الجـــــمهورية الجــــزائرية الديمـــــقراطية الشـــــعبية
People's Democratic Republic of Algeria

Ministry of Higher Education and Scientific Research
University Mohamed Boudiaf of M'sila
Faculty of Technology
Vice Dean of Post-Graduation, Scientific Research and External Relations

TEL/FAX : (213) 35 13 38 52

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جـامـعة محمد بوضياف- المـسيلة
كـليـة التكنولوجيا
نائب عميد الكلية المكلف بما بعد التدرج والبحث العلمي والعلاقات الخارجية
هاتف/فاكس : (213) 35 13 38 52

1985
جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

رقم: 1074/ ن.ع.م.ت.ب.ع.ع.خ/ك.ت /2023

المسيلة في: 27 ديسمبر 2023

مستخلص من محضر إجتماع المجلس العلمي لكلية التّكنولوجيا
رقم الدورة :23/05، المنعقد بتاريخ:2023/11/21.

في يوم الثلاثاء الواحد والعشرون من شهر نوفمبر عام ألفين وثلاثة وعشرين، وعلى التاسعة والنصف (09:30) صباحا، إنعقد إجتماع للمجلس العلمي لكليّة التّكنولوجيا، في جلسة عادية بقاعة المناقشات بالكلية، ومن بين النقاط المطروحة للنقاش في جدول الأعمال:

المصادقة على تشكيل لجنة الخبراء للموافقة على المطبوعة البيداغوجية الجامعية

بعد الإطلاع على طلب الذي تقدم به الأستاذ : **علالي جمال– أستاذ محاضر قسم أ** بالقاعدة المشتركة بكلية التكنولوجيا بجامعة محمد بوضياف بالمسيلة للموافقة على المطبوعة البيداغوجية، واستنادا للفصل الثاني للقانون الداخلي في مادتة الرابعة في فقرته الخاصة بسير المطبوعة والدروس على الخط، تمّ تقرير التّالي:

1- المصادقة على المطبوعة البيداغوجية ، المعنونة بـ:

Cours de Physique I
Polycopié rappels des cours, exercices et examens résolus : Mécanique du point matériel
1ère Année ST

2- تمّ تشكيل لجنة الخبراء المكونة من السّادة الآتية أسماؤهم:

- **محروق عبد الحفيظ**، أستاذ، جامعة محمد بوضياف- المسيلة
- **عماري الربيع**، أستاذ محاضر "أ"، جامعة محمد بوضياف- المسيلة
- **راجعي ميسوم**، أستاذ محاضر "أ"، جامعة المدية

رئيس المجلس العلمي للكلية

جامعة محمد بوضياف- المسيلة
المجلس العلمي
كلية التكنولوجيا

د. علي جريوي

الجـــمهورية الجـــزائرية الديمـــقراطية الشـــعبيـة
People's Democratic Republic of Algeria

Ministry of Higher Education and Scientific Research
University Mohamed Boudiaf of M'sila
Faculty of Technology
Vice Dean of Post-Graduation, Scientific Research and External Relations

TEL/FAX : (213) 35 13 38 52

1985
جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جـامـعة محمد بوضياف- المـسيلة
كـلية التكنولوجيا
نائب عميد الكلية المكلف بما بعد التدرج والبحث العلمي والعلاقات الخارجية
هاتف/فاكس : 52 38 13 35 (213)

رقم: 140/ ن.ع.م.ت.ب.ع.ع.خ/ك.ت/2024

المسيلة في: 22 أفريل 2024

شهادة ادارية

المصادقة على تقرير خبير للموافقة على مطبوعة بيداغوجية

بعد الإطلاع على تقارير لجنة الخبراء للموافقة على المطبوعة البيداغوجية للأستاذ : **علالي جمال– أستاذ محاضر قسم أ** ، بالقاعدة المشتركة بكلية التكنولوجيا بجامعة محمد بوضياف بالمسيلة والتي كانت كلها ايجابية ، تمّ تقرير التّالي:

1- المصادقة على تقارير لجنة الخبراء للموافقة المطبوعة البيداغوجية والمعنونة بـــ:

Cours de Physique I
Polycopié rappels des cours, exercices et examens résolus : Mécanique du point matériel
1ère Année ST

2- حيث تمّ تشكيل هذه اللجنة بناء على اجتماع المجلس العلمي للكلية المنعقد بتاريخ 2023/11/21 المكونة من السّادة الآتية أسماؤهم:

- **محروق عبد الحفيظ**، أستاذ، جامعة محمد بوضياف– المسيلة
- **عماري الربيع**، أستاذ محاضر "أ"، جامعة محمد بوضياف– المسيلة
- **راجعي ميسوم**، أستاذ محاضر "أ"، جامعة المدية

وتمت الموافقة بالاجماع على هذه المطبوعة.

