



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE
ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de
l'Informatique

Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option: EDP et applications

Thème

Résolution numérique d'un problème d'écoulement potentiel et bidimensionnel
dans une cavité avec tension de la surface

Présentée par:
Melle : SETTA Amel

Soutenu publiquement le : xx/06/2023

Devant le jury composé de:

N. Benhamidouche
N. BOUNAB
W. Delloum

Prof,
M.C.B,
M.A.A,

Université de M'sila
Université de M'sila
Université de M'sila

Président
Encadreur
Examineur

Année universitaire 2022/2023.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :
À mes parents ma mère et mon père
À ma sœur Imane
À mes frères Abdrezzak ,Charuki et Heithem
À mon petit ange Nidhal

Remerciement

Je tiens tout d'abord à remercier Allah le tout puissant et miséricordieux
qui nous a donné

La santé, le courage, la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.
En second lieu je remercie ma famille pour leur soutien morale et physique
et encouragement tout au long des mes études

Je tiens à remercier également mon encadrant Dr. Bounab Noura pour
tout les efforts qu'elle a fourni pour me faciliter et m'aider à accomplir
mon travail.

Je la remercie pour ses conseils avisées qu'ont rendu ce travail possible.

Je tiens à remercier aussi Dr. Saad Abdelkebir pour m'aider
Mes remerciement vont aussi aux membres de jury d'avoir accepté
d'examiner et évaluer mon travail et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon
travail et de l'enrichir par leur propositions

Je remercie également tous les enseignants de département mathématique de
l'université Mohamed Boudiaf de Msila et sans oublier tous ceux qu'ont
contribué de près ou loin à notre formation dans cette département

MERCI

Table des matières

INTRODUCTION GENERALE	i
1 <i>Définition et préliminaires</i>	1
1.1 Définition d'un fluide	2
1.2 Viscosité μ [12]	2
1.3 Les fluides parfaits et les fluides réels [1]	2
1.4 Débit [9]	3
1.5 Les écoulements des fluides [10]	4
1.6 Description d'un fluide en mouvement [9]	5
1.7 Utilisation de la théorie de la variable complexe [3]	7
1.8 quelques équations de la mécanique des fluides	8
1.9 Nombre de weber [18]	14
2 <i>Écoulement avec tension de surface</i>	15
2.1 position de problème	17
2.2 Formulation du problème	18
2.3 Procédure numérique	21
2.4 Comportement de la vitesse au voisinage de point de stagnation	24
2.5 Formulation de la serie	26
2.6 Forme de la surface libre	28
3 <i>Résultats et discussions</i>	30
3.1 Solution sans tension de surface	31
3.2 Transformation de Schwartz-Christoffel [19]	32
3.3 Ligne de courant	34

Conclusion générale	37
Annexe	38
Bibliographie	46

Table des figures

1.3.1 Représentation de la vitesse dans un écoulement parfait et écoulement réel	3
2.1.1 Plan de variable $-z-$	17
2.2.1 Plan de variable $-f-$	20
2.3.1 Plan de variable $-w-$	22
2.6.1 La forme de la surface libre $\alpha = 0.5$	29
3.2.1 Plan de Ω	33
3.2.2 Plan de variable λ	33
3.3.1 La forme de la surface libre $\alpha \gg \gg 100$	35
3.3.2 La forme de la surface libre (solution exact et solution avec tension de surface)	36

NOTATIONS

ρ	Masse volumique
\vec{u}	Le vecteur vitesse
m	La masse
\vec{a}	L'accélération
P	La pression
S	La surface
v	Le volume
n	La normale
f	La force
(x, y)	Le plan
g	Accélération de la pesanteur
w	Nombre de weber
i	Le nombre complexe
z	La variable complexe
T	Tension superficielle
(u, v)	Composantes du vecteur vitesse
ψ	Fonction de courant
ϕ	Fonction potentiel
$M_0(x_0, y_0, z_0)$	Position initial
$\vec{a} = (M_0, t)$	Le vecteur position
ds	élément de surface de normale n
Plan z	le domaine d'écoulement réel
L_c	Longueur caractéristiques

INTRODUCTION GENERALE

La mécanique est la plus ancienne des sciences physiques qui traite du mouvement des corps à l'état stationnaire ou non, soumis à des forces extérieures.

Le domaine de la mécanique qui s'intéresse au corps au repos est appelé la statique alors que celui qui traite des corps en mouvement est appelé la dynamique.

La sous catégorie mécanique des fluides est définie comme la science qui s'intéresse au comportement des fluides au repos (la statique des fluides) ou en mouvement (la dynamique des fluides), ainsi qu'aux interactions des fluides aux interfaces avec des solides ou d'autres fluides. La mécanique des fluides se réfère aussi à la dynamique des fluides en considérant les fluides au repos comme un état particulier du mouvement pour lequel la vitesse est nulle.

La mécanique des fluides est divisée en plusieurs sous-catégories. L'étude du mouvement des fluides pratiquement incompressibles (tels que les liquides et particulièrement l'eau, ou les gaz à faible vitesse) se réfère généralement à l'hydrodynamique. L'hydraulique, qui traite des flux de liquides dans des tuyaux et des conduites ouvertes est une sous-catégorie de l'hydrodynamique. L'aérodynamique quant à elle traite de l'écoulement des gaz (essentiellement l'air) sur des surfaces tels que les avions, les fusées ou les automobiles à grande ou petite vitesse. D'autres catégories spécialisées telles que la métrologie, l'océanographie, et l'hydrologie traitent des écoulements naturels.[Cengel, Yunus A, John M. Cimbala]

En mécanique de fluide , les problèmes des écoulements à surface libre d'un fluide parfait sont étudiés grâce à leur importance d'application dans plusieurs domaines. Les premiers travaux dans ce secteur sont caractérisés par l'utilisation de la méthode d'hodographe et de

la transformation de Schwartz-Christoffel, qui peuvent traiter les écoulements qui ont une géométrie polygonale.

L'écoulement d'un fluide parfait a été étudié par plusieurs chercheurs tel Dias et J.M Vanden-Broeck ; où ont étudié un écoulement en émergeant un bec bidimensionnel sous un angle. Différents problèmes de ce genre ont été étudié par Vanden-Broeck [14] ,H.Mekias et B.Bouderah, A.Gasmi et H.Mekias [4] [5] et N.Bounab [18] [19] et d'autres.

Ce travail est composé de trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré aux définitions et notions préliminaires concernant

la théorie des écoulements potentiels et les équations générales du mouvement de fluide.

Le deuxième chapitre on étudié numériquement un problème d'un écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible et non visqueux devant un obstacle incliné forme avec l'axe $(x'ox)$ un angle $\beta = \frac{\pi}{4}$ et d'hauteur H considérant les forces de la tension de la surface en utilisant la technique de troncation de la série.

Le troisième chapitre est une lecture et discussion des résultats trouvés dans le chapitre précédent et d'autre recherches.

En fin , on a terminé cette manuscrit par une conclusion générale et un annexe.

Chapitre 1

Définition et préliminaires

Résumé

Dans ce chapitre on présente quelques définitions et concepts de base de la mécanique des fluides.

contenu

- 1-1 définition d'un fluide ,viscosité, les fluides parfaits et les fluides réels , la débit
- 1-2 les écoulement des fluide
- 1-3 la trajectoire
- 1-4 Description d'un fluide en mouvement
- 1-5 Utilisation de la théorie de la variable complexe
- 1-6 quelques équations de la mécanique des fluides
- 1-7 Ligne de courant
- 1-8 nombre de weber

1.1 Définition d'un fluide

Un fluide est un milieu matériel continu qui est facilement déformable. les fluides se divisent en deux types :

☞ **Liquide**

Corps peu compressible et dont la masse volumique est importante (eau,huile,.....).

☞ **Gaz**

Corps très compressibles et même extensibles (dioxyde de carbone ,air,.....).

1.2 Viscosité μ [12]

C'est une grandeur qui caractérise les frottement internes des fluides. Elle est due à l'interaction entre les molécules de fluides . Elle caractérise la résistance d'un fluide a son écoulement .Les fluides de faible viscosité s'écoulant facilement

1.3 Les fluides parfaits et les fluides réels [1]

C'est la viscosité qui introduit alors la notion de fluide parfait et fluide réel.

☞ **Un fluide parfait :**

Les fluides en mouvement sans frottement qu'on appelle fluides parfaits ou non visqueux.

$$\mu = 0$$

☞ **Un fluide réel :**

Les fluides en mouvement avec frottement qu'on appelle fluides réel ou fluides visqueux

$$\mu \neq 0$$

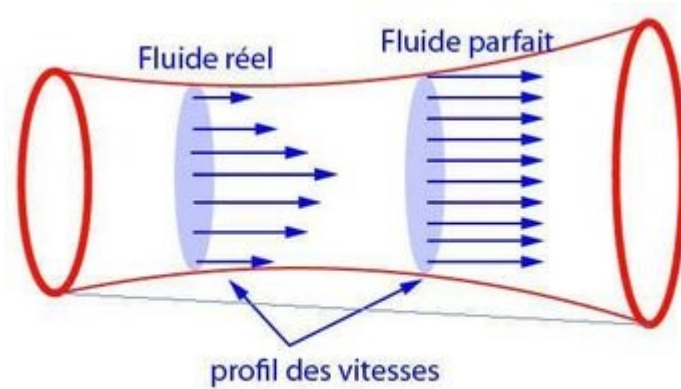


FIGURE 1.3.1 : Représentation de la vitesse dans un écoulement parfait et écoulement réel

1.4 Débit [9]

La débit est la quantité de fluide écoulée pendant le temps.

