N° d'ordre : …………………

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE M'SILA

DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Spécialité : Physique Théorique

Option : Physique des particules à haute énergie

Réalisé par

Gharbi Noura

THEME

L'atome d'Hydrogène sous l'action d'un potentiel coulombien dans l'espace non commutatif à deux dimensions réelles

Soutenu publiquement le : 18 / 06 / 2014

Devant le jury composé de :

A. METATLA	(M.C.B) Université de M'sila	Président
A. MAIRECHE	(M.C.A) Université de M'sila	Rapporteur
S. NEHAWA	(M.A.A) Université de M'sila	Examinateur

PROMOTION JUIN 2014

Table de matière :

Chapitre II :

L'atome d'H sous l'action d'un potentiel coulombien dans l'espace ordinaire à 2D

Chapitre III :

L'atome d'H sous l'action d'un potentiel coulombien dans l'espace non commutatif à 2D

Introduction Générale

Introduction générale :

1- Généralité :

La mécanique quantique développe la mécanique classique qui base sur les lois de la nature (principe d'inertie, loi fondamental de la dynamique …..), ce développement est une conséquence des principes et des équations quantiques (équation de Schrödinger, équation de Dirac …..). D'autre part elle est formée avec la relativité (restreint et générale) la physique moderne ou la physique fondamental.

Parmi les principes les plus importants dans la mécanique quantique est le principe d'incertitude d'Heisenberg qui énonce que la position et la vitesse d'une particule ne peuvent pas être mesurer en même temps avec une très grande précision, ce principe est une conséquence immédiate des relations de commutation canonique entre les variables x_i , p_i qui deviennent des observables dans l'espace d'Hilbert ($x_i \rightarrow \hat{x}_i$ et $p_i \rightarrow \hat{p}_i$) forment une algèbre non commutative [2] :

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}$$

Pour l'espace non commutatif nous allons concentrer sur le plan de Moyal, cet espace peut être défini en n'importe quelle dimension il s'agit d'une déformation de l'espace plat où les coordonnées satisfont les relations de commutations, pour cela l'espace temps est quantifié en remplaçant les coordonnées x_i par des opérateurs Hermitiens $\hat{x}_i$:

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij}$$

Dans notre étude nous allons voir le problème de l'atome d'Hydrogène dans l'espace ordinaire et l'espace temps non commutatif, l'espace temps est reformulé par Fock 1935, lequel a mené à une forme intégrante de l'équation de Schrödinger, concéderons le cas de l'énergie négative. Cette équation est résolue par projection de l'espace à trois dimensions sur la surface de sphère à quatre dimensions.

2- Le but principale :

L'objectif principal de ce travail est d'étudier l'équation de Schrödinger de l'atome d'Hydrogène avec un potentiel coulombien dans l'espace temps non commutatif à deux dimensions ça veut dire connaitre l'effet de la non commutativité sur cette équation avec les conditions précédentes.

3- Représentation du mémoire :

Notre travaille est devisée on trois chapitres :

Chapitre I : On va représenter quelques formules mathématiques de l'espace non commutatif.

Chapitre II : On va faire un peut de calcules pour résoudre l'équation de Schrödinger de l'atome d'Hydrogène avec un potentiel coulombien dans l'espace ordinaire.

Chapitre III : On va voir l'effet de la non commutativité sur l'atome d'Hydrogène sous l'action d'une potentiel colombien a deux dimensions, on plus on va calculer la correction en énergie.

Et en termine par une conclusion qui résume les résultats obtenus de notre travail.

CHAPITRE-01-

Formalisme mathématique de l'espace temps non commutatif

I-1- Introduction :

Dans ce chapitre on va résumer quelques formules mathématiques de l'espace non commutatif (une petite rappelle sur les groupes, produit star et ces propriétés) ainsi que la méthode de Boopp's Shift et ces applications pour un potentiel coulombien.

I-2- L'espace temps non commutatif :

L'idée de l'étude dans l'espace non commutatif en physique des particules est très ancienne. Le but était de pouvoir d'éliminer les divergences ultraviolettes de la théorie quantique des champs et la possibilité de trouver une théorie quantique pour la gravitation **[1]**.

En mécanique quantique l'espace de phase est définie en remplaçant les variables et les moments canoniques $\hat{x}$, $\hat{p}$ par des opérateurs hermétiques qui obéissent aux règles de commutations canoniques suivants :

$$\begin{cases} [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij} \\ [\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0 \\ [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0 \end{cases} \tag{I-1}$$

Dans l'espace non commutatif les coordonnés d'espace temps ordinaire sont remplacées par des coordonnées non commutatifs obéissant aux règles de commutations suivants **[2]** :

$$\begin{cases} [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij} \\ [\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij} \\ [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0 \end{cases} \tag{I-2}$$

Remarque : cette algèbre est écrie dans le système naturel $(C = \hbar = 1)$.

Ici $\theta_{ij} = -\theta_{ji}$ est une constante (réel) antisymétrique qui représente la commutativité de l'espace temps.

$$\theta_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\,\theta^k \tag{I-3}$$

Dans l'espace non commutatif la construction des théories de jauge se fait de la même manière qu'en théorie de jauge sur un espace ordinaire, il suffit d'appliquée les étapes suivants :

1- Remplacer les champs classiques par les champs non commutatifs,

2- Le produit ordinaire commutatif par le produit de Moyal-Weyl (produit star) **[2].**

Donc, la théorie de jauge dans un espace non commutatif est formulée on basé sur l'algèbre de Sieberg-Witten.

