، ص 70.

أنساقها، و ما يهم في نهاية المطاف في الرياضيات المعاصرة هو انسجام النتائج مع المقدمات و تغير الحقيقة الرياضية من نسق إلى نسق آخر. ولكل نسق مبادئ وفرضيات خاصة به.

الفصل الثالث: تجاوز أزمة الأسس الرياضية في الفكر الفلسفي المعاصر

المبحث الأول: النزعة المنطقانية

المبحث الثاني: النزعة الحدسية

المبحث الثالث: النزعة الأكسيومية

المبحث الرابع: الحلول المقترحة لنقائض نظرية المجموعات

الفصل الثالث: تجاوز أزمة الأسس الرياضية في الفكر الفلسفي المعاصر.

عمل الفكر الفلسفي المعاصر منذ وقوع الرياضيات في أزمة الأسس على إيجاد حلول لها. فبعدما كان يعتقد لوقت طويل من الزمن، أن كل حقائق الرياضيات مطلق ويقيني لا يشوبه الشك والريب وبعد الأزمة التي تعرضت لها الرياضيات المعروفة بأزمة اليقين تزعزعت تلك المطلقيات واليقينيات، لكن هذا لا ينفي حقيقة مفادها أن الأزمة الرياضية كان لها الفضل في دفع العلم الرياضي من جديد وإكسابه يقينا فوق يقينيته.

كما أنه في الفكر الفلسفي المعاصر. "لم يعد موضوع الرياضيات هو تلك الحقائق البديهية التي جعلت منها العقلانية الكلاسيكية مرتكزها وعملتها الصعبة، إن موضوع الرياضيات هو العلاقات، وبكلمة أدق البنيات". ولم يعد المنهاج الرياضي منهاجًا حدسيا أو إستنتاجيا بالمعنى القديم، بل أصبح إجراء وتحويلات تنجم عن تلك البنيات".[1]

قلنا أن الفكر المعاصر سعى لإيجاد حلول لهذه الأزمة وقد تبلورت تلك الحلول في ثلاثة نزعات فلسفية، تتنازع الأمر فوق مسرح الأبحاث الخاصة بأسس الرياضة وهي: أولا: النزعة المنطقية: التي ترى أن قضايا الرياضة مجرد قضايا من المنطق الصوري.

ثانيا: النزعة الأكسيوماتيكية: التي ترى أن المنطق والرياضيات ينبعان معا من أصل واحد قبلهما هو الطريقة الأكسيومية.

ثالثا: النزعة الحدسية: التي ترفض الموقفين السابقين وترى أن الحقائق الرياضية تنبع من التجربة الفكرية وهي الحدس الرياضي.

[1] محمد عابد الجابري: مدخل إلى فلسفة العلوم، العقلانية المعاصر وتطور الفكر العلمي، ص ص 54، 55.

المبحث الأول: النزعة المنطقانية.

أولا/ تعريف المنطق:

1- لغة و اصطلاحا :

"**لغة:** تشير إلى الكلام أو النطق، كما أنها تشير إلى العقل أو الفكر أو البرهان.

كما يعرف بأنه: علم اللوغوس أي علم اللغة العقلية أو الحوار العقلي.

اِصطلاحا: هو العلم الذي يبحث في صحيح الفكر وفاسده، وهو الذي يضع القوانين التي تعصم الفكر من الوقوع في الخطأ في الأحكام، فموضوعه هو الفكر الإنساني من ناحية خاصة، هي ناحية صحته وفساده.

ويتم له ذلك عن طريق البحث في القوانين العقلية العامة التي يتبعها العقل الإنساني في تفكيره، فما كان من التفكير موافقًا لهذه القوانين كان صحيحا، وما كان مخالفا لها كان فاسدًا".[1]

2- تعريف المنطق الرياضي:

"**لغة:** مشتق من اللفظ اليوناني (techmé) logistiché أي (فن) الحساب- ظهر في بداية القرن العشرين، على يد عالمين منطقيين إنجليزيين هما: برتراند رسل، وألفرد نورث هوايتهد".[2]

"**اِصطلاحا:** المنطق الرياضي.

(أو المنطق الرمزي): ظهر نتيجة تطبيق المناهج الرياضية في مجال المنطق الصوري واستخدام لغة خاصة من الرموز والصيغ، ويدرس المنطق الرياضي التفكير المنطقي (الاستدلال والبرهان).

---

[1] بول موي: المنطق وفلسفة العلوم، ص ص 21، 22.

[2] نفسه: ص 364.

المنطق الرياضي يتخذ المنطق موضوعا له والرياضة منهجا".[1]

3- بدايات ظهور المنطق الرياضي:

"عرفت المدرسة الميغارية الرواقية (القرن الثالث قبل الميلاد) بعض المفاهيم المبدئية للمنطق الرياضي".[2] منها :

- **عقم المنطق الأرسطي:** بين ديكارت وغيره أن القياس الأرسطو طاليسي لا ينتج شيئا جديدا، وأنه يستخدم فحسب في عرضه ما سبقت معرفته بطريقة أخرى.
- **الفرق بين القياس والاستدلال* في الرياضة:** من بين الذين فرقوا بين القياس والاستدلال في الرياضة كلا من هنري بوانكاريه وجوبلو، وأولهما رياضي وثانيهما منطقي.
- **"هنري بوانكاريه:** ذهب في أوائل القرن الحالي إلى أنه لا يمكن إرجاع الإستدلال الرياضي إلى نظرية القياس عند "أرسطو"، لأن هذا القياس عجز عن إضافة أي شيء جديد إلى القضايا التي يؤلف بينها، وهي بعض المبادئ في الرياضة، ولو كان الإستدلال الرياضي مؤلفا من عدة أقيسة لانقلبت الرياضة بأسرها إلى نوع من تحصيل الحاصل.[3]
- **جوبلو:** يرى أنه لا يمكن إرجاع الإستدلال الرياضي إلى قياس "أرسطو"، لأن هذا القياس لا يأتي بجديد عندما يستنبط قضية من مقدمتين كانتا تحتويان عليها ضمنا، ولأن استنباط النتائج الضمنية التي تحتوي عليها قضية ما، لا يمكن أن يوصف بأنه إستدلال رياضي،وإنما كانت الرياضة منتجة على عكس قياس أرسطو لأنها تعتمد على التعميم.[4]

---

[1] روزنتال، يودين، الموسوعة الفلسفية، وضع مجموعة من العلماء والأكاديميين السوفياتيين، مادة المنطق الرياضي، ص 498.

[2] نفسه: ص 498.

* فعل ذهني مؤلف من أحكام متتابعة، إذا وضعت لزم عنها بذاتها حكم آخر غيرها وهذا الحكم الأخير، لا يكون صادقا إلا إذا كانت مقدماته صادقة/ جميل صليبا: المعجم الفلسفي، ج1، مادة الاستدلال، ص 68.

[3] محمود قاسم: المنطق الحديث ومناهج البحث، مكتبة الأنجلو المصرية، ط2، [د:ت]، ص 255.

[4] نفسه: ص 257.

4- أهم المفاهيم التي يستند إليها المنطق الرياضي:

"**أ- دالة القضية: propositional function**: حول مفهوم دالة القضية، تلتقي الرياضيات بالمنطق، فالمصطلح مزدوج: الشق الأول منه وهو "دالة" function أحد المفاهيم الرئيسية في الرياضيات،أما الشق الثاني وهو مفهوم "القضية" proposition فمن المفاهيم المنطقية التي طالما تحدث عنها المناطقة".[1]

"المتغيرات variables تحدد بدقة الصورة المنطقية لما نريد الحديث عنه، حيث تقوم مقام اللغة التي كثيرا ما تتعرض للغموض والإبهام وسوء الفهم، فضلا عن كونها مصطلحات عالمية يمكن لقارئها أن يفهمها".[2]

من المألوف أن نجد الرياضي يستخدم في عملياته الرياضية مجموعة من العلاقات مثل: +، -، x، ÷، لينتقل من صيغة إلى أخرى، أو ليحدد علاقة بين متغيرين أو أكثر، وهذه العلامات هي ما نطلق عليه الثوابت الرياضية.