La quantité peut être définie par un volume ou une masse par conséquent on définit alors :

☞ Débit massique :

C'est la masse de fluide qui traverse une section S donnée par unité de temps donnée par :

$$Q_m = \int \int_s \rho \vec{u} \cdot \vec{n} ds$$

☞ Débit volumique :

C'est la quantité de volume d'un fluide quelconque qui traverse une section S donnée par unité de temps donnée par :

$$Q_v = \int \int_s \vec{u} \cdot \vec{n} ds$$

1.5 Les écoulements des fluides [10]

↳ Écoulement stationnaire

Un écoulement est dit stationnaire (permanent), si les paramètres qui caractérisent le fluide (pression, vitesse, température, masse volumique) sont indépendants du temps en chacun des points de l'écoulement

c'est-à-dire que :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial t} = 0$$

Dans le cas contraire, l'écoulement est dit non-permanent ou in-stationnaire.

↳ Écoulement incompressible

Un écoulement est incompressible si le volume de toute particule de fluide reste constant au cours de son mouvement.

Les particules de fluide ayant une masse constante par construction, leur masse volumique et donc constant au cours de leur écoulement .

$$\rho = cte$$

↳ Écoulement potentiel

On dit que l'écoulement est potentiel si sa vecteur vitesse est dérivé d'un potentiel c'est-à-dire :

$$\vec{u} = \nabla \phi$$

la fonction $\phi(x, y)$ est le potentiel des vitesses

↳ Écoulement irrotationnel

Un écoulement est appelé écoulement irrotationnel si :

$$\text{rot } \vec{u} = 0$$

Un écoulement potentiel est un écoulement irrotationnel.

↳ Écoulement uniforme

un écoulement est dit uniforme si les vitesses de toutes les particules sont les mêmes en tout point du fluide

1.6 Description d'un fluide en mouvement [9]

Il ya deux façons de décrire le mouvement des particules d'un fluide dans un écoulement :

☞ Description de Lagrange

La description Lagrangienne nécessite de surveiller la position et la vitesse de chaque parcelle de fluide individuellement en fonction du temps ,c'est-à-dire chaque particule de fluide.

l'identité d'un particule est donnée par sa position initiale $M_0(x_0, y_0, z_0)$

la description du mouvement est donc de déterminer le vecteur position

$\vec{r} = \vec{r}(M_0, t)$ à tout instant t pour toutes les particules du fluide.

$$\vec{r} = \vec{r}(M_0, t) \quad \text{ou} \quad \vec{r} = \vec{r}(x_0, y_0, z_0, t).$$

c'est-à-dire :

$$x_i = x_i(x_0, y_0, z_0, t).$$

Et

$$\vec{u} = \vec{u}(M_0, t) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}(M_0, t)$$

$$\vec{a} = \vec{a}(M_0, t) = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$$

☞ **remarque**

compte tenu du nombre de particules fluides , cette description n'est pas souvent envisageable

☞ **Description d'Euler**

Dans la description eulérienne de l'écoulement d'un fluide, on définit un élément fini appelé domaine d'écoulement ou élément de volume à travers lequel l'écoulement entre et sort. Nous n'avons pas besoin de connaître la position et la vitesse de la masse des particules de fluide. À la place, nous définissons, à l'intérieur de l'élément de volume, une variable de champ, des fonctions de l'espace et du temps. Par exemple, le champ de pression est une variable de champ scalaire pour les écoulements de fluide non stationnaire dans les coordonnées cartésiennes,

champ de pression : $p = p(x, y, z, t)$

Nous définissons le champ de vitesse comme une variable de champ vectoriel de la même façon,

champ de vitesse : $\vec{u} = \vec{u}(x, y, z, t)$

De même, le champ d'accélération est aussi une variable de champ vectoriel

Champ d'accélération : $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z, t)$

L'ensemble de ces variables de champ définissent le champ d'écoulement.

le champ de vitesse de l'équation peut être développé dans les coordonnées cartésiennes $(x, y, z), (i, j, k)$ selon :

$$\vec{u} = (u, v, w) = u(x, y, z, t) \vec{i} + v(x, y, z, t) \vec{j} + w(x, y, z, t) \vec{k}$$

1.7 Utilisation de la théorie de la variable complexe [3]

Soient ϕ et ψ la fonction potentielle et la fonction de courant respectivement d'un écoulement potentiel bidimensionnel. on rapport le plan d'écoulement au plan complexe en écrivant $z = x + iy$, puis on définit la fonction complexe $f(z)$ par

$$f(z) = \phi + i\psi$$

$f(z)$ est appelé le potentiel complexe de l'écoulement .puisque la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$ vérifient l'équation de laplace ,de plus

On a :

$$\begin{cases} u = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \\ v = -\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial x} \end{cases}$$

Alors les relations de Cauchy Riemann :

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ -\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial x} \end{cases}$$

La théorie des variables complexes offre une méthode ,très puissante pour obtenir des solutions de quelques écoulement .

Si le plan (x, y) est considéré comme plan de $z = x + iy$ la fonction $f(z)$ sera analytique dans le domaine de l'écoulement .de plus la vitesse complexe est définie par :

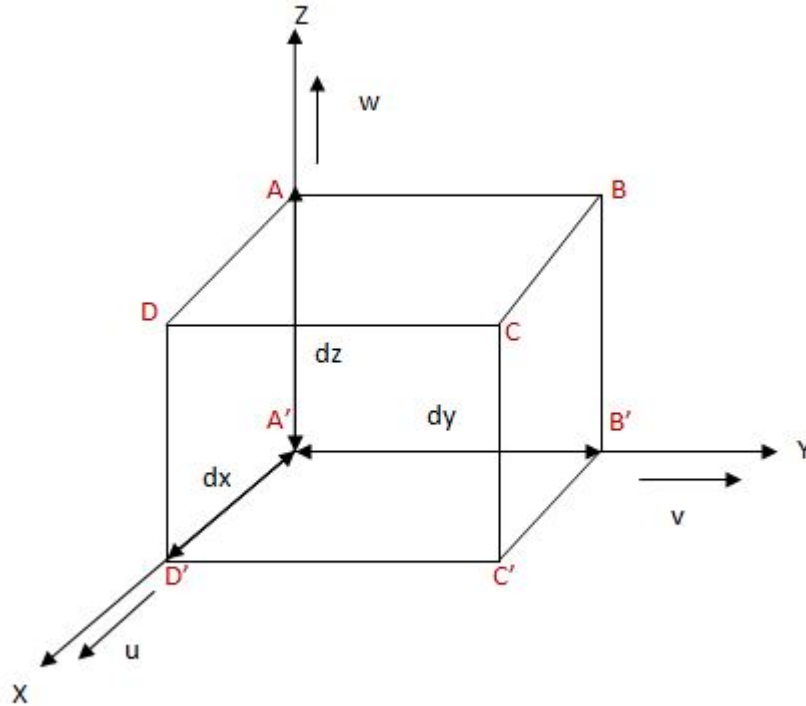
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = u - iv$$

Sera aussi analytique le plan de l'écoulement .cette très importante propriété va nous paramétré d'utiliser ,par suite,la théorie des fonctions analytiques complexe pour résoudre notre problème considéré.

1.8 quelques équations de la mécanique des fluides

☞ équation de la continuité

on définit un volume de contrôle infinitésimal $dx dy dz$



on évalue le débit massique entrant au sortant de chaque face en utilisant le développement de Taylor :

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + o(h)^3$$

le débit massique qui entrant sur la face A B B'A' donner par :

$$Q_m = -\rho \cdot u \cdot dy \cdot dz \quad (1.1)$$

le débit massique qui sortant sur la face D C C'D' (on utilisant le développement de Taylor) alors :

$$Q_{m,s} = (\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx) dy dz \quad (1.2)$$

on fait la somme entre l'équation (1.1) et l'équation (1.2) on obtient :

$$Q_m + Q_{ms} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz \quad (1.3)$$

le débit massique qui entre sur la face A D D' A' donner par :

$$Q_m = -\rho.v.dx.dz \quad (1.4)$$

le débit massique qui sortant sur la face C B B' C' (on utilisant le développement de Taylor) alors :

$$Q_{ms} = (\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy) dx dz \quad (1.5)$$

on fait la somme entre l'équation (1.4) et l'équation (1.5) on obtient :

$$Q_m + Q_{ms} = \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy dx dz \quad (1.6)$$

le débit massique qui entre sur la face A' B' C' D' donner par :

$$Q_m = -\rho.w.dy.dx \quad (1.7)$$

le débit massique qui sortant sur la face A B C D (on utilisant le développement de Taylor) alors :

$$Q_{ms} = (\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz) dy dx \quad (1.8)$$

on fait la somme entre l'équation (1.7) et l'équation (1.8) on obtient :

$$Q_m + Q_{ms} = \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz dy dx \quad (1.9)$$

on fait la somme entre l'équation (1.3) et (1.6) et (1.9) on obtient le débit massique totale alors :

$$Q_{mT} = \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dx dy dz \quad (1.10)$$

alors :

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz = \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dx dy dz$$

on divise par $dx dy dz$ on obtient :

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}$$

alors :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

sous la forme vectorielle :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

c'est l'équation de continuité il s'appelle aussi équation de conservation de la masse
cas particuliers :