I-3- La théorie de jauge :

En 1919, le terme 'jauge' est fut introduit pour la première fois par Harman Weyl dans une tentative d'unifier l'électromagnétisme et la gravitation. Malheureusement, pour diverses raisons, cette tentative d'unification échoua. Mais par la suite, Weyl donna en 1929 le premier exemple d'une théorie de jauge local basée sur le groupe $U(1)$.L'idée a été généralisée par Dirac, puis Yang et Mills en utilisant des groupes plus grands que $U(1)$, ce sont les groupes $SU(2)$ et $SU(3)$ **[03,04]**.

<u>I-3-1- Rappelle sur les groupes :</u>

La théorie des groupes joue un rôle fondamental en théorie quantique des champs, parce que toutes les transformations considérées forment des groupes. Le plus souvent même des groupes de Lie **[05]**.

Soit G un ensemble, et * une application de $G\times G$:

$$\begin{cases} *: G\times G \to G, \\ \quad (g_1, g_2) \to g_1 * g_2 \end{cases} \tag{I.4}$$

Le couple $(G,*)$ est construit un groupe si les axiomes suivants sont satisfaits :

a- La relation de L'associativité:

$$(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$$

b- La relation de L'élément neutre :

$$\exists e \in G, e * g \quad = g * e = g ; \forall g \in G$$

c- La relation de L'élément inverse :

$$\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G, g^{-1} * g \quad = g * g^{-1} = e$$

Si g_1 et g_2 sont des éléments de G, le groupe sera qualifiée abélienne si la relation suivant est satisfait :

$$g_1 * g_2 = g_2 * g_1 \tag{I-5}$$

I-3-2- Groupe de Lie (unitaire uni modulaire) :

Le groupe de Lie unitaire uni modulaire (spéciale) dans un espace complexe à notée par $SU(n)$.Le Sous-groupe spéciale unitaire $SU(n)$ du groupe unitaire $U(1)$ définit comme l'ensemble des matrices complexes $(n \times n)$ unitaire de déterminant égal à 1 **[06]** :

$$U \in SU(n) \Leftrightarrow U \in M_n(c), U^{\dagger}U = 1_n \, et \, \det(U) = 1 \tag{I-6}$$

I-4- Le produit star :

I-4-1- La formule de Moyal-Weyl :

Dans le cadre de la quantification canonique de la mécanique quantique,

Hermann Weyl a donné une prescription qui permet d'associer des opérateurs à des fonctions classiques des variables canoniques.

La transformé de Fourier de chaque fonction $f(x)$ ou $g(x)$, est noté par $\tilde{f}(k)$ et $\tilde{g}(k)$ respectivement suivant l'expression **[2]**:

$$\begin{cases} f(x) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int d^N k e^{ik_m x^m} \tilde{f}(k) \Leftrightarrow \tilde{f}(k) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int d^N x e^{-ik_m x^m} f(x) \\ g(x) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int d^N k e^{ik_m x^m} \tilde{g}(k) \Leftrightarrow \tilde{g}(k) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int d^N x e^{-ik_m x^m} g(x) \end{cases} \quad \text{(I-7)}$$

En suit nous allons associer à f et g les opérateurs de Weyl W (f) et W (g) :

$$\begin{cases} W(f) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int d^N k e^{ik_m \hat{x}^m} \tilde{f}(k) \\ W(g) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int d^N l e^{il_m \hat{x}^m} \tilde{g}(l) \end{cases} \quad \text{(I-8)}$$

En suit le produit W (f) W (g) est définit par la relation :

$$\mathrm{W\,(f)\,W\,(g)} = (2\pi)^N \int d^N k d^N l e^{ik_m \hat{x}^m} e^{il_m \hat{x}^m} \tilde{f}(k) \tilde{g}(l) \quad \text{(I-9)}$$

Utilisant la formule de Campbell-Baker-Hausdorff [2] :

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}h[A,B]+\frac{1}{12}h^2[[A,B],B]-\frac{1}{12}h^3[[A,B],A]+\dots\dots\dots} \quad \text{(I-10)}$$

Alors le produit de Weyl $W\ (f)\ W\ (g)$ prend la forme suivante :

$$W(f)W(g) = (2\pi)^N \int d^N K d^N l e^{i(k_m + l_m)\hat{x}^m - h\frac{i}{2}k_m l_n \theta^{mn}} \tilde{f}(k) \tilde{g}(l) \quad \text{(I-11)}$$

$$= \mathrm{W}\,(f*\mathrm{g})$$

Où $(f * g)$ est la fonction de Moyal-Weyl définie par :

$$(\mathrm{f} * \mathrm{g})(\mathrm{x}) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{h}\theta^{\mathrm{mn}} \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^{\mathrm{m}}} \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}^{\mathrm{n}}}} \mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{g}(\mathrm{y})|_{\mathrm{y} \to \mathrm{x}} \quad \text{(I-12)}$$

Après développement cette relation devient :

$$(\mathrm{f} * \mathrm{g})(\mathrm{x}) = f(x)g(x) + \frac{i}{2}h\theta^{mn}\frac{\partial}{\partial x^m}f(x)\frac{\partial}{\partial x^n}g(x) + O(\theta^2) \qquad \text{(I-13)}$$