كذلك تبين للمنطق الرياضي أنه من الممكن استعارة فكرة الثوابت من الرياضيات، ولكن بصورة تلائم عملياته، وتجعل مفاهيمه واضحة".[3]

ويبدأ نسق المنطق الرياضي عند "لويس" بمجموعة من الأفكار الابتدائية ثم مجموعة من التعريفات وهي ثلاث، تتلوها القضايا الابتدائية التي تعد بمثابة مسلمات النسق، والتي تأخذ أرقاما على غرار الترقيم المعهود في البرنكيبيا ثم ينتقل لويس من هذه وتلك إلى النظريات والبرهنة عليها مستخدما ثلاث قواعد أساسية هي الاستبدال، والتقرير اللاحق والاستدلال.[4]

---

[1] ماهر عبد القادر محمد علي: فلسفة العلوم، المنطق الرياضي، ج3، دار المعرفة الجامعية، بيروت، لبنان، [د:ط]، 1984، ص 67.

[2] نفسه: ص 70.

[3] نفسه: ص 71.

[4] نفسه: ص 240.

وأسهم المنطقي البولندي "يان لوكاشيفتش" في إثراء الدراسات المنطقية المعاصرة، فصحح وعدل، وحذف وأضاف وطور المفاهيم والمصطلحات، وأخذ بيد الدراسات المعاصرة في المنطق الرياضي وزودها بدفعات قوية، حفزت المناطقة من بعده إلى تطوير أبحاث المنطق بما يتلاءم مع طبيعة الدراسة في هذا العلم.[1]

ب– ليبنيتز والمنطق الرمزي (الرياضي): "يعد ليبنيتز أب المنطق الرمزي أو المنطق الرياضي حتى أن المؤرخ في العشرينات من هذا القرن قارئ المبادئ الرياضية لرسل وهوايتهد حسب لويس يجدر به أن يبدأ أولا بدراسة نصوص ليبنيتز، فليبنيتز يبدأ معه تاريخ المنطق الرمزي والمنطق الرياضي، أما سكولز فوصف الحديث عن ليبنيتز بالحديث عن إشراقة شمس".[2]

"**حكم سكولز**: ينقسم تاريخ المنطق إلى قسمين مميزين تماما، القسم الأول: الشكل الكلاسيكي للمنطق الشكلي، ابتداء من أرسطو حتى العصر الحاضر، ويشتمل على كل ما هو غير مستوحى من الفكر الليبنيتزي عند المنطق الرياضي، والقسم الثاني: الشكل الحديث للمنطق

الشكلي الذي يبدأ مع ليبنيتز، ويشتمل على كل ما استوحى عن وعي أو عن لا وعي من فكرة ليبنيتز عن المنطق الرياضي.[3]

"كان ليبنيتز قد تحدث بصورة عرضية عن المنطق الرياضي على أنه (لوجستيقا)، وقد قبل استخدام المنطق الحسابي كمرادف للمنطق الرمزي أو المنطق الرياضي في مؤتمر جنيف الدولي للفلسفة في العام 1904 حيث اقترحه إيتلسون ولالاند وكوتيرا.[4]

---

[1] ماهر عبد القادر محمد علي: فلسفة العلوم، المنطق الرياضي، ج3، ص ص 257، 258.

[2] روبير بلانشي: المنطق وتاريخه من أرسطو حتى رسل، تر: خليل أحمد خليل، المؤسسة الجامعية للدراسات والنشر والتوزيع، بيروت، لبنان، [د:ط]، [د:ت]، ص ص 261- 263.

[3] نفسه: ص 261.

[4] روزنتال، يودين: الموسوعة الفلسفية، وضع مجموعة من العلماء والأكاديميين السوفياتيين، ص 498.

ويرد ليبنيتز على لوك الذي يعبّر عن قليل من الأحوال المنطقية شأنه في ذلك شأن معظم معاصريه، بالقول "أؤكد أن ابتكار شكل القياسات هو من أجمل ابتكارات العقل البشري، وحتى أنه من أثمنها وأقيمها إنه نوع من الرياضيات الشاملة التي لم تعرف أهميتها على نحو كاف بعد، وإنه ليمكن القول إنها تتضمن نوعا من فن العظمة. شرط أن نجيد وأن نتمكن من استخدامها كما ينبغي.[1]

- **فشل تلك اللغة:** تتعارض شمولية اللغة مع خصوصية وتعددية اللغات، هذه اللغات التجريبية التي تحول دون تفاهم مختلف الشعوب. و كان للمنطق الرياضي تأثير بالغ على الرياضيات المعاصرة نفسها فالأجزاء الجوهرية من الرياضيات المعاصرة نشأت من المنطق الرياضي في الهندسة الإلكترونية في السيمنطيقا (نظرية الأجهزة الآلية للتحكم).[2]

ج– بيانو:

عمد إلى جبر المنطق، يستقي منه الأصول المنطقية لأبحاثه، وخلص من ذلك إلى اكتشاف بعض الثوابت المنطقية الهامة، التي يجهلها جبر المنطق كالتضمن الصوري، وأهم

من هذا أنه تنبه إلى ضرورة إدخال "المتغيرات" في كتابة القضايا المنطقية الخالصة، فكان هذا التنبه أكبر عامل في تمكين المنطق الصوري الجديد من التعبير عن القضايا الرياضية البحتة، وفق هذا كله; توصل بيانو على عكس فريجه إلى استعمال رموز ثوابت المنطق، ذات قيمة عملية تفوق رموز فريجه وضوحا وسهولة.[3] أثبت بيانو أن نظرية الأعداد الطبيعية بأكملها يمكن أن تكون مشتقة من ثلاث مفاهيم أولية وخمس قضايا أولية، بالإضافة إلى قضايا المنطق البحت، والمفاهيم الثلاثة الأولية هي: "." و"العدد" و"التالي".

[1] روبير بلانشي: المنطق وتاريخه من أرسطو حتى راسل، ص 264.
[2] روزنتال، يودين: الموسوعة الفلسفية، وضع مجموعة من العلماء والأكاديميين السوفياتيين، ص 499.
[3] محمد ثابت الفندي: أصول المنطق الرياضي، ص ص 105، 106.

أراد بيانو تحت تأثير الرياضيات أن يضع نظاما دقيقا ومحكما للمنطق من خلال مصطلحاته الرمزية، فضلا عن محاولته التي قام بها لرد الرياضيات إلى أصول منطقية بحتة، تلك المحاولة التي اعتبرت بمثابة التكأة التي انطلق منها كتاب " أصول الرياضيات" 1903 لرسل، ثم مبادئ الرياضيات لرسل وهوايتهد.

د- جورج بول والاتجاه الجبري في المنطق:

يعتبر جورج بول G. Boole . أول رياضي يكوّن فكرة دقيقة عن الحساب المنطقي الرمزي في كتاباته، التي من أهمها، " التحليل الرياضي للمنطق" وبحث في قوانين الفكر، يقول " إن أي انسان على درجة من الوعي، بالموقف الراهن في الجبر المنطقي يعرف تماما أن صحة الجزء في التحليل لا يعتمد على تفسير الرموز، وإنما يعتمد على القواعد التي تحكم تأليفها، فأي نسق من أنساق التفسير المسموح به طالما أنه لا يتداخل مع العلاقات المفترضة، ومن ثم فإن الإجراء التحليلي يمكن عرضه في صيغة من صيغ التفسير لحل المشكلات المتعلقة بخصائص معينة للأعداد.[1]

إن من أهم مميزات الحساب المنطقي البولي، أنه يستند إلى استخدام الرموز بالإضافة إلى القواعد، كيف تلك الرموز، ولذلك فإن بول يميز بين قسمين في إطار الحساب المنطقي، وهما معا يؤلفان ما يطلق عليه جبر المنطق البولي، حساب الفصول وحساب القضايا.