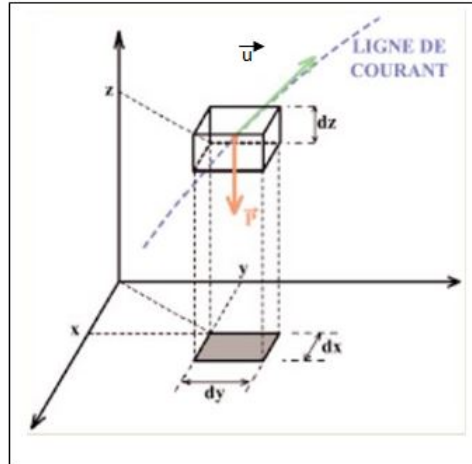
pour un écoulement permanent ou stationnaire $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ alors :

$$\text{div}(\rho \vec{u}) = 0$$

pour un écoulement incompressible $\rho = \text{cte}$ alors :

$$\text{div}(\vec{u}) = 0$$

↳ Équation d'Euler et théorème de Bernoulli [16]



Soit une particule fluide de volume $dv = dx dy dz$ et de masse m .
 Appliquant la Loi de Newton.

$$\sum \vec{F}_{ex} = dm \cdot \vec{a}$$

\vec{F}_{ex} :

Forces de surface (force de pression)

Force de volume (poids)

Alors l'équation d'Euler

$$dp + \rho \cdot \vec{u} \cdot d\vec{u} + \rho \cdot g \cdot dz = 0$$

Par intégration de cette équation entre deux points 1 et 2 sur une ligne de courant on aura :

$$\int_1^2 dp + \int_1^2 \rho \cdot u \cdot du + \int_1^2 \rho \cdot g \cdot dz = cte$$

$$p_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u_1^2 + \rho \cdot g \cdot z_1 = p_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u_2^2 + \rho \cdot g \cdot z_2$$

Alors :

$$p + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u^2 + \rho \cdot g \cdot z = cte$$

C'est le théorème de Bernoulli pour un fluide parfait incompressible

☞ Équations différentielles des fonctions ψ et ϕ [3]

Soit un écoulement bidimensionnel, irrotationnel et stationnaire d'un fluide incompressible non-visqueux. puisque :

$$\vec{u} = \text{grad } \phi$$

Et

$$\text{div } \vec{u} = 0$$

Il vient que :

$$\text{div}(\text{grad } \phi) = 0$$

D'où

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

c'est à dire :

$$\Delta \phi = 0$$

De même ,d'après :

$$\vec{u} = (u, v) = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}\right)$$

Et

$$\text{rot } \vec{u} = 0$$

On trouve :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

D'où

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

C'est à dire

$$\Delta \psi = 0$$

1.9 Nombre de weber [18]

Le nombre de weber α est un nombre sans dimension utilisé en mécanique des fluides pour caractériser l'écoulement de fluides à l'interface d'un système multiphasique .

Il correspond au rapport des forces d'inertie et la tension de surface.on le définit de la manière suivante :

$$\alpha = \frac{\rho u^2 . L_c}{T}$$

Le nombre de weber est principalement utilisé pour l'étude la formation de gouttes ou bulles.

Chapitre 2

Écoulement avec tension de surface

Résumé

Dans ce chapitre , nous étudions les effets de la tension superficielle. Car les solutions exactes sont difficiles à calculer, nous résolvons le problème par une approche numérique dite la méthode de troncation de la série.

Enfin.nous discutons des résultats obtenus.

contenu

- 2-1 Position de problème
- 2-2 Formulation du problème
- 2-3 Procédure numérique
- 2-4 Comportement de la vitesse au voisinage de point de stagnation
- 2-5 Formulation de la série
- 2-5 Forme de la surface libre

2.1 position de problème

Considérons un écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible et non visqueux devant un obstacle incliné forme avec l'axe ($x'ox$) un angle $\beta = \frac{\pi}{4}$ et d'hauteur H , l'écoulement est supposé uniforme de vitesse U . Comme il est indiqué par la figure suivante :

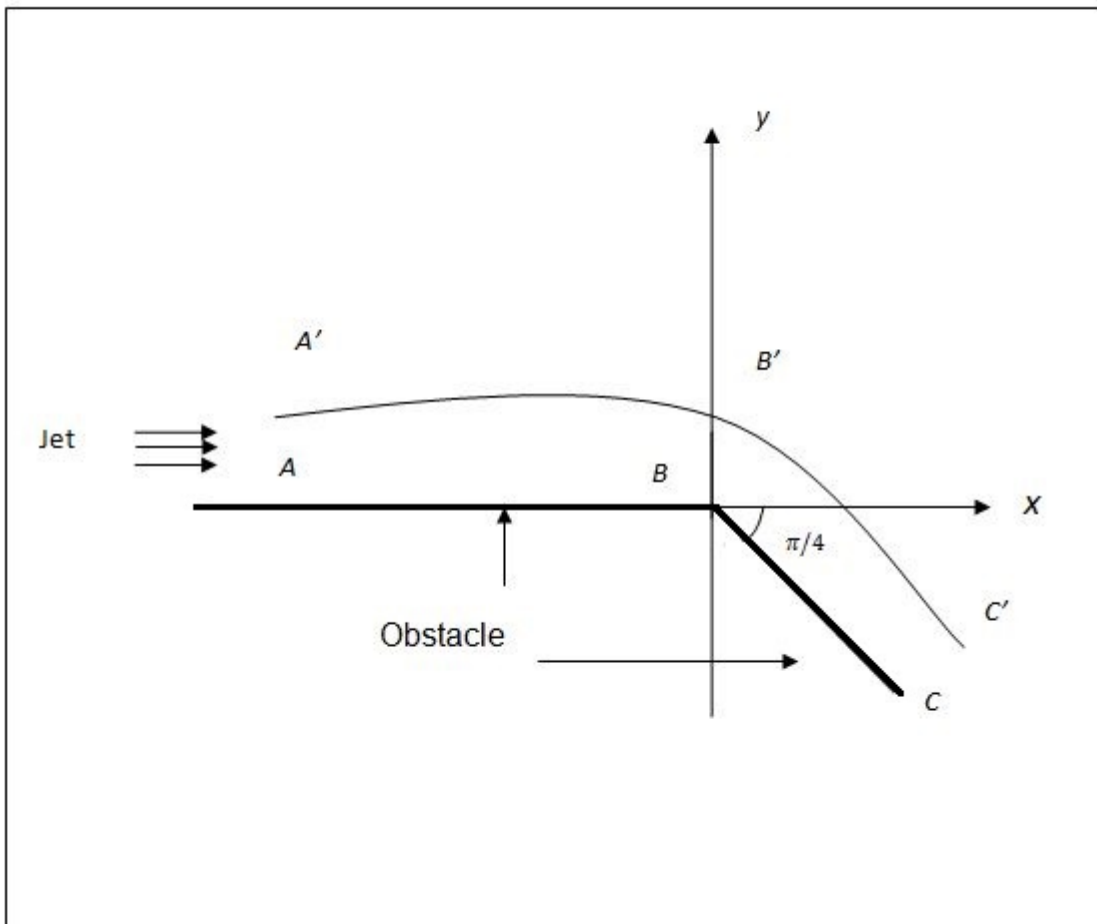


FIGURE 2.1.1 : Plan de variable $-z$ -

2.2 Formulation du problème

On a un écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible et non visqueux devant un obstacle incliné forme avec l'axe $(x'ox)$ un angle $\beta = \frac{\pi}{4}$ et d'hauteur H , l'écoulement est supposé uniforme de vitesse U .

Tel que la ligne de courant libre et la surface libre est indiquée par $(A'B'C')$ on note $\xi = u - iv$ tel que u, v sont les composantes du vecteur vitesse et par

$$f = \phi + i\psi$$

La fonction potentiel complexe où ϕ, ψ sont respectivement la fonction potentiel et la fonction de courant.

Les conditions sur le plan f est $\phi = 0$ au point $(0,0)$. $\psi=0$ sur $A B C$ $\psi=HU$ sur $(A'B'C')$

L'équation de Bernoulli sur la surface libre $(A'B'C')$ est donnée par :

$$\frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{\alpha}K = \frac{1}{2} \quad \text{sur} \quad (A'B'C') \quad (2.1)$$

Où α représente le nombre de Weber, q est la vitesse d'écoulement, et K est la courbure de la surface libre.

Et puisque $\xi = u - iv$ est analytique. On définit la fonction $\tau - i\theta$ par la relation :

$$\xi = u - iv = \exp(\tau - i\theta) \quad (2.2)$$

Où θ est l'angle entre le vecteur vitesse et l'horizon, la suppression de la courbure k donne :

$$\vec{u} = \exp(\tau)(\cos \vec{\theta}_i - \sin \vec{\theta}_j)$$

Et dans les coordonnées curvilignes

$$\vec{u} = u \cdot \vec{u}_T$$

Où $\vec{u}_T = (\cos \vec{\theta}_i + \sin \vec{\theta}_j)$ est le vecteur unitaire tangentiel

$$\begin{aligned}\vec{u}_n &= R \cdot \frac{d\vec{u}_T}{ds} = R \cdot \frac{d\vec{u}_T}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \\ \vec{u}_n &= R \cdot \exp(\tau) \left(\frac{\partial \theta}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{d\vec{u}_r}{d\theta} \\ \vec{u}_n &= R \cdot \exp(\tau) \left(\frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right) (\cos \vec{\theta}_j - \sin \vec{\theta}_i)\end{aligned}$$

\vec{u}_n :est le vecteur unitaire normal et, ds représente l'élément de longueur sur la surface libre , R le rayon de courbure de la surface libre.