I-4-2- Les propriétés du produit star :

Le produit star vérifie les déférentes propriétés suivantes **[1]**:

a- La non commutativité :

$$f(\mathrm{x}) * \mathrm{g}(\mathrm{x}) \neq \mathrm{g}(\mathrm{x}) * f(\mathrm{x})$$

b- L'associativité :

$$(f(\mathrm{x}) * \mathrm{g}(\mathrm{x})) * \mathrm{h}(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}) * \mathrm{g}(\mathrm{x}) * \mathrm{h}(\mathrm{x})$$

c- La relation de complexe conjugué :

$$(f(\mathrm{x}) * \mathrm{g}(\mathrm{x}))^* = f(\mathrm{x})^* * \mathrm{g}(\mathrm{x})^*$$

d- La relation d'intégrale :

$$\int d^N x(f * g)(x) = \int d^N x(g * f)(x) = \int d^N x f(x)g(x)$$

e- Permutation cyclique :

$$\int d^N x(f * g * h)(x) = \int d^N x(h * f * g)(x) = \int d^N x(g * h * f)(x)$$

f- La règle de Leibniz :

$$\partial_\mu(f * g) = (\partial_\mu f) * g + f(\partial_\mu g)$$

Remarque :

Dans l'espace ordinaire les quantités physiques sont noté par : $r,\ p,\ \Psi,\ H\ et\ V,$

mais dans l'espace non commutatif elles sont noté par : $\hat{r},\ \hat{p},\ \widehat{\Psi},\ \widehat{H}\ et\ \widehat{V}.$ la déférence entre les notations de l'espace ordinaire et l'espace non commutatif est faire pour distinguer entre les deux.

I-5- La méthode de Boopp's Shift :

Dans cette partie on va utiliser la méthode de Boopp's Shift pour résoudre l'équation de Schrödinger non commutatif au lieu d'utiliser le produit star, pour ce but on remplaçant le produit star avec le produit habituel à la fois par Boopp's Shift **[7, 8]** :

$$\begin{cases} \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j \\ \hat{p}_i = p_i \end{cases} \qquad \text{Avec: } i = 1, 2 \qquad \text{(I-14)}$$

Notre étude est l'espace non commutatif à 2D, pour cela le commutateur $[\hat{x}_i, \hat{x}_j]$ dans la relation (I-2) est remplacé par le commutateur$[\hat{x}, \hat{y}]$.

Pour :

$$\begin{cases} i = 1 & \hat{x}_1 = \hat{x} & p_1 = p_x \\ i = 2 & \hat{x}_2 = \hat{y} & p_2 = p_y \end{cases} \qquad \text{Et} \qquad \begin{cases} \theta^{12} = \theta \\ \theta^{21} = -\theta \end{cases}$$

On obtient alors :

$$[\hat{x}, \hat{y}] = i\theta \qquad \text{(I-15)}$$

Avec :

$$\begin{cases} \hat{x} = x - \frac{\theta}{2} p_y \\ \hat{y} = y + \frac{\theta}{2} p_x \end{cases} \quad \text{(I-16)}$$

I-5-1- Application (le potentiel coulombien) :

Le potentiel utiliser dans notre équation de Schrödinger non commutatif pour l'atome d'Hydrogène est le potentiel coulombien, donner par :

$$\mathrm{V}(\hat{\mathrm{r}}) = -\frac{1}{\hat{\mathrm{r}}} \quad \text{(I-17)}$$

Il faut le calculer avant résoudre l'équation précédant à partir de l'espace non commutatif au l'espace ordinaire.

On à :

$$\hat{\mathrm{r}} = \sqrt{\hat{\mathrm{x}}^2 + \hat{\mathrm{y}}^2}$$

$$= \sqrt{\left(x - \frac{\theta}{2} p_y\right)^2 + (y + \frac{\theta}{2} p_x)^2}$$

$$= \sqrt{r^2 + \theta\left(y p_x - x p_y\right) + O(\theta^2)} \quad \text{(I-18)}$$

On va négliger le dernier terme et utiliser la formule de $\vec{L} = \vec{P} \wedge \vec{r}$, on trouve après simplification :

$$\frac{1}{\hat{r}} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\theta L_z}{r^2}}} \quad \text{(I-19)}$$

Et la formule :

$$\frac{1}{\sqrt{1+t}} = 1 - \frac{t}{2} + \cdots \tag{I-20}$$

Avec:

$$\begin{cases} L_z = yp_x - xp_y \\ t = \frac{\theta L_z}{r^2} \end{cases} \tag{I-21}$$

On trouve finalement :

$$\frac{1}{\hat{r}} = \frac{1}{r} - \frac{\theta L_z}{2r^3} \tag{I-22}$$

Donc le potentiel s'écrit comme suit :

$$V(\hat{r}) = V(r) + V_{pert}\,(r) \tag{I-23}$$

Avec:

$$\begin{cases} V(r) = -\frac{1}{r} \\ V_{pert}\,(r) = \frac{\theta L_z}{2r^3} \end{cases} \tag{I-24}$$

I-6- Conclusion:

Le plus important que nous avons fait dans ce chapitre est voir comment on écrire l'opérateur du potentiel dans l'espace non commutatif en fonction des coordonnées de l'espace ordinaire c'est la méthode de Boopp's Shift ce qui en va l'utiliser dans le chapitre III.

