



---

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF - M'SILA  
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE  
DÉPARTEMENT DES MATHÉMATIQUES

---



N° d'ordre:.....

# THÈSE

*Présentée pour l'obtention du diplôme  
de Doctorat en sciences*

## Spécialité

*Mathématiques*

## Option

*Analyse fonctionnelle*

## Par

Aissa LAKHAL

## Thème

---

**Etude du point fixe de kannan sur les équations fonctionnelles**

---

Soutenue le 09/04/2025 devant le jury composé de :

KHIRANI Amina	MCA	Université de M'sila	Président
NADIR Mostefa	Prof	Université de M'sila	Encadreur
RAHMOUNE Azedine	Prof	Université de BBA	Examineur
ZEGHDANE Rebiha	MCA	Université de BBA	Examineur
CHEMCHAM Madani	MCA	Université de Biskra	Examineur
GAGUI Bachir	MCA	Université de M'sila	Examineur

Année Universitaire : 2024/2025

# Remerciements

Je remercie **ALLAH**, qui m'a donné la force, la santé et la volonté de commencer et de terminer cette thèse.

Tout d'abord, J'adresse mes remerciements au directeur de thèse de doctorat le professeur, **MOSTEFA NADIR** pour ses conseils et son aide dans ce travail et aux professeurs **KHIRANI Amina** **RAHMOUNE Azedine** **CHEMCHAM Madani** **ZEGHDANE Rebiha** **GAGUI Bachir** qui m'ont honoré d'avoir accepté d'être membres du jury.

Je tiens à remercier mon collègue **Mohamed Nasseh NADIR** pour son aide efficace, sans oublier mes collègues et amis, ainsi tous ceux qui ont participé de loin ou de près à l'élaboration de ce travail.

## Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A ma famille.

A tous mes amis.

A mes collègues et tous ceux qui m'ont soutenu.

---

# NOTATIONS

$\mathbb{R}^n$	Espace euclidien de dimension $n$
$L^p$	Espaces de Lebesgue $1 \leq p$
$C^0$	Ensemble des fonctions continues
$C^\ell$	Ensemble des fonctions k-ieme dérivé et continues
$C^\infty$	Ensemble des fonctions indéfiniment dérivables
$\perp$	Symbole de la perpendicularité
$P_M$	Opérateur de projection.
$A_n$	Suite d'opérateurs.
$\omega$	Une fonction de poids
$H_n$	Polynôme de <i>Hermite</i>
$\widehat{H}_n$	Transformée de Fourier de $H_n$
$L_n$	Polynôme de <i>Laguerre</i>
$P_n^{(\alpha,\beta)}$	Polynôme de <i>Jacobi</i>
$T_n = T_n^1$	Polynôme de <i>Tchebychev</i> de premier espèce
$U_n = T_n^2$	polynôme de <i>Tchebychev</i> de seconde espèce
$V_n = T_n^3$	polynôme de <i>Tchebychev</i> de troisième espèce
$W_n = T_n^4$	polynôme de <i>Tchebychev</i> de quatrième espèce
$S_n$	polynôme extrait de $T_n^i \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}$

---

# Liste des tableaux

**Tableau 1 :** Les résultats précis et approximatifs de l'exemple 1 en quelques points arbitraires, en utilisant le premier polynôme de Tchebychev  $T_n(x)$ .

**Tableau 2 :** Les résultats précis et approximatifs de l'exemple 2 en quelques points arbitraires, en utilisant le deuxième polynôme de Tchebychev  $U_n(x)$ .

**Tableau 3 :** Les résultats précis et approximatifs de l'exemple 3 en quelques points arbitraires, en utilisant le troisième polynôme de Tchebychev  $V_n(x)$ .

**Tableau 4 :** Les résultats précis et approximatifs de l'exemple 4 en quelques points arbitraires, en utilisant le quatrième polynôme de Tchebychev  $W_n(x)$ .

---

# Liste des figures

**Figure 1** : Comparaison des solutions exactes et approximatives -**Tableau 1**.

**Figure 2** : Comparaison des solutions exactes et approximatives -**Tableau 2**.

**Figure 3** : Comparaison des solutions exactes et approximatives -**Tableau 3**.

**Figure 4** : Comparaison des solutions exactes et approximatives -**Tableau 4**.

.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Rappels d'analyse fonctionnelle</b>	<b>3</b>
1.1 Espaces fonctionnelle . . . . .	3
1.1.1 Espaces de Banach . . . . .	3
1.1.2 Espace de Hilbert . . . . .	7
1.1.3 Orthogonalité . . . . .	11
1.2 Opérateurs linéaires bornés . . . . .	18
1.2.1 Linéarité des opérateurs . . . . .	18
1.2.2 Continuité des opérateurs linéaires . . . . .	18
1.2.3 Opérateurs bornés . . . . .	18
1.2.4 Espaces isomorphes . . . . .	19
1.2.5 Espaces isométriques . . . . .	19
1.2.6 Normes équivalentes . . . . .	19
1.2.7 Opérateurs compacts . . . . .	20
1.2.8 Ensembles relativement compacts . . . . .	20
1.2.9 Opérateurs intégraux . . . . .	21
<b>2 Orthogonalité des polynômes de Tchebychev et le théorème du point fixe de Kannan</b>	<b>27</b>
2.1 Polynômes de Tchebychev . . . . .	27
2.1.1 Orthogonalité des polynômes de Tchebychev . . . . .	27
2.2 Les polynômes classiques . . . . .	29

2.2.1	Les polynômes de Hermite . . . . .	30
2.2.2	Les polynômes de Laguerre . . . . .	31
2.2.3	Les polynômes de Jacobi . . . . .	32
2.2.4	Polynômes de première espèce de Tchebyshev . . . . .	33
2.2.5	Polynômes de seconde espèce de Tchebyshev . . . . .	35
2.2.6	Polynômes de troisième espèce de Tchebychev . . . . .	36
2.2.7	Polynômes de quatrième espèce de Tchebychev . . . . .	38
2.2.8	Propriétés communes . . . . .	39
2.3	Théorème du point fixe de Kannan . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Les équations intégrales et leurs classification</b>	<b>43</b>
3.1	Equations intégrales . . . . .	43
3.2	Classification des équations intégrales . . . . .	43
3.2.1	Equations intégrales de Fredholm . . . . .	43
3.2.2	Equations intégrales de Volterra . . . . .	44
3.2.3	Equations intégrales de Volterra-Fredholm . . . . .	45
3.3	Existence et unicité de la solution des équations intégrales linéaires de Volterra-Fredholm . . . . .	45
3.4	Théorème d'existence et d'unicité . . . . .	46
3.5	Méthodes de projection . . . . .	48
3.5.1	Opérateurs de projection . . . . .	48
3.5.2	Méthode de Galerkin . . . . .	49
3.6	Méthode de collocation . . . . .	50
3.7	Analyse des équations intégrales linéaires de Volterra-Fredholm. . . . .	51
3.7.1	La méthode des solutions sous forme de séries . . . . .	51
3.7.2	La méthode de décomposition d'Adomian . . . . .	52
<b>4</b>	<b>Application des polynomes de Tchebychev sur les équations intégrales de Volterra-Fredholm</b>	<b>54</b>
4.1	Extraction des systemes polynomial orthonormées des polynomes de Tchebychev . . . . .	55

4.1.1	Polynômes de première espèce de Tchebychev . . . . .	55
4.1.2	Polynômes de seconde espèce de Tchebychev . . . . .	55
4.1.3	Polynômes de troisième espèce de Tchebychev . . . . .	56
4.1.4	Polynômes de quatrième espèce de Tchebychev . . . . .	56
4.2	Réduction de l'équation intégrale . . . . .	56
4.3	Exemples numériques . . . . .	59
	<b>Conclusion générale</b>	<b>65</b>

# Introduction

Les équations intégrales jouent un rôle essentiel dans l'étude de nombreux phénomènes scientifiques, tels que la biologie mathématique, la cinétique chimique et la dynamique des fluides. Par exemple, certaines équations issues de la dynamique des ondes à la surface de l'eau peuvent être transformées en équations intégrales de Volterra-Fredholm du second type à partir d'une équation différentielle ordinaire du second ordre avec des conditions aux limites. Elles prennent la forme suivante :

$$\Psi(x) - \int_a^x \ell_1(x, \mu) \Psi(\mu) d\mu - \int_a^b \ell_2(x, \mu) \Psi(\mu) d\mu = f(x)$$

Avec  $\ell_1(x, \mu)$ ,  $\ell_2(x, \mu)$  et  $f(x)$  des fonctions données,  $\ell_1(x, \mu)$  et  $\ell_2(x, \mu)$  des noyaux bornés en  $a \leq x, \mu \leq b$ , la fonction  $\Psi(x)$  est la fonction inconnue à déterminer.

De nombreux auteurs se lancent dans la résolution de ce genre d'équations. Diverses méthodes sont utilisées, où l'on trouve une méthode des moindres carrés mobiles et des polynômes de Tchebychev dans [2] et une décomposition d'Adomian utilisée dans [3]. Les auteurs dans [7, 8, 9] utilisent les suites de Tchebychev, d'Euler et des méthodes numériques quadratiques afin de résoudre les équations intégrales de Fredholm. Dans [4, 10], les auteurs ont estimé la fonction solution au moyen de Legendre et des premiers polynômes de Tchebychev.

Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'application des polynômes de Tchebychev à la résolution des équations intégrales de Volterra-Fredholm, où nous avons utilisé la théorie du point fixe de Kannan. L'objectif est d'améliorer la précision des solutions et de proposer une analyse approfondie des performances des méthodes numériques basées sur ces polynômes.

Au cours de la dernière décennie, des avancées notables ont été réalisées dans l'étude des équations intégrales et du point fixe de Kannan, parmi lesquelles :

- Des développements en analyse fonctionnelle et dans la théorie des points fixes.
- De nouvelles extensions du théorème du point fixe de Kannan dans des espaces métriques plus généraux.
- Des études récentes sur les points fixes dans les espaces vectoriels de Banach et de Hilbert, favorisant une meilleure convergence et stabilité des méthodes numériques.

Dans le but d'atteindre les objectifs visés, ce travail est réparti en quatre chapitres :

Le premier chapitre présente les notions et propositions fondamentales relatives aux espaces de Banach et de Hilbert, à l'orthogonalité, ainsi qu'à la théorie des opérateurs linéaires bornés et compacts.

Le deuxième chapitre porte sur l'orthogonalité des polynômes de Tchebychev et des polynômes classiques, et aborde le théorème du point fixe de Kannan.

Le troisième chapitre est dédié à la classification des équations intégrales, ainsi qu'à l'étude de l'existence et de l'unicité des solutions des équations de type Volterra-Fredholm en s'appuyant sur le théorème du point fixe de Kannan. Ce chapitre examine également diverses méthodes de projection, telles que la collocation, Galerkin, Ritz-Galerkin, Bubnov-Galerkin et Petrov-Galerkin, en plus de la résolution analytique par séries convergentes.

Le quatrième chapitre s'intéresse à la solution numérique du problème linéaire des équations intégrales de Volterra-Fredholm de deuxième espèce, en recourant à des polynômes orthonormés extraits des polynômes de Tchebychev des première, deuxième, troisième et quatrième espèces.

# Chapitre 1

## Rappels d'analyse fonctionnelle

### 1.1 Espaces fonctionnelle

#### 1.1.1 Espaces de Banach

**Définition 1.1.1** Soit  $E$  un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{k}$  ( $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) On appelle norme sur  $E$  une application  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  qui vérifie les propriétés suivantes :

- 1)  $\forall \xi \in E, \|\xi\| = 0 \iff \xi = 0.$
- 2)  $\forall \xi \in E, \forall \gamma \in \mathbb{k}, \|\gamma\xi\| = |\gamma| \|\xi\|.$
- 3)  $\forall \xi, \nu \in E, \|\xi + \nu\| \leq \|\xi\| + \|\nu\|.$

ainsi  $(E, \|\cdot\|)$  devient un espace vectoriel normé.

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \quad & \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ & (\xi_1, \xi_2) \rightarrow \|\cdot\| = |\xi_1| + |\xi_2| \end{aligned}$$

$\|\cdot\|$  est une norme sur  $\mathbb{R}^2$  on note  $\|\xi\| = \|\xi\|_1$

**Remarque 1.1.1** D'une manière générale si

$$\begin{aligned} \|\cdot\| & : E \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x & \rightarrow \|x\| \end{aligned}$$

est une norme sur  $E$ , on note  $\|x\| = \|x\|_E$

**Exemple 1.1.1** Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ , avec  $a < b$ , et considérons l'espace  $E = C^0[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{continue sur } [a, b]\}$ .

L'application

$$\begin{aligned} \|\cdot\| & : C^0[a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ f & \rightarrow \int_a^b |f(x)| dx \end{aligned}$$

est une norme sur  $E = C^0[a, b]$ .

Nous noterons cette norme par

$$\|f\|_E = \|f\|_1 = \|f\|_{L^1([a; b])}$$

**Remarque 1.1.2**  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a; b]} |f(x)|$  définit une norme sur  $E = C^0[a, b]$ .

**Proposition 1.1.1** Si  $(E, \|\cdot\|_E)$  est un espace vectoriel normé alors pour tout  $x, y \in E$ , nous avons l'inégalité :

$$\forall x, y \in E, \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|.$$

**Preuve.**  $\forall x, y \in E$  on a

$$-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

on obtien donc

$$\forall x, y \in E, \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|.$$

■

**Proposition 1.1.2** Tout espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$  est métrisable.

**Preuve.** Quelque soit  $\mu, \vartheta \in E$  on définit la fonction  $\Pi$  par

$$\Pi(\mu, \vartheta) = \|\mu - \vartheta\|.$$

Cette fonction est clairement une métrique sur  $E$ . ■

### Suite de Cauchy

Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans un espace normé  $(E, \|\cdot\|_E)$ , on dit que  $(x_n)_n$  est une suite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N_\varepsilon, \|x_p - x_q\|_E < \varepsilon$$

**Remarque 1.1.3** 1) Toute suite de Cauchy dans  $E$  est borné.

2) Si  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy dans un espace normé  $(E, \|\cdot\|_E)$  alors toute sous-suites  $(x_{\Psi(n)})_n$  est une suite de Cauchy.

3) Toute suite convergente est de Cauchy.

**Proposition 1.1.3** Soit  $(x_n)_n$  une suite de Cauchy et  $(x_{\Psi(n)})_n$  est une sous-suite de  $(x_n)_n$  convergeante vers  $x \in E$  alors,  $(x_n)_n$  converge vers  $x$ .

**Preuve.** On a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p, \forall q \in \mathbb{N}, p \geq N_\varepsilon, \Psi(q) \geq N_\varepsilon \implies \|x_p - x_{\Psi(q)}\|_E < \frac{\varepsilon}{2}$$

et aussi on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N'_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}, \Psi(q) \geq N'_\varepsilon \implies \|x_{\Psi(q)} - x\|_E < \frac{\varepsilon}{2}$$

d'où

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists N''_\varepsilon = \max(N_\varepsilon, N'_\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall p, \forall q \in \mathbb{N}, p \geq N''_\varepsilon, \Psi(q) \geq N''_\varepsilon \\ \implies \|x_p - x\|_E = \|x_p - x_{\Psi(q)} + x_{\Psi(q)} - x\|_E \leq \|x_p - x_{\Psi(q)}\|_E + \|x_{\Psi(q)} - x\|_E < \varepsilon \end{aligned}$$

on obtient

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N''_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, p \geq N''_\varepsilon \implies \|x_p - x\|_E < \varepsilon$$

D'où la suite  $(x_n)_n$  converge vers l'élément  $x$  de  $E$ . ■

**Définition 1.1.2** (Espace complet) Un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$  est dit complet, si toute suite de Cauchy  $(x_n)_n$  d'éléments de  $E$  converge dans  $E$ .

Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N_\varepsilon, \quad p \geq N_\varepsilon, q \geq N_\varepsilon \Rightarrow \|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

Cela implique qu'il existe un élément  $x \in E$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$$

**Définition 1.1.3** (*Espace de Banach*) Soit  $(E, \|\cdot\|_E)$  un espace vectoriel normé on dit que  $E$  est un espace de Banach s'il est complet.

**Exemple 1.1.2**  $C^0([a, b]) = \{f : C^0([a, b]) \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continue sur } [a, b]\}$ .

On munit  $C^0([a, b])$  de la norme  $\|f\|_{C^0([a, b])} = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ .  $C^0([a, b])$  est un espace complet donc de *Banach*.

**Exemple 1.1.3** On peut aussi définir une autre norme sur  $C^0([a, b])$ ,  $\|f\|_1 = \|f\|_{L^1([a, b])} = \int_a^b |f(x)| dx$ ,  $(C^0([a, b]), \|\cdot\|_1)$  n'est pas un Banach.

### Généralisation

On définit l'espace  $L^p([a, b])$  par :

$$L^p([a, b]) = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est mesurable et } f^p \in L^1([a, b]) \right\}, \quad p \geq 1$$

avec

$$L^1([a, b]) = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est mesurable et } \int_a^b |f(x)| dx < \infty \right\}$$

$L^p([a, b])$  munit de la norme  $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L^p}$  définie par :  $\|f\|_p = \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$  est un espace de *Banach* pour  $p \geq 1$

**Proposition 1.1.4** Soit  $(E, \|\cdot\|_E)$  un espace de Banach et  $F \subset E$ . Alors,

$F$  est fermé  $\Leftrightarrow F$  contient les limites de ses suites de Cauchy

**Preuve.** On sait que  $F$  est fermé dans  $E$  si toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $F$  convergente admet sa limite dans  $F$ .