Finalement ,on obtient :

$$k = \frac{1}{R} = \exp(\tau) \left| \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right|$$

On remplace k par sa valeur dans l'équation (2.1)on trouve :

$$\frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{\alpha} \exp(\tau) \left| \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right| = \frac{1}{2}$$

D'autre part , on sait que $\theta(\phi)$ est une fonction croissante ($-\infty < \phi < +\infty$) sur la surface libre ($A'B'C'$), donc l'équation de Bernoulli dans le plan f s'écrit :

$$\exp(2\tau) - \frac{2}{\alpha} \exp(\tau) \left| \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right| = \frac{1}{2} \quad \text{sur } (A'B'C') \quad (2.3)$$

Avec les conditions :

$$\begin{cases} \psi = 0 , & \phi < 0 \quad \text{sur } A B \\ \psi = 0 , & \phi > 0 \quad \text{sur } B C \end{cases} \quad (2.4)$$

Le problème mathématique est de déterminer la fonction $\tau - i\theta$ qui est analytique dans la bande $0 < \psi < H = 1$ et qui vérifie les conditions (2.3) (2.4)

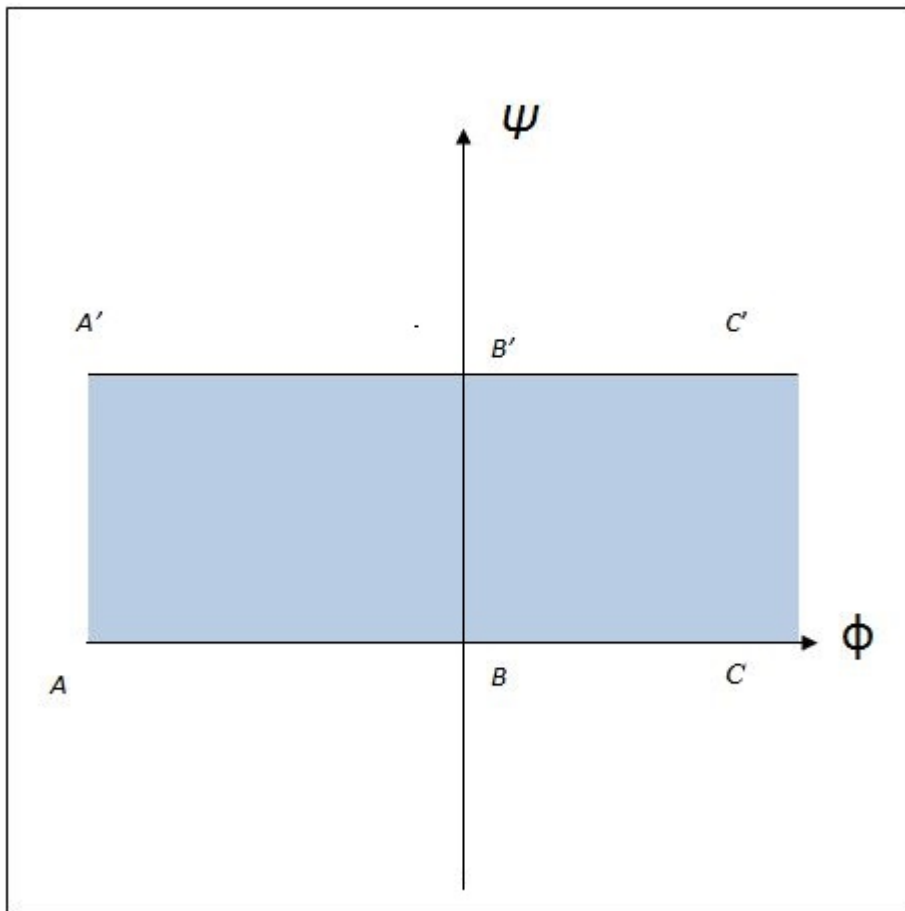


FIGURE 2.2.1 : Plan de variable-f-

2.3 Procédure numérique

Pour résoudre numériquement ce problème , nous appliquons la technique de troncation de la série .

On transforme le domaine occupé par le fluide dans le plan f . En un demi disque unité dans le plan de la variable w [Figure(2.3.1)]

Par la transformation :

$$f = \frac{2}{\pi} \log\left(\frac{1-w}{1+w}\right) \quad (2.5)$$

Les points $A' B' C'$ et $A B C$ dans le plan f sont transformés respectivement aux points

$C' = C$	$(-1,0)$
$A = A'$	$(+1,0)$
B	$(0,0)$
B'	$(0,-1)$

La surface libre ($A'B'C'$) et transformée en un demi disque [Figure(2.3.1)]

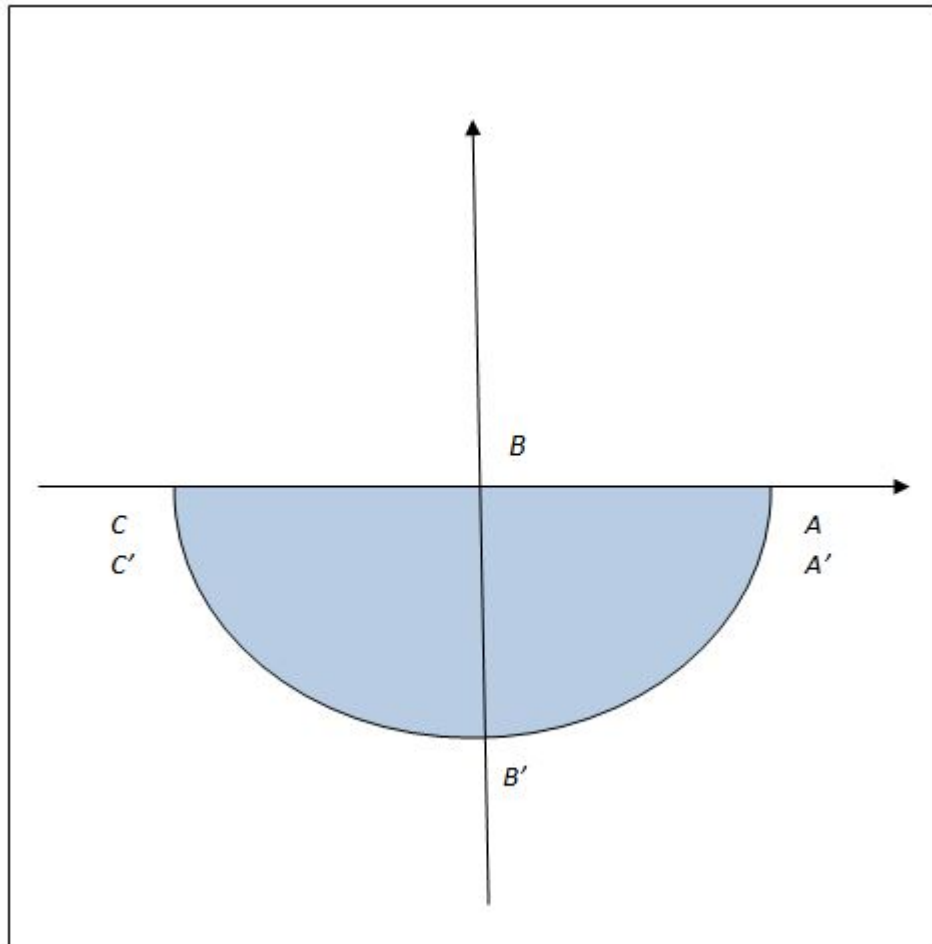


FIGURE 2.3.1 : Plan de variable $-w$

Les points de la surface libre dans le plan w sont donnés par la relation

$$w = \exp(i\sigma) \quad \text{telque} \quad -\pi < \sigma < \pi \quad (2.6)$$

Et dans le plan f par la relation :

$$f = \phi, \quad -\infty < \phi < +\infty \quad (2.7)$$

Pour résoudre le problème, il faut écrire l'équation

$$\frac{1}{2}\exp(2\tau) - \frac{1}{\alpha}\exp(\tau) \left| \frac{\partial\theta}{\partial\phi} \right| = \frac{1}{2} \quad \text{sur} \quad (A'B'C')$$

En substituant (2.6) dans (2.5) on trouve

$$f = \phi = \frac{2}{\pi} \log(-i \tan(\frac{\sigma}{2}))$$

Ce qui implique que :

$$df = d\phi = \frac{2}{\pi \sin(\sigma)} d\sigma$$

D'où

$$\frac{\partial\phi}{\partial\sigma} = \frac{2}{\pi \sin(\sigma)} \quad (2.8)$$

D'autre part on a sur la surface libre :

$$\left| \frac{\partial\theta}{\partial\phi} \right| = \left| \frac{\partial\theta}{\partial\sigma} \cdot \frac{\partial\sigma}{\partial\phi} \right| = \frac{\pi \sin(\sigma)}{2} \cdot \frac{\partial\theta}{\partial\sigma}$$

Alors , l'équation de Bernoulli sur la surface libre $(A'B'C')$

$$\exp(2\tau) + \frac{\pi}{\alpha} \sin(\sigma) \exp(\tau) \frac{\partial\theta}{\partial\sigma} = 1 \quad (2.9)$$

2.4 Comportement de la vitesse au voisinage de point de stagnation

Au point B il y a un écoulement avec un angle égale à $\gamma = \frac{5\pi}{4}$ dans le plan z donc l'écoulement est caractérisé par la fonction de potentiel suivante :

$$f \approx \frac{a}{n}.z^n \quad \text{telque} \quad n = \frac{\pi}{\alpha} = \frac{\pi}{\frac{5\pi}{4}} = \frac{4}{5} \quad (2.10)$$