CHAPITRE-02-

L'atome d'H sous l'action d'un potentiel Coulombien dans l'espace ordinaire à 2D

II-1- Introduction :

L’équation de Schrödinger est l’équation fondamentale de la mécanique quantique non relativiste, elle joue en mécanique quantique le même rôle fondamental que l’équation de Newton en mécanique classique, car c’est elle qui régit l’évolution dans le temps du système physique. On a révisé cet atome dans l’espace temps ordinaire à deux dimensions.

II-2- L’équation de Schrödinger dans l’espace ordinaire à 2D :

II-2-1- La formule principale de l’équation de Schrödinger :

En générale l’équation de Schrödinger est une équation de deuxième ordre par rapport aux coordonnées du système et de premier ordre par rapport au temps, la solution de cette équation est la fonction d’onde $\Psi(\vec{r},t)$qui nous pouvons la trouver, la formule principale est écrit comme suit :

$$H\Psi(\vec{r},t) = E\Psi(\vec{r},t) \qquad \text{(II-1)}$$

Où :

H : est l’ Hamiltonien

$$H = T + V \qquad \text{(II-2)}$$

T : est l’énergie cinétique.

V : est le potentiel.

E : est l'énergie totale du système.

Avec :

$$\begin{cases} H = \frac{\vec{p}^2}{2\mu} + V(r) \\ \vec{p} \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla} \\ E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \end{cases} \tag{II-3}$$

Substituant (II-2) dans (II-1) on trouve alors :

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2\mu}\Delta + V(r)\right]\Psi(\vec{r},t) = E\Psi(\vec{r},t) \tag{II-4}$$

Où :

μ : est la masse réduit du système composé par l'électron et le proton, qui donnée par :

$$\mu = \frac{m_e m_p}{m_{e+} m_p} \tag{II-5}$$

m_e, m_p : sont les masses de l'électron et le proton successivement.

Δ : est Laplacien ($\Delta = \vec{\nabla}^2$).

V(r) : est le potentiel.

Dans l'espace ordinaire à deux dimensions la formulation mathématique plus valable est travailler avec les coordonnées polaires (r, φ), donc Laplacien s'écrit comme :

$$\Delta=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

Il y a une autre formule de Δ que nous allons l'utiliser dans notre équation de Schrödinger, elle est donnée par :

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \qquad \text{(II-6)}$$

$\Psi(\vec{r},t)$ devient $\Psi(r,\varphi)$, donc l'équation de Schrödinger s'écrit comme suit :

$$\left\{\frac{-\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]+V(r)\right\}\Psi(r,\varphi)=E\Psi(r,\varphi) \qquad \text{(II-7)}$$

II-2-2- Le potentiel :

Le potentiel appliqué est le potentiel coulombien, il est donné par la relation :

$$V(r)=\frac{-Ze^2}{r} \qquad \text{(II-8)}$$

On obtenir alors l'équation de Schrödinger de l'atome d'hydrogène (Z=1) sous l'action d'un potentiel coulombien dans l'espace ordinaire à deux dimensions.

$$\left\{\frac{-\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]-\frac{e^2}{r}\right\}\Psi(r,\varphi)=E\Psi(r,\varphi) \qquad \text{(II-9)}$$

II-3- Résolution de l'équation de Schrödinger :

Pour résoudre l'équation (II-9) on appliquer la méthode de séparation des variables comme suit :

$$\Psi(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi) \qquad \text{(II-10)}$$

Où :

R(r) : Est la partie radiale dépend de rayon r.

Φ(φ) : Est la partie angulaire dépend de l'angle φ.

Donc:

$$\left\{\frac{-\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right]-\frac{e^2}{r}\right\}R(r)\Phi(\varphi) = ER(r)\Phi(\varphi)$$

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\Phi\left(\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\right)+\frac{R}{r^2}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\right]+\left(\frac{e^2}{r}+E\right)R\Phi = 0 \qquad \text{(II-11)}$$

Pour simplifier les calcules on choisi ce changement de variable :

$$\begin{cases} \hbar = 2\mu = \frac{e^2}{2} = 1 \\ E = -{q_0}^2 \end{cases} \qquad \text{(II-12)}$$

Ensuit multiplier (II-11) par $\frac{r^2}{R\Phi}$ on trouve :

$$\frac{r^2}{R}\left(\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+r^2\left(\frac{2}{r}-{q_0}^2\right) = 0 \qquad \text{(II-13)}$$

Maintenant on pose :

$$\frac{r^2}{R}\left(\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\right)+r^2\left(\frac{2}{r}-{q_0}^2\right) = m^2 \qquad \text{(II-14)}$$

On obtient alors une équation dépend seulement de $\Phi(\varphi)$:

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + m^2\Phi = 0 \tag{II-15}$$

La solution de cette équation donne la partie angulaire de la fonction d'onde, elle est définie comme suit :

$$\Phi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\pm im\varphi} \tag{II-16}$$

Pour la partie radiale on a l'équation suivante **[9]** :

$$\frac{r^2}{R}\left(\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\right) + r^2\left(\frac{2}{r} - {q_0}^2\right) - m^2 = 0$$