Sens direct : Supposons que  $F$  est fermé. Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy de  $F$ . Comme  $F \subset E$ , cette suite est aussi de Cauchy dans  $E$ . Or  $(E, \|\cdot\|_E)$  est un Banach donc toute suite de Cauchy y est convergente. Il existe donc  $x \in E$  tel que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ , Puisque  $F$  est fermé il contient les limites des suites de  $F$  qui convergent dans  $E$ , donc  $x \in F$ .

Sens réciproque : Supposons maintenant que  $F$  contient les limites de ses suites de Cauchy. Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $F$  qui converge vers un élément  $x \in E$ . Or  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy car convergente et  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset F$  donc  $x \in F$  d'où  $F$  est fermé. ■

## 1.1.2 Espace de Hilbert

### Produit scalaire

**Définition 1.1.4** Soit  $E$  un  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel ( $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) un produit scalaire sur  $E$  est une application :

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E &\rightarrow \mathbb{k} \\ (x, y) &\rightarrow \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

vérifiant les propriétés suivantes:

- 1)  $\forall (x, y, z) \in E^3, \forall \gamma \in \mathbb{k}, \langle \gamma x + y, z \rangle = \gamma \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- 2)  $\forall (x, y) \in E^2, \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- 3)  $\forall x \in E - \{0_E\}, \langle x, x \rangle > 0$
- 4)  $\forall x \in E, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$

**Remarque 1.1.4** a) grace a la propriété 2)  $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0$  on peut poser  $\|x\|_E = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

b) D'après la propriété 1) on obtient l'inégalité de Cauchy Schwartz :

$$\forall x, y \in E, |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

A partir de cette inégalité on déduit la sous-additivité :

$$\|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E$$

c) La sous-additivité ainsi que les propriétés 2), 3) et 4) montrent que  $\|\cdot\|_E$  est bien une norme sur  $E$  ( $\|x\|_E = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ ).

**Définition 1.1.5** (Espace préhilbertien) un espace préhilbertien est un espace normé dont la norme est issue d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Définition 1.1.6** (Espace de Hilbert) un espace vectoriel  $E$  est un Hilbert s'il est normé, complet, dont la norme est issue d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . C'est-à-dire, soit  $\|\cdot\|_E$  la norme de  $E$ , il existe

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\rightarrow \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

produit scalaire sur  $E$ , tel que  $\|x\|_E = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .

**Proposition 1.1.5** Soit  $E$  un espace de Hilbert pour la norme  $\|\cdot\|_E$  il existe produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  tel que  $\sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|_E$ , alors  $\|\cdot\|_E$  vérifiée l'identité du parallélogramme:

$$\forall (x, y) \in E^2 : \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

**Preuve.**  $\forall x \in E : \|x\|_E = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  donc

$$\begin{aligned} \|x + y\|_E^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|_E^2 + \|y\|_E^2 + 2\langle x, y \rangle \\ \|x - y\|_E^2 &= \langle x - y, x - y \rangle = \|x\|_E^2 + \|y\|_E^2 - 2\langle x, y \rangle \end{aligned}$$

par addition on obtient l'identité du parallélogramme: ■

**Proposition 1.1.6** Si  $(E, \|\cdot\|_E)$  est un Banach vérifiant l'identité du parallélogramme alors  $E$  est un espace de Hilbert muni du produit scalaire défini par :

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

$$\left( \langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \text{ implique } \sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|_E \right).$$

**Preuve.** Vérification que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire

1) Positivité et relation avec la norme :

$$\forall x \in E, \langle x, x \rangle = \|x\|_E^2 \geq 0$$

2) Définie positive :

$$\forall x \in E, \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow \|x\|_E^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

3) Symétrie :

$$\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

4) Linéarité en la première variable :

Additivité :

Soient  $x, y, z \in E$ , montrons que

$$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

par définition du produit scalaire :

$$\begin{aligned} \langle x + y, z \rangle + \langle x - y, z \rangle &= \frac{1}{4} (\|x + y + z\|_E^2 - \|x + y - z\|_E^2 + \|x - y + z\|_E^2 - \|x - y - z\|_E^2) \\ &= \frac{1}{4} (2 (\|x + z\|_E^2 + \|y\|_E^2) - 2 (\|x - z\|_E^2 + \|y\|_E^2)) \\ &= \frac{1}{2} (\|x + z\|_E^2 - \|x - z\|_E^2) \\ &= 2 \langle x, z \rangle \end{aligned}$$

donc on obtient

$$\forall x, y, z \in E, \langle x + y, z \rangle + \langle x - y, z \rangle = 2 \langle x, z \rangle$$

On pose les nouvelles variables suivantes

$$2u = x + y, 2v = x - y,$$

En les additionnant, on retrouve l'expression :

$$x = u + v$$

donc

$$\langle 2u, z \rangle + \langle 2v, z \rangle = 2 \langle u + v, z \rangle.$$

Si l'on considère le cas particulier où  $x = y$ , alors l'expression devient :

$$\langle 2x, z \rangle + \langle 0, z \rangle = 2 \langle x, z \rangle$$

Sachant que  $\langle 0, z \rangle = 0$  il en résulte :

$$\langle 2x, z \rangle = 2 \langle x, z \rangle$$

Ainsi, on obtient la relation suivante :

$$\forall u, v, z \in E, \langle u, z \rangle + \langle v, z \rangle = \langle u + v, z \rangle$$

Homogénéité :

On veut montrer que :

$$\forall \gamma \in \mathbb{R}, \forall x, y \in E, \langle \gamma x, y \rangle = \gamma \langle x, y \rangle$$

On a

$$\gamma \in \mathbb{R}, \exists (\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}, \gamma_n \rightarrow \gamma \quad (\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R})$$

Par définition du produit scalaire, on a :

$$\forall x, y \in E, \forall \gamma \in \mathbb{R}, \langle \gamma x, y \rangle - \gamma \langle x, y \rangle = \langle \gamma x, y \rangle - \langle \gamma_n x, y \rangle + \langle \gamma_n x, y \rangle - \gamma \langle x, y \rangle,$$

En regroupant les termes :

$$\langle \gamma x, y \rangle - \gamma \langle x, y \rangle = \langle (\gamma - \gamma_n) x, y \rangle + (\gamma_n - \gamma) \langle x, y \rangle$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\forall x, y \in E : |\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

Sachant que  $\sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|$ , on obtient :

$$\forall x, y \in E ; |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_E \|y\|_E$$

D'où, en utilisant cette propriété on obtient :

$$\begin{aligned} |\langle \gamma x, y \rangle - \gamma \langle x, y \rangle| &\leq \|(\gamma - \gamma_n) x\|_E \|y\|_E + |(\gamma - \gamma_n)| \|x\|_E \|y\|_E \\ &\leq 2 |\gamma - \gamma_n| \|x\| \|y\| \end{aligned}$$

Puisque  $\gamma \rightarrow \gamma_n$ , on a  $\gamma - \gamma_n \rightarrow 0$ . Donc, en passant a la limite, il vient :

$$\langle \gamma x, y \rangle = \gamma \langle x, y \rangle$$

ce qui implique  $\langle x, y \rangle = \left(\frac{1}{4} \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$  un produit scalaire sur  $E$ , avec  $\langle x, x \rangle = \|x\|_E^2$ .

Cela confère a  $E$  la structure d'espace de *Hilbert*. ■

**Exemple 1.1.4**  $L^2(I, \mathbb{R})$  l'ensmble des fonctions de carré intégrales défini par:

$$L^2(I, \mathbb{R}) = \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_I |f(\mu)|^2 d\mu < \infty \right\}$$

où l'intégrale est considérée selon le concept de *Lebesgue*, avec la norme

$$\|f\|^2 = \int_I |f(\mu)|^2 d\mu$$

résultant du produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(x) g(x) dx$$

est un espace de Hilbert

### 1.1.3 Orthogonalité

**Définition 1.1.7** Soit  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace de Hilbert

Deux éléments  $x, y$  de  $H$  sont dit orthogonaux si  $\langle x, y \rangle = 0$  et on notera  $x \perp y$ . On dit que deux ensembles  $\Omega, \Gamma \subset H$  sont orthogonaux si tout les éléments de  $\Omega$  sont orthogonaux a tous les éléments de  $\Gamma$ . On notera  $\Omega \perp \Gamma$ . Si  $\Omega$  et  $\Gamma$  sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux, alors ils sont en somme directe et on notera  $\Omega \oplus^\perp \Gamma$  pour signifier que cette somme directe est orthogonale.

Soit  $\Omega \subset H$ , on définit l'orthogonal de  $\Omega$  et l'on note  $\Omega^\perp$  par  $\Omega^\perp = \{x \in H, x \perp \Omega\}$ . L'ensemble  $\{a\}^\perp$  est noté tout simplement  $a^\perp$ .

**Proposition 1.1.7** *Soit  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien. Soit  $a \in H$  fixé. Alors :*

$$\begin{aligned} L_a & : H \rightarrow \mathbb{k} \\ x & \rightarrow \langle x, a \rangle \end{aligned}$$

est une forme linéaire continue sur  $H$ . De plus on a :  $\|L_a\| = \|a\|$

**Preuve.**  $L_a$  est linéaire ( voir définition de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  )

$|L_a(x)| = |\langle x, a \rangle| \leq \|a\| \|x\|, \forall x \in H$  donc  $L_a$  est continue et  $\|L_a\| \leq \|a\|$ .

On suppose  $a \neq 0$ , prenons  $y = \frac{a}{\|a\|}$ . On a  $\|y\| = 1$  et  $L_a(y) = \left\langle \frac{a}{\|a\|}, a \right\rangle = \frac{\langle a, a \rangle}{\|a\|} = \|a\|$

$\|L_a\| = \sup_{x \in H} |L_a(x)| \geq L_a(y) = \|a\|$  d'où  $\|L_a\| = \|a\|$  ■

**Proposition 1.1.8** *Soit  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien. Soient  $\Omega$  et  $\Gamma$  deux sous ensembles de  $H$ . Alors on a :*

- $\Omega^\perp$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $H$ .
- $\Omega \subset (\Omega^\perp)^\perp$  (noté  $\Omega^{\perp\perp}$ ) et  $\overline{\Omega} \subset \Omega^{\perp\perp}$
- $\Omega \subset \Gamma \Rightarrow \Gamma^\perp \subset \Omega^\perp$

**Preuve.** •  $a^\perp = \ker L_a$  donc  $a^\perp$  est un sous espace vectoriel fermé de  $H$ . D'autre part on a :  $\Omega^\perp = \bigcap_{a \in \Omega} a^\perp$  intersection de sous espace vectoriels fermés, est un espace vectoriel fermé. La preuve de deux autres propriétés est évidente

• Soit  $x \in \Omega$  choisissons  $y \in \Omega^\perp$ . On a alors  $\langle x, y \rangle = 0$ , ce qui prouve que  $x \in \Omega^{\perp\perp}$ . On a  $\Omega^{\perp\perp}$  est un sous-espace vectoriel fermé donc  $\overline{\Omega} \subset \Omega^{\perp\perp}$

- $\Gamma^\perp = \bigcap_{b \in \Gamma} b^\perp \subset \bigcap_{a \in \Omega} a^\perp = \Omega^\perp$  ■

## Base hilbertiennes

**Définition 1.1.8** Soit  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien. Une partie  $X$  de  $H$  est dite dense dans  $H$  si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

- $\overline{X} = H$
- $\forall y \in H, \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  tel que  $\|x_n - y\| \rightarrow 0$
- $\forall y \in H, \forall \varepsilon > 0, \exists x \in X; \|x - y\| \leq \varepsilon$ .

**Définition 1.1.9** Soit  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien. Soit  $X$  une partie de  $H$ .

On dit que  $X$  est totale si le sous-espace vectoriel engendré par  $X$  est dense dans  $H$ .

**Remarque 1.1.5** Le sous-espace vectoriel engendré par  $X$  est noté  $\langle X \rangle$  ou  $\text{vect}(X)$ .

**Remarque 1.1.6** Généralement l'espace  $H$  est séparable et de dimension infinie, en d'autres termes, il existe un ensemble dénombrable partout dense dans  $H$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $n$  vecteurs dans  $H$  linéairement indépendants.

**Proposition 1.1.9** Soit  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien et  $X \subset H$ . alors

$$X^\perp = \langle X \rangle^\perp = \overline{\langle X \rangle}^\perp$$

**Preuve.** On a toujours

$$X \subset \langle X \rangle \subset \overline{\langle X \rangle}$$

donc

$$\overline{\langle X \rangle}^\perp \subset \langle X \rangle^\perp \subset X^\perp$$

Montrons :

$$X^\perp \subset \langle X \rangle^\perp \subset \overline{\langle X \rangle}^\perp$$

Si  $x \in X^\perp$  alors il est orthogonal à  $X$ , donc orthogonal aussi à toutes les combinaisons linéaires finies d'éléments de  $X$  et par suite on a  $x \in \langle X \rangle^\perp$ .

Si  $x \in \langle X \rangle^\perp$  alors il est orthogonal à tous les termes d'une suite dans  $\langle X \rangle$ , et par la continuité du produit scalaire il est orthogonal à la limite d'une telle suite (convergente), par conséquent  $x \in \overline{\langle X \rangle}^\perp$  ■

**Proposition 1.1.10** *Caractérisation d'une famille totale dans un espace de Hilbert*

Soit  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace Hilbert et  $X \subset H$ , alors :

$$X \text{ est totale} \Leftrightarrow X^\perp = \{0_H\}$$

**Preuve.** .

$$\begin{aligned} X \text{ est totale} &\Leftrightarrow \overline{\langle X \rangle} = H \\ &\Leftrightarrow \overline{\langle X \rangle}^\perp = H^\perp \quad \blacksquare \\ &\Leftrightarrow \overline{\langle X \rangle}^\perp = \{0_H\} \end{aligned}$$

**Définition 1.1.10** *Soit un espace préhilbertien  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . On nomme base hilbertienne de  $E$  une famille orthonormale totale dans  $E$*

**Remarque 1.1.7** *Une base hilbertienne est appelée aussi base orthonormale.*

**Définition 1.1.11**  $F = (e_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs de  $H$ .

1) On dit que  $F$  est une famille orthonormée de  $H$  si  $\begin{cases} \forall (i, j) \in I^2, \langle e_i, e_j \rangle = 0 \text{ si } i \neq j \\ \langle e_i, e_i \rangle = \|e_i\|^2 = 1 \end{cases}$

2)  $F$  est dite complète où total si l'ensemble des combinaisons linéaires (finies) des éléments de  $F$  est dense dans  $H$  c'est-à-dire  $\overline{\text{Vect}(e_i, i \in I)} = H$

**Théorème 1.1.1** (Riesz-Fischer) *Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $\{\Psi_n\}_n$  un système orthonormé et soient les valeurs  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_i, \dots$  telles que la série  $\sum_{\ell=1}^{\infty} |\alpha_\ell|^2$  soit convergente, alors on peut trouver un vecteur  $f \in H$ ,*

tel que

$$\alpha_i = \langle f, \Psi_i \rangle, i = 1, 2, \dots$$

et de plus, on a

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, \Psi_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 = \|f\|^2$$

**Preuve.** Soit  $\{f_n\}$  une suite donnée par

$$f_n = \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell \Psi_\ell$$

Puisque la série  $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2$  convergente, donc la suite  $\{f_n\}_n$  est de Cauchy, on a pour des valeurs entiers  $p$  et  $q$  assez grandes, telles que  $p \leq q$ ,

$$\|f_p - f_q\|^2 = \left\| \sum_{\ell=p+1}^q \alpha_\ell \Psi_\ell \right\|^2 = \left\langle \sum_{\ell=p+1}^q \alpha_\ell \Psi_\ell, \sum_{\ell=p+1}^q \alpha_\ell \Psi_\ell \right\rangle$$

Car  $H$  est un *Hilbert*, alors on a  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  dans  $H$ , de la relation  $f = (f - f_n) + f_n$ , et de la composition du système  $\{\Psi_\ell\}$  avec les deux membres, on obtient

$$\langle f, \Psi_i \rangle = \langle f_n, \Psi_i \rangle + \langle f - f_n, \Psi_i \rangle$$

Le second terme  $\langle f - f_n, \Psi_i \rangle$  de la somme figurant au second membre tend vers 0 quand  $n \rightarrow \infty$  et cela due la continuité du produit scalaire, car

$$|\langle f - f_n, \Psi_i \rangle| \leq \|f - f_n\| \|\Psi_i\|,$$

tandis que le premier terme  $\langle f_n, \Psi_i \rangle$  de la somme figurant au second membre coincide avec la valeur  $\alpha_i$ ,  $\forall i \leq n$  d'où la relation  $\langle f, \Psi_i \rangle = \langle f_n, \Psi_i \rangle = \alpha_i$

pour tout  $i \leq n$  ce qui entraîne

$$\left\langle f - \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell \Psi_\ell, f - \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell \Psi_\ell \right\rangle = \|f\|^2 - \sum_{\ell=1}^n |\alpha_\ell|^2$$

lorsque  $n \rightarrow \infty$ , on obtient l'égalité de *Parseval*

$$\|f\|^2 = \sum_{\ell=1}^{\infty} |\alpha_\ell|^2$$

■

**Théorème 1.1.2** Soit  $\{\Psi_\ell\}$  un système orthonormé d'éléments d'un espace de Hilbert  $H$ , le système  $\{\Psi_\ell\}$  soit complet, si et seulement si le vecteur nul est le seul vecteur de  $H$  orthogonal au système  $\{\Psi_i\}$ . Cela veut dire qu'il n'y a pas un vecteur non nul de  $H$ , qui est orthogonal à tous les vecteurs du système  $\{\Psi_\ell\}$ .