Alors :

$$f \approx \frac{5a}{4}z^{\frac{4}{5}}, \quad z \rightarrow 0 \quad (2.11)$$

Donc :

$$\xi = \frac{df}{dz} \approx a.z^{-\frac{1}{5}}, \quad z \rightarrow 0 \quad (2.12)$$

Et on a :

$$f = \phi = \frac{2}{\pi} \log\left(\frac{1-w}{1+w}\right) \quad \text{sur } (A'B'C') \quad (2.13)$$

Alors :

$$\frac{2}{\pi} \log\left(\frac{1-w}{1+w}\right) = \frac{5a}{4}z^{\frac{4}{5}}$$

Ce qui implique

$$z^{\frac{4}{5}} = \frac{8}{5a\pi} \log\left(\frac{1-w}{1+w}\right) \quad (2.14)$$

de(2.11)et(2.12) on a

$$z \approx \left(\frac{8}{5a\pi} \log\left(\frac{1-w}{1+w}\right)\right)^{\frac{5}{4}} \quad z \rightarrow 0$$

D'où

$$\xi = a \left(\left(\frac{8}{5a\pi} \log\left(\frac{1-w}{1+w}\right) \right)^{\frac{5}{4}} \right)^{-\frac{1}{5}} \quad w \rightarrow 0$$

Alors :

$$c_1 = a \left(\frac{8}{5a\pi} \right)^{\frac{-1}{4}}$$

Le développement de la fonction potentiel complexe f au voisinage du point $w = 0$ est donné par :

$$f \approx w + o(w^2) \tag{2.15}$$

2.5 Formulation de la serie

Nous définissons la fonction $\xi(w)$ comme suite :

$$\xi(w) = g(w).\Omega(w)$$

où $g(w)$ contient les singularités et les zéros, la fonction $\Omega(w)$ est analytique , elle se développe en série c'est à dire :

$$\xi(w) = g(w).\exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.w^n\right)$$

où $g(w)$ contient les singularités et les zéros de ξ au point B donc :

$$\xi = u - iv = (w)^{\frac{-1}{4}}.\exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k.w^{2k}\right) \quad (2.16)$$

où les a_k sont des constantes réelles à déterminer.L'équation (2.16) vérifié toutes les conditions aux limites

$$\exp(2\tau) + \frac{\pi}{\alpha}.\sin(\sigma).\exp(\tau)\frac{\partial\theta}{\partial\sigma} = 1 \quad \text{sur}(A'B'C')$$

On déterminer a_k de sorte que l'équation de Bernoulli soit vérifiée

On substituant l'équation :

$$w = \exp(i\sigma) = e^{i\sigma} \quad -\pi < \sigma < \pi$$

dans l'équation (2.16) on obtient

$$\exp(\tau - i\theta) = (e^{i\sigma})^{\frac{-1}{4}}.\exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k.e^{2i\sigma k}\right)$$

Ce qui implique que :

$$\exp(\tau - i\theta) = \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k.\cos(2\sigma k) + i\left(\frac{-\sigma}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k.\sin(2k\sigma)\right)\right)$$

En séparant la partie réelle et la partie imaginaire , on trouve :

La partie réelle :

$$\tau(\sigma) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2k\sigma) \quad (2.17)$$

La partie imaginaire :

$$\theta(\sigma) = \frac{\sigma}{4} - \left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sin(2k\sigma) \right) \quad (2.18)$$

En substituant (2.17) et (2.18) dans (2.9) sur la surface libre on trouve :

$$\exp\left(2 \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2k\sigma)\right) + \frac{\pi}{\alpha} \cdot \sin(\sigma) \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2k\sigma)\right) \cdot \left(\frac{1}{4} - \sum_{k=1}^{+\infty} 2ka_k \cos(2k\sigma)\right) = 1 \quad (2.19)$$

Pour déterminer les coefficients a_k on fait une troncation de la série après N termes .
ainsi on introduit la discrétisation de l'intervalle I .

$I = [-\pi, 0]$ en $N + 1$ points.

$$\sigma(I) = \frac{-\pi}{2(N+1)} \left(I - \frac{1}{2}\right), \quad I = 1, 2, \dots, N+1 \quad (2.20)$$

on utilisons (2.19) et (2.20) on obtient un système de $N + 1$ équation à $N + 1$ inconnus

$$\exp\left(2 \sum_{k=1}^N a_k \cos(2k\sigma(I))\right) + \frac{\pi}{\alpha} \cdot \sin(\sigma(I)) \exp\left(\sum_{k=1}^N a_k \cos(2k\sigma(I))\right) \cdot \left(\frac{1}{4} - \sum_{k=1}^N 2ka_k \cos(2k\sigma(I))\right) = 1 \quad (2.21)$$

On utilise la méthode de Newton pour résoudre ce système.

2.6 Forme de la surface libre

Après avoir trouvé les coefficients a_k , la forme de la surface libre est déterminée comme suite :

De la relation

$$\frac{1}{u - iv} = \exp(-\tau + i\theta) = \frac{\partial x}{\partial \phi} + i \frac{\partial y}{\partial \phi} \quad (2.22)$$

Avec

$$dz = dx + idy = \exp(-\tau + i\theta)(d\phi + id\psi) \quad (2.23)$$

Où $\psi = 0$ sur la surface libre

On a

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \phi} = \exp(-\tau) \cos \theta \\ \frac{\partial y}{\partial \phi} = \exp(-\tau) \sin \theta \end{cases} \quad (2.24)$$

Et

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \sigma} = \frac{\partial x}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial y}{\partial \sigma} = \frac{\partial y}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \end{cases} \quad (2.25)$$

On trouve :

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \sigma} = \exp(-\tau) \cos \theta \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial y}{\partial \sigma} = \exp(-\tau) \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \end{cases} \quad (2.26)$$

En substituant (2.17).(2.18) et (2.8) dans (2.26) on trouve : $\frac{\partial x}{\partial \sigma}, \frac{\partial y}{\partial \sigma}$ en chaque point $\sigma_I, I = 1, \dots, N + 1$

D'où :

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \sigma}(\sigma(I)) = \frac{2}{\pi \sin(\sigma(I))} \exp\left(-\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2k\sigma(I))\right) \cos\left(\frac{\sigma(I)}{4} - \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sin(2k\sigma(I))\right) \\ \frac{\partial y}{\partial \sigma}(\sigma(I)) = \frac{2}{\pi \sin(\sigma(I))} \exp\left(-\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2k\sigma(I))\right) \sin\left(\frac{\sigma(I)}{4} - \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sin(2k\sigma(I))\right) \end{cases} \quad (2.27)$$

$$I = 1, \dots, N + 1$$

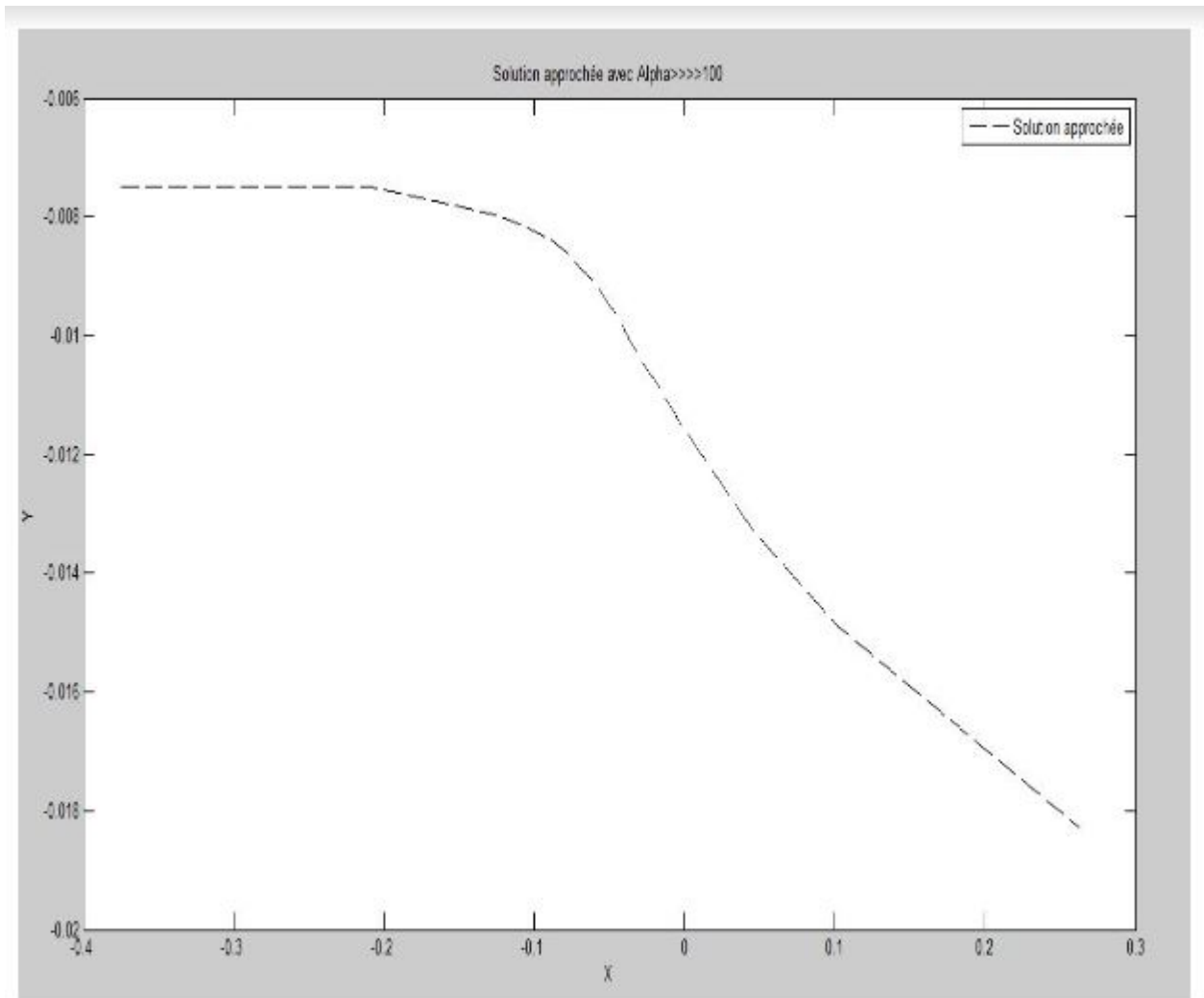


FIGURE 2.6.1 : La forme de la surface libre $\alpha = 0.5$

Chapitre 3

Résultats et discussions

3.1 Solution sans tension de surface

Lorsque la tension de surface libre est négligée , le nombre de weber tend vers l'infini et l'équation (2.9) devient :