- **إشتقاق نظرية الأعداد من المنطق الصوري: مع "فريجه"**

كانت البداية بتساؤل الرياضيين عن العدد:

"كان تحليل العدد هو الركيزة الرئيسية في كل عملية رد الرياضيات إلى المنطق".[2]

[1] ماهر عبد القادر محمد علي: فلسفة العلوم، المنطق الرياضي، ص 23، 24.

[2] محمد مهران: فلسفة برتراند رسل، ص 204.

"ما العدد؟ كثيرا ما سئل هذا السؤال ولم يجد إجابة صحيحة عنه إلا في أيامنا، وقد جاءت هذه الإجابة عام 1884 في كتاب فريجه" أسس الحساب، غير أن هذه الإجابة ظلت مجهولة حتى جاء رسل فكشف عنها النقاب عام 1901، أي بعد عام أو نحو عام منذ أن توصل هو إلى نفس تلك الإجابة".[1]

"بدا أن الرياضيين أنفسهم وكذلك المناطقة الناظرين في أسس الرياضة، غير مقتنعين جميعا بأن تكون الأعداد الحسابية السند الأخير والوثيق للرياضة. إذ تساءلوا لماذا تكون الأعداد أولى باليقين الرياضي من الحدس المكاني، ثم ألم يتراجع الحدس في الرياضة كلها ليظهر من جديد محصورا في نطاق الأعداد وحدها، ولم لا يبحث عن سند أوثق وغير حسي للأعداد نفسها".[2]

"بداية النظرية اللوجستيقية في الصلة بين الرياضة والمنطق، تلك النظرية التي أقامها لأول مرة المنطقي الألماني جوتلوب فريجه بالنسبة للحساب والتحليل، فاحتاج إلى إثبات تلك النظرية الجريئة إلى معالجة المنطق ذاته على أسس جديدة، غير تلك الأسس التي قام عليها جبر المنطق، لكي تستقيم النظرية فكانت نظريته في المنطق ذاته نقطة تحول حاسم فيه، كما كانت محاولة اشتقاق الرياضة منه أول محاولة ناجحة".[3]

5- تعريف النزعة المنطقية:

"الأطروحة القائلة بأن الرياضيات يمكن ردها إلى المنطق".[4]

كما أنها تعرف بالمذهب اللوجستيقي: " هو المذهب المسمى النظرية اللوجستيقية، وهو

[1] محمد مهران: فلسفة برتراند رسل، ص 205.

[2] محمد ثابت الفندي: أصول المنطق الرياضي، دار النهضة العربية، بيروت، [د:ط]، 1976، ص 104.

[3] نفسه: ص 105.

[4] روزنتال، يودين: الموسوعة الفلسفية، وضع مجموعة من العلماء والأكاديميين السوفياتيين، ص 525.

المذهب الذي يرد الرياضيات البحتة* بحذافيرها إلى المنطق الصوري، بحيث تصبح جزءًا من المنطق وامتدادا لقضاياه وثوابته وليس فيها شيء غير المنطق الصوري وحده".[1]

"كان ليبنيتز من أشد أنصار النظرية القائلة: بأن الرياضة عبارة عن استنباطات من الأصول المنطقية وفق الأصول المنطقية. فقد كان ليبنيتز ينادي دائما بأن البديهيات ينبغي أن تثبت، وأن كل شيء ينبغي أن يُعَرَّف".[2]

هناك من ادعى بأن الرياضة ما هي إلا فرع من المنطق: " تشبه العلوم الرياضية المنطق الشكلي في أنها تتبع المنهج الاستنتاجي، فتضع بعض القضايا العامة وتستنبط منها نتائجها. وقد دعا ذلك الشبه القوي بعض المفكرين إلى القول بأن العلوم الرياضية تعد فرعا من المنطق، لأنها تستخدم المبادئ المنطقية لكن من المسلم به أن الرياضة نشأت قبل ظهور المنطق الشكلي بنوعيه، أي قبل نشأة المنطق" الأرسطو طاليسي"، والمنطق الرياضي الذي يرجع إلى أواخر القرن التاسع عشر".[3]

هـ – فريجه:

حينما فحص فريجه "أسس وقوانين الحساب"، وجد أن الرياضيات بأسرها تعمل وفق النسق الاستنباطي، وأن الحساب إنما هو نسق متطور للمنطق، لأن كل قضية حسابية هي بالضرورة قانون منطقي، لهذا اتجه فريجه إلى محاولة إقامة المنطق كنسق استنباطي في المحل الأول وفق أفكار ومفاهيم أساسية، تجعل من النسق المنطقي نسقا محكما يفي بأغراض البحث العلمي.[4]

* الرياضيات البحتة: تشمل الحساب والجبر والهندسة التحليلية وحساب التفاضل وتتكامل/ محمود قاسم: المنطق الحديث ومناهج البحث، ص 243.

[1] محمد ثابت الفندي: أصول المنطق الرياضي، ص

[2] برتراند رسل: أصول الرياضيات، ج1، ص31.

[3] محمود قاسم: المنطق الحديث ومناهج البحث، ص 228.

[4] ماهر عبد القادر محمد علي: فلسفة العلوم، المنطق الرياضي، ج3، ص 62.

ثانيا / العلاقة بين الرياضات والمنطق:

من الناحية التاريخية شكلت الرياضيات والمنطق موضوعين متمايزين للدراسة، فربطت الرياضيات بالعلوم كما ربط المنطق باليونان، ولكن كلتا الدراستين قد اتسعت في العصور الحديثة فأصبح المنطق ذا صبغة رياضية كما اتخذت الرياضيات شكلا منطقيا ونتيجة لهذا أصبح من المستحيل رسم خط فاصل بينهما، وبالفعل فهما يشكلان دراسة واحدة، ولا يختلفان إلا كما يختلف إبن عن أبيه، فالمنطق يمثل الرياضة في صغرها أما الرياضة فتمثل المنطق في نضجه.[1]

منذ أواخر القرن الماضي حاول بعض المناطقة إرجاع هذا العلم إلى المنطق الشكلي، عندما بيّنوا أنه إذا أمكن إرجاع الهندسة إلى الحساب فمن الممكن أيضا إرجاع مبادئ فرع من المنطق البحت، وعلى إمكان استخدام المعاني المنطقية الشكلية للتعبير عن الرياضة بأسرها.[2]

إن الصلة بين الرياضة والمنطق جد وثيقة، فإن كون جميع الثوابت الرياضية ثوابت منطقية بها تتعلق جميع المقدمات الرياضية فهذا، في اعتقادي هو معنى ما ذهب إليه الفلاسفة في قولهم بأن الرياضة أولية، والواقع إنه عندما نسلم بالجهاز المنطقي فالرياضة حتما تتبعه، والثوابت المنطقية ذاتها إنما تعرف بسردها لأنها أساسية لدرجة أن الخصائص التي يمكن بها تعريف الفصل منها، تفترض مقدما بعض حدود هذا الفصل.[3]

طابق رسل بين المنطق والرياضيات، فالرياضيات في نظره جزء من المنطق أو امتداد له، وقد برهن على ذلك بعملين متكاملين تحليل الرياضيات تحليلا منطقيا بردها إلى أصولها المنطقية، ثم تحليل المبادئ المنطقية نفسها تحليلا ينتهي بها إلى عدد قليل من الفروض التي منها نستطيع أن نستنبط جميع قواعد المنطق، وجميع قواعد الرياضيات معا، فتزول بذلك الفوارق بين المنطق والرياضيات.

---

[1] عبد السلام بن عبد العالي، محمد سيلا: المعرفة العلمية، دفاتر فلسفة، نصوص مختارة، دار توبقال للنشر، ط2، 1996، ص 54.

[2] محمود قاسم: المنطق الحديث ومناهج البحث، ص 233.

[3] برتراند رسل: أصول الرياضيات، ج1، ص 37.