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(\frac{2}{r} - \frac{m^2}{r^2} - {q_0}^2\right)R = 0 \tag{II-17}$$

C'est une équation différentielle de deuxième ordre avec un seul variable r et une seul fonction R(r), pour résoudre cette équation on faire ce changement de variables :

$$\begin{cases} R(r) = \upsilon^{|m|} e^{-\frac{\nu}{2}} F(\nu) \\ \nu = 2q_0 r \end{cases} \tag{II-18}$$

Où :

$F(\upsilon)$: est une nouvelle fonction qu'on veut la trouver maintenant, pour ce but on substituer R(r) et ses dérivées (premier et deuxième dérivée) dans l'équation (II-17) :

$$\begin{cases} R(r) = \upsilon^{|m|}e^{-\frac{\nu}{2}}F(\nu) \\ \frac{dR}{dr} = 2q_0\frac{dR}{d\nu} = 2q_0e^{-\frac{\nu}{2}}\left[\left(|m|\nu^{|m|-1} - \frac{1}{2}\nu^{|m|}\right)F(\nu) + \nu^{|m|}\frac{dF}{d\nu}\right] \\ \frac{d^2R}{dr^2} = 4{q_0}^2\frac{d^2R}{d\nu^2} = 4{q_0}^2e^{-\frac{\nu}{2}}[\left(|m|(|m|-1)\nu^{|m|-2} - |m|\nu^{|m|-1} + \frac{1}{4}\nu^{|m|}\right)F(\nu) \\ \qquad +\left(2|m|\nu^{|m|-1} - \nu^{|m|}\right)\frac{dF}{d\nu} + \nu^{|m|}\frac{d^2F}{d\nu^2}] \end{cases} \tag{II-19}$$

Après simplification on trouve l'équation différentielle de F, et on écrit :

$$\nu\frac{d^2F}{d\nu^2} + (2|m| + 1 - \nu)\frac{dF}{d\nu} + \left(\frac{1}{q_0} - \frac{1}{2} - |m|\right)F(\nu) = 0 \tag{II-20}$$

C'est l'équation de l'hypergéométrique confluent :

$$\nu y'' + (2|m| + 1 - \nu)y' + ny = 0$$

Cette équation a deux solutions indépendantes linéairement, si nous choisissons la solution qui est régulière à l'origine, alors cela devient un polynôme de degré fini pour :

$$q_0 = (n + \tfrac{1}{2})^{-1} \qquad \text{Pour : n = 1, 2, 3…………}$$

Donc l'énergie de l'espace ordinaire s'écrit comme :

$$E = -\frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2} \tag{II-21}$$

Les solutions de l'équation (II-20) est associée à polynôme de Laguerre $L_{n-|m|}^{2|m|}(\nu)$ **[10]**, et utilisant la relation d'orthogonalité de polynôme de Laguerre.

$$\nu L_\beta^\alpha(\nu) = (2\beta + \alpha + 1) L_\beta^\alpha(\nu) - (\beta + 1) L_{1+\beta}^\alpha(\nu) - (\beta - \alpha) L_{\beta-1}^\alpha(\nu)$$

Nous pouvons écrire maintenant la fonction d'onde normalisé du l'espace ordinaire sous la forme :

$$\Psi_{nm}(r,\varphi) = N_{nm}(2q_0 r)^{|m|} e^{-q_0 r} L_{n-|m|}^{2|m|}(2q_0 r) e^{\pm im\varphi} \qquad \text{(II-22)}$$

Avec :

$$N_{nm} = \sqrt{\frac{q_0^3 (n-|m|)!}{\pi (n+|m|)!}} \qquad \text{(II-23)}$$

La fonction d'onde que nous avons obtenue (II-22) satisfait la condition d'orthogonalité suivante :

$$\int \Psi_{n_1 m_1}^*(r)\, \Psi_{n_2 m_2}(r) dr = \delta_{n_1 n_2} \delta_{m_1 m_2} \qquad \text{(II-24)}$$

Avec :

$$\delta_{n_1 n_2} = \begin{cases} 0 & pour : n_1 \neq n_2 \\ 1 & pour : n_1 = n_2 \end{cases}$$

4- Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons résolu l'équation de Schrödinger de l'atome d'Hydrogène sous l'action d'un potentiel coulombien dans l'espace ordinaire, ainsi que trouver l'énergie correspondante.

CHAPITRE-03-

L'atome d'H sous l'action d'un potentiel Coulombien dans l'espace non commutatif à 2D

III-1- Introduction :

Dans ce chapitre on va étudier l'atome d'hydrogène dans l'espace temps non commutatif à deux dimensions dans le cas non relativiste (en cadre de l'équation de Schrödinger), l'objectif principale est calculer la correction de l'énergie E_{NC}.