**Preuve.** Soit  $f \in H$  tel que  $f$  est orthogonal à tout les vecteurs du système complet  $\{\Psi_\ell\}$  alors tous ses coefficients de Fourier sont nuls  $\langle f, \Psi_i \rangle = 0$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots$ , le système  $\{\Psi_\ell\}$  étant complet donc fermé.

D'où l'égalité de Parseval

$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, \Psi_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2$$

qui implique que  $f = 0$

En sens inverse, soit le système  $\{\Psi_\ell\}$  n'est pas complet donc  $\exists g \in H$  (un vecteur non nul)  $g \neq 0$  qui réalise l'inégalité de *Bessel* donc d'après le théorème de Riesz-Fisher, on peut trouver un élément  $f$  de  $H$ , tel que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, \Psi_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 = \|f\|^2$$

il est facile de voir que le vecteur non nul  $f - g$  est orthogonal au système  $\{\Psi_\ell\}$  d'où la condition suffisant. ■

**Théorème 1.1.3** *Tous les espaces de Hilbert séparables sont isomorphes entre eux.*

**Preuve.** Soit  $H$  un espace de Hilbert séparable, il existe alors un système orthonormé et complet  $\{\Psi_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$  tel que, pour tout vecteur  $f \in H$  il existe une suite  $\{\alpha_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$  de coefficients de Fourier telle que,

$$f(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \alpha_\ell \Psi_\ell, \text{ avec } \sum_{\ell=1}^{\infty} |\alpha_\ell|^2 < \infty$$

Cette condition nous confirme que la suite  $\{\alpha_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$  est de  $l_2$ .

Réciproquement, soit  $\{\alpha_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $l_2$ , c'est-à-dire

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} |\alpha_\ell|^2 < \infty$$

Alors il existe un vecteur  $f \in H$ , (d'après le théorème de Riesz-Fischer) tel que,

$$\|f\|^2 = \sum_{\ell=1}^{\infty} |\alpha_\ell|^2 \text{ avec } \alpha_\ell = \langle f, \Psi_\ell \rangle$$

d'où il existe un isomorphisme entre les espaces de Hilbert séparables et l'espace  $l_2$ .

En effet, si les éléments  $f, g \in H$  ayant pour coefficients de Fourier respectivement les suites  $\{\alpha_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}, \{\beta_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}} \in l_2$ , donc les vecteurs  $f + g$  et  $f$  de  $H$  ont comme coefficients de Fourier respectives  $\{\alpha_\ell + \beta_\ell\}, \{\gamma\alpha_\ell\}$ , de plus, on a

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\ell=1}^{\infty} \alpha_\ell \overline{\beta_\ell}$$

car, d'après l'égalité de Parseval

$$\langle f, f \rangle = \sum_{\ell=1}^{\infty} |\alpha_\ell|^2, \quad \langle g, g \rangle = \sum_{\ell=1}^{\infty} |\beta_\ell|^2$$

et

$$\langle f + g, f + g \rangle = \sum_{\ell=1}^{\infty} |\alpha_\ell + \beta_\ell|^2 + \sum_{\ell=1}^{\infty} (\alpha_\ell + \beta_\ell) \overline{(\alpha_\ell + \beta_\ell)}$$

on a

$$\begin{aligned} \langle f + g, f + g \rangle &= \langle f, f \rangle + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle + \langle g, g \rangle \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} |\alpha_\ell|^2 + \langle f, g \rangle \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \alpha_\ell \overline{\beta_\ell} + \langle f, g \rangle \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \overline{\alpha_\ell} \beta_\ell + \sum_{\ell=1}^{\infty} |\beta_\ell|^2 \end{aligned}$$

D'où l'égalité au dessus, autrement dit, l'isomorphisme entre les espaces de Hilbert séparables  $H$  et l'espace de Hilbert  $l_2$  signifie qu'il y a une application bijective entre  $H$  et  $l_2$ . En outre, la somme des vecteurs, la multiplication des vecteurs par un nombre  $\gamma$  et le produit scalaire dans  $H$  sont similaires à la somme des coordonnées des vecteurs, la multiplication des coordonnées des vecteurs par un nombre  $\gamma$  et le produit scalaire dans  $l_2$ .

■

**Remarque 1.1.8** *Tous les espaces vectoriels ou euclidiens de mêmes dimensions finies  $n$  sont isomorphes entre eux, puisque chacun est isomorphe à l'espace  $\mathbb{K}^n$ . De même tous les espaces de Hilbert sont isomorphes entre eux, puisque chacun est isomorphe à  $l_2$ .*

## 1.2 Opérateurs linéaires bornés

### 1.2.1 Linéarité des opérateurs

**Définition 1.2.1** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés sur le même corps  $\mathbb{k}$  ( $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ),  $A : E \longrightarrow F$ ,  $A$  est un opérateur linéaire si :

- 1)  $\forall \Psi_1, \Psi_2 \in E$  on a  $A(\Psi_1 + \Psi_2) = A(\Psi_1) + A(\Psi_2)$
- 2)  $\forall \Psi \in E, \forall \gamma \in \mathbb{k}$  ( $\mathbb{k} = (\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C})$ ), on a  $A(\gamma\Psi) = \gamma A(\Psi)$

### 1.2.2 Continuité des opérateurs linéaires

**Définition 1.2.2** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés sur le même corps  $\mathbb{k}$  ( $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) et  $A : E \longrightarrow F$ ,  $A$  est un opérateur linéaire, soit un sous ensemble  $G$  de  $E$  ( $G \subset E$ ) on dit que  $A$  est continue en  $z_0$  ( $z_0 \in G$ ) si  $\forall (z_n)_n \subset G$  convergent vers  $z_0$  on a la suite  $(A(z_n))_n$  converge vers  $A(z_0)$  c'est à dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(z_n) = A\left(\lim_{n \rightarrow \infty} z_n\right) = A(z_0)$$

**Remarque 1.2.1** On dit que l'opérateur  $A$  est continu sur  $G$  si  $A$  est continu en tout point de l'ensemble  $G$ .

**Théorème 1.2.1** Soient deux espaces normés  $E$  et  $F$ , un opérateur linéaire  $A$  défini sur un sous-ensemble  $G \subset E$  dans  $F$  est dit continu partout sur  $G$  s'il est continu en point  $z_0$  de  $G$ .

**Preuve.** Voir [11] ■

### 1.2.3 Opérateurs bornés

**Proposition 1.2.1** Soit  $A : E \longrightarrow F$  un opérateur linéaire alors  $A$  est borné si et seulement s'il existe une constante  $C > 0$ , telle que

$$\|A(z)\|_F \leq C \|z\|_E, \quad \forall z \in E.$$

**Preuve.** Voir [11] ■

**Proposition 1.2.2** *Pour tout opérateur  $A$  linéaire continue entre deux espaces vectoriels normés  $(E, \|\cdot\|_E)$  et  $(F, \|\cdot\|_F)$ , on a :*

$$\|A\| = \sup_{z \in B_E(0,1)} \|A(z)\|_F < \infty, \quad B_E(0,1) = \{z \in E, \|z\| \leq 1\}$$

**Preuve.** Voir [11] ■

**Proposition 1.2.3** *Soit  $A : (E, \|\cdot\|_E) \longrightarrow (F, \|\cdot\|_F)$  un opérateur linéaire, on a :*

$A$  continu si et seulement si  $A$  est borné

**Preuve.** Voir [11] ■

### 1.2.4 Espaces isomorphes

On dit que deux espaces vectoriels normés  $(E, \|\cdot\|_E)$  et  $(F, \|\cdot\|_F)$  sont isomorphes en tant qu'espaces normés s'il existe un opérateur linéaire  $A$  de  $E$  dans  $F$  qui vérifie :

- 1)  $A$  bijectif
- 2)  $A$  et  $A^{-1}$  continus

### 1.2.5 Espaces isométriques

Deux espaces normés  $(E, \|\cdot\|_E)$  et  $(F, \|\cdot\|_F)$  sont dits isométriques s'il existe un opérateur linéaire bijectif  $A$  de  $E$  dans  $F$  tel que :

$$\|A(z)\|_F = \|z\|_E \text{ pour tout } z \in E$$

**Remarque 1.2.2** *L'isométrie est une notion plus forte que l'isomorphie.*

### 1.2.6 Normes équivalentes

Soit  $E$  un espace vectoriel, et  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  deux normes sur  $E$ . On dit que  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  sont équivalentes si et seulement si, il existe deux constantes  $\lambda, \mu > 0$  telles que

$$\lambda \|z\|_2 \leq \|z\|_1 \leq \mu \|z\|_2, \forall z \in E$$

En d'autres termes, les deux normes sont équivalentes si et seulement si l'application identique de  $E$  dans  $E$  est un isomorphe en tant qu'espaces normés entre  $(E, \|\cdot\|_1)$  et  $(E, \|\cdot\|_2)$ .

### Contre-exemple en dimension infinie.

Pour  $V = C^0([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continue sur } [a, b]\}$ , on dispose de deux normes :

$$\|f\|_{C^0([a,b])} = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|, \quad \|f\|_1 = \|f\|_{L^1([a,b])} = \int_a^b |f(x)| dx$$

Ces normes ne sont pas équivalentes.

### 1.2.7 Opérateurs compacts

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés et  $A : E \longrightarrow F$  un opérateur linéaire.  $A$  est dit compact si pour tout  $H \subset E$  borné,  $\overline{A(H)}$  est compact.

c'est à dire  $A(H)$  est relativement compacte dans  $F$ .

### 1.2.8 Ensembles relativement compacts

Dans un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$  un sous-ensemble  $U$  de  $E$  est dit relativement compact si pour toute suite  $(x_n)_n$  de  $U$  admet une sous-suite  $(x_{n_\ell})_{n_\ell}$  qui converge dans  $U$ .

**Théorème 1.2.2** (*Critère de compacité*) Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés et  $A : E \longrightarrow F$  un opérateur linéaire.  $A$  est dit compact si pour toute suite  $(\Psi_n)_n$  bornée dans  $E$ , la suite  $(A\Psi_n)$  admet une sous-suite convergente dans  $F$ .

**Preuve.** En utilisant la définition et la spécificité d'un ensemble borné et d'un ensemble relativement compact. ■

**Remarque 1.2.3** Si  $A_1, A_2$  deux opérateurs compacts alors  $\lambda A_1 + \mu A_2$  est un opérateur compact.

**Théorème 1.2.3** Le produit  $A_1 A_2$  de deux opérateurs bornés  $A_1$  et  $A_2$  est compact lorsque l'un des opérateurs  $A_1$  ou  $A_2$  est compact.

**Preuve.** Prenons  $(\Psi_n)_n$  comme une suite bornée de  $E$  donc si l'opérateur  $A_2$  est borné, la suite  $(A_2\Psi_n)_n$  est également bornée. en ce qui concerne la compacité de l'opérateur  $A_1$ , il y a une sous-suite de  $(A_1(A_2\Psi_n))_n$  qui converge, ce qui signifie que  $A_1A_2$  est compact.

Par ailleurs, si  $A_2$  est compact, il est possible d'extraire une sous-suite convergente  $(A_2\Psi_{n_\ell})_{n_\ell}$  de la suite  $(A_2\Psi_n)_n$  et de la continuité de l'opérateur  $A_1$ , car la suite  $A_1((A_2\Psi_n)_n(x))$  est bornée, ce qui signifie que  $A_1A_2$  est compact. ■

**Théorème 1.2.4** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach et  $A : E \longrightarrow F$  un opérateur linéaire, tel qu'il existe  $(A_n)_n$  une suites des opérateurs compacts et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0.$$

Alors  $A$  est compact.

**Preuve.** Voir [11] ■

**Corollaire 1.2.1** Dans un espace de dimension infinie la boule unité  $B(0,1)$  n'est pas compact.

**Théorème 1.2.5** Soit  $A : E \longrightarrow F$  un opérateur linéaire entre deux espaces vectoriels normés. Si  $A$  est compact alors  $A$  est borné.

**Preuve.** Voir [11] ■

**Théorème 1.2.6** Soit  $E$  un espace vectoriel normé,  $G$  un sous-ensemble compact de  $E$ . Un opérateur intégral  $A$  à noyau continu agissant de  $C(G)$  dans  $C(G)$  est un opérateur compact.

**Preuve.** Voir [11] ■

## 1.2.9 Opérateurs intégraux

Les opérateurs intégraux sont des éléments essentiels en analyse fonctionnelle, car ils permettent de simplifier les équations fonctionnelles pour les résoudre plus facilement. Plusieurs domaines sont touchés par les opérateurs intégraux, tels que les équations aux dérivées partielles, les phénomènes de diffusion et les équations intégrales.

### Opérateur Intégral

Soit Deux espaces normés  $(E, \|\cdot\|_E)$  et  $(F, \|\cdot\|_F)$ , un opérateur intégral est un opérateur linéaire  $A$  de  $E$  à valeurs dans  $F$  donné sous la forme

$$A\Psi(x) = \int_{D_2} \ell(x, y) \Psi(y) dy, \quad x \in D_1$$

où  $\ell : D_1 \times D_2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction mesurable s'appelle noyau,  $\Psi : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction mesurable.

### Noyau d'un opérateur

La fonction mesurable  $\ell(x, y)$  est appelée le noyau de l'opérateur intégral  $A$ .

### Noyau faiblement singulier

**Définition 1.2.3** On appelle noyau faiblement singulier la fonction  $\ell$  continue sur  $D \times D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  sauf peut aux points  $x = y$  telle que,

$$\forall x, y \in D ; x \neq y, \exists C > 0; |\ell(x, y)| < \frac{C}{|x - y|^{n-\lambda}}, \quad 0 < \lambda \leq n.$$

**Théorème 1.2.7** L'opérateur intégral  $A$  de  $C(D)$  dans  $C(D)$  à noyau faiblement singulier est un opérateur compact.

**Preuve.** Voir[11] ■

### Normes des opérateurs intégraux

La norme de l'opérateur intégral  $A$  défini de  $L_p(D_2)$  dans  $L_p(D_1)$  est donnée par

$$\|A\|_p = \begin{cases} \left( \int_{D_1} \left( \int_{D_2} |\ell(x, y)|^q dy \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{pour } 1 < p < \infty \\ \int_{D_1} \text{esssup}_y |\ell(x, y)| dx, & \text{pour } p = 1 \\ \text{esssup}_x \int_{D_2} |\ell(x, y)| dy, & \text{pour } p = \infty \end{cases}$$

$\forall p, q ; 1 \leq p, q \leq +\infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  où  $\ell(x, y) : D_1 \times D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable.

**Théorème 1.2.8** Soit un opérateur intégral  $A$  tel que

$$\|A\|_p < \infty \quad (\otimes)$$

Donc  $A$  est linéaire continu de  $L_p(D_2)$  dans  $L_p(D_1)$ .

En outre, nous avons.

$$\begin{aligned} \|A\Psi\|_p &< \|A\|_p \|\Psi\|_p \\ \|A\Psi\|_\infty &< \|A\|_\infty \|\Psi\|_\infty \end{aligned}$$

**Preuve.** voir[11] ■

**Remarque 1.2.4** Lorsque  $p = q = 2$  La norme de l'opérateur intégral  $A$  est donnée par

$$\|A\|_2 = \left( \int_{D_1} \left( \int_{D_2} |\ell(x, y)|^2 dy \right) dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty, \text{ pour } 0 < p < \infty$$

**Proposition 1.2.4** Soit  $A$  opérateur intégral alors  $\|A\|_p < \infty$  est une condition suffisante et non nécessaire pour la continuité de  $A$

**Preuve.** En effet, il suffi de prendre  $A$  comme opérateur de convolution dans  $L_p(\mathbb{R})$

$$A\Psi(x) = \int_{\mathbb{R}} \ell(x - y) \Psi(y) dy$$

où  $\ell(x, y)$  est un noyau de convolution  $\ell(x, y) = \ell(x - y)$  avec la condition

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\ell(\mu)| d\mu < \infty$$

La norme dans l'espace  $L_p(D)$  est aussi donnée par

$$\|f\|_p = \sup \int_D |f(x) g(x)| dx, \quad g \in L_q(D), \quad \|g\|_q = 1$$

$$\|f\|_p = \sup \int_D |f(x) g(x)| dx, \quad g \in L_q(D), \quad \|g\|_q = 1$$

D'après le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned}
 \|A\Psi\|_p &= \sup_{\|g\|_q=1} \int_{\mathbb{R}} |g(x) A\Psi(x)| dx \\
 \|A\Psi\|_p &\leq \sup_{\|g\|_q=1} \int_{\mathbb{R}} |g(x)| \left( \int_{\mathbb{R}} |\ell(x-y) \Psi(y) dy| \right) dx \\
 &= \sup_{\|g\|_q=1} \int_{\mathbb{R}} |g(x)| \left( \int_{\mathbb{R}} |\ell(y) \Psi(x-y) dy| \right) dx \\
 &= \sup_{\|g\|_q=1} \int_{\mathbb{R}} |\ell(y)| dy \left( \int_{\mathbb{R}} |g(x) \Psi(x-y) dy| \right) dx \\
 &\leq \|g\|_q \|\Psi\|_p \sup_{\|g\|_q=1} \int_{\mathbb{R}} |\ell(y)| dy \\
 &= \|\Psi\|_p \int_{\mathbb{R}} |\ell(y)| dy
 \end{aligned}$$

D'où l'opérateur intégral  $A\Psi(x) = \int_{\mathbb{R}} \ell(x-y) \Psi(y) dy$  de  $L_p(\mathbb{R})$  dans  $L_p(\mathbb{R})$  est continu.