المنطق والرياضيات – فيما يرى رسل– يمكن أن يلتحما تماما، ويتم التوحيد بينهما في نسق موحد، وفي نطاق هذا النسق الموحد إذا شئنا أن نعرف كلا منهما على حده، لما وجدنا اختلافا بينهما إلا كالإختلاف بين الصبي والرجل فالنسق الموحد الذي يعرضه رسل مع (هوايتهد) في (برنكيبيا ماتيماتيكا) يبدأ بحساب القضايا، ثم ينتقل إلى حساب الفئات وحساب العلاقات.[1]

كتب رسل في مؤلفه: مقدمة للفلسفة الرياضة (1919) يصف الصلة بين المنطق والرياضيات قائلا: "وإذا كان هناك من لا يزالون، لا يسلمون بالتطابق بين المنطق والرياضيات، فإننا نتحداهم أن يبينوا لنا عند أي نقطة في التعاريف والاستنتاجات المتتالية الموجودة في المبادئ الرياضيات يعتبرون المنطق ينتهي عندها والرياضيات تبدأ منها".[2]

وهذا يعني أنه إمّا أن جميع الرياضة هي منطق رمزي فمن أعظم كشوف العصر الحاضر، وعندما نقرر هذه الحقيقة يصبح ما بقي من الأصول الرياضية، عبارة عن تحليل للمنطق الرمزي ذاته. ويصبح جزء كبير من الرياضيات يلامس المنطق، كما صار قسط من المنطق الحديث رمزيا وصوريا بحيث إن العلاقة الوحيدة التي تشد الرياضي إلى المنطق أصبحت تبصر أعين كل منشغل بالثقافة.

1- **تعريف رسل للعدد** : إن عرضنا لتحليل رسل للأعداد الطبيعية إنما يمثل حجر الزاوية في محاولة رسل رد الرياضيات إلى المنطق، وهو الهدف الذي من أجله وضع كتابيه "أصول الرياضيات وبرنكيبيا ماتيماتيكا[3].

يرفض رسل طريقة "العد" في تعريف الأعداد، فالعدد هو الخاصية المشتركة التي تميز الأعداد، تماما مثل كون الإنسان الخاصية التي تميز الناس، فالكثرة ليست حالة جزئية للعدد، وإنما هي حالة جزئية لعدد خاص معين، فثلاثي الرجال ليست حالة جزئية للعدد 3 والعدد ثلاثة حالة

[1] محمد مهران: فلسفة برتراند رسل، ص 196.
[2] ماهر عبد القادر محمد علي: فلسفة العلوم، المنطق الرياضي، ص 14.
[3] محمد مهران: فلسفة برتراند رسل، ص 207.

جزئية للعدد، ولكن الثلاثي ليست حالة جزئية للعدد، فالعدد الخاص ليس متطابقا مع مجموعة الحدود والتي لها هذا العدد. "وكانت أول خطوة لذلك هو تعريف العدد الأصلي، فالأعداد الأصلية المتناهية، أو الأعداد الطبيعية 1، 2، 3، 4، .... هي الأعداد التي نألفها في حياتنا اليومية، وفي مبادئ الحساب، ويتم تعريف مثل هذه الأعداد عن طريق النسق المنطقي الذي طوره رسل".[1]

و رسل لا يعتبر العدد فكرة بسيطة لا تقبل التحليل، بل يعده مركّبا يمكن أن ينحل إلى عناصره البسيطة. "والعدد الذي حلله رسل وأرجعه إلى مدركات منطقية هو العدد المحدد القيمة مثل العدد "1" أو "3"، أو صفر، حيث كان الرياضيون قديما يستثنون العدد "1" من بين الأعداد، ويعتبرونه غير قابل للتعريف ليعرفوا به بقية الأعداد، فالعدد 2 مثلا يكون 1+1، أما العدد 3 فهو 2+1، ولكنها أعتبرت بأنها طريقة معيبة، لأنها تستخدم فكرة الجمع كذلك فهي تنطبق على الأعداد النهائية فقط".[2]

إن رسل في تحليله للعدد، لم يكن يهدف إلى تقديم تعريف لفكرة "العدد" بوجه عام، بل ما يقوم به رسل بتعريفه بالفعل هو أنواع الأعداد التي تتطلبها الرياضيات. مثل الأعداد الأصلية اللامتناهية والأعداد الحقيقية.[3]

وأول ما نلاحظه في تعريف رسل للأعداد، هو ارتباط هذا التعريف بفكرة "الفئة" فتحديد معنى العدد يتم على أساس أنه فئة فئات، إذ أن العدد طريقة نجمع بها مجموعات معينة من تلك المجموعات التي لها عدد معلوم من الحدود.

[1] محمد مهران: فلسفة برتراند رسل، ص 210.
[2] نفسه: ص ص 69، 70.
[3] نفسه: ص 210.

رسل يعرف أي عدد بأنه: " الفئة التي تشتمل على جميع الفئات التي تكون شبيهة بفئة معينة، فإذا أردت أن تعرف معنى العدد 3 فأنظر إلى ثالوث من الرجال مجتمعين معا وقل إن العدد 3 معناه هو الفئة التي تشتمل كل الفئات التي تكون كل منها شبيهة بهذه الفئة من الرجال التي أراها أمامي".[1] إن فكرة التشابه – في اعتقاد رسل- مفترضة من قبل في عملية العد، إلا أنها أبسط من الناحية المنطقية، وإن لم تكن على ألفة بها كالعد.

فيلزم في العد أن نأخذ الأشياء التي نعدها في ترتيب معين، كأول وثان وثالث إلا أن هذا الترتيب ليس هو أساس العدد، فهو من الناحية المنطقية إضافة لا دخل لها بالموضوع، كما أنه تعقيد لا ضرورة له، أما فكرة التشابه فلا تتطلب ترتيبا فضلا عن أنها لا تتطلب أن تكون الفئات المتشابهة متناهية".[2]

والأغراض التي كان يهدف للوصول إليها من وراء ذلك التحليل، ولعل من أهم الأغراض هو الاستغناء عن الحدود الرياضية وردها إلى مفاهيم منطقية، وفي هذا الرد تصبح الرياضيات نسقا منطقيا إستنباطيًا كالمنطق سواء بسواء، وتكون بذلك جزءًا من المنطق وهو ما كان يريده رسل والمناطقة الرياضيون، وهو الهدف الرئيسي الكامن وراء النزعة المنطقية في الرياضيات.

ثالثا/ ظهور النظرية اللوجستيقية على يد رسل:

منذ بداية القرن العشرين، كانت الظروف مهيأة لظهور النظرية اللوجستيقية كاملة، حيث التقى التياران في أبحاث برتراند رسل: تيار رموز بيانو المنطقية الجديدة التي استوعبت المنطق وأضافت إليه ثوابت منطقية أخرى، وأدخلت المتغيرات في كتابة القضية المنطقية، ثم تيار فريجه المنطقي الذي تعمق النظرية المنطقية في ذاتها ورسم طريقة اشتقاق الرياضة من المنطق الصوري، فنتج عن التقاء التيارين أن نضجت النظرية اللوجستيقية. و"تشتمل النظرية على قسمين: الأول

[1] محمد مهران: فلسفة برتراند رسل، ص 215.

[2] نفسه: ص 214.

خاص بالمنطق الصوري في صورته الرياضية الأخيرة والثاني خاص باشتقاق الرياضة كما نسقها المذهب الحسابي بادئة بالحساب من ثوابت وقضايا المنطق".[1]

"قدّم رسل تبريرًا لنظريته المنطقية في أسس الرياضيات، وهي النظرية المعروفة باسم "اللوجستيقا logicism أو logistics (أو النزعة المنطقية لأسس الرياضيات التي تؤكد على أن الرياضيات مشتقة من المنطق أو هي جزء منه، ولعل أهم ما يحقق ذلك هو رد المفاهيم

الرياضية إلى المفاهيم المنطقية، أي إثبات أن مفاهيم الرياضيات يمكن – عن طريق التحليل- أن ترد إلى المفاهيم المنطقية".[2]

ورغم أن بيانو قد وضع لنا الأفكار والقضايا الإبتدائية، التي تساعدنا على اشتقاق الرياضيات بأسرها من المنطق، إلا أنه لم يتمكن من رد الرياضيات إلى المنطق بصفة نهائية، وقد كانت تلك مهمة رسل وهوايتهد في مبادئ الرياضيات، بحيث أضحت الرياضيات بأسرها منطقا، وبات من المعتذر على الذهن التحليلي أن يتبين أين ينتهي المنطق وأين تبدأ الرياضيات.[3]

واستلهم رسل على الفور من خطوات التقدم التي حققها بيانو في الأسلوب المنطقي، طرقا لصياغة المبادئ الأساسية للمنطق، ولعرض شيئين في غاية الأهمية: أولا: كيفية تعريف كل مفاهيم الرياضيات من حيث المبادئ، وثانيا: كيفية إثبات كل الحقائق الرياضية إنطلاقا من تلك المبادئ الأساسية.[4] و يستحيل التمييز بين الرياضة والمنطق، لأن في بعض مقدمات الرياضة مثل: المبدأ المنطوي عليه هذا القياس، إذا كانت ق تستلزم ك وك تستلزم ر كانت ق تستلزم ر ".[5] ومن

[1] محمد ثابت الفندي: أصول المنطق الرياضي، ص 106.