III-2- L'équation de Schrödinger dans l'espace temps non commutatif :

III-2-1- La formule principale :

Comme nous avons dit dans l'introduction l'équation de Schrödinger est écrite on fonction de l'opérateur Hamiltonien $\widehat{H}_{NC}$, $\widehat{\Psi}(\vec{\hat{r}})$ et l'énergie E_{NC} :

$$\widehat{H}_{NC} * \widehat{\Psi}(\vec{\hat{r}}) = E_{NC}\widehat{\Psi}(\vec{\hat{r}}) \tag{III-1}$$

Où :

$\widehat{\Psi}(\vec{\hat{r}})$ et E_{NC} sont la fonction d'onde et l'énergie dans l'espace non commutatif et $\widehat{H}_{NC}$ est l'opérateur d'Hamiltonien, dans le système naturel $\widehat{H}_{NC}$ est donné par la relation suivante :

$$\widehat{H}_{NC} = -\frac{1}{2\mu}\Delta + \widehat{V}(\hat{r}) \tag{III-2}$$

Remplaçant (III-2) dans (III-1) on trouve :

$$\left[-\frac{1}{2\mu}\Delta + \widehat{V}(\hat{r})\right] * \widehat{\Psi}(\vec{\hat{r}}) = E_{NC}\widehat{\Psi}(\vec{\hat{r}}) \tag{III-3}$$

Si on appliquer la méthode de Boopp's Shift, l'équation de Schrödinger se réduit à la forme suivante :

$$\left[-\frac{1}{2\mu}\Delta + \mathrm{V}(\hat{\mathrm{r}})\right]\ \Psi(\vec{\mathrm{r}}) = \mathrm{E}_{\mathrm{NC}}\Psi(\vec{\mathrm{r}}) \qquad \text{(III-4)}$$

La fonction d'onde $\Psi(\vec{\mathrm{r}})$ dans l'espace non commutatif est la même fonction d'onde dans l'espace ordinaire et le potentiel $V(\hat{r})$ est représenté l'expression du potentiel coulombien on fonction de $\hat{r}$ au lieu de r :

$$\mathrm{V}(\hat{\mathrm{r}}) = -\frac{1}{\hat{\mathrm{r}}} \qquad \text{(III-5)}$$

Nous avons déjà vu dans le chapitre I l'équation (I-22) et on écrit:

$$\mathrm{V}(\hat{\mathrm{r}}) = \mathrm{V}(\mathrm{r}) + \mathrm{V}_{\mathrm{pert}}(\mathrm{r}) \qquad \text{(III-6)}$$

Avec :

V(r) : est le potentiel coulombien ordinaire.

$$\mathrm{V}(\mathrm{r}) = -\frac{1}{\mathrm{r}} \qquad \text{(III-7)}$$

Et $V_{pert}\,(r)$: est le terme de perturbation de potentiel (le potentiel modifier).

$$\mathrm{V}_{\mathrm{pert}}(\mathrm{r}) = \frac{\theta \mathrm{L}_z}{2\mathrm{r}^3} \qquad \text{(III-8)}$$

III-3- la correction en énergie :

Nous avons observé que le potentiel modifiée $V_{pert}\,(r)$ est proportionnelle du paramètre infinitésimale, donc on applique la théorème de perturbation stationnaire pour obtenir la modification sur les niveaux d'énergie au premier ordre en θ :

$$\mathrm{E_{NC}} = \mathrm{E_{or}} + \mathrm{E_{per}} \tag{III-9}$$

Où :

E_{NC} et E_{or} : sont les énergies dans l'espace non commutatif et l'espace ordinaire respectivement, E_{per} est la correction en énergie déterminer par l'application de la théorème de perturbation en énergie :

$$\mathrm{E_{pert}} = \left\langle n \left| \left(\frac{\theta L_z}{2r^3}\right) \right| n \right\rangle$$

$$= \int \Psi^*(r,\varphi)\left(\frac{\theta L_z}{2r^3}\right)\Psi(r,\varphi)ds \tag{III-10}$$

Et ds : est l'élément de surface donner par :

$$ds = rdrd\varphi \tag{III-11}$$

Donc (III-10) devient :

$$\mathrm{E_{per}} = \theta m \int \Psi^*(r,\varphi)\left(\frac{1}{2r^2}\right)\Psi(r,\varphi)drd\varphi \tag{III-12}$$

m : est la valeur propre de L_z .

On a vu dans le chapitre II la fonction d'onde $\Psi_{nm}(r,\varphi)$ définie par :

$$\Psi_{nm}(r,\varphi) = N_{nm}(2q_0 r)^{|m|} e^{-q_0 r} L_{n-|m|}^{2|m|}(2q_0 r) e^{\pm im\varphi} \quad \text{(III-13)}$$

On fait le changement de variable suivant :

$$\upsilon = 2q_0 r \quad \Longrightarrow \quad \Psi_{nm}(\upsilon,\varphi) = N_{nm}(\upsilon)^{|m|} e^{-\frac{\upsilon}{2}} L_{n-|m|}^{2|m|}(\upsilon) e^{\pm im\varphi} \quad \text{(III-14)}$$

Donc l'équation (III-12) devient sous la forme:

$$E_{per} = m\theta q_0 (N_{nm})^2 \int (\upsilon)^{2|m|-2} e^{-\upsilon} [L_{n-|m|}^{2|m|}(\upsilon)]^2 d\upsilon d\varphi$$

$$= 2\pi m\theta q_0 (N_{nm})^2 \int (\upsilon)^{2|m|-2} e^{-\upsilon} [L_{n-|m|}^{2|m|}(\upsilon)]^2 d\upsilon \quad \text{(III-15)}$$

Utilisant la formule suivante **[11]**:

$$L_\beta^\alpha(\nu) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} F(-\beta, \alpha+1, \nu) \quad \text{(III-16)}$$