De plus, on a

$$\|A\Psi\|_p \leq \|A\|_1 \|\Psi\|_p$$

La condition  $(\otimes)$  n'est pas remplie parceque, on a

$$\begin{aligned}
 \|A\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} |\ell(x-y)|^q dy \right)^{\frac{p}{q}} dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \|A\|_q^p dx = \infty
 \end{aligned}$$

■

**Théorème 1.2.9** Soit un opérateur intégral  $A$  vérifiant les conditions suivantes :

Il existe deux constantes positives  $C_1 > 0$  et  $C_2 > 0$  telles que

$$\left( \int_{D_2} |\ell(x,y)|^r dy \right)^{\frac{1}{r}} \leq C_1, \quad r > 0 \text{ pour tout } x \in D_1, \quad \left( \int_{D_1} |\ell(x,y)|^s dx \right)^{\frac{1}{s}} \leq C_2, \quad s > 0, \text{ pour tout } y \in D_2$$

Pour tout  $p$  et  $q$  conjugués  $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ ,  $(1 \leq p, q \leq \infty)$  on a

$$p_1 \geq p, p_1 \geq s, \frac{p_1 - s}{p_1} \leq \frac{r}{q}. \quad (\otimes\otimes)$$

D'où l'opérateur  $A$  est un opérateur linéaire continu de  $L_p(D_2)$  dans  $L_{p_1}(D_1)$ . De plus, on a

$$\|A\| \leq C_1^{\frac{p_1-s}{p_1}} C_2^{\frac{s}{p_1}}$$

$$\|A\Psi\|_{p_1} \leq \|A\| \|\Psi\|_p \text{ avec } \|A\| \leq C_1^{\frac{p_1-s}{p_1}} C_2^{\frac{s}{p_1}}$$

**Preuve.** Voir[11] ■

**Remarque 1.2.5** *Le cas où  $p = 1$ , l'opérateur  $A$  devient un opérateur continu de  $L_1(D_2)$  dans  $L_{p_1}(D_1)$  sous la condition suivante :*

$$\left( \int_{D_1} |\ell(x, y)|^{p_1} dx \right)^{\frac{1}{p_1}} \leq C_2, \text{ pour tout } y \in D_2.$$

De plus, on a

$$\|A\| \leq C_2$$

Bien entendu, si  $p = 1$  implique que  $q = \infty$  et la relation  $(\otimes\otimes)$  donne  $p_1 = s$ , ce qui entraîne le résultat voulu.

**Remarque 1.2.6** *Si  $p_1 = \infty$ , l'opérateur  $A$  devient un opérateur continu de  $L_p(D_2)$  dans  $L_\infty(D_1)$  sous la condition suivante :*

$$q \leq r$$

De plus, on a

$$\|A\| \leq C_1$$

Evidemment, si  $p_1 = \infty$  implique que  $\frac{r}{q} \geq 1$  et la relation  $(\otimes\otimes)$  donne  $\frac{s}{p_1} = 0$  ce qui entraîne le résultat voulu.

**Proposition 1.2.5** (*Opérateurs produits*) Soient deux opérateurs intégraux  $A_1, A_2$  de  $L_p(E)$  dans  $L_p(E)$ , alors l'opérateur produit  $(A_1A_2)\Psi = A_1(A_2\Psi)$  est un opérateur intégral de  $L_p(E)$  dans  $L_p(E)$ .

**Preuve.** En effet, on a

$$\begin{aligned}
 (A_1A_2)\Psi(x) &= A_1(A_2\Psi) \\
 &= \int_E \ell_1(x, z) A_2\Psi(z) dz \\
 &= \int_E \ell_1(x, z) \left( \int_E \ell_2(z, y) \Psi(y) dy \right) dz \\
 &= \int_E \Psi(y) dy \left( \int_E \ell_1(x, z) \ell_2(z, y) dz \right) \\
 &= \int_E \ell_3(x, y) \Psi(y) dy
 \end{aligned}$$

où la fonction  $\ell_3(x, y)$  représente le noyau de l'opérateur produit  $A_1A_2$  donné par la relation

$$\ell_3(x, y) = \int_E \ell_1(x, z) \ell_2(z, y) dz$$

■

**Remarque 1.2.7** L'opérateur intégral produit  $A^2\Psi(x) = A(A\Psi(x))$  admet un noyau  $\ell_2(x, y)$  donné par

$$\ell_2(x, y) = \int_E \ell(x, z) \ell(z, y) dz.$$

### Noyaux itérés

Le noyau  $\ell_n(x, y)$  de l'opérateur intégral produit  $A^n\Psi(x) = A(A^{n-1}\Psi(x))$  est dit noyau itéré du noyau  $k(x, y)$ , donné par

$$\ell_n(x, y) = \int \ell(x, z) \ell_{n-1}(z, y) dz.$$

# Chapitre 2

## Orthogonalité des polynômes de Tchebychev et le théorème du point fixe de Kannan

### 2.1 Polynômes de Tchebychev

En mathématiques, un polynôme de Tchebychev correspond à l'une des quatre suites de polynômes orthogonaux spécifiques liés à la formule de Moivre. Les polynômes de Tchebychev portent ce nom en l'honneur du mathématicien russe Pafnouti Lvovitch Tchebychev.

Il y a quatre suites de polynômes de Tchebychev, connues sous le nom de polynômes de Tchebychev de première espèce et notées  $T_n$ , tandis que l'autre est appelée polynômes de Tchebychev de seconde, troisième et quatrième espèce et notées  $U_n, V_n, W_n$  (l'entier naturel  $n$  correspond au degré dans les quatre cas).

#### 2.1.1 Orthogonalité des polynômes de Tchebychev

##### Généralités sur l'orthogonalité

La théorie des polynômes orthogonaux concerne des domaines de l'analyse très importants. Les fonctions trigonométriques, hypergéométriques, Bessel et elliptiques, ainsi que les problèmes d'interpolation (de Lagrange, d'Hermite), sont incluses dans le domaine des fractions

continues, de la théorie des équations différentielles et intégrales. Afin de soutenir cette idée, remarquons que l'identité.

$$2\cos(m\rho)\cos(n\rho) = \cos(m+n)\rho + \cos(m-n)\rho$$

La formule d'intégration suivante est donnée :

$$\int_0^\pi \cos(m\rho)\cos(n\rho)d\rho = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, m, n \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } m = n, n \neq 0 \\ \pi & \text{si } m = n = 0 \end{cases}$$

de la formule d'intégration précédente, quand l'intégral s'annule, on dit que  $\cos(m\rho)$  et  $\cos(n\rho)$  sont orthogonaux dans l'intervalle  $[0, \pi]$ , pour  $m \neq n$ .

Si on pose :  $\tau = \cos\rho$ ,

La formule est donc écrite de la manière suivante :

$$\int_{-1}^1 T_n(\tau)T_m(\tau)(1-\tau^2)^{-\frac{1}{2}}d\tau = 0, m \neq n$$

où

$$\cos(n\rho) = T_n(\tau) = \cos(\text{narccos}\tau), \quad -1 \leq \tau \leq 1$$

on a :

$$T_0(\tau) = 1, T_1(\tau) = \tau, T_2(\tau) = 2\tau^2 - 1, T_3(x) = 4\tau^3 - 3\tau$$

**Définition 2.1.1** La fonction poids sur un intervalle  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  est considérée comme toute fonction  $\omega$  qui vérifie les deux conditions suivantes :

$$\forall \tau \in [a, b], \omega(\tau) > 0 \text{ et } \int_a^b \omega(\tau)d\tau < \infty$$

**Exemple 2.1.1** Toutes les fonctions continues positives sur un compact sont des fonctions poids .

**Définition 2.1.2** Soit  $\{P_n(\tau)\}_{n \geq 0}$  une suite de polynômes tel que  $\deg(P_n) = n$ , et soit  $\omega$  une fonction poids sur  $[a, b]$ , on dit que  $\{P_n(\tau)\}_{n \geq 0}$  une suite de polynômes orthogonaux relativement à la fonction poids  $\omega$  dans  $[a, b]$  si

$$\int_a^b P_n(\tau)P_m(\tau)\omega(\tau) d\tau = 0, \quad m \neq n$$

**Remarque 2.1.1** Puisque  $\int_{-1}^1 T_n(\tau)T_m(\tau)(1-\tau^2)^{-\frac{1}{2}} d\tau = 0, m \neq n$ , on peut dire que  $\{T_n(\tau)\}_{n \geq 0}$  sont des polynômes orthogonaux par rapport à la fonction poids  $(1 - \tau^2)^{-\frac{1}{2}}$  dans  $[-1, 1]$

## 2.2 Les polynômes classiques

Les trois familles de polynômes orthogonaux *Hermite*, *laguerre* et *Jacobi* (contient aussi les cas particulier de Tchebychev), ont plusieurs propriétés communes qui sont, en fait des caractérisations. Ces trois

familles sont appelées les vrais polynômes orthogonaux classiques.

(1) La première caractérisation est celle de *S.Bochner*. Les polynômes orthogonaux classiques sont les seuls solutions de l'équation différentielles suivantes :

$$\alpha_2(\tau)z'' + \alpha_1(\tau)z' + \alpha_0(\tau)z = \gamma z,$$

avec  $\alpha_2(\tau)$ ,  $\alpha_1(\tau)$  et  $\alpha_0(\tau)$  sont des polynômes de degrés au plus 2, 1 et 0 respectivement et  $\gamma \neq 0$ , Cette équation peut s'écrire aussi sous une autre caractérisation de la forme (\*).

(2) Une deuxième caractérisation est la formule d'orthogonalité (appelée formule de *Rodrigues*), ces polynômes sont donnés à l'aide des fonctions poids par :

$$P_n(\tau) = \frac{1}{K_n \omega(\tau)} \frac{d^n}{d\tau^n} [P^n(\tau)\omega(\tau)],$$

tel que  $P(\tau)$  est un polynôme indépendant de n de degré  $\leq 2$ .

Ainsi,  $z(\tau) = P_n(\tau)$  satisfait l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d}{d\tau} \left[ P(\tau) \omega(\tau) \frac{dz}{d\tau} \right] - \gamma_n \omega(\tau) z = 0. \quad (*)$$

(3) La troisième caractérisation est que Les polynômes classiques, vérifient l'équation de Pearson suivante :

$$\frac{\omega'(\tau)}{\omega(\tau)} = \frac{a\tau + b}{\rho(\tau)}, \text{deg}[\rho(\tau)] \leq 2.$$

### 2.2.1 Les polynômes de Hermite

Les polynômes d'Hermite est une famille de polynômes orthogonaux, souvent utilisés en analyse mathématique, notamment dans le contexte des séries de Fourier, des équations différentielles et des probabilités, en particulier dans le cadre de la mécanique quantique et des processus stochastiques. Ils sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} H_n(\tau) &= (-1)^n \exp\left(\frac{\tau^2}{2}\right) \frac{d^n}{d\tau^n} \exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right) && \text{(forme dite probabiliste)} \\ \widehat{H}_n(\tau) &= (-1)^n e^{\tau^2} \frac{d^n}{d\tau^n} e^{-\tau^2} && \text{(forme dite physique)} \end{aligned}$$

Les deux définitions sont associées à l'échelle suivante.

$$\widehat{H}_n(\tau) = 2^{\frac{n}{2}} H_n(\tau\sqrt{2})$$

Ils peuvent aussi être écrits en utilisant un développement polynomial. :

$$\begin{aligned} H_n(\tau) &= \sum_{\ell=0}^{E(\frac{n}{2})} (-1)^\ell \frac{n!}{2^\ell \ell! (n-2\ell)!} \tau^{n-2\ell} \\ \widehat{H}_n(\tau) &= \sum_{\ell=0}^{E(\frac{n}{2})} (-1)^\ell \frac{n!}{\ell! (n-2\ell)!} (2\tau)^{n-2\ell} \end{aligned}$$

où  $E(\frac{n}{2})$  désigne la partie entière de  $\frac{n}{2}$

Les premiers polynômes d'Hermite sont :

$$\begin{aligned} H_0(\tau) &= 1, & \widehat{H}_0(\tau) &= 1 \\ H_1(\tau) &= \tau, & \widehat{H}_1(\tau) &= 2\tau \\ H_2(\tau) &= \tau^2 - 1, & \widehat{H}_2(\tau) &= 4\tau^2 - 2 \\ H_3(\tau) &= \tau^3 - 3\tau, & \widehat{H}_3(\tau) &= 8\tau^3 - 12\tau \\ H_4(\tau) &= \tau^4 - 6\tau + 3, & \widehat{H}_4(\tau) &= 16\tau^4 - 48\tau^2 + 12 \end{aligned}$$

### 2.2.2 Les polynômes de Laguerre

Les polynômes de Laguerre sont une famille de polynômes orthogonaux utilisés dans de nombreux domaines des mathématiques appliquées, notamment dans la résolution d'équations différentielles. Souvent rencontrés en physique, notamment dans les problèmes liés à l'équation de Schrodinger pour les systèmes quantiques, ils portent le nom d'Edmond Laguerre, et sont des solutions de l'équation de Laguerre

$$\tau z'' + (1 - \tau)z' + nz = 0.$$

qui est une équation différentielle linéaire et se présente sous la forme de Sturm-Liouville

:

$$-\frac{d}{d\tau} \left( \tau e^{-\tau} \frac{dz}{d\tau} \right) = n e^{-\tau} z.$$

On peut définir cette suite de polynômes en utilisant la formule de Rodrigues.

$$L_n(\tau) = \frac{e^\tau}{n!} \frac{d^n}{d\tau^n} (e^{-\tau} \tau^n).$$

Le coefficient dominant de  $L_n(\tau)$  est  $\frac{(-1)^n}{n!}$ . Les premiers polynômes de Laguerre, sont les suivant

$$\begin{aligned} L_0(\tau) &= 1 \\ L_1(\tau) &= -\tau + 1 \\ L_2(\tau) &= \frac{1}{2}\tau^2 - 2\tau + 1 \\ L_3(\tau) &= -\frac{1}{6}\tau^3 + 3\tau^2 - 3\tau + 1 \\ L_4(\tau) &= \frac{1}{24}\tau^4 - \frac{2}{3}\tau^3 + 3\tau^2 - 4\tau + 1 \end{aligned}$$

### 2.2.3 Les polynômes de Jacobi

**Définition 2.2.1** Les polynomes de Jacobi sont les polynomes orthogonaux du produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle \rightarrow \int_{-1}^1 (1 - \tau)^\alpha (1 + \tau)^\beta P(\tau) Q(\tau) d\tau \quad \text{avec } \alpha > -1 \text{ et } \beta > -1.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note le polynôme de Jacobi d'indice  $n$  par  $P_n^{(\alpha, \beta)}(\tau)$ . Il sont des solutions de l'équation différentielle homogène de deuxième ordre

$$(1 - \tau^2)z'' + [\beta - \alpha - (\alpha + 2 + \beta)\tau]z' + n(n + 1 + \alpha + \beta)z = 0,$$

avec  $n$  est le degré du polynome.

Les polynômes de *Jacobi* est définis explicitement par trois formule :

#### Formule de Rodrigue

$$(1 - \tau)^\alpha (1 + \tau)^\beta P_n^{(\alpha, \beta)}(t) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{d\tau^n} [(1 - \tau)^{n+\alpha} (1 + \tau)^{n+\beta}], \quad (**)$$

tels que  $\alpha, \beta$  sont deux paramètres vérifient des conditions d'orthogonalité  $\alpha > -1$  et  $\beta > -1$ .

#### Formule analytique

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(\tau) = \frac{1}{2^n} \sum_{\ell=0}^n \binom{n+\alpha}{n-\ell} \binom{n+\beta}{\ell} (\tau-1)^\ell (\tau+1)^{n-\ell}.$$

#### Relation de récurrence

Les polynômes de Jacobi vérifiant la relation de récurrence

$$\begin{aligned} P_0^{(\alpha, \beta)}(\tau) &= 1, \\ P_1^{(\alpha, \beta)}(\tau) &= \frac{\alpha + \beta + 2}{2} \tau + \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(\tau) &= \alpha_n \tau P_n^{(\alpha, \beta)}(\tau) + \beta_n P_n^{(\alpha, \beta)}(\tau) + \gamma_n P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(\tau), \end{aligned}$$

avec

$$\alpha_n = \frac{(2n + \alpha + \beta + 1)(2n + \alpha + \beta + 2)}{2(n + 1)(n + \alpha + \beta + 1)}$$

$$\beta_n = \frac{(2n + \alpha + \beta + 2)(\alpha^2 - \beta^2)}{2(n + 1)(n + \alpha + \beta + 1)(2n + \alpha + \beta)}$$

$$\gamma_n = \frac{(n + \alpha)(n + \beta)(2n + \alpha + \beta + 2)}{(n + 1)(n + \alpha + \beta + 1)(2n + \alpha + \beta)^2}$$

Les polynomes orthogonaux standard sont des cas particuliers des polynomes de *Jacobi*.