رئيس المجلس العلمي للكلية

جامعة محمد بوضياف- المسيلة
المجلس العلمي
كلية التكنولوجيا

د. علي جريوي

UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF – M'SILA

FACULTE DE TECHNOLOGIES

DEPARTEMENT BASE COMMON ST

Cours de Physique I

Polycopié rappels des cours, exercices et examens résolus : Mécanique du point matériel

Destiné aux étudiants de

$1^{ère}$ Année Licence LMD

Domaine ST et SM

Dr. ALLALI Djamel & Dr. LAISSAOUI Lyamani

Année universitaire 2023/2024

Abstract

This Physics I course (Reminders of courses and solved exercises: Mechanics of the material point) is designed for students preparing for an undergraduate degree in the fields of Material Sciences and Science and Technology. It complies with the official program.

The first chapter is devoted to reminders of vector algebra and dimensional analysis. Both deal with basic physical quantities that are used in expressing the physical laws. In addition to the necessary reminders, the objective of this part is to introduce clear definitions and appropriate notations.

- ✓ The use of vectors in mechanics is fundamental, enabling the representation of the speeds and accelerations of the material point, the rotations of solids, the displacement, the applied forces.
- ✓ A vector is a mathematical entity that represents an element of a vector space E^3 associated with an affine space (point), R^3 where a direction, modulus, and point of application are defined.

The second chapter is dedicated to Kinematics. Its aim is to describe the movements of material point without being interested in the causes which produce them. It only deals with movements of material points, that is to say exclusively translations.

- ✓ From the acceleration vector of a material point, know how to find the speed vector, the time equations of motion as well as the equation of its trajectory.
- ✓ Know the expression of the position, speed and acceleration vectors in the different coordinate systems.
- ✓ Know the definition of some particular movements covered at the end of the chapter.
- ✓ The object of the kinematics of the material point is to study its movement over time independently of the causes producing this movement. This part aims to determine the kinematic quantities such as the acceleration, speed, position vectors and the time equation of the trajectory in the frame of a reference chosen by the observer.

The third chapter deals with the dynamics of the material point, within the framework of Newton's mechanics with its three inseparable laws or principles: the law of inertia, the fundamental law of dynamics and the law of reciprocal actions. The general laws, called force laws, are considered to be established for a certain number of interactions with applications intended for predicting the movements of bodies. The notion of angular momentum of a particle relative to the origin and that of pseudo-forces are also treated.

- ✓ Know how to solve a dynamic problem.
- ✓ Know how to take stock of the forces applying to a previously defined system.

The fourth chapter concerns the third method of analysis which is that of work and energy. This approach eliminates the calculation of acceleration by directly relating force, mass, speed and displacement. At first, the work of a force and the kinetic energy of a particle are considered. Then, the notions of potential and total energy are outline which will applied to the principle of energy conservation in various practical situations.

- ✓ Calculate the work of both variable and invariable forces in any displacement.
- ✓ Application to the calculation of the work of the force of gravity and the elastic force whatever the orientation of the chosen axes.
- ✓ Know how to use the kinetic energy theorem.
- ✓ Understand how to define potential energy from the concept of conservative force.
- ✓ Learn to use the concept of mechanical energy.

INTRODUCTION

Ce cours de physique I (Polycopié rappels des cours, exercices et examens résolus: Mécanique du point matériel) a été rédigé à l'intention des étudiants qui préparent, une licence dans les domaines des Sciences de la Matière et des Sciences et Technologies. Il est conforme au programme officiel.

Le premier chapitre est consacré à des rappels sur l'algèbre vectorielle et l'analyse dimensionnelle. Les deux traitent des grandeurs physiques de base qui sont utilisées pour l'expression des lois physiques. En plus des rappels nécessaires, l'objectif de cette partie est d'introduire des définitions claires et des notations appropriées.

Le deuxième chapitre est dédié à la cinématique. Son but est de décrire les mouvements d'objets sans s'intéresser aux causes qui les produisent. Il traite uniquement des mouvements de points matériels c'est-à-dire exclusivement des translations.

Le troisième chapitre traite de la dynamique du point matériel, dans le cadre de la mécanique de Newton avec ses trois lois ou principes indissociables: la loi d'inertie, la loi fondamentale de la dynamique et la loi des actions réciproques. Nous y considérons les lois générales, dites lois de forces, établies pour un certain nombre d'interactions avec des applications destinées à la prévision des mouvements des corps. La notion de moment cinétique d'une particule par rapport à l'origine et celle des pseudo-forces y sont également traitées.