On trouve la modification en énergie E_{per} :

$$E_{per} = A \left[\frac{\Gamma(n+|m|+1)}{\Gamma(n-|m|+1)\Gamma(2|m|+1)}\right]^2 \int (\upsilon)^{2|m|-2} e^{-\upsilon} [F(|m|-n, 2|m|+1, \nu]^2 d\upsilon \quad \text{(III-17)}$$

Avec :

$$\begin{cases} A = 2\pi m\theta q_0 (N_{nm})^2 \\ \alpha = 2|m|, \qquad \beta = n - |m| \end{cases}$$

Pour calculer l'intégrale (III-17) on utilise l'intégrale suivant **[11]** :

$$\int \nu^{\delta-1} e^{-\nu}[F(-\beta,\gamma,\nu)]^2 d\nu = \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\delta)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+\beta+1)}\{1+\frac{\beta(\gamma-\delta-1)(\gamma-\delta)}{1^2\gamma}+\cdots$$

$$\dots\dots+\frac{\beta(\beta-1)\dots(-1)(\gamma-\delta-1)\dots(\gamma-\delta-\beta)(\gamma-\delta)\dots(\gamma-\delta+\beta+1)}{1^2 2^2\dots\dots\beta^2\gamma(\gamma+1)\dots\dots(\gamma+\beta+1)} \quad \text{(III-18)}$$

Avec :

$$\gamma = \alpha + 1 = 2|m| + 1\,, \qquad \delta = 2|m| - 1$$

Utilisant ces donnés dans l'intégrale (III-17) on trouve la relation (III-19):

$$E_{per} = A\left[\frac{\Gamma(n+|m|+1)}{\Gamma(n-|m|+1)\Gamma(2|m|+1)}\right]^2 \frac{\Gamma(n-|m|-1)\Gamma(2|m|-1)}{(n+|m|)!}\left[1+\frac{2(n-|m|)}{2|m|+1}\right]$$

Après la simplification, on trouve :

$$E_{per} = 2m\theta {q_0}^4 \frac{\Gamma(2|m|-1)}{[\Gamma(2|m|+1)]^2}\frac{2n+1}{2|m|+1} \quad \text{(III-20)}$$

On pose :

$$L(n,m) = \frac{\Gamma(2|m|-1)}{[\Gamma(2|m|+1)]^2}\frac{2n+1}{2|m|+1} \quad \text{(III-21)}$$

Donc la relation E_{per} devient :

$$E_{per} = 2m\theta {q_0}^4 L(n,m) \quad \text{(III-22)}$$

Pour cela l'énergie d'un électron dans un niveau caractérisé par n dans l'espace non commutatif est :

$$E_{NC} = E_{or} + 2m\theta {q_0}^4 L(n,m) \quad \text{(III-23)}$$

Avec :

$$E_{or} = -\frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2} \qquad \text{(III-24)}$$

On remarque que notre résultat est proportionnel au paramètre θ, donc elle représente une correction par rapport à l'énergie principale E_{or}.

III-4- Construction l'operateur d'Hamiltonien :

L'opérateur d' Hamiltonien dans l'espace non commutatif à deux dimensions est défini par la relation :

$$\hat{H}_{NC} = -\frac{1}{2\mu}\Delta + V(\hat{r}) \qquad \text{(III-25)}$$

Remplaçant l'expression de $V(\hat{r})$ dans la relation précédente, on écrit:

$$\hat{H}_{NC} = -\frac{1}{2\mu}\Delta + V(r) + \frac{\theta L_z}{2r^3} \qquad \text{(III-26)}$$

L'opérateur $\hat{H}_{NC}$ se décompose en deux opérateurs, $\hat{H}_{or}$ et $\hat{H}_{mag}$ comme suit :

$$\hat{H}_{NC} = \hat{H}_{or} + \hat{H}_{mag} \qquad \text{(III-27)}$$

Où :

$$\begin{cases} \hat{H}_{or} = -\frac{1}{2\mu}\Delta + V(r) \\ \hat{H}_{mag} = \frac{\theta L_z}{2r^3} \end{cases} \qquad \text{(III-28)}$$

III-5- L'effet Zeeman modifié :

On choisi le paramètre θ et le vecteur d'un champ magnétique qui orienté avec l'axe (oz) comme :

$$\theta = \alpha B \qquad \text{Et} \qquad \vec{B} = B\vec{K}$$

Et le moment magnétique $\vec{u} = \vec{S}$, après un calcul simple nous avons les résultats suivants :

$$\theta L_Z = \alpha\vec{J}\vec{B} - \alpha\vec{S}\vec{B} \qquad \text{(III-29)}$$

Où :

α : est une constante proportionnelle. Et le moment total

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \qquad \text{(III-30)}$$

L'opérateur Hamiltonien modifie est décomposé aux deux termes, le premier décrire l'opérateur d'Hamiltonien ordinaire et la deuxième partie décrire l'operateur $\hat{H}_{mag}$ qui donnée par comme :

$$\hat{H}_{mag} = \alpha\left(\frac{1}{2r^3}\right)\vec{J}\vec{B} - \alpha\left(\frac{1}{2r^3}\right)H_{zeeman} \qquad \text{(III-31)}$$