Les cas les plus connus sont :

- Les polynomes de *Gegenbauer* (ou ultrasphérique), obtenus en posant  $\alpha = \beta$ .
- Les polynomes de *Legendre*  $L_n$  en posant  $\alpha = \beta = 0$ .
- Les différents types de polynômes de *Tchebyshev*  $T_n^i$  pour  $i = 1, 2, 3$  et  $4$  qui sont obtenus en choisissant des valeurs spécifiques de  $\alpha$  et  $\beta$  comme suit :

$$\begin{cases} T_n^1(\tau) = P_n^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(\tau) \\ T_n^2(\tau) = P_n^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(\tau) \\ T_n^3(\tau) = P_n^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(\tau) \\ T_n^4(\tau) = P_n^{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(\tau) \end{cases}$$

## 2.2.4 Polynômes de première espèce de Tchebyshev

**Définition 2.2.2** Les polynômes  $T_n(x)$  de *Tchebyshev* de la première espèce en  $x$  de degré  $n$ , sont définis par la relation :

$$T_n(x) = \cos(n\rho) \text{ avec } x = \cos\rho.$$

où  $x \in [-1, 1]$ , ce qui implique que la variable correspondante  $\rho \in [0, \pi]$ . Il est facile de voir que  $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$ .

A l'aide de la formule trigonométrique suivante :

$$\cos n\rho + \cos(n - 2)\rho = 2 \cos \rho \cos(n - 1)\rho,$$

on obtient la relation de récurrence fondamentale

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots$$

**Proposition 2.2.1** *Les polynômes  $\{T_n(x), n = 0, 1, 2, \dots\}$  de Tchebychev de la première espèce forment un système orthogonal sur l'intervalle  $[-1, 1]$  par rapport au poids  $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .*

Autrement dit

$$\langle T_\ell(x), T_j(x) \rangle = \int_{-1}^1 \frac{T_\ell(x)T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \pi, & \text{si } \ell = j = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } \ell = j \neq 0 \\ 0, & \text{si } \ell \neq j \end{cases} .$$

**Preuve.** Voir [12] ■

**Remarque 2.2.1** *D'après la relation de récurrence,*

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots$$

$$T_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad T_1(x) = x$$

les polynômes de Tchebychev de la première espèce  $T_n(x)$  sont des polynômes de degré  $n$  en  $x$ .

**Proposition 2.2.2** *Les polynômes de Tchebychev de la première espèce  $T_n(x)$  sont les solutions de l'équation différentielle suivante :*

$$(1-x^2)z''(x) - xz'(x) + n^2z(x) = 0.$$

**Preuve.** Voir [12] ■

**Proposition 2.2.3** *Les zéros du polynôme  $T_n(x)$  sont de la forme :*

$$x_\ell = \cos \frac{(\ell - \frac{1}{2})\pi}{n}, \quad \ell = 1, 2, 3, \dots, n$$

**Preuve.** Voir [12] ■

### 2.2.5 Polynômes de seconde espèce de Tchebyshev

**Définition 2.2.3** Les polynômes  $U_n(x)$  de Tchebyshev de la seconde espèce de degré  $n$ , sont définis par la relation :

$$U_n(x) = \frac{\sin \rho(n+1)}{\sin \rho} \text{ tel que } x = \cos \rho.$$

La formule de récurrence des termes qui s'applique aux polynômes de Tchebyshev est la traduction de l'identité trigonométrique élémentaire suivante :

$$\sin(n+1)\rho + \sin(n-1)\rho = 2 \cos \rho \sin n\rho$$

qui donne

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots$$

Avec

$$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x$$

**Proposition 2.2.4** Les polynômes de Chebyshev de la seconde espèce  $\{U_n(x), n = 0, 1, 2, \dots\}$  forment un système orthogonal sur l'intervalle  $[-1, 1]$  par rapport au poids  $w(x) = \sqrt{1-x^2}$ .

Autrement dit

$$\langle U_\ell(x), U_j(x) \rangle = \int_{-1}^1 U_\ell(x) U_j(x) \sqrt{1-x^2} dx = \begin{cases} 0 & \text{if } \ell \neq j \\ \frac{\pi}{2} & \text{if } \ell = j \end{cases}$$

**Preuve.** Voir [12] ■

**Remarque 2.2.2** D'après la relation de récurrence,

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots$$

$$U_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad U_1(x) = 2x$$

Les polynômes  $U_n(x)$  de Tchebychev de la première espèce sont des polynômes de degré  $n$  en  $x$ .

**Proposition 2.2.5** *Les polynômes de Tchebychev de la deuxième espèce  $U_n(x)$  sont les solutions de l'équation différentielle suivante :*

$$(1 - x^2)z''(x) - 3xz'(x) + n(n + 2)z(x) = 0.$$

**Preuve.** Voir [12] ■

**Proposition 2.2.6** *Les zéros du polynôme  $U_n(x)$  sont déterminés à partir des zéros de  $\sin(n + 1)\rho$ ,  $\rho \in [0, \pi]$  comme suit,*

$$x = x_\ell = \cos \frac{\ell\pi}{n + 1}, \quad \ell = 1, 2, 3, \dots, n$$

**Preuve.** Voir [12] ■

## 2.2.6 Polynômes de troisième espèce de Tchebychev

**Définition 2.2.4** *Les polynômes  $V_n(x)$  de Tchebychev de troisième espèce de degré  $n$ , sont définis par la relation :*

$$V_n(x) = \frac{\cos(n + \frac{1}{2})\rho}{\cos \frac{1}{2}\rho} \text{ avec } x = \cos \rho.$$

Les polynômes de Tchebychev satisfont la formule de récurrence à trois termes, ce qui traduit l'identité trigonométrique élémentaire,

$$\cos(n + \frac{1}{2})\rho + \cos(n - 2 + \frac{1}{2})\rho = 2 \cos \rho \cos(n - 1 + \frac{1}{2})\rho,$$

qui devient

$$V_n(x) = 2xV_{n-1}(x) - V_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots$$

avec

$$V_0(x) = 1, V_1(x) = 2x - 1$$

**Proposition 2.2.7** *Les polynômes de Tchebychev de troisième espèce  $\{V_n(x), n = 0, 1, 2, \dots\}$  forment un système orthogonal sur l'intervalle  $[-1, 1]$  par rapport au poids  $w(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ .*

Autrement dit

$$\langle V_\ell(x), V_j(x) \rangle = \int_{-1}^1 V_\ell(x) V_j(x) \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx = \begin{cases} 0 & \text{if } \ell \neq j \\ \pi & \text{if } \ell = j \end{cases}.$$

**Preuve.** Voir [12] ■

**Remarque 2.2.3** *D'après la relation de récurrence,*

$$V_n(x) = 2xV_{n-1}(x) - V_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots$$

$$V_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad V_1(x) = 2x - 1$$

les polynômes de Tchebychev de la première espèce  $V_n(x)$  sont des polynômes de degré  $n$  en  $x$ .

**Proposition 2.2.8** *Les polynômes de Tchebychev de la troisième espèce  $V_n(x)$  sont les solutions de l'équation différentielle suivante :*

$$(1-x^2)z''(x) - (1-2x)z'(x) + n(n+1)z(x) = 0.$$

**Preuve.** Voir [12] ■

**Proposition 2.2.9** *Les zéros du polynôme  $V_n(x)$  sont de la forme :*

$$x_\ell = \cos \frac{(\ell - \frac{1}{2})\pi}{n + \frac{1}{2}}, \quad \ell = 1, 2, 3, \dots, n$$

**Preuve.** Voir [12] ■

### 2.2.7 Polynômes de quatrième espèce de Tchebychev

**Définition 2.2.5** Les polynômes  $W_n(x)$  de Tchebychev de quatrième espèce de degré  $n$ , sont définis par la relation :

$$W_n(x) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\rho}{\sin \frac{1}{2}\rho} \text{ tel que } x = \cos \rho.$$

Les polynômes de Tchebychev satisfont la formule de récurrence à trois termes, ce qui traduit l'identité trigonométrique élémentaire :

$$\sin(n + \frac{1}{2})\rho + \sin(n - 2 + \frac{1}{2})\rho = 2 \cos \rho \sin(n - 1 + \frac{1}{2})\rho,$$

qui devient

$$W_n(x) = 2xW_{n-1}(x) - W_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots$$

avec

$$W_0(x) = 1, W_1(x) = 2x + 1.$$

**Proposition 2.2.10** Les polynômes de Tchebychev de quatrième espèce  $\{W_n(x), n = 0, 1, 2, \dots\}$  forment un système orthogonal sur l'intervalle  $[-1, 1]$  par rapport au poids  $w(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

Autrement dit

$$\langle W_\ell(x), W_l(x) \rangle = \int_{-1}^1 W_\ell(x)W_l(x) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx = \begin{cases} 0 & \text{if } \ell \neq j \\ \pi & \text{if } \ell = j \end{cases}$$

**Preuve.** Voir [12] ■

**Remarque 2.2.4** D'après la relation de récurrence,

$$W_n(x) = 2xW_{n-1}(x) - W_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots$$

$$W_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad W_1(x) = 2x + 1$$

La quatrième espèce  $W_n(x)$  est constituée de polynômes de Tchebychev de degré  $n$  en  $x$ .

**Proposition 2.2.11** *Les polynômes de Tchebychev de la quatrième espèce  $W_n(x)$  sont les solutions de l'équation différentielle suivante :*

$$(1 - x^2)z''(x) - (1 + 2x)z'(x) + n(n + 1)z(x) = 0.$$

**Preuve.** Voir [12] ■

**Proposition 2.2.12** *Les zéros du polynôme  $W_n(x)$  sont de la forme :*

$$x_\ell = \cos \frac{\ell\pi}{n + \frac{1}{2}}, \quad \ell = 1, 2, 3, \dots, n$$

**Preuve.** Voir [12] ■

## 2.2.8 Propriétés communes

**Corollaire 2.2.1** *Les polynômes  $T_n, U_n, V_n$ , et  $W_n$  vérifiant les propriétés suivantes :*

- 1)  $U_n(x) = \frac{1}{2}[V_n(x) + W_n(x)]$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- 2)  $V_n(x) = U_n(x) - U_{n-1}(x)$ .
- 3)  $W_n(x) = U_n(x) + U_{n-1}(x)$ .
- 4)  $V_n(x) + V_{n-1}(x) = W_n(x) - W_{n-1}(x) = 2T_n(x)$ .
- 5)  $T_n(x) = nU_{n-1}(x)$ .
- 6)  $U_n(x) - U_{n-2}(x) = 2T_n(x)$ ,  $\forall n \geq 2$ .

**Corollaire 2.2.2** *Si on pose  $\mu = \cos \frac{1}{2}\rho$ , alors*

- a)  $T_n(x) = T_{2n}(\mu)$ .
- b)  $U_n(x) = \frac{1}{2}\mu^{-1}U_{2n+1}(\mu)$ .
- c)  $V_n(x) = \mu^{-1}T_{2n+1}(\mu)$ .
- d)  $W_n(x) = U_{2n}(\mu)$ .

## 2.3 Théorème du point fixe de Kannan

Dans le théorème de Banach, nous démontrons l'existence du point fixe en utilisant la continuité de l'application  $T$ . Il est donc légitime de se demander s'il y a des conditions de contraction qui ne font pas que l'application  $T$  soit continue? En 1968, Kannan a donné une réponse positive à cette question et a démontré un théorème du point fixe pour la contraction suivante, connue sous le nom de contraction de Kannan.

**Définition 2.3.1** Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $L$  un opérateur  $L : X \rightarrow X$ , on dit que

$L$  est un opérateur de contraction s'il existe  $\gamma \in [0, 1)$  tel que

$$d(Lx, Ly) \leq \gamma d(x, y), \forall x, y \in X$$

**Définition 2.3.2** Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $L$  un opérateur  $L : X \rightarrow X$ , on dit que

$L$  est un opérateur de Kannan s'il existe  $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$  tel que

$$d(Lx, Ly) \leq \alpha [d(x, Lx) + d(y, Ly)], \forall x, y \in X \quad (\star)$$

**Théorème 2.3.1** Soit un espace métrique complet  $(X, d)$  et une application de Kannan  $(T : X \rightarrow X)$ . Donc,  $T$  admet un unique point fixe dans  $X$ .

**Preuve.** • Montrons qu'il existe un point  $a \in X$  tel que  $T(a) = a$ .

Soit  $\tau_0 \in X$ , on définit la suite  $(\tau_n)_n$  par

$$\tau_n = T(\tau_{n-1}), n = 1, 2, \dots,$$

à partir de la condition  $(\star)$ , nous obtenons.

$$\begin{aligned} d(\tau_n, \tau_{n+1}) &= d(T(\tau_{n-1}), T(\tau_n)) \\ &\leq \ell [d(\tau_{n-1}, \tau_n) + d(\tau_n, \tau_{n+1})] \end{aligned}$$

ce qui implique

$$d(\tau_n, \tau_{n+1}) \leq \frac{\ell}{1 - \ell} d(\tau_{n-1}, \tau_n).$$

Par récurrence sur  $n$ , on obtient

$$d(\tau_n, \tau_{n+1}) \leq \left( \frac{\ell}{1-\ell} \right)^n d(\tau_0, \tau_1).$$

On pose  $r = \frac{\ell}{1-\ell}$ . Si  $n$  et  $p$  sont deux nombres naturels, donc

$$\begin{aligned} d(\tau_n, \tau_{n+p}) &\leq d(\tau_n, \tau_{n+1}) + d(\tau_{n+1}, \tau_{n+2}) + \dots + d(\tau_{n+p-1}, \tau_{n+p}) \\ &\leq (r^n + r^{n+1} + \dots + r^{n+p-1})d(\tau_0, \tau_1) \\ &\leq \frac{r^n}{1-r} d(\tau_0, \tau_1). \end{aligned}$$

puisque

$$0 \leq \ell < \frac{1}{2}$$

on a :  $0 \leq r < 1$

et donc

$$d(\tau_n, \tau_{n+p}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

donc la suite  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy. Comme  $X$  est complet, il existe  $a \in X$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = a$$

Ainsi  $a$  est un point fixe de  $X$  car

$$\begin{aligned} d(a, T(a)) &\leq d(a, \tau_n) + d(\tau_n, T(a)) \\ &\leq d(a, \tau_n) + \ell[d(\tau_n, \tau_{n-1}) + d(a, T(a))], \end{aligned}$$

et donc

$$d(a, T(a)) \leq \frac{1}{1-\ell} d(a, \tau_n) + \frac{\ell}{\ell-1} d(\tau_n, \tau_{n-1}).$$

Soit  $\varepsilon > 0$  un réel arbitraire, comme  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $a$ , il existe un entier naturel

$$N = N(\varepsilon)$$

tel que

$$\forall n \geq N \geq 1 \Rightarrow d(a, \tau_n) \leq \varepsilon \frac{1-\ell}{1+\ell}$$

et

$$d(\tau_{n-1}, \tau_n) \leq \varepsilon \frac{1-\ell}{1+\ell}$$

Il en résulte que

$$d(a, T(a)) \leq \frac{\varepsilon}{1+\ell} + \frac{\varepsilon\ell}{1+\ell} = \varepsilon.$$

puisque  $\varepsilon$  est arbitraire, On conclut que  $T(a) = a$ .

- Montrons l'unicité du point fixe

Supposons que  $b$  est un autre point fixe de  $T$ , alors

$$\begin{aligned}d(a, b) &\leq \ell[d(a, T(a)) + d(b, T(b))] \\ &= 0\end{aligned}$$

et donc  $a = b$ . ■

**Exemple 2.3.1** Soit l'application  $K : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$K(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{si } x > 2 \\ 0 & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$$

Alors

1)  $K$  n'est pas continue.

2) Selon le théorème de Kannan,  $K$  remplit la condition  $(\star)$  avec  $l = \frac{1}{5}$  et donc  $K$  admet un seul point fixe  $u = 0$  dans  $\mathbb{R}$ .

# Chapitre 3

## Les équations intégrales et leurs classification

### 3.1 Equations intégrales

**Définition 3.1.1** Une équation fonctionnelle est connue sous le nom d'équation intégrale linéaire, avec une inconnue  $\Psi$  de la forme.

$$\Psi(x) = f(x) + \gamma \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \ell(x, \mu) \Psi(\mu) d\mu + f(x)$$

où  $\ell$  et  $f$  des fonctions donnés,  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$  sont les bornes de l'intégration,  $\gamma$  est un paramètre numérique non nul, réel ou complexe

### 3.2 Classification des équations intégrales

#### 3.2.1 Equations intégrales de Fredholm

**Définition 3.2.1** La première espèce d'équation intégrale de Fredholm est une équation de la forme :

$$\int_a^b \ell(x, \mu) \Psi(\mu) d\mu = f(x)$$

où  $\Psi$  est la fonction inconnue,  $f$  et  $\ell$  sont des fonctions connues, les bornes d'intégration sont constantes. C'est la caractéristique principale d'une équation de Fredholm.

**Définition 3.2.2** Une équation de la forme

$$\Psi(x) - \gamma \int_a^b \ell(x, \mu) \Psi(\mu) d\mu = f(x)$$

est connue sous le nom d'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce.

où  $\Psi(x)$  est la fonction inconnue,  $\ell(x, y)$  et  $f(x)$  des fonctions données,  $\gamma$  est un facteur inconnu

### 3.2.2 Equations intégrales de Volterra

Les équations de Volterra sont un cas particulier des équations intégrales de Fredholm, il suffit de prendre le noyau  $\ell$  tel que  $\ell(x, \mu) = 0$  pour  $x < \mu$ .