$$\exp(2\tau) = u^2 + v^2 = 1 \quad \text{sur la surface libre} \quad (3.1)$$

et le système (2.21) se réduit à :

$$\exp\left(2 \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2k\sigma(I))\right) = 1 \quad I = 1, \dots, n+1 \quad (3.2)$$

Où : $\sigma(I)$ est donnée par le relation(2.20).

On peut trouver cette solution exacte aussi analytiquement en appliquant la méthode introduite par kirchoff avec les lignes de courant et la transformation de Schwartz-Christoffel [figure(3.3.1)]

3.2 Transformation de Schwartz-Christoffel [19]

On considère un polygone [figure(3.2.1)] dans le plan Ω , ayant pour sommets A_1, A_2, \dots, A_n et pour angle intérieurs respectivement $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Soit A_1, A_2, \dots, A_n les points correspondant respectivement à $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de l'axe réel du plan des λ [figure(3.2.2)]. Transformation de Schwarz-Christoffel, transforme l'intérieur d'un polygone en demi-plan supérieur (ou inférieur) d'un autre plan.

La transformation est donnée par :

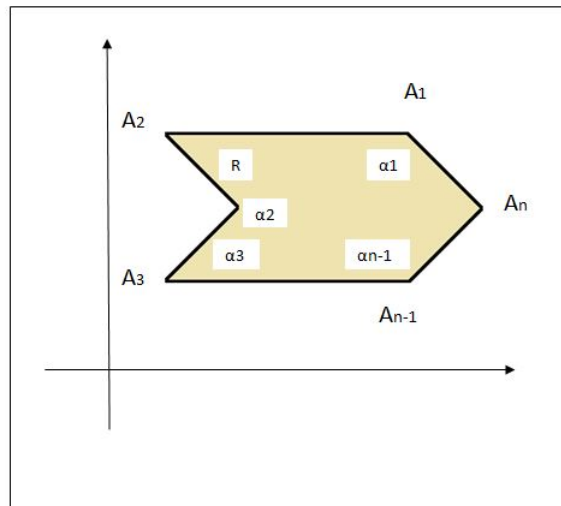
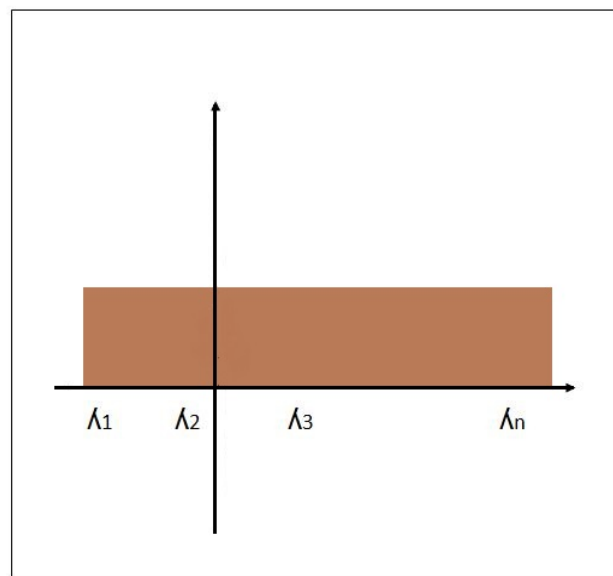
$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = \alpha(\lambda - \lambda_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} (\lambda - \lambda_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1} \dots (\lambda - \lambda_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi} - 1} \quad (3.3)$$

ou bien

$$\Omega = \alpha \int (\lambda - \lambda_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} (\lambda - \lambda_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1} \dots (\lambda - \lambda_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi} - 1} + \beta \quad (3.4)$$

ou α et β sont des constantes complexes .On notera que :

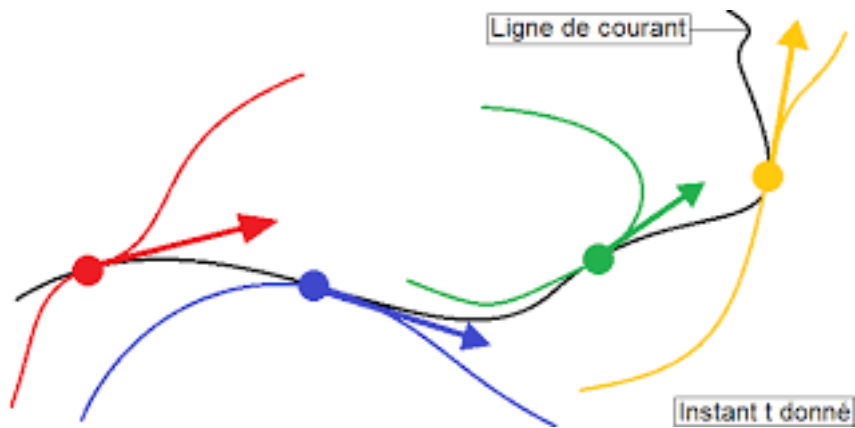
1. Parmi les points $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ on peut choisir trois arbitrairement.
2. Les constantes α et β déterminent l'orientation et la position du polygone.
3. Il est commode de choisir un point, par exemple λ_n , à l'infini, cas dans lequel facteur de (3.4) n'existe pas.
4. Des polygones infinis non fermés peuvent être considérés comme des cas limités de polygones.

FIGURE 3.2.1 : Plan de Ω FIGURE 3.2.2 : Plan de variable λ

3.3 Ligne de courant

On appelle ligne de courant la courbe qui, en chacun de ses points, est tangente au vecteur vitesse. son équation différentielle s'écrit :