[2] محمد مهران: فلسفة برتراند رسل، ص 204.

[3] ماهر عبد القادر محمد علي: فلسفة العلوم، المنطق الرياضي، ص 55.

[4] إيه سي جرايلينج: برتراند رسل، مقدمة قصيرة جدا، تر: إيمان جمال الدين الفرماوي، هنداوي للتعليم والثقافة، مصر، القاهرة، ط1، 2014 ، ص ص 43، 44.

[5] مصطفى غالب: برتراند رسل، دار مكتبة الهلال، بيروت، لبنان، [د:ط]، 1986، ص 139.

الواضح أن علاقة الرياضة بالمنطق وثيقة جدا، فكون الثوابت الرياضية جميعا ثوابت منطقية، وأن مقدمات الرياضة كلها إنما تختص بتلك الثوابت.

المبحث الثاني: النزعة الأكسيومية.

هو بمثابة رد فعل مباشر على المذهب اللوجستيقي بزعامة دفيد هلبرت، الذي لا يرى أن الرياضة فرعا من فروع المنطق أو مشتقة منه، كما توصل إلى ذلك اللوجيستيقيون وإنما كلاهما – المنطق والرياضة– ينبعان متوازيين من الطريقة الأكسيوماتيكية Axoimatic Method، أو كما تسمى بالصورية الخالصة pure formalism "[1].

وبالنسبة إلى أنصار الصياغة الأكسيومية، فإن المجموعات لا يتم تعريفها إلا كما تعرّف المجاهيل (س) التي تستعمل في أوليات النظرية، أية نظرية تماما. كما هو الشأن في المعادلات الرياضية المتعددة المجاهيل، ومن ثمة تكون أمام مجموعات يمكن أن توضع مكان تلك المجاهيل وأمام أخرى لا تقبل ذلك.[2]

وينظر هلبرت للغة الرياضية كشيء مستقل ويردها إلى عناصرها، حتى يمكن دراستها كلغة رياضية في حد ذاتها، وهذه الفكرة هي ما يطلق عليه هلبرت مصطلح ما وراء الرياضيات Meta mathématics – وأحيانا ما وراء المنطقMetalogic، من أجل هذا الهدف شعر هلبرت بالحاجة إلى لغة دقيقة هي لغة المنطق الرياضي، التي وجدها بصورة سلسلة في برنكيبيا.[3]

ويذهب إلى أنه لكي تستقيم الرياضة والمنطق كعلمين إستنباطيين ويقينيين، يجب الذهاب إلى أبعد من حدودهما الابتدائية ومسلماتهما الأولية التي وصلت إليها الأبحاث السابقة عند فريجه وبيانو ورسل وكل من مهد لهم تحليل الرياضة إلى حدودها ومسلماتها، من أمثال مورتز باش

[1] محمد ثابت الفندي: فلسفة الرياضة، ص 155.

[2] محمد عابد الجابري: مدخل إلى فلسفة العلوم، العقلانية المعاصر وتطور الفكر العلمي، ص 116.

[3] ماهر عبد القادر محمد علي: التطور المعاصر لنظرية المنطق، دار النهضة العربية للطباعة والنشر، بيروت، لبنان، [د:ط]، 1988، ص 52.

وديدكند، وهذا الذهاب إلى ما وراء الحدود والمسلمات الأولية في المنطق والرياضة إنما ينتهي عند قبول حدود ومسلمات أولية أخرى لا هي إلى المنطق ولا هي إلى الرياضة . وإنما هي عارية تمامًا، عن كل معنى رياضي أو منطقي لأنها مجرد رموز إسمية نضعها وضعا، ومن ثم فهي صورية بحتة، وتلك الحدود والمسلمات هي "الأكسيوماتيك" الذي تشتق منه الرياضة والمنطق متوازيين لا متصلين".[1]

"ويرى هلبرت أن أي نظرية رياضية يمكن صياغتها بطريقة صورية تماما ،وأن الرياضيات متحررة تماما من أي افتراضات قبلية وحتى يمكن أن نؤسس الرياضيات ،فإننا لسنا بحاجة إلى معونة إلهية على ما يرى Kronecker، أو أي إفتراض لذكاء إنساني خاص كما يدّعي هنري بوانكاريه Poincaré، أو حدس أولي كما يدعى بروور Brower ،أو حتى بديهيات قابلة للرّد كما يرى رسل وهوايتهد. إن هلبرت يعتقد في إمكانية إنجاز أسس الرياضيات بدون كل هذه الفروض إذا نظرنا للرياضة البحتة، من وجهة نظر صورية خالصة، والطريقة الوحيدة التي يمكن بواسطتها إنجاز هذا العمل هي الطريقة الأكسيوماتيكية التي اتضحت في أبحاث هلبرت منذ حوالي 1900".[2]

وبهذا فرض وضع هذا الأكسيوماتيك أبحاثا أخرى في شروط إقامة المسلمات ،وهي شروط في جوهرها منطقية، كشرط إستقلال المسلمات وككونها غير متناقضة وكونها مشبعة.

ثم إن الأكسيوماتيك يفترض بكل تأكيد قدرًا من المنطق حيث أن أحد شروط تأسيسه الثلاثة هو شرط عدم التناقض وهو شرط أساسي كما أنه متضمن في الشرطين الآخرين. فالمنطق مفروض مقدما في كل أكسيوماتيك ولذلك تعتبر النظرية الأكسيوماتيكية تعميقا للوجستيقا بشرط استبعاد فكرة اشتقاق الرياضة منه.[3]

[1] محمد ثابت الفندي: أصول المنطق الرياضي، ص 108.

[2] ماهر عبد القادر محمد علي: التطور المعاصر لنظرية المنطق، ص 53.

[3] محمد ثابت الفندي: أصول المنطق الرياضي، ص 108.

إن مشكلة التناقض داخل النسق الرياضي الذي أراد هلبرت تأسيسه يمكن أن ترد إلى المشكلة الآتية: إذا كان لدينا النسق الرياضي S وهو نسق متناقض، فإنه سوف يتضمن برهانا على الصيغة 1=2، وهذا البرهان سوف يفضي إلى مجموعة متناهية من البديهيات التي يمكن أن نشير إليها بالرمز M_0، وهذا سوف يعني بالضرورة أن المجموعة M_0 متناقضة، ومن ثم فإن مشكلة عدم التناقض الخاصة بالنسق ترد إلى مشكلة عدم تناقض بديهياته.[1]

إن هذا المذهب مذهب الصورية البحتة هو مسألة فنية صرفة أولا، ثم هو بعد ذلك فلسفة إن استطعنا أن نسمي فلسفة القول المجمل بأن هناك أصلا مشتركا للمنطق والرياضة معا، أما بيان ذلك الأصل المشترك فهو المسألة التي وصفناها بأنها فنية صرفة وبرنامج هذه المسألة الفنية يبدأ بإقامة نسق رمزي من الحدود والمسلمات الأولية تشتمل على رموز للدوال الرياضية والأعداد كما تشتمل على رموز لثوابت وقوانين من المنطق.