**Définition 3.2.3** La première espèce de l'équation intégrale linéaire de Volterra est une équation à une inconnue  $\Psi(x)$ , de la forme suivante :

$$\int_a^x \ell(x, \mu) \Psi(\mu) d\mu = f(x)$$

**Définition 3.2.4** La seconde espèce de l'équation intégrale linéaire de Volterra est une équation à une inconnue  $\Psi(x)$  de la forme suivante :

$$\Psi(x) - \gamma \int_a^x \ell(x, \mu) \Psi(\mu) d\mu = f(x)$$

### 3.2.3 Equations intégrales de Volterra-Fredholm

La combinaison des intégrales de Volterra et Fredholm disjointes est connue sous le nom d'équation intégrale de Volterra-Fredholm.

**Définition 3.2.5** Une équation de la forme :

$$\Psi(x) - \gamma_1 \int_a^x \ell_1(x, \mu) \Psi(\mu) d\mu - \gamma_2 \int_a^b \ell_2(x, \mu) \Psi(\mu) d\mu = f(x) \quad (3.2.1)$$

est connue sous le nom d'équation intégrale de Volterra-Fredholm.

Une équation de la forme :

$$\Psi(x) - \gamma \int_a^x \int_a^b \ell(s, \mu) \Psi(\mu) d\mu ds = f(x)$$

est appelée équation intégrale mixte.

où les fonctions  $\ell_1$ ,  $\ell_2$  et  $f$  sont connues, et  $\Psi(x)$  est la fonction inconnue.

$$\Psi(x) = \exp(x) + x + 1 + \int_0^x (x - \mu) \Psi(\mu) d\mu + \int_0^1 \exp(x - \mu) \Psi(\mu) d\mu, \quad x \in [0, 1]$$

$$\Psi(x) = \frac{17}{2}x^2 + 11x + \int_a^x \int_a^b (s - \mu) \Psi(\mu) d\mu ds$$

### 3.3 Existence et unicité de la solution des équations intégrales linéaires de Volterra-Fredholm

Nous rappelons dans cette partie les théorèmes que nous allons utiliser afin d'obtenir des résultats sur l'existence et l'unicité des solutions de l'équation (3.2.1)

**Définition 3.3.1** Si l'on a un espace normé  $X$  et un opérateur  $T : X \rightarrow X$ , on considère que  $T$  est un opérateur de Picard s'il existe un seul  $\Psi_0 \in X$  tel que :

$$T(\Psi_0) = \Psi_0, \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} T^n(\Psi) = \Psi_0 \text{ pour tout } \Psi \text{ de } X$$

**Théorème 3.3.1** (Principe de contraction). Soit  $X$  un espace normé. Si  $T : X \rightarrow X$  un opérateur de contraction alors  $T$  admet un point fixe unique  $\Psi$  et  $T$  est un opérateur de Picard de plus on a

$$\|\Psi_0 - T^n(\Psi)\| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|\Psi - T(\Psi)\|, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

**Preuve.** Voir[11] ■

### 3.4 Théorème d'existence et d'unicité

**Théorème 3.4.1** Soit l'équation linéaire de Volterra-Fredholm :

$$\Psi(x) - \int_a^x \ell_1(x, \mu) \Psi(\mu) d\mu - \int_a^b \ell_2(x, \mu) \Psi(\mu) d\mu = f(x), \quad x \in [a, b] \quad (3.2.1)$$

où

- 1)  $f \in C[a, b], \ell_1(x, \mu) \in C(D_1)$ , avec  $\{D_1 = (x, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } a \leq \mu \leq x \leq b\}$
- 2)  $\ell_2(x, \mu) \in C(D_2)$ , avec  $D_2 = [a, b] \times [a, b]$
- 3)  $M_1 = \max_{(x, \mu) \in D_1} |\ell_1(x, \mu)|$ , et  $M_2 = \max_{(x, \mu) \in D_2} |\ell_2(x, \mu)|$

Selon les conditions de continuité mentionnées précédemment, supposons qu'il existe une constante  $c > 0$  telle que :

$$\frac{1}{c} [M_1 + M_2 \exp(c(b - a))] < \frac{1}{3}$$

Donc, l'équation (3.2.1) possède une seule solution.  $\Psi \in C[a, b]$ .

**Preuve.** Prenons l'opérateur  $T : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ , qui est défini par

$$T\Psi(x) = f(x) + \int_a^x \ell_1(x, \mu) \Psi(\mu) d\mu + \int_a^b \ell_2(x, \mu) \Psi(\mu) d\mu$$

$$\begin{aligned}
 |T\Psi(x) - T\psi(x)| &= \left| \int_a^x \ell_1(x, \mu) (\Psi(\mu) - \psi(\mu)) d\mu + \int_a^b \ell_2(x, \mu) (\Psi(\mu) - \psi(\mu)) d\mu \right| \\
 &\leq \int_a^x |\ell_1(x, \mu)| |(\Psi(\mu) - \psi(\mu))| d\mu + \int_a^b |\ell_2(x, \mu)| |(\Psi(\mu) - \psi(\mu))| d\mu \\
 &\leq M_1 \int_a^x |(\Psi(\mu) - \psi(\mu))| \exp(-c(\mu - a)) \exp(c(\mu - a)) d\mu + \\
 &\quad M_2 \int_a^b |(\Psi(\mu) - \psi(\mu))| \exp(-c(\mu - a)) \exp(c(\mu - a)) d\mu \\
 &\leq \left[ \frac{M_1}{c} (\exp(c(x - a)) - 1) + \frac{M_2}{c} (\exp(c(b - a)) - 1) \right] \|\Psi - \psi\| \\
 &\leq \left[ \frac{M_1}{c} \exp(c(x - a)) + \frac{M_2}{c} \exp c(x - a + b - x) \right] \|\Psi - \psi\| \\
 &\leq \frac{\exp c(x - a)}{c} [M_1 + M_2 \exp c(b - x)] \|\Psi - \psi\| \\
 &\leq \frac{\exp c(x - a)}{c} [M_1 + M_2 \exp c(b - a)] \|\Psi - \psi\| \\
 &\leq \frac{\exp c(x - a)}{c} [M_1 + M_2 \exp c(b - a)] (\|T\Psi - \Psi\| \\
 &\quad + \|T\psi - \psi\| + \|T\Psi - T\psi\|)
 \end{aligned}$$

Il en découle que

$$|T\Psi(x) - T\psi(x)| \exp(-c(x - a)) \leq [M_1 + M_2 e^{c(b-a)}] (\|T\Psi - \Psi\| + \|T\psi - \psi\| + \|T\Psi - T\psi\|), \text{ pour tout } x \in [a, b]$$

Alors

$$\|T\Psi - T\psi\| \leq \frac{\frac{1}{c} [M_1 + M_2 e^{c(b-a)}]}{1 - \frac{1}{c} [M_1 + M_2 e^{c(b-a)}]} (\|T\Psi - \Psi\| + \|T\psi - \psi\|)$$

donc

$$\|T\Psi - T\psi\| \leq \gamma (\|T\Psi - \Psi\| + \|T\psi - \psi\|)$$

avec

$$\gamma = \left( \frac{\frac{1}{c} [M_1 + M_2 \exp c(b - a)]}{1 - \frac{1}{c} [M_1 + M_2 \exp c(b - a)]} \right) \in \left[ 0, \frac{1}{2} \right].$$

La condition supposée garantit que  $T$  est un opérateur de *Kannan*. Donc, on met en pratique le principe du point fixe de *Kannan*. ■

**Remarque 3.4.1** *La solution peut être obtenue par la méthode d'approximation successive, à partir de  $\Psi_0 \in C[a, b]$*

## 3.5 Méthodes de projection

### 3.5.1 Opérateurs de projection

Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $M \subset H$  un sous-espace vectoriel fermé de  $H$ .

L'opérateur de projection orthogonale sur  $M$  est notée  $P_M$  et est défini par :

$$P_M : H \rightarrow M \text{ avec } x \mapsto P_M(x)$$

pour tout  $x \in H$ , il existe un unique élément  $P_M x \in M$  tel que  $(x - P_M x) \perp M$ .

**Remarque 3.5.1**  *$P_M x$  est une application linéaire continue et on a les propriétés suivantes :*

$$\|P_M x\| \leq \|x\| \text{ pour tout } x \in H, P_M^2 = P_M, \text{Im } P_M = M \text{ et } \ker P_M = M^\perp.$$

**Proposition 3.5.1** *(Caractérisation du projeté orthogonal) :*

Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $M \subset H$  un sous-espace vectoriel fermé de  $H$ , soit  $x \in H$  et  $x_c \in M$  : si  $\langle x - x_c, y \rangle = 0$  pour tout  $y \in M$ , alors :

$$x_c = P_M x \iff \|x - x_c\| = \inf_{y \in M} \|x - y\|$$

**Preuve.** Voir[11] ■

### Principe des méthodes de projection

Le principe des méthodes de projection pour résoudre l'équation intégrale de deuxième espèce de Volterra-Fredholm suivante :

$$\Psi(x) - \gamma_1 \int_a^x \ell_1(x, \mu) \Psi(\mu) d\mu - \gamma_2 \int_a^b \ell_2(x, \mu) \Psi(\mu) d\mu = f(x)$$

consiste a construire une suite  $(\Psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de la forme :

$$\Psi_n(x) = \sum_{j=0}^{\ell_n} \alpha_j \Theta_j(x), x \in D$$

et de utiliser le reste  $R_n(x)$  définit par :

$$R_n(x) = \Psi_n(x) - \gamma_1 \int_a^x \ell_1(x, \mu) \Psi_n(\mu) d\mu - \gamma_2 \int_a^b \ell_2(x, \mu) \Psi_n(\mu) d\mu - f(x)$$

En remplacant  $\Psi_n(x)$  dans l'expression précédente, on obtient :

$$R_n(x) = \sum_{j=0}^{\ell_n} \alpha_j \Theta_j(x) - \gamma_1 \int_a^x \ell_1(x, \mu) \sum_{j=0}^{\ell_n} \alpha_j \Theta_j(\mu) d\mu - \gamma_2 \int_a^b \ell_2(x, \mu) \sum_{j=0}^{\ell_n} \alpha_j \Theta_j(\mu) d\mu - f(x), x \in D$$

où  $X$  un espace vectoriel donné,  $D$  un ensemble précis et  $\{\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \dots, \Theta_{\ell_n}\}$  une base d'un sous-espaces approximatif  $X_n$  tel que  $X_n \subset X$ ,

Enfin, la convergence de  $\Psi_n$  vers la solution exacte  $\Psi$  est confirmée a l'aide d'opérateurs de projection adaptés.

Cette méthode est appliquée dans la section 4.2

Il existe diverses méthodes de projection. Les plus employées sont :

### 3.5.2 Méthode de Galerkin

est une technique de projection dans laquelle l'espace d'approximation est choisi de manière à ce que l'erreur soit orthogonal au sous-espace des fonctions de base.

#### La méthode de Ritz-Galerkin

est une méthode utilisée pour résoudre des équations intégrales (ou des problèmes aux dérivées partielles) en approximant la solution exacte par une combinaison linéaire de fonctions de test choisies. Pour une équation intégrale, l'idée générale est de transformer le prob-

lème en un système d'équations algébriques de taille finie, que l'on peut résoudre numériquement.

### **La méthode de Bubnov-Galerkin**

est une technique d'approximation utilisée principalement pour résoudre des équations aux dérivées partielles (EDP), mais elle peut également être adaptée pour résoudre des équations intégrales. Cette méthode fait partie des méthodes des éléments finis, mais elle peut aussi être appliquée à des problèmes d'équations intégrales en utilisant des espaces fonctionnels appropriés.

### **La méthode de Petrov-Galerkin**

est une méthode numérique utilisée pour résoudre des équations intégrales, en particulier les équations intégrales de type Fredholm ou Volterra. Elle est une généralisation de la méthode classique de Galerkin, et elle est souvent utilisée dans des situations où l'on veut obtenir des approximations plus flexibles ou plus précises que celles fournies par la méthode de Galerkin standard.

## **3.6 Méthode de collocation**

La méthode de collocation est une méthode numérique utilisée pour résoudre des équations intégrales. Elle repose sur la réduction du problème d'intégrale à un système d'équations algébriques en choisissant judicieusement un ensemble de points (appelés points de collocation) où la solution approximative est forcée d'être exacte.

## 3.7 Analyse des équations intégrales linéaires de Volterra-Fredholm.

### 3.7.1 La méthode des solutions sous forme de séries

On dit que la fonction  $\Psi(x)$  est analytique si elle a des dérivées de tous les ordres, telles que la série de Taylor en  $x = 0$  peut être représentée comme

$$\Psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (3.7.1)$$

Dans la présente section, nous utiliserons la méthode des solutions en série, qui est principalement basée sur la série de Taylor pour les fonctions analytiques.

Afin de résoudre les équations de Volterra-Fredholm, il est supposé que La solution  $\Psi(x)$  de l'équation

$$\Psi(x) = f(x) + \int_a^x \ell_1(x, \mu) \Psi(\mu) d\mu + \int_a^b \ell_2(x, \mu) \Psi(\mu) d\mu \quad (3.7.2)$$

est analytique, donc  $\Psi(x)$  une série de Taylor de la forme donnée en (3.7.1), où les coefficients seront déterminés de manière récurrente. Dans cette méthode, on remplace la série de Taylor (3.7.1) des deux côtés de (3.2.1) afin d'obtenir

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = T(f(x)) + \int_a^x \ell_1(x, \mu) \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mu^n \right) d\mu + \int_a^b \ell_2(x, \mu) \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mu^n \right) d\mu \quad (3.7.3)$$

Afin de simplifier, on utilise cette méthode.

$$\Psi(x) = T(f(x)) + \int_a^x \ell_1(x, \mu) (a_0 + .a_2\mu^2 + .) d\mu + \int_a^b \ell_2(x, \mu) (a_0 + .a_2\mu^2 + .) d\mu \quad (3.7.4)$$

où  $T(f(x))$  est le développement de Taylor de la fonction  $f$

**Exemple 3.7.1** *La méthode des solutions en série permet de résoudre l'équation intégrale de Volterra-Fredholm.*

$$\Psi(x) = x^5 - 6x^3 - x^2 - x + 2 + \int_0^x \mu \Psi(\mu) d\mu + \int_{-1}^1 (x + \mu) \Psi(\mu) d\mu \quad (3.7.5)$$

En substituant  $\Psi(x)$  par la série.

$$\Psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

En remplaçant dans l'équation (3.7.5) nous obtenons.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^5 - 6x^3 - x^2 - x + 2 + \int_0^x \left( \mu \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mu^n \right) d\mu + \int_{-1}^1 \left( (x + \mu) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mu^n \right) d\mu \quad (3.7.6)$$

Les intégrales du côté droit sont évaluées en utilisant quelques termes des deux côtés et en rassemblant les coefficients de même puissance de  $x$ .

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 \dots &= 2 + \frac{2}{3} a_1 + \frac{2}{5} a_3 + \left( -1 + 2a_0 + \frac{2}{3} a_2 + \frac{2}{5} a_4 \right) \\ &+ \left( -1 + \frac{1}{2} a_0 \right) x^2 + \left( -6 + \frac{1}{3} a_1 \right) x^3 + \frac{1}{4} a_2 x^4 + \left( -1 + \frac{1}{5} a_3 \right) x^5 \dots \end{aligned} \quad (3.7.7)$$

Après avoir égalé les coefficients de puissances similaires de  $x$  des deux côtés de (3.7.7) et résolu le système d'équations résultant, nous obtenons :

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 3, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -5, \quad a_4 = a_5 = \dots = 0$$

Ainsi, la solution précise est fournie par

$$\Psi(x) = 2 + 3x - 5x^2$$

### 3.7.2 La méthode de décomposition d'Adomian

Ce texte présente en détail la méthode de décomposition d'Adomian pour traiter les équations intégrales de Volterra-Fredholm de manière autonome. La méthode implique de diviser la fonction inconnue  $\Psi(x)$  de toute équation en une somme d'un nombre infini de composants définis par la série suivante :

$$\Psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(x) \quad (3.7.8)$$

Il est nécessaire de déterminer de manière récursive les composantes  $\Psi_n(x)$ ,  $n \geq 0$ . Nous substituons la série de décomposition dans l'équation intégrale de Volterra-Fredholm pour établir la relation de récurrence (3.2.1) afin d'obtenir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(x) = T(f(x)) + \int_a^x \ell_1(x, \mu) \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(x) d\mu + \int_a^b \ell_2(x, \mu) \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(x) d\mu$$

On reconnaît la composante  $\Psi_0(x)$  par tous les termes qui ne sont pas intégrés. De cette manière, nous établissons la relation de récurrence.

$$\Psi_0(x) = f(x) \text{ et } \Psi_{n+1}(x) = \int_a^x \ell_1(x, \mu) \Psi_n(x) d\mu + \int_a^b \ell_2(x, \mu) \Psi_n(x) d\mu$$

Après avoir déterminé les composantes  $\Psi_0(x), \Psi_1(x), \Psi_2(x), \dots$  la solution sous forme de série est facilement obtenue en utilisant (3.7.8), qui converge vers la solution exacte.