$$\frac{dx}{u(x,y,z)} = \frac{dy}{v(x,y,z)}$$



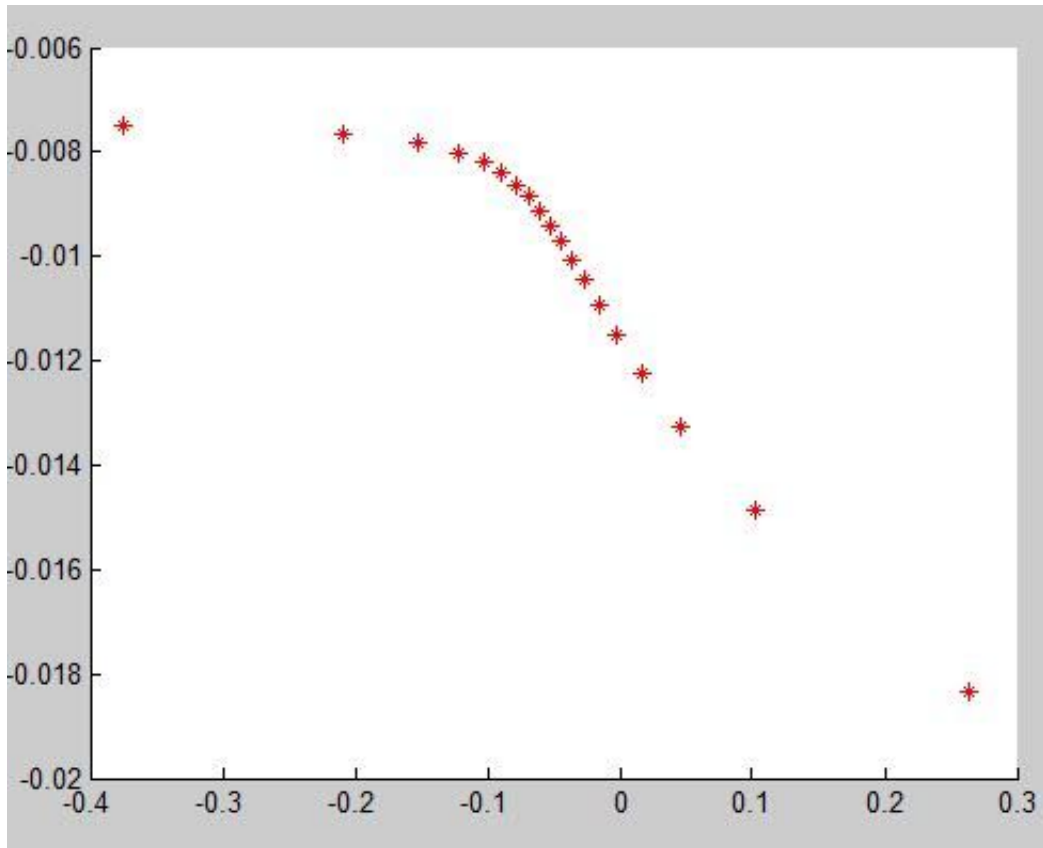


FIGURE 3.3.1 : La forme de la surface libre $\alpha \gg \gg 100$

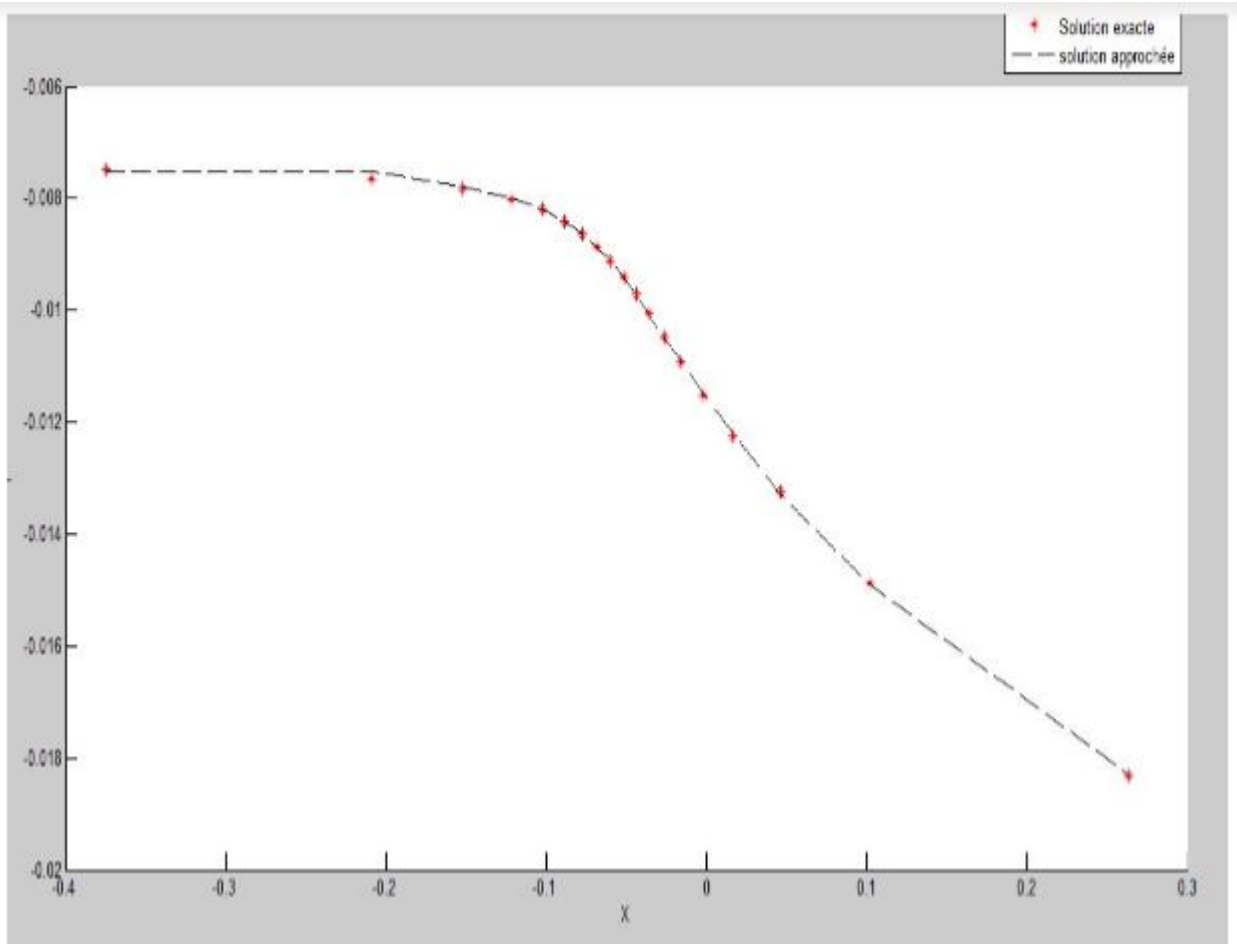


FIGURE 3.3.2 : La forme de la surface libre (solution exact et solution avec tension de surface)

La forme de la surface libre en négligent la tension de surface et les forces de gravité dans notre problème, la forme est déjà trouvée par un autre auteur ou on a fait une comparaison présentée dans la [figure (3.3.2)]

Alors, on remarque que les deux solutions coïncident. C'est dire la forme de la surface libre calculée numériquement coïncide avec la solution analytique.

Conclusion générale

Dans ce modeste travail on a étudié numériquement un problème d'écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible et non visqueux devant un obstacle incliné forme avec l'axe $(x'ox)$ un angle $\beta = \frac{\pi}{4}$ en utilisant la technique de troncation de la série. on a pu trouver la solution approché pour tout $\alpha \geq \tilde{\alpha}$ où $\tilde{\alpha} = 0.5$

On distingue qu'a partir de ce point critique pour $\alpha \leq \tilde{\alpha}$ le processus numérique diverge et des ondes qui apparaissent sur la surface libre.

On conclut ,alors que le problème considéré admet une solution unique pour tout $\alpha \geq \tilde{\alpha}$ la solution pour $\alpha \rightarrow \infty$ donne la même forme de la surface libre qui a déjà trouver analytiquement par la méthode des transformation conforme c-à-d que les deux graphes sont confondus.

Notre perspective est calculer la forme de surface libre lorsque les forces de gravites sont inclus ,toujours dans ce cas là un autre paramétré sera incluse qui,est le nombre de Froud et cela avec d'autre approches numériques , ou bien si on change la géométrie du domaine de l'écoulement.

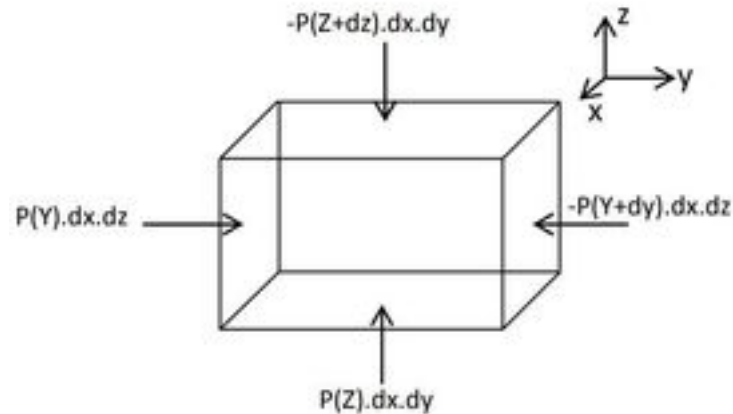
Annexe

contenu

- 1.présentation de l'équation d'Euler et Bernoulli
- 2.méthode de newton
- 3.Algorithme de Newton pour la résolution de systèmes non linéaire

$$f(x) = 0$$

- 4.Algorithme de Jordan avec pivotation totale implicite



Beaucoup de problèmes de la mécanique des fluides ne comportent pas de mouvement. Ils concernent la répartition de la pression dans un fluide statique et son effet sur les surfaces solides et sur les corps flottants et les corps submersible soit un élément fluide de forme parallélépipédique de volume $dV = dx dy dz$ et de masse volumique ρ (voir figure)

On distingue deux types de forces :

- ☞ **Les forces des surface** : sont des forces de pression puisque'on ne considère que les situations dans lesquelles le fluide est au repos ou uniformément accéléré.
- ☞ **Les forces de volume** se résument à la seule force de pesanteur, c'est-à-dire le poids $d\vec{F}_g$

$$d\vec{F}_g = dm \vec{g} = \rho \vec{g} dV$$

\vec{g} : l'accélération de la pesanteur

ρ : la masse volumique du fluide

dm : la masse de l'élément fluide

A l'équilibre (au repos) on a : (Loi de Newton)

$$\sum \vec{F}_{ex} = \vec{0}$$

Suivant z :

$$p(z)dxdy - p(z + dz)dxdy - \rho g dxdydz = 0$$

Avec $p(z)$ et $p(z + dz)$ sont respectivement les pressions sur la face inférieure et la face supérieure de l'élément fluide .un développement de $p(z + dz)$ au premier ordre nous donne

$$p(z + dz) = p(z) + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)dz$$

Donc

$$p(z)dxdy - p(z)dxdy - \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)dxdydz - \rho g dxdydz = 0$$

Alors :

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)dxdydz = \rho g dV$$

Alors

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

Par analogie ,suivant les autres directions ,on trouve :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0; \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

Équation d'Euler et théorème de Bernoulli

Soit une particule fluide de volume $dv=dx dy dz$ et de masse

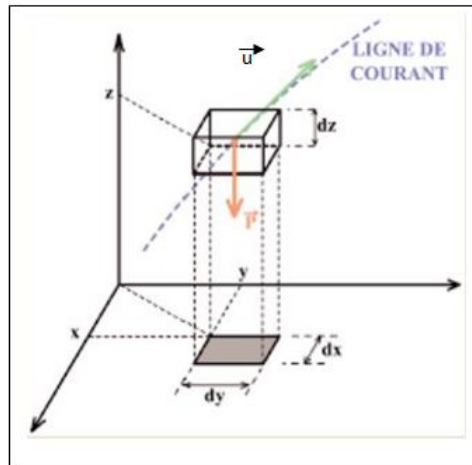
Appliquant la Loi de newton.