وهذا المذهب أكثر صورية في الواقع من المذهب اللوجستيقي لأنه يبدأ من مسلمات "إسمية" بحتة. أي مجرد رموز لا تعني المنطق أو الرياضة، ولكن مع ذلك لا يختلف كل الإختلاف عن المذهب اللوجستيقي كما أراد له صاحبه هلبرت إذ هو في الواقع يكمله ويزيد من دقته .

[1] ماهر عبد القادر محمد علي: التطور المعاصر لنظرية المنطق، ص 57.

المبحث الثالث: النزعة الحدسانية.

"هو مذهب يعتنقه رياضيون معاصرون من أمثال بوريل Borel وبوانكاريه ولوبيج وبير في فرنسا (وهم الذين نعنيهم بالحدسيين)، ومن أمثال بروور، وفايل وهيتنغ في ألمانيا (الحدسيون الجدد) وغير هؤلاء ممّن ائتلفوا على معارضة المذهبين السابقين، اللوجستيقي والأكسيوماتيكي وهو مذهب لا يمكن إغفاله عند الكلام عن الصلة بين المنطق والرياضة، لأنه يمثل موقف فريق من الرياضيين الذين يعنيهم الأمر في كل بحث يدور حول علمهم الرياضي العريق ولأنهم يعودون بعلمهم إلى أصول غير منطقية هي الأصول "الحدسية".[1]

1- الحدسيون:

هم رياضيون يقولون إن الرياضة لها "مادة" معينة، وإذن فهي ليست صورية بحيث تشتق من المنطق الصوري، وإن تلك المادة إنما تحتاج إلى تجربة من نوع خاص هي الحدس الرياضي، ذلك الحدس التجريبي القبلي الذي هو السبيل الوحيد إلى الكشف الرياضي، وإلى تأسيس الرياضة كعلم أصيل مستقل عن المنطق والأكسيوماتيك معا. "وما المنطق والأكسيوماتيك في نظر هؤلاء إلا الوسيلة العلمية اللاحقة "لاستعراض" أو "شرح" أو "بسط" تلك الكشوف والتجارب الرياضية الأصيلة في صورة واضحة يفهمها الآخرون، الذين لم يكتشفوها فهناك إذن فرق واضح بين مناهج الرياضة وبين عرض الرياضة وتقديمها إلى الآخرين، فالمنابع تجريبية أي حدسية أما العرض اللاحق للتجربة أي للحدس فهو منطقي أو أكسيوماتيكي."الحدس الذي يقدم لنا التصورات الرياضية والاستنباطات الرياضية كأمور أصيلة مباشرة واضحة في ذاتها، وهذا الحدس إن هو إلا المقدرة على معالجة بعض تصوراتنا واستنباطاتنا التي تحدث في تفكيرنا العادي، معالجة منفصلة ومضبوطة ودقيقة".[2] و في هذا يقول هوايتهد: "إن الفلاسفة قد لا يأملون في بعض الأحيان النجاح وهم بصدد صياغة المبادئ الميتافيزيقية الأولى ذلك أن ضعف البصيرة، وعدم التمكن من اللغة قد يقف

[1] محمد ثابت الفندي: أصول المنطق الرياضي، ص 110.

[2] محمد ثابت الفندي: فلسفة الرياضة، ص 161.

حائلا صلبا دون تحقيق هذا الأمل، إن الكلمات والعبارات يجب أن تمتد إلى ما وراء استخدامها العادي لكي تصبح ذات عمومية أكبر، كما يجب ألا تظل صامتة أمام القفزات التخيلية، والواقع أنه ليس ثمة مبدأ أول يستعصي على المعرفة أو يهرب من قبضة البصيرة، لكن صعوبات اللغة ونقص التفسير التخيلي هو الذي يمنع التقدم في هذا المجال".[1]

إن منهج العقلية الخيالية، هو ذلك المنهج المنظم الذي يتبعه العقل ويتكون هذا المنهج من ماهيته الأساسية من البصيرة المباشرة الباحثة عن التعميم.

والحدس عند هنري بوانكاريه: هو الحكم السريع المؤكد، أو التنبؤ الغريزي بالوقائع والعلاقات المجردة، هذا الشعور بالنظام الرياضي يكشف لنا عن العلاقات الخفية".[2]

وحاول هنري بوانكاريه، أن يبرهن على أن الاستدلال الرياضي هو نوع من الاستقراء سماه بالاستدلال التكراري،و " تأمل في المنهج الرياضي وأكد على إثر العديد من المفكرين بأنه قياسي إستنباطي لكنه أضاف شيئا يعد ثوريا وهو القول بالبعد الإسترادادي للمنهج الرياضي".[3]

2- المذهب الحدسي الجديد:

المذهب الحسي الجديد، مذهب المعاصرين، بروور وفايل وهيتنج، الذين تعمقوا فكرة الحدس الرياضي، فأعطوا كلمة الحدس معنى خاصا وضيقا يميز مذهبهم الحدسي الجديد عن المذهب الحدسي عامة، ومذهبهم فيه قلق مبهم ويختلف من مؤلف إلى آخر فلا توجد له وحدة بينهم إلا في القول الغامض أن "الرياضة متحدة الجزء المضبوط للفكر". وهم يقصدون بهذا أن الفكر إذا كان أحيانا "مضبوطا" بالغ الدقة فهذا هو موضوع الرياضة وموضوع الحدس الرياضي.[4]

---

[1] كامل محمد محمد عويضة: ألفريد تورث هوايتهد، فيلسوف العلم والعلماء، الأعلام من الفلاسفة، مراجعة: محمد رجب البيومي، دار الكتب العلمية، بيروت، لبنان، ط1، 1995 ، ص 60.

[2] جميل صليبا: المعجم الفلسفي، ج1، مادة الاستدلال، ص 452.

[3] عبد القادر بشتة: الإبستمولوجيا، مثال فلسفة الفيزياء النيوتينية، دار الطليعة للطباعة والنشر، بيروت، لبنان، ط1، 1995، ص 39.

[4] ثابت الفندي: فلسفة الرياضة، ص 160.

في هذا يقول هوايتهد: " إن معطياتنا هي عالمنا الفعلي الذي يتضمن ذواتنا، وهذا العالم الفعلي ينتشر ويمتد بحيث يمكن ملاحظته ومشاهدته بطريقة تتكون عنها خبراتنا المباشرة، وتوضيح خبراتنا المباشرة هو التبرير الوحيد لأي فكر، ومن ثم فإن نقطة البداية لأي فكر تتمثل في الملاحظة التحليلية لمكونات تلك الخبرة".[1]

ويعتقد هوايتهد أن ثمة رأي يقرر أن الخبرة الشعورية، تكون واضحة وقاطعة من حيث المعرفة، واضحة وقاطعة العناصر، واضحة الإرتباطات والعلاقات بينها وبين بعضها البعض، إن هذا التصور يوحد بمساواة بين خبرات دقيقة مرتبة ومحددة ومنهجية، وليس ثمة رأي أبعد عن الصواب من هذا الرأي، فإن المساواة بين الخبرة وبين المعرفة الواضحة هو أمر بعيد عن الصواب، كما أننا نجد في حياتنا في أي لحظة منها بؤرة من الاهتمامات، بعضها يدرك بوضوح بينما يكون البعض الآخر أقل إدراكا، بينما يكون البعض الثالث منعدم الإدراك، أو يكون في ظلام الإدراك.[2]

3- المذهب الحدسي القديم:

الحدس عند ديكارت هو الإطلاع العقلي المباشر على الحقائق البديهية حيث يقول ديكارت نقلا عن جميل صليبا: أنا لا أقصد بالحدس شهادة الحواس المتغيرة، ولا الحكم الخداع لخيال فاسد المباني، إنما أقصد به التصور الذي يقوم في ذهن خالص منتبه، بدرجة من السهولة والتميز لا يبقى معها مجال للريب.[3]

والحدس عند "شوبنهاور"، هو المعرفة الحاصلة في الذهن دفعة واحدة من غير نظر أو استدلال العقل. و"الحدس عند "هنري برغسون"، عرفان من نوع خاص، شبيه بعرفان الغزيرة، ينقلنا إلى باطن الشيء، ويطلعنا على ما فيه من طبيعة مفردة لا يمكن التعبير عنها بالألفاظ،

[1] كامل محمد محمد عويضة: ألفريد نورث هوايتهد، ص 64.