**Exemple 3.7.2** Utiliser la méthode de décomposition d'Adomian modifiée pour résoudre l'équation intégrale de Volterra-Fredholm suivante :

$$\Psi(x) = \cos x - \sin x - 2 + \int_0^x \Psi(\mu) d\mu + \int_0^{\pi} (x - \mu) \Psi(\mu) d\mu$$

La méthode de décomposition modifiée permet d'obtenir la relation de récurrence.

$$\begin{aligned} \Psi_0(x) &= \cos x, \quad \Psi_1(x) = -\sin x - 2 + \int_0^x \Psi_0(\mu) d\mu + \int_0^{\pi} (x - \mu) \Psi_0(\mu) d\mu = 0, \\ \Psi_{n+1}(x) &= \int_a^x \ell_1(x, \mu) \Psi_n(x) d\mu + \int_a^b \ell_2(x, \mu) \Psi_n(x) d\mu \text{ pour } n \geq 1 \end{aligned}$$

Ainsi, la solution précise est fournie par

$$\Psi(x) = \cos x$$

## Chapitre 4

# Application des polynomes de Tchebychev sur les équations intégrales de Volterra-Fredholm

La solution numérique du problème linéaire des équations intégrales de Volterra-Fredholm du deuxième type a été examinée dans ce chapitre en utilisant les premiers, deuxièmes, troisièmes et quatrièmes types de polynômes de Tchebychev. En tenant compte du fait que la solution approchée est présentée sous forme de séries qui se rapprochent de la solution précise. On compare des exemples numériques à d'autres techniques pour démontrer l'applicabilité et l'efficacité de cette technique.

L'équation intégrale de Volterra-Fredholm est donnée par :

$$\Psi(x) - \int_a^x \ell_1(x, \mu) \Psi(\mu) d\mu - \int_a^b \ell_2(x, \mu) \Psi(\mu) d\mu = f(x) \quad (3.2.1)$$

Les fonctions  $\ell_1(x, \mu)$ ,  $\ell_2(x, \mu)$  et  $f(x)$  sont données,  $\ell_1(x, \mu)$  et  $\ell_2(x, \mu)$  sont des noyaux bornés en  $a \leq x, \mu \leq b$ , la fonction inconnue à déterminer est la fonction  $\Psi(x)$ .

## 4.1 Extraction des systemes polynomial orthonormées des polynomes de Tchebychev

### 4.1.1 Polynômes de première espèce de Tchebychev

Sachant que les fonctions  $\{T_n(x), n = 0, 1, 2, \dots\}$  forment un système orthogonal sur l'intervalle  $[-1, 1]$  par rapport au poids  $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , et ainsi, le système polynomial  $S_n(x)$  donné par

$$\left\{ S_0(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}T_0(x), S_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}T_1(x), S_2(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}T_2(x), \dots, S_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}T_n(x) \dots \right\},$$

forme un système orthonormé formé sur l'intervalle  $[-1, 1]$  en fonction du poids  $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

En d'autres termes, la relation d'orthonormalité est donnée par :

$$\langle S_\ell(x), S_j(x) \rangle = \int_{-1}^1 \frac{S_\ell(x)S_j(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & \text{if } \ell \neq j \\ 1 & \text{if } \ell = j \end{cases}$$

### 4.1.2 Polynômes de seconde espèce de Tchebychev

Sachant que les fonctions  $\{U_n(x), n = 0, 1, 2, \dots\}$  forment un système orthogonal sur l'intervalle  $[-1, 1]$  par rapport au poids  $w(x) = \sqrt{1-x^2}$ , et ainsi le système polynomial  $S_n(x)$  donné par

$$\left\{ S_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}U_0(x), S_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}U_1(x), S_2(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}U_2(x), \dots, S_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}U_n(x) \dots \right\},$$

forme un système orthonormé sur l'intervalle  $[-1, 1]$  en fonction du poids  $w(x) = \sqrt{1-x^2}$

En d'autres termes, la relation d'orthonormalité est donnée par :

$$\langle S_\ell(x), S_j(x) \rangle = \int_{-1}^1 S_\ell(x)S_j(x)\sqrt{1-x^2} dx = \begin{cases} 0 & \text{if } \ell \neq j \\ 1 & \text{if } \ell = j \end{cases}$$

### 4.1.3 Polynômes de troisième espèce de Tchebychev

Sachant que les fonctions  $\{V_n(x), n = 0, 1, 2, \dots\}$  forment un système orthogonal sur l'intervalle  $[-1, 1]$  par rapport au poids  $w(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ , et ainsi, le système polynomial  $S_n(x)$  donné par

$$\left\{ S_0(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}V_0(x), S_1(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}V_1(x), S_2(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}V_2(x), \dots, S_n(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}V_n(x) \dots \right\},$$

forme un système orthonormé sur l'intervalle  $[-1, 1]$  par rapport au poids  $w(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

En d'autres termes, la relation d'orthonormalité est donnée par :

$$\langle S_\ell(x), S_j(x) \rangle = \int_{-1}^1 S_\ell(x)S_j(x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \begin{cases} 0 & \text{if } \ell \neq j \\ 1 & \text{if } \ell = j \end{cases}$$

### 4.1.4 Polynômes de quatrième espèce de Tchebychev

Etant donné que les fonctions  $\{W_n(x) n = 0, 1, 2, \dots\}$  forment un système orthogonal sur l'intervalle  $[-1, 1]$  par rapport au poids  $w(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ , et ainsi le système polynomial  $S_n(x)$  donné par

$$\left\{ S_0(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}W_0(x), S_1(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}W_1(x), S_2(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}W_2(x), \dots, S_n(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}W_n(x) \dots \right\},$$

forme un système orthonormé sur l'intervalle  $[-1, 1]$  par rapport au poids  $w(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

En d'autres termes, la relation d'orthonormalité est donnée par :

$$\langle S_\ell(x), S_j(x) \rangle = \int_{-1}^1 S_\ell(x)S_j(x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx = \begin{cases} 0 & \text{if } \ell \neq j \\ 1 & \text{if } \ell = j \end{cases}$$

## 4.2 Réduction de l'équation intégrale

Une méthode de collocation peut être utilisée pour discrétiser et convertir l'équation (3.2.1) en un système d'équations linéaires. En considérant que  $a = -1$  et  $b = 1$ , on peut approximer la fonction inconnue  $\Psi(x)$  par une somme finie de la forme suivante:

$$\Psi_n(x) = \sum_{\ell=0}^n \alpha_\ell S_\ell(x), \quad (4.2.1)$$

où  $S_n(x)$  est le nième polynôme de Tchebychev du premier, deuxième, troisième ou quatrième type.

Une fois que le développement (4.2.1) est remplacé dans l'équation (3.2.1), cette dernière devient une équation approximative similaire à celle-ci.

$$\sum_{\ell=0}^n \alpha_\ell S_\ell(x) - \int_a^x \ell_1(x, \mu) \left( \sum_{\ell=0}^n \alpha_\ell S_\ell(\mu) \right) d\mu - \int_a^b \ell_2(x, \mu) \left( \sum_{\ell=0}^n \alpha_\ell S_\ell(\mu) \right) d\mu = f(x) \quad (4.2.2)$$

Choisissez les coefficients de Fourier  $\alpha_\ell$  tels que (4.2.2) pour que l'intervalle  $[-1, 1]$  soit satisfait. En utilisant cette technique, nous considérons les points de collocation équidistants de la manière suivante.

$$x_j = -1 + \frac{2j}{n}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n \quad (4.2.3)$$

et décrire le reste comme

$$R_n(x) = \sum_{\ell=0}^n \alpha_\ell S_\ell(x) - \int_a^x \ell_1(x, \mu) \left( \sum_{\ell=0}^n \alpha_\ell S_\ell(\mu) \right) d\mu - \int_a^b \ell_2(x, \mu) \left( \sum_{\ell=0}^n \alpha_\ell S_\ell(\mu) \right) d\mu - f(x) \quad (4.2.4)$$

Par la suite, en établissant des critères aux points de collocation.

$$R_n(x_j) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad (4.2.5)$$

l'équation intégrale (4.2.2) est convertie en un système d'équations linéaires.

**Théorème 4.2.1** *Supposons que pour l'équation (3.2.1), avec  $a = -1$ ,  $b = 1$  les hypothèses suivantes soient satisfaites :*

- 1)  $f \in C([a, b])$ ,  $\ell_1(x, \mu) \in C(D_1)$  avec  $D_1 = \{(x, \mu) \in \mathbb{R}^2; a \leq \mu, x \leq b\}$
- 2)  $\ell_2(x, \mu) \in C(D_2)$  avec  $D_2 = [a, b] \times [a, b]$
- 3)  $M_1 = \max_{D_1} \ell_1(x, \mu)$ ,  $M_2 = \max_{D_2} \ell_2(x, \mu)$
- 4) Il existe une constant  $c > 0$  tel que :  $\frac{1}{c} [M_1 + M_2 \exp c(b - a)] < \frac{1}{3}$

L'équation (3.2.1) admet donc une seule solution  $\Psi \in C([a, b])$ .

**Preuve.** Application du théorème du point fixe de *Kannan* (3.4.1) ■

**Théorème 4.2.2** *Etant donné  $A : X \rightarrow X$  un opérateur compact et supposons que l'équation*

$$(I - A)\Psi = f \tag{4.2.6}$$

admet une solution unique. Pour les projections

$$P_n : X \rightarrow X_n$$

telles que  $\|P_n A - A\| \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , l'équation approchée

$$\Psi_n - P_n A \Psi_n = P_n f \tag{4.2.7}$$

a une seule solution pour tout  $f \in X$  avec  $n$  un nombre suffisamment grand, en outre,

$$\|\Psi - \Psi_n\| \leq M \|\Psi - P_n \Psi\| \tag{4.2.8}$$

pour une constante positive  $M$  dépendant de  $A$ .

**Preuve.** On le sait que pour tout  $n$  suffisamment grand, les opérateurs inverses

$$(I - P_n A)^{-1}$$

existent et sont uniformément borné, voir [1,5]. Pour vérifier la borne d'erreur, nous appliquons l'opérateur de projection  $P_n$  à l'équation (4.2.6) et obtenons

$$P_n \Psi - P_n A \Psi = P_n f, \tag{4.2.9}$$

ou encore

$$\Psi - P_n A \Psi = P_n f + \Psi - P_n \Psi. \tag{4.2.10}$$

on soustrayant (4.2.10) de (4.2.7), nous trouvons

$$(I - P_n A)(\Psi - \Psi_n) = (I - P_n)\Psi. \tag{4.2.11}$$

Donc l'estimation (4.2.8). ■

### 4.3 Exemples numériques

**Exemple 4.3.1** Prenons l'équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm

$$\Psi(x) - \int_0^x (x + \mu)\Psi(\mu)d\mu - \int_0^1 (x - \mu)\Psi(\mu)d\mu = f(x),$$

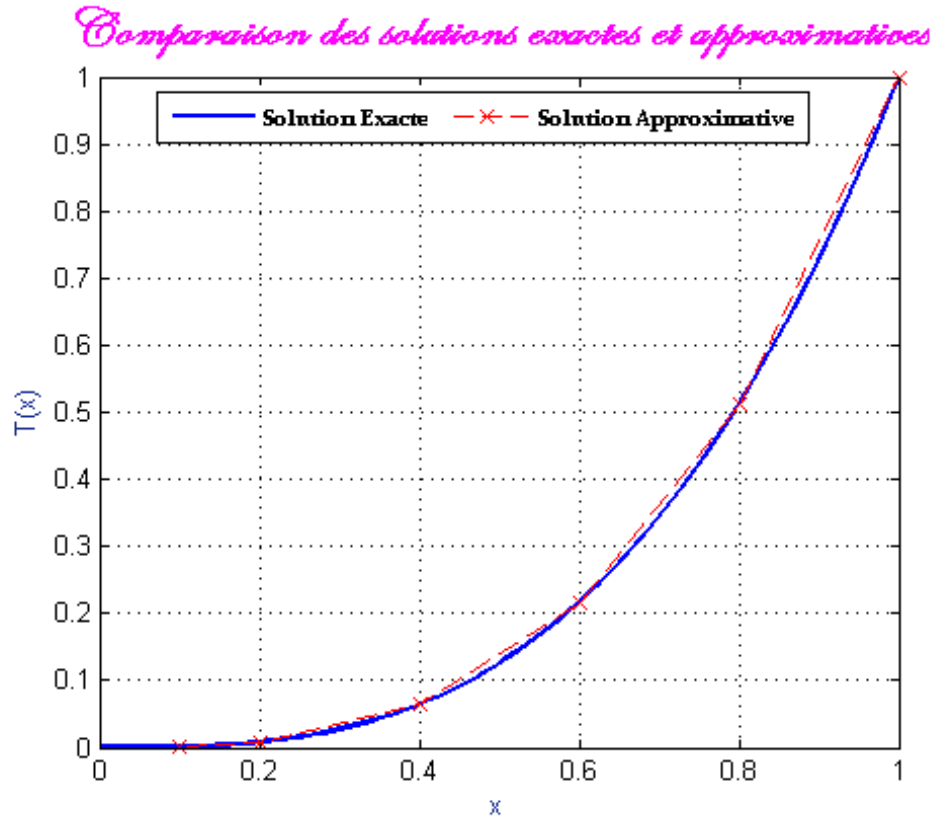
où on choisit la fonction  $f(x)$  de manière à ce que la solution  $\Psi(x)$  soit donnée par

$$\Psi(x) = x^3$$

Le premier polynôme de Tchebychev  $T_n(x)$  est utilisé pour approximer la solution  $\Psi(x)$ , c'est-à-dire la solution  $\Psi_N(x)$  du système d'équations linéaires pour  $N = 20$ .

**Tableau 1.** Les solutions approximatives et exactes de l'exemple 1 en quelques points arbitraires, en utilisant le premier polynôme de Tchebychev  $T_n(x)$

Pts de x	sol approx	sol exact	Erreur	Erreur [3]
0.1000	9.9997e-04	1.0000e-003	2.7733e-08	2.2180e-04
0.2000	7.9999e-03	8.0000e-03	2.7743e-08	3.4990e-04
0.4000	6.3999e-02	6.4000e-02	3.0414e-08	1.9947e-03
0.6000	2.1600e-01	2.1600e-01	3.7607e-08	4.2426e-03
0.8000	5.1199e-01	5.1200e-01	5.1990e-08	6.4507e-03
1.0000	9.9999e-01	1.0000e+00	7.9374e-08	6.2804e-03

**Figure 1** Comparaison des solutions exactes et approximatives – voir **Tableau 1**

**Exemple 4.3.2** Prenons l'équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm

$$\Psi(x) - \int_0^x (x - \mu)\Psi(\mu)d\mu - \int_0^1 x\Psi(\mu)d\mu = f(x),$$

où on choisit la fonction  $f(x)$  de manière à ce que la solution  $\Psi(x)$  soit donnée par

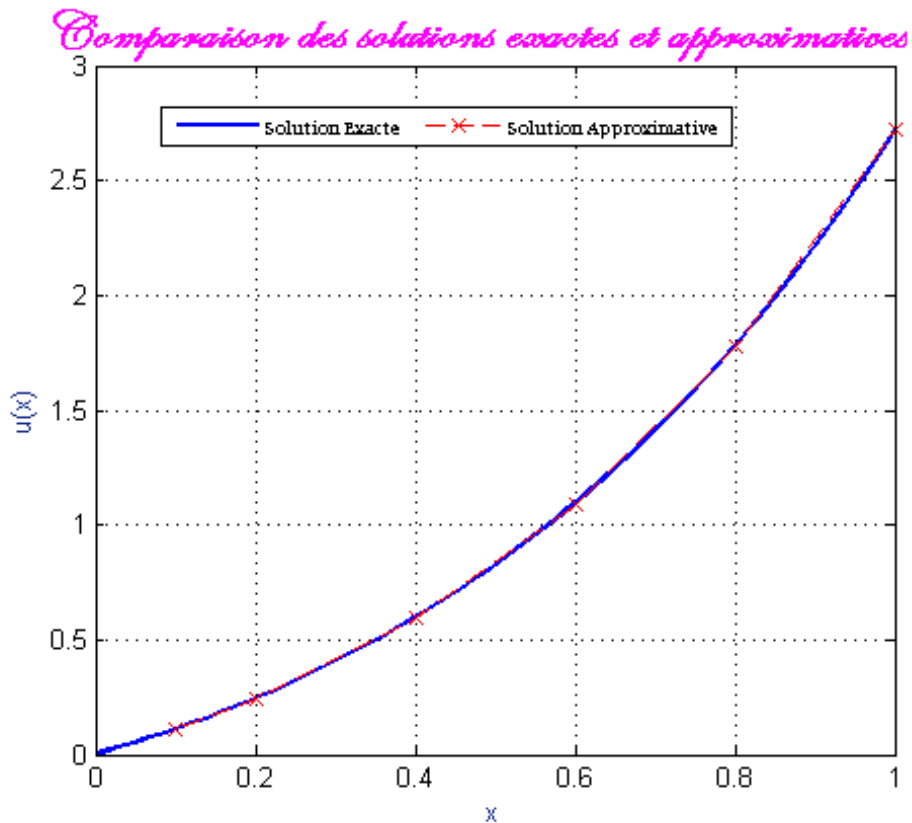
$$\Psi(x) = xe^x$$

Approximation de la solution  $\Psi(x)$  par le deuxième polynôme de Tchebychev  $U_n(x)$ , c'est-à-dire la solution  $\Psi_N(x)$  du système d'équations linéaires pour  $N = 20$ .