$$\sum \vec{F}_{ex} = dm \cdot \vec{a}$$

\vec{F}_{ex} :

Forces de surface (force de pression)

Force de volume (poids)



On a :

$$\vec{u} = (u, v, w)$$

$$\vec{du} = (du, dv, dw)$$

Pour un fluide immobile :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0; \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

pour un fluide en mouvement : par projection

Sur l'axe ox :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \cdot \frac{du}{dt}$$

Sur l'axe oy :

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = \rho \cdot \frac{dv}{dt}$$

Sur l'axe oz :

$$-\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} = \rho \cdot \frac{dw}{dt}$$

Sachant que :

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

$$dp = \left(-\rho \cdot \frac{du}{dt}\right)dx + \left(-\rho \cdot \frac{dv}{dt}\right)dy + \left(-\rho g - \rho \cdot \frac{dw}{dt}\right)dz$$

$$dp = -\rho \cdot du \frac{dx}{dt} - \rho \cdot dv \frac{dy}{dt} - \rho \cdot dw \frac{dz}{dt} - \rho \cdot g \cdot dz$$

$$dp = -\rho \cdot u \cdot du - \rho \cdot v \cdot dv - \rho \cdot w \cdot dw - \rho \cdot g \cdot dz$$

On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{d}u = u \cdot du + v \cdot dv + w \cdot dw$$

Alors :

$$dp = -\rho \cdot \vec{u} \cdot \vec{d}u - \rho \cdot g \cdot dz$$

$$dp + \rho \cdot \vec{u} \cdot \vec{d}u + \rho \cdot g \cdot dz$$

C'est l'équation d'Euler

Par intégration de cette équation entre deux points 1 et 2 sur une ligne de courant on aura :

$$\int_1^2 dp + \int_1^2 \rho \cdot u \cdot du + \int_1^2 \rho \cdot g \cdot dz = cte$$

$$p_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u_1^2 + \rho \cdot g \cdot z_1 = p_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u_2^2 + \rho \cdot g \cdot z_2$$

Alors :

$$p + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u^2 + \rho \cdot g \cdot z = cte$$

C'est le théorème de Bernoulli pour un fluide parfait incompressible

Dans notre problème ,on utilisé la méthode de Newton pour la résolution d'un système non linéaire avec l'algorithme de Jordan avec pivotation total implicite.Dans cet annexe, on donne une description de la méthode utilisée.

méthode de Newton

Dans la présente section , on considéré le problème de recherche d'une solution au système d'équation :

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Q'on peut écrire $f(x) = 0$,où f et x sont deux vecteurs à n composantes.on suppose que f est de classe C^1 sur un certain ouvert convexe D. La matrice

$$E(x) = \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right)_{i,j=1,\dots,n}$$

Est appelée jacobienne de f au point x .

Le développement de Taylor au voisinage d'une approximation x^* de x s'écrit :

$$f(x) = f(x^*) + E(x^*)(x - x^*) + R(x^*, x - x^*)$$

où

$$R(x^*, x - x^*) = (x - x^*) \int_0^1 (E(x^* + t(x - x^*)) - E(x^*)) dt$$

Ainsi, ou voisinage de x^* l'expression linéaire :

$$f_*(x) = f(x^*) + E(x^*)(x - x^*)$$

est une bonne approximation de $f(x)$. Il est clair qu'une meilleure approximation de la solution x que x^* peut être obtenue en résolvant l'équation :

$$f_*(x) = 0$$

C'est à dire

$$f(x^*) + E(x^*)(x - x^*) = 0$$

En suivant la procédure précédente, la méthode générale de Newton consiste prendre une approximation initiale x_0 à la solution x , puis tenter à l'améliorer itérativement comme suite :

$$x_{k+1} = x_k - S_k^{-1} \cdot f_k \quad k = 1, 2, \dots, n$$

En prenant $f_k = f(x_k)$ et avec la définition de la matrice jacobienne

$$S_k = E(x_k)$$

on continue jusqu'à ce que $|f_i(x_{k+1})| < \epsilon$

Algorithme de Newton pour la résolution de système non linéaire $f(x) = 0$:

Étant donné

1. calculer

$$E_{ij}^{(k)} = \left. \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right|_{x=x_k}$$

$$f_i^{(k)} = -f_i(x_k)$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, n$$

2. Résoudre le système linéaire

$$\sum_{j=1}^n E_{ij}^{(k)} \Delta X_j^{(k)} = f_i^{(k)} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

3. Calculer

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \Delta X_i^{(k)} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

4. Si

$$|f_i(x_{k+1})| < \epsilon \quad i = 1, 2, \dots, n$$

est vérifié, arrêter

Algorithme de Jordan avec pivotation totale implicite :

choix du pivot

$$P_k = a_{l_k c_k} \quad \text{où} \quad a_{l_k c_k} = \max_{ij} |a_{ij}|$$

$$i = 1, n \quad i \neq l_1, l_2, \dots, l_{k-1}$$

$$j = 1, n \quad j \neq c_1, c_2, \dots, c_{k-1}$$

Normalisation

$$a_{lkj} = \frac{a_{lkj}}{P_k} \quad j = 1, n+1$$

Réduction

$$w = a_{ij}$$

$$a_{ij} = a_{ij} - w \cdot a_{lkj} \quad j = 1, n + 1$$

$$i = 1, n \quad \text{et} \quad i \neq l_k$$

Remise en ordre

$$x_{ck} = a_{lk, n + 1}$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

Bibliographie

- [1] Abd-lefdil,Errouгани.Mécanique Des Fluides.Université mohammed A-Agdal,Rabat,2013-2014
- [2] Amara, Adam, and A. Gasmi. “The effect of surface tension on the jet flow in u-shaped channel.” *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 118, no. 3, Academic Publications, Apr. 2018, p. 625.
- [3] Ancey, christophe. *Analyse Différentielle Outils Mathématiques pour la Dynamique Des Fluides*.École Polytechnique Fédérale de Lausanne,Écublens.
- [4] A. Gasmi and H. Mekias, A jet from a container and flow past a vertical flat plate, *Appl. Math, Sci.* 1 (2007), 2687-2698.
- [5] A. Gasmi and H. Mekias, The effect of surface tension on the contraction coefficient of a jet, *J. Phys. A,Math. Gen.* 36 (2003), 851-862
- [6] A.R. Elcrat and L.N. Trefthen, Classical free-streamline flows over a polygonal obstacle, *J. Comp and Applied Math.* 14 (1986), 256-265.
- [7] Bekrentchir,khalida .Mécanique Des Fluides.Université des sciences et de la technologie Mohamed Boudiaf-Oran.
- [8] Binder, Benjamin J., and Jean-Marc Vanden-Broeck. “Free Surface Flows Past Surfboards and Sluice Gates.” *European Journal of Applied Mathematics*, vol. 16, no. 05, Cambridge UP, Feb. 2006, p. 601.
- [9] Cengel, Yunus A, John M. Cimbala. *Mécanique Des Fluides*. De Boeck Supérieur, 2017.
- [10] C. Grossetête. *Mécanique des fluides*, Ellipses, Paris, (1991).

- [11] Dias, Frédéric, and Paul Christodoulides. “Ideal Jets Falling Under Gravity.” *Physics of Fluids*, vol. 3, no. 7, American Institute of Physics, July 1991, pp. 1711–17.
- [12] Douadi, Salim. *Mécanique Des Fluides*. Université de Bordj Bou Arréridj, Bordj Bou Arréridj, 2015.
- [13] F. Toison and J. Hureau, Potential flow issuing from a two-dimensional curved nozzle, *Phys. Fluids*. 13(3) (2001), 793-798.
- [14] J. M. Vanden-Broeck. The influence of surface tension on cavitating flow past a curved obstacle, *J. Fluid Mech.* 133 (1983), 255-264.
- [15] J. Roussel-E. N. S. C. R. *Mécanique des fluides* (2010).
- [16] khorsi, Azzeddine. *Notions Fondamentales Des Fluides*. Université d’oran, oran.
- [17] M. Damou. *Mécanique des fluides*, (O. P. U), (1993)..
- [18] N. Bounab and B. Bouderah, Computing Solution of the Flow due to a Nozzle. *I. J of computer Application*, 67 (13) (2013), 14-18.
- [19] N. Bounab, *Simulation numérique de quelques écoulements potentiels en 2D ” Curved Nozzle”*, Thèse Doctorat. (2015).

Résumé :

Dans ce mémoire, on a étudié numériquement l'effet de la tension de surface sur un écoulement d'un fluide parfait devant un obstacle incliné forme avec l'horizontale un angle $\beta = \frac{\pi}{4}$ on appliquant la technique de troncation de la série.

Mots-clés : fluide parfait, troncation de la série, nombre de weber

Abstract:

In this thesis, we have numerically studied the effect of the surface tension on a flow of a perfect fluid in front of an inclined obstacle formed with the horizontal angle $\beta = \frac{\pi}{4}$ by applying the technique of truncation series

Key-words: Ideal flow, truncation of the series, number of Weber

ملخص:

في هذه المذكرة قمنا بدراسة عددية لتأثير التوتر السطحي لتدفق سائل مثالي أمام عائق مائل يصنع مع الأفق زاوية وذلك بتطبيق تقنية السلاسل

الكلمات المفتاح: سائل مثالي , تقنية السلاسل, عدد ويبر