H_{zeeman} est donné par:

$$H_{zeeman} = \vec{S}\vec{B} = \vec{u}\vec{B} \qquad \text{(III-32)}$$

On introduit l'opérateur $H_{nc-zeeman}$: :

$$\widehat{H}_{mag} = \frac{1}{2r^3} H_{nc-zeeman} \qquad \text{(III-33)}$$

$H_{nc-zeeman}$ est donnée par :

$$H_{nc-zeeman} = \alpha\vec{J}\vec{B} - \alpha H_{zeeman} \qquad \text{(III-34)}$$

L'operateur $\widehat{H}_{mag}$ représenté deux interactions entre un spin de particules $\frac{1}{2}$ et un champ magnétique externe, le premier représente l'effet Zeeman normal et la nouvelle interaction représentent un couplage entre le moment total $\vec{J}$ et le champ magnétique $\vec{B}$ externe.

III-6- Conclusion :

Le plus important dans ce chapitre est le résultat obtenu à partir de l'espace non commutatif c'est la partie du champ magnétique dans l'expression de l' Hamiltonien de l'espace non commutatif.

Conclusion Générale

Conclusions générale

Dans ce travail nous avons étudié l'atome d'Hydrogène sous l'action d'un potentiel Coulombien dans deux différents espaces (l'espace ordinaire et l'espace non commutatif).

Nous avons remarqué que dans l'expression d'Hamiltonien total de l'espace non commutatif il y à une présence du champ magnétique $\vec{B}$ à l'interaction avec le moment total $\vec{J}$ on plus l'effet Zeeman ensemble forment l'Hamiltonien $\widehat{H}_{mag}$ qui représente deux interactions entre un spin de particule égal à ½ et un champ magnétique extérieur, c'est presque le même résultat obtenu à partir d'utiliser le champ magnétique dans l'espace ordinaire.

Donc nous conclu que l'espace non commutatif est correspond a un espace ordinaire avec un champ magnétique doublé.

Espace non commutatif $\equiv$ Espace ordinaire + L'effet de Zeeman modifier (Champ magnétique doublé)

Références Bibliographiques :

[1] H. Menigher, au-delà du modèle standard et applications, mémoire de magister, Université Mentouri-Constantine, 17/10/2007, fichier PDF.

[2] K. Farid, Aspects Mathématiques et Physiques de la Géométrie non Commutative, Université d'Arizona, 2007, fichier PDF.

[3] E. Elbaz, de l'électromagnétisme à l'électrofaible. Ellipses, 1989.

[4] E. Sérié, Théories de jauge en géométrie non commutative et généralisation du modèle De Born-Infeld, thèse de Doctorat, université de Paris 06, 20 septembre 2005, fichier PDF.

[5] M. Shaposhinkove, champ quantique relativiste, 2005, fichier PDF.

[6] F. Delduc, introduction aux Groupes de Lie destinée aux physiciens, Laboratoire de Physique de l'ENS Lyon, septembre 2008, fichier PDF.

[7] Gradshteyn Is and Ryzhik I M seventh edition Table of Integrals, Series and Product (New York: Academics Press).

[8] L. Mezincescu, UMTG-233, star product in Quantum Mechanics, arXiv:hep-th/ 0007046v2 21 Jul. (2000).

[9] J. L. Basdevant and J. Dalibard (Physique Quantique) Ellipses (1997) Paris

[10] I. S. Gradshtey and I. M. Ryzhik, (table of integrals series and products)

Acadimic Press New-York (1965)

[11] Gradshteyn, I.S.; Ryzhik, I.M. Table of Integrals, Series and Products, 7th. ed.;

Elsevier: Rensselaer Polytechnic Institute, USA, 2007.

ملخص

تطرقنا في هذه الدراسة الفيزيائية الخاصة لمذكرة الماستر في فيزياء الجسيمات عالية الطاقة إلى تطبيق معادلة شرودينغر على ذرة الهيدروجين تحت تأثير كمون كولومبي وذلك في الفضاء العادي واللاتبادلي في بعدين، وقمنا بعدها بالمقارنة بين النتائج المتحصل عليها في كلا الفضائين.

لاحظنا أن الفضاء اللاتبادلي يعطي نفس النتائج التي نحصل عليها من الفضاء العادي تحت تأثير حقل مغناطيسي.

كلمات مفتاحية معادلة شرودينغر، الفضاء العادي، الفضاء اللاتبادلي.

Résumé

Nous avons agressé dans cette étude physique du mémoire de master en physique des particules à haute énergie l'application de l'équation de Schrödinger de l'atome d'Hydrogène sous l'action d'un potentiel coulombien dans l'espace ordinaire et non commutatif à deux dimensions, et nous avons comparé entre les résultats dans les deux espaces.

On remarque que l'espace non commutatif donne les mêmes résultats obtenus dans l'espace ordinaire sous l'action d'un champ magnétique.

Mots clés équation de Schrödinger, espace ordinaire, espace non commutatif.

Abstract

We attacked in this physical study of the master memory in physics of the particles high energy the application of the Schrödinger equation on the hydrogen atom under the action of a potential Colombian in the ordinary and non commutative space at two dimensions, and we compared between the results in the two spaces.

We notice that the non commutative space gives the same results gotten in the ordinary space under the action of a magnetic field.

Key words Schrödinger equation, ordinary space, non commutative space.