**Tableau 2.** Les solutions approximatives et exactes de l'exemple 2 en quelques points arbitraires, en utilisant le deuxième polynôme de Tchebychev  $U_n(x)$

Pts de x	sol approx	sol exact	Erreur	Erreur [3]
0.1000	1.1051e-01	1.1051e-01	3.4955e-09	1.1984e-03
0.2000	2.4428e-01	2.4428e-01	7.3223e-09	2.4176e-03
0.4000	5.9672e-01	5.9672e-01	1.6285e-08	5.0039e-03
0.6000	1.0932e+00	1.0932e+00	2.7624e-08	7.9393e-03
0.8000	1.7804e+00	1.7804e+00	4.2272e-08	1.1428e-02
1.0000	2.7182e+00	2.7182e+00	6.1421e-08	1.5715e-02

**Figure 2** Comparaison des solutions exactes et approximatives – voir **Tableau 2**



**Exemple 4.3.3** *Considérons l'équation intégrale Volterra-Fredholm.*

$$\Psi(x) - \int_0^x \cos(x - \mu)\Psi(\mu)d\mu - \int_0^1 \sin(x - \mu)\Psi(\mu)d\mu = f(x),$$

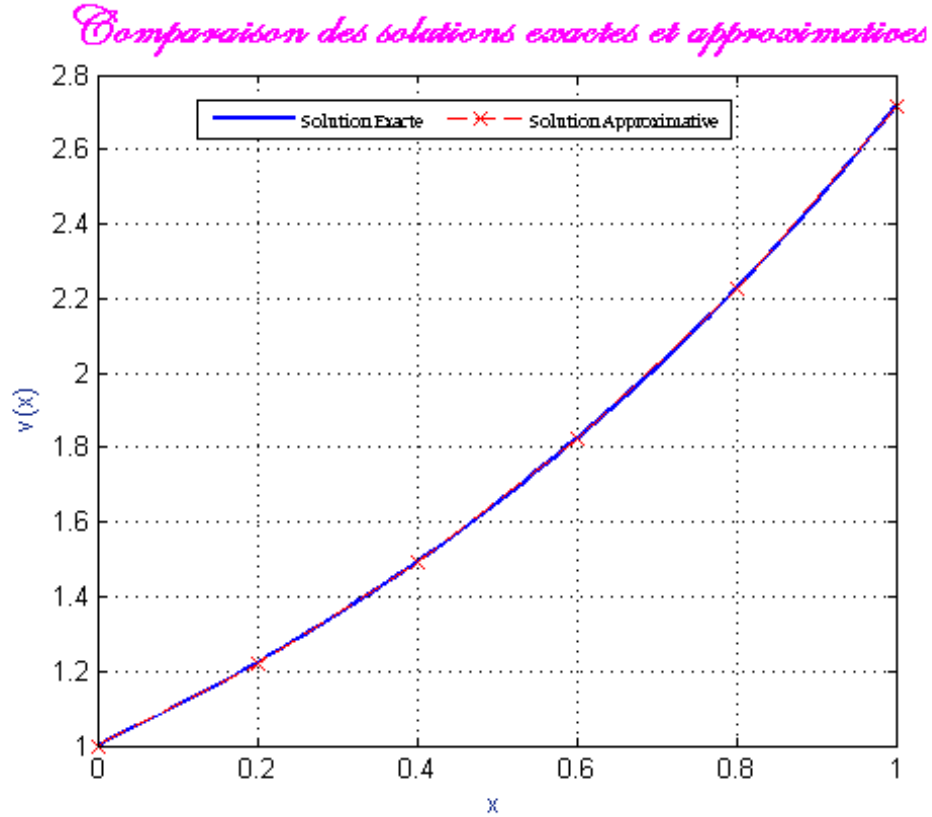
où on choisit la fonction  $f(x)$  de manière à ce que la solution  $\Psi(x)$  soit donnée par

$$\Psi(x) = \exp(x)$$

Approximation de la solution  $\Psi(x)$  par le troisième polynôme de Tchebychev  $V_n(x)$ , c'est-à-dire la solution  $\Psi_N(x)$  du système d'équations linéaires pour  $N = 20$ .

**Tableau 3.** Les solutions approximatives et exactes de l'exemple 3 en quelques points arbitraires, en utilisant le troisième polynôme de Tchebychev  $V_n(x)$ .

Pts de x	sol approx	sol exact	Erreur	Erreur [3]
0.0000	1.0000e+00	1.0000e+00	1.0215e-08	0.10000e-03
0.2000	1.2214e+00	1.2214e+00	7.6344e-09	0.10000e-03
0.4000	1.4918e+00	1.4918e+00	3.6767e-09	0.10000e-03
0.6000	1.8221e+00	1.8221e+00	1.8910e-09	0.10000e-03
0.8000	2.2255e+00	2.2255e+00	9.3059e-09	0.10000e-03
1.0000	2.7182e+00	2.7182e+00	1.8804e-08	0.10000e-03

**Figure 3** Comparaison des solutions exactes et approximatives – voir **Tableau 3**

**Exemple 4.3.4** *Considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm comme suit.*

$$\Psi(x) - \int_{-1}^x (x\mu)\Psi(\mu)d\mu - \int_{-1}^1 2 \cosh(x + \mu)\Psi(\mu)d\mu = f(x),$$

où on choisit la fonction  $f(x)$  de manière à ce que la solution  $\Psi(x)$  soit donnée par

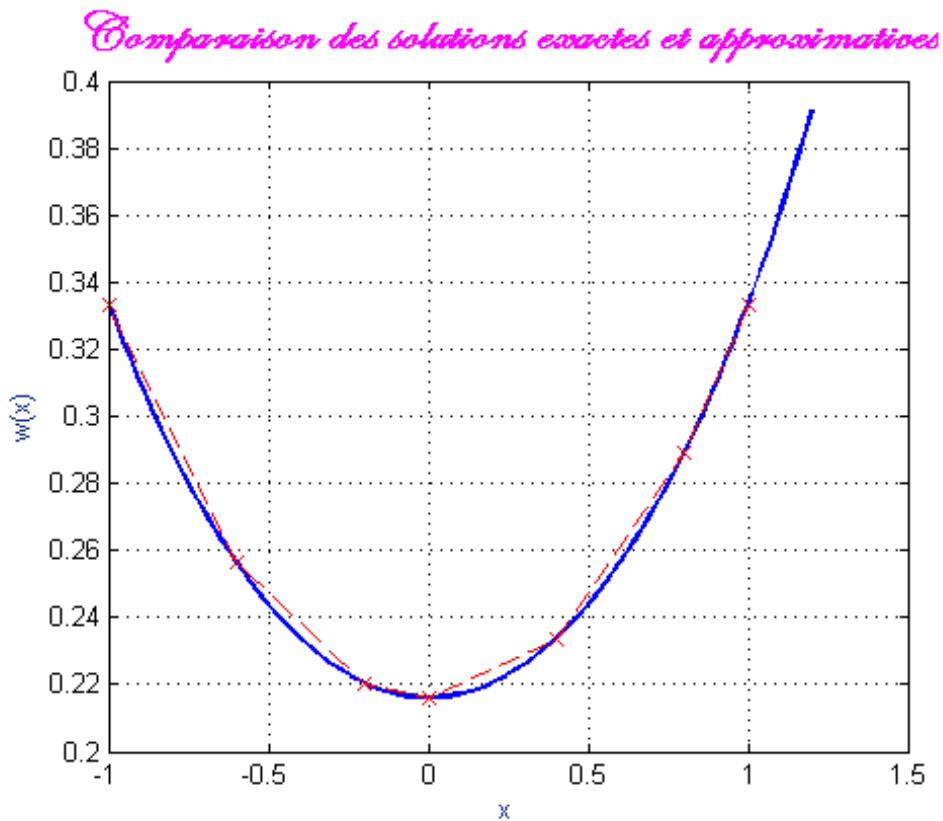
$$\Psi(x) = \frac{\cosh x}{\sinh 2 + 1}$$

Approximation de la solution  $\Psi(x)$  par le deuxième polynôme de Tchebyshev  $W_n(x)$ , c'est-à-dire la solution  $\Psi_N(x)$  du système d'équations linéaires pour  $N = 20$ .

**Tableau 4.** Les solutions approximatives et exactes de l'exemple 4 en quelques points arbitraires, en utilisant le quatrième polynôme de Tchebychev  $W_n(x)$ .

Pts de x	sol approx	sol exact	Erreur
-1.0000	0.33350	0.33350	0.11299e-06
-0.6000	0.25621	0.25621	0.10667e-06
-0.2000	0.22046	0.22046	0.96093e-07
0.0000	0.21612	0.21612	0.93194e-07
0.4000	0.23365	0.23365	0.10029e-06
0.8000	0.28905	0.28905	0.14034e-06
1.0000	0.33350	0.33350	0.18618e-06

**Figure 4** Comparaison des solutions exactes et approximatives – voir **Tableau 4**



## Conclusion

Dans ce travail, nous avons proposé une méthode efficace pour résoudre les équations intégrales de Volterra-Fredholm. Pour cela, nous avons utilisé quatre types de polynômes de Tchebyshev afin de trouver la fonction inconnue  $\Psi(x)$ . En remplaçant cette approximation dans l'équation, nous avons obtenu un système d'équations linéaires avec  $N + 1$  inconnues. Les résultats montrent que notre méthode est rapide, précise et stable. Elle donne de meilleurs résultats que d'autres méthodes numériques.

Cette étude a montré que, bien que la méthode nécessite des calculs précis, elle permet d'obtenir des solutions fiables avec une bonne précision.

Pour poursuivre ce travail, plusieurs pistes peuvent être envisagées :

– Améliorer d'autres méthodes numériques en exploitant les avantages de notre approche en termes de précision et de rapidité.

– Développer de nouvelles méthodes numériques plus performantes, inspirées de notre approche et de la théorie du point fixe de Kannan.

– Appliquer notre méthode à des problèmes complexes en biologie mathématique pour mieux comprendre certains phénomènes nécessitant des solutions numériques précises.

A l'avenir, il serait intéressant d'étendre cette approche à d'autres types d'équations intégrales et à des modèles plus complexes, tout en préservant un bon équilibre entre précision, rapidité et faisabilité.

# Bibliographie

- [1] K.E. Atkinson, The Numerical Solution of Integral Equation of the Second Kind, Cambridge University press (1997)
- [2] H. L. Dastjero, F. M. Ghaini, Numerical solution of Volterra-Fredholm integral equation by moving least square method and Chebychev polynomials, Applied Mathematical Modelling, 36(2012), pp.3283-3288
- [3] H. M. Malaikah, The Adomian decomposition method for solving Volterra-Fredholm integral equation using Maple, Applied Mathematics, 11'2020), pp. 779-787.
- [4] K. Maleknejad, K. Nouri, M. Yousfy, Discussion on convergence of Legendre polynomial for numerical solution of integral equations, Applied Mathematics and Computation, 193(2007), pp. 335-339.
- [5] L. Kantorovitch, G. Akilov, Functional Analysis, Pergamon Press, University of Michigan (1982).
- [6] M. N. Nadir, Sur la Solution Numérique des équations Intégrales de Volterra-Fredholm en Utilisant les Polynômes de Chebychev, Master, University of Msila (2022).
- [7] M. Nadir, Solving Fredholm integral equations with application of the four Chebyshev polynomials, Journal of Approximation Theory and Applied Mathematics, 4 (2014), pp. 15-20.
- [8] M. Nadir, M. Dilmi, Euler series solutions for linear integral equations, The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications, 14, 2 (2017), pp. 1-7.

- [9] M. Nadir, B. Gagui, Quadratic numerical treatment for singular integral equations with logarithmic kernel, *Int. J. Computing Science and Mathematics*, 10, 3 (2019), pp. 1-9.
- [10] L. Yucheng, Application of the Chebyshev polynomial in solving Fredholm integral equations, *Mathematical and Computer Modelling*, 50 (2009), pp. 465-469.
- [11] M. Nadir, Cours d'analyse fonctionnelle, université M'sila 2004. <https://elearning.univ-msila.dz/moodle/course/view.php?id=4008&lang=fr>
- [12] A. Anass A propos des polynomes de tchebyshev 2018
- [13] L. Aissa, N. Mostefa, N. Mohamed. Nasseh. Application of Chebyshev Polynomials to Volterra-Fredholm Integral. *The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 7, 10 (2022), pp. 1-8.



## Résumé

Dans cette thèse, nous étudions le théorème du point fixe de Kannan dans le but d'examiner la résolution numérique des équations intégrales linéaires de Volterra-Fredholm de deuxième espèce à l'aide des polynômes de Tchebychev de première, deuxième, troisième et quatrième espèce. La solution approchée est présentée sous la forme d'une série qui converge vers la solution exacte. Des exemples numériques sont comparés à d'autres méthodes afin de démontrer l'applicabilité et l'efficacité de cette technique.

Afin d'atteindre cet objectif, notre travail est structuré en quatre chapitres :

**Chapitre 1 :** Nous rappelons et présentons des notions et propositions fondamentales sur les espaces de Banach, les espaces de Hilbert, l'orthogonalité et la théorie des opérateurs linéaires bornés et compacts.

**Chapitre 2 :** Nous étudions l'orthogonalité des polynômes de Tchebychev et des polynômes classiques, ainsi que le théorème du point fixe de Kannan.

**Chapitre 3 :** Nous classifions les équations intégrales et étudions l'existence et l'unicité de la solution des équations intégrales de type Volterra-Fredholm à l'aide du théorème du point fixe de Kannan. De plus, nous rappelons certaines méthodes de projection, notamment Collocation, Galerkin, Ritz-Galerkin, Bubnov-Galerkin et Petrov-Galerkin. Nous analysons également la résolution analytique des équations intégrales de type Volterra-Fredholm par les séries convergentes.

**Chapitre 4 :** Nous examinons la solution numérique du problème linéaire des équations intégrales de Volterra-Fredholm de deuxième espèce en utilisant des polynômes orthonormés extraits des polynômes de Tchebychev de première, deuxième, troisième et quatrième espèce.

**Mots clés :** point fixe, polynômes de Tchebychev, équation intégrale de Volterra-Fredholm, méthodes de projection, méthode de collocation, méthode numérique.

## الملخص

في هذه الأطروحة، ندرس نظرية النقطة الثابتة لكانان بهدف دراسة الحل العددي للمعادلات التكاملية الخطية من نوع فولتيرا-فريدهولم من النوع الثاني، وذلك باستخدام كثيرات حدود تشيبيشيف من النوع الأول، الثاني، الثالث والرابع. يتم تقديم الحل التقريبي على شكل سلسلة متقاربة نحو الحل الدقيق. كما نقارن بعض الأمثلة العددية بطرق أخرى لإثبات قابلية تطبيق وكفاءة هذه التقنية. ولتحقيق هذا الهدف، تم تقسيم عملنا إلى أربعة فصول:

**الفصل الأول :** نستعرض بعض المفاهيم والنظريات الأساسية حول فضاءات باناخ وهيلبرت، إضافةً إلى التعامد ونظرية المؤثرات الخطية المتراسة والمحدودة

**الفصل الثاني :** ندرس التعامدية بين كثيرات حدود تشيبيشيف و نستعرض كثيرات الحدود الكلاسيكية، بالإضافة إلى نظرية النقطة الثابتة لكانان.

**الفصل الثالث :** نقدم تصنيفاً للمعادلات التكاملية، وندرس وجود ووحدانية الحل للمعادلات التكاملية من نوع فولتيرا-فريدهولم باستخدام نظرية النقطة الثابتة لكانان كما نستعرض بعض طرق الإسقاط مثل **التجميع، جالزكن ريتزجالزكن، بوبنوف جالزكن وبيتروف جاليركين** كما ندرس الحلول التحليلية لهذه المعادلات باستخدام السلاسل المتقاربة.

**الفصل الرابع :** نقوم بدراسة الحل العددي للمعادلات التكاملية لفولتيرا-فريدهولم من النوع الثاني باستخدام كثيرات الحدود المتعامدة المستخرجة من كثيرات حدود تشيبيشيف من الأنواع الأربعة.

**الكلمات المفتاحية :** النقطة الثابتة، كثيرات حدود تشيبيشيف، المعادلات التكاملية من نوع فولتيرا-فريدهولم، طرق الإسقاط، طريقة التجميع، الطرق العددية.

## **Abstract**

In this thesis, we study Kannan's fixed-point theorem to examine the numerical solution of linear Volterra-Fredholm integral equations of the second kind using Chebyshev polynomials of the first, second, third, and fourth kinds. The approximate solution is presented in the form of a series that converges to the exact solution. Numerical examples are compared with other methods to demonstrate the applicability and efficiency of this technique.

To achieve this goal, our work is structured into four chapters:

**Chapter 1:** We review and present fundamental concepts and propositions on Banach spaces, Hilbert spaces, orthogonality, and the theory of bounded and compact linear operators.

**Chapter 2:** We study the orthogonality of Chebyshev polynomials and classical polynomials, as well as Kannan's fixed-point theorem.

**Chapter 3:** We classify integral equations and analyze the existence and uniqueness of the solution for Volterra-Fredholm integral equations using Kannan's fixed-point theorem.

Additionally, we review several projection methods, such as

**Collocation, Galerkin, Ritz-Galerkin, Bubnov-Galerkin, and Petrov-Galerkin.** We also examine the analytical resolution of Volterra-Fredholm integral equations using convergent series.

**Chapter 4:** We investigate the numerical solution of the linear Volterra-Fredholm integral equations of the second kind using orthonormal polynomials derived from Chebyshev polynomials of the first, second, third, and fourth kinds.

**Keywords:** fixed point, Chebyshev polynomials, Volterra-Fredholm integral equation, projection methods, collocation method, numerical method.