[2] نفسه: ص 64.

[3] نقلا عن: جميل صليبا: المعجم الفلسفي، الألفاظ العربية والفرنسية والانجليزية واللاتينية، ج1، مادة: الحدس، ص 452.

الحدس هو التعاطف العقلي الذي ينقلنا إلى باطن الشيء".[1] وبديهيات الحدس عند كانت هي مبادئ العقل القبلية المتعلقة بمقولة الكم كقولنا أن لكل ظاهرة من الظواهر المدركة بالحدس مقدارا امتداديا، الأوليات، الضروريات، المبادئ، المسلمات.

إن المذهب الحدسي الجديد هو مذهب المعاصرين من أمثال بروور وفايل وهايتنغ الذين باستنادهم إلى الحدس أخرجوا من الرياضة المعاصرة كل مالا ينبئ به الحدس ليجنبوا عملهم "النقائض الرياضية"، والأخطاء الأخرى التي وقعت فيها الرياضة الحديثة منذ ظهور نظرية جورج كانتور المسماة نظرية المجاميع.[2]

ويعتقد الحدسيون عامة أن أساس مشكلة النقائض في الرياضيات الحديثة هو القول بوجود مجموعات لا متناهية، ولذلك كانت تلك النقائض في الحقيقة والواقع نقائض "اللانهاية"، ومن ثمة تجنب هذه النقائض يستلزم مراجعة فكرة اللانهاية.[3]

ويفند "براور" قانون الثالث المرفوع، حيث لا توجد مثل تلك الطريقة، وهنا يهدم مثلا: البرهان القائل بأن هناك أعدادا حقيقية أكثر من الأعداد النسبية، وأن كل متوالية في سلسلة الأعداد الحقيقية لها نهاية، وترتب على ذلك أن أجزاءًا كبيرة من التحليل التي ظن لقرون كثيرة أنها تقوم على أساس وطيد، قد أصبح مشكوكا فيها ويرتبط بهذه النظرية المذهب المسمى بالنهائية، والذي يضع موضع الشك القضايا التي يدخل فيها مجموعات لا نهائية.[4]

أما "هايتنغ" فيعتقد أن الأمور التي هي موضوع الرياضة، هي أمور مستقلة عن التجربة الخارجية (الحسية) كما أنها ليست صورية بالمرة. ولكنها مع ذلك هي أمور "موضوعية لا توجد مع ذلك إلا في الفكر".[5] "يقول في ذلك : " إن الرياضيات الحدسية بناءات ذهنية، والنظرية الرياضية

---

[1] جميل صليبا: المعجم الفلسفي، الألفاظ العربية والفرنسية والانجليزية واللاتينية، ج1، مادة: الحدس، ص 452.

[2] محمد ثابت الفندي: أصول المنطق الرياضي، ص 111.

[3] محمد عابد الجابري: مدخل إلى فلسفة العلوم، العقلانية المعاصر وتطور الفكر العلمي، ص 112.

[4] برتراند رسل: أصول الرياضيات، ج1، ص 5.

[5] محمد ثابت الفندي: فلسفة الرياضة، ص 161.

تعبر عن حادثة أو ظاهرة محض تجريبية، أي عن النجاح في تشييد بناء معين، فالقضية القائلة إن: "2+2=3+1" يجب أن ينظر إليها بوصفها اختزالا للقضية التالية: "لقد شيدت البناء الذهني الذي يشير إليه "2+2" ثم البناء الذهني الذي تشير إليه: "3+1" قضية قائمة أبدًا أو أنها حقيقة أبدية. يجيب قائلا: "إن جميع الرياضيين حتى الحدسيون منهم مقتنعون بأن الرياضيات تتناول بمعنى ما من المعاني الحقائق الأبدية ولكن عندما نحاول تحديد هذا المعنى بدقة فإننا نسقط في متاهات الصعوبات الميتافيزيقية ولذلك فالطريقة الوحيدة لتجنب هذه المتاهات والصعوبات هي طردها من الرياضيات".[1]

ويرى "بوليغان" أن الحدس الرياضي يعتمد دوما على معارف رياضية سابقة، فلابد فيه من الذاكرة والخيال معا.[2] وأنه من الصعب في الرياضيات، وبعض فروع العلم الأخرى، أن يصرح بقيمتين للقضايا، إما لأنه لا يمكننا أن نبرهن على صدق القضايا أو كذبها، أو لأن نسبة أي من قيمتي الصدق أو الكذب للقضايا يفضي بنا إلى تناقضات، ولقد أثبتت نظرية فيرما صحة هذا الرأي الأخير حين ذهب إلى أنه لا يمكننا أن نحل المعادلة $x^n + y^n = z^n$، في حالة ما إذا كانت ($2<n$) ورغم الجهود التي بذلها الرياضيون فلم يستطع أحدهم إثبات أن نظرية فيرما صادقة أو كاذبة، ومعنى هذا أن المعادلة تتجاوز نطاق مبدأ الثالث المرفوع ولا تخضع له مباشرة.

[1] جميل صليبا: المعجم الفلسفي، الألفاظ العربية والفرنسية والانجليزية واللاتينية، ج1، ص 113.

[2] محمد عابد الجابري: مدخل إلى فلسفة العلوم، العقلانية المعاصر وتطور الفكر العلمي، ص 111.

قائمة المراجع

أولا: قائمة المراجع

1. إبراهيم مصطفى إبراهيم: الفلسفة الحديثة من ديكارت إلى هيوم، [د:ط]، دار الوفاء لدنيا الطباعة والنشر، الإسكندرية، [د:ت].
2. أحمد فؤاد الأهواني، أفلاطون: نوابغ الفكر الغربي، دار المعارف، القاهرة، ط4، 1119.
3. الخوارزمي محمد بن موسى: كتاب الجبر والمقابلة، تقديم وتعليق علي مصطفى ومحمد مرسي أحمد، مطبعة بول يلكية، الجامعة المصرية، [د:ط]، 1938.
4. أميرة حلمي مطر: جمهورية أفلاطون، مطابع الهيئة المصرية العامة،[د:ط]، 1994.
5. إيه سي جرايلينج: برتراند رسل، مقدمة قصيرة جدا، تر: إيمان جمال الدين الفرماوي، مؤسسة هنداوي للتعليم والثقافة، مصر، القاهرة، ط1، 2014.
6. باروخ إسبينوزا: رسالة في اللاهوت والسياسة، تر: حسن حنفي، مراجعة: فؤاد زكريا، دار التنوير للطباعة والنشر والتوزيع، بيروت، ط1، 2005.
7. بول موي: المنطق وفلسفة العلوم، تر: فؤاد حسن زكرياء، دار النهضة، مصر، القاهرة، [د:ط]، [د:ت].
8. بوشنسكي: الفلسفة المعاصرة في أوروبا، تر: عزت قرني، عالم المعرفة، الكويت، ط1، 1992.
9. جورج سارتون: العلم القديم والمدنية الحديثة، تر: عبد الحميد صبرة، تقديم: أحمد فؤاد باشا، إشراف: جابر عصفور، المركز القومي للترجمة، مصر، القاهرة، ط1، 2010.
10. _____: تاريخ العلم، العلم القديم في العصر الذهبي لليونان، ج2، القرن الخامس، تر: جورج حداد وآخرون، إشراف: جابر عصفور، المركز القومي للترجمة، [د.ط]، 2010.
11. _____: تاريخ العلم القديم في العصر الذهبي لليونان، ج3، تر: توفيق الطويل وآخرون، الهيئة العامة لشؤون المطابع الأميرية، القاهرة، مصر،[د:ط]، 2010.

12. _____: تاريخ العلم، العلم والحضارة الهلنستية في القرون الثلاثة الأخيرة قبل الميلاد، ج4، تر: محمد خلف الله أحمد وآخرون، إشراف: جابر عصفور، المركز القومي للترجمة، القاهرة، [د:ط]، 2010.

13. جان بياجي: الإبستمولوجيا التكوينية، تر وتق وتع: السيد نفادى، مر: محمد علي أبو ريان، دار التكوين، بيروت، [د:ط]، 2004.

14. جاكلين ستيدال: تاريخ الرياضيات، مقدمة قصيرة جدا، تر: محمد عبد العظيم سعود، مر: محمد فتحي خضر، مصر، القاهرة، ط1، [د:ت].

15. وو، سوير: متعة الرياضي، الألف كتاب، تر: عطية عاشور، إدوارد ميخائيل، مر: محمد مرسي أحمد، دار سعد، مصر، القاهرة، [د:ط]، [د:ت]

16. يمنى طريف الخولي: فلسفة العلم في القرن العشرين، الأصول- الحصاد- الآفاق المستقبلية، عالم المعرفة، الكويت، ط1، 2000.

17. عبد الحليم منتصر: تاريخ العلم ودور العلماء العرب في تطوره، الهيئة المصرية العامة للكتاب، القاهرة، [د:ط]، 2012.

18. عبد اللطيف يوسف الصديقي: مسألة اللانهائية في الرياضيات، نظرية جورج كانتور، دار الشروق للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، ط1، 1998.

19. عبد السلام بن عبد العالي، محمد سيلا: المعرفة العلمية، دفاتر فلسفة، نصوص مختارة، دار توبقال للنشر، ط2، 1996.

20. عبد القادر بشتة: الإبستمولوجيا، مثال فلسفة الفيزياء النيوتينية، دار الطليعة للطباعة والنشر، بيروت، لبنان، ط1، 1995.

21. عطية عبد السلام عاشور: معجم الرياضيات، Mathematis Dictonary ، مطابع الدار الهندسية، مصر، القاهرة، [د:ط]، 1995.

22. فاضل سلامة شطناوي: أسس الرياضيات والمفاهيم الهندسية الأساسية، دار المسيرة، عمان، الأردن، ط1، 2008.

23. فاروق عبد المعطي: فيثاغورس، فيلسوف علم الرياضيات، دار الكتب العلمية، بيروت، لبنان، ط1، 1994.

24. فيليب فرانك: فلسفة العلم، الصلة بين العلم والفلسفة، تر: علي علي ناصف، المؤسسة العربية للدراسات والنشر، بيروت، ط1، 1983.

25. مارتن هايدغر: السؤال عن الشيء حول نظرية المبادئ الترندنستالية عند كنت تر: إسماعيل المصدق، المنظمة العربية للترجمة، مركز دراسات الوحدة العربية، بيروت، لبنان، ط1، 2012.

26. محمد عابد الجابري: مدخل إلى فلسفة العلوم، العقلانية المعاصرة وتطور الفكر العلمي، مركز دراسات الوحدة العربية، بيروت، لبنان، ط1، 2010.

27. محمد مهران: فلسفة برتراند رسل، دار المعارف، مصر، القاهرة، [د:ط]، 1119.

28. محمد ثابت الفندي: فلسفة الرياضة، دار النهضة العربية، بيروت، ط1، 1969.

29. _____: أصول المنطق الرياضي، دار النهضة العربية، بيروت، [د:ط]، 1976.

30. ماهر عبد القادر محمد علي: التطور المعاصر لنظرية المنطق، دار النهضة العربية للطباعة والنشر، بيروت، لبنان، [د:ط]، 1988.

31. _____: فلسفة العلوم، المنطق الرياضي، ج3، دار النهضة العربية للطباعة والنشر، بيروت، [د:ط]، 1985.

32. مصطفى غالب: برتراند رسل، دار مكتبة الهلال، بيروت، لبنان، [د:ط]، 1986.

33. محمود قاسم: المنطق الحديث ومناهج البحث، مكتبة الأنجلو المصرية، ط2، 1999.

34. مصطفى النشار: نظرية العلم الأرسطية، دراسات في منطق المعرفة العلمية عند ارسطو، دار المعارف، القاهرة، ط2، 1995.

35. كامل محمد محمد عويضة: ألفريد تورث هوايتهد، فيلسوف العلم والعلماء، الأعلام من الفلاسفة، مراجعة: محمد رجب البيومي، دار الكتب العلمية، بيروت، لبنان، ط1، 1995.

36. لويس وولبرت: طبيعة العلم غير الطبيعية، تر: سمير حنا صادق، الهيئة العامة لشؤون المطابع الأميرية، القاهرة، [د:ط]، 2001.

37. رسل برتراند: أصول الرياضيات، ج1، تر: محمد مرسي أحمد وأحمد فؤاد الأهواني، دار المعارف، مصر، [د: ط]، 1958.

38. _____: أصول الرياضيات، ج2، تر: محمد مرسي أحمد وأحمد فؤاد الأهواني، دار المعارف، مصر، [د:ط]، 1958.

39. _____: تاريخ الفلسفة الغربية، الكتاب الثالث، الفلسفة الحديثة، تر: محمد فتحي الشنيطي، المصرية العامة للكتاب، القاهرة، الإسكندرية، [د:ط]، 1977.

40. روبير بلانشي: المنطق وتاريخه من أرسطو حتى رسل، تر: خليل أحمد خليل، المؤسسة الجامعية للدراسات والنشر والتوزيع، بيروت، لبنان، [د:ط]، [د:ت].

41. رضا سعادة: الفلسفة ومشكلات الإنسان، منافذ إلى الحقيقة والحرية والعدالة الاجتماعية، دار الفكر اللبناني، بيروت، لبنان، ط1، 1990.

42. رشدي راشد: موسوعة تاريخ العلوم العربية الجزء الثاني، الرياضيات والعلوم الفيزيائية، بيروت، لبنان، ط1، 2001.

ثانيا: قائمة والموسوعات المعاجم:

1. إبراهيم مدكور: المعجم الفلسفي، الهيئة العامة لشؤون المطابع الأميرية، ، مصر، القاهرة، [د:ط]، 1983.

2. أندريه لالاند: موسوعة لالاند الفلسفية، تعر: خليل أحمد خليل، منشورات عويدات، بيروت، باريس، ط2، 2001.

3. جميل صليبا: المعجم الفلسفي، بالألفاظ العربية والفرنسية والإنجليزية واللاتينية، ج1، مادة الرياضيات، دار الكتاب اللبناني، بيروت، لبنان، ط1، 1982.
4. روزنتال، يودين: الموسوعة الفلسفية، وضع لجنة من العلماء والأكاديميين، تر: سمير كرم، مراجعة: صادق جلال العظم وجورج طرابيشي، دار الطليعة للطباعة والنشر، بيروت، [د:ط]، [د:ت].

فهرست المحتويات

فهرست المحتويات

إهداء

شكر وعرفان

مقدمة.....أ–ب

الفصل الأول: ماهية الرياضيات.....1–25

المبحث الأول: مفهوم الرياضيات وموضوعاتها.....5–7

المبحث الثاني: منهج الرياضيات.....8–9

المبحث الثالث: نشأة الرياضيات.....9–25

الفصل الثاني: أزمة اليقين في الهندسة الاقليدية.....26–48

المبحث الأول: ظهور الهندسات اللاإقليدية.....28–36

المبحث الثاني:ظهور الهندسة التحليلية واكتشاف الدالة المنفصلة.....36–44

المبحث الثالث: مشكلة اللانهائي في الرياضيات.....44–46

المبحث الرابع: نظرية المجموعات ونقائضها.....47–48

الفصل الثالث: تجاوز أزمة الأسس الرياضية في الفكر الفلسفي
المعاصر.....49–76

المبحث الأول: النزعة المنطقانية.....52–65

المبحث الثاني: النزعة الأكسيومية.....65–67

المبحث الثالث: النزعة الحدسانية أو المذهب الحدسي.....68-72

المبحث الرابع: الحلول المقترحة لنقائض نظرية المجموعات.....72-76

خاتمة.....77-80

قائمة المراجع.....81-86

فهرس المحتويات 87-89