Le quatrième chapitre concerne la troisième méthode d'analyse qui est celle du travail et de l'énergie. Cette approche élimine le calcul de l'accélération en reliant directement la force, la masse, la vitesse et le déplacement. Nous considérons d'abord le travail d'une force et l'énergie cinétique d'une particule. Nous traitons ensuite les notions d'énergies potentielle et totale que nous appliquons au principe de conservation de l'énergie dans diverses situations pratiques.

Chapitre I

Rappels mathématiques

Rappel du cours

I.1. Rappels sur le calcul vectoriel [1, 2]

L'usage des vecteurs en mécanique est fondamental. Il permet de représenter les vitesses, les accélérations des points, les rotations des solides, le déplacement et les forces exercées.

I.1.1. Définitions

Un vecteur est un segment de droite AB, ayant une origine A et une extrémité B. On le note symboliquement par $\overrightarrow{AB}$, $\vec{C}$, …. Il est complètement défini si l'on se donne :

- Son origine ou point d'application.
- Sa direction qui est celle de la droite (Δ).
- Son sens qui est le sens du mouvement d'un mobile allant de A vers B.
- Sa norme (ou module) toujours positive qui est la longueur AB. On le note $\|\overrightarrow{AB}\|$

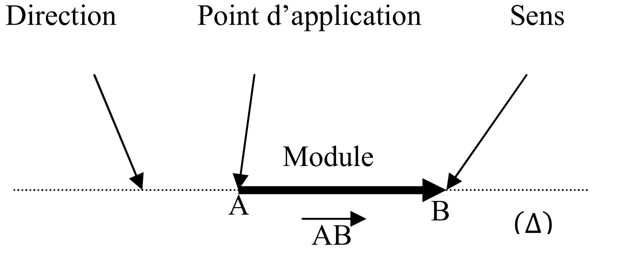


Figure I.1: Caractéristiques d'un vecteur

Un **vecteur unitaire :$\vec{u}$** est un vecteur de module est **égal à 1** :

I.1.2. Opérations sur les vecteurs

I.1.2.1. Composantes d'un vecteur

Dans une base orthonormée directe notée$(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ on montre que tout vecteur $\vec{V}$ se décompose de manière unique sous la forme.

$$\overrightarrow{OM} = \vec{V} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

Orthonormée signifie :

- ortho : les vecteurs de la base sont orthogonaux (perpendiculaires) deus à deux

$\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath} = 0,\qquad \vec{\imath}\cdot\vec{\imath} = 1,$

$\vec{\jmath}\cdot\vec{k} = 0,\qquad \vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath} = 1,$

$\vec{k}\cdot\vec{\imath} = 0,\qquad \vec{k}\cdot\vec{k} = 1;$

- normé :

$\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1.$

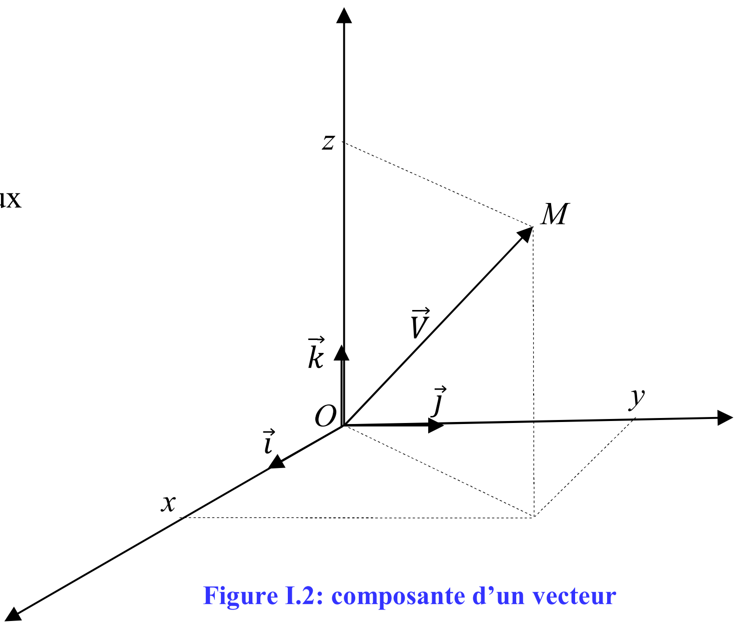
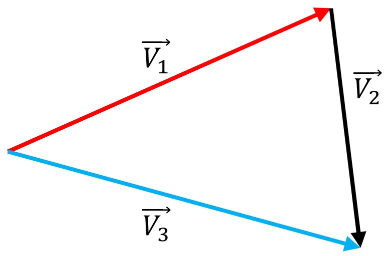


Figure I.2: composante d'un vecteur

- Cette base est directe si : $\vec{\imath}\wedge\vec{\jmath} = \vec{k},\quad \vec{\imath}\wedge\vec{\imath} = 0, \vec{\jmath}\wedge\vec{k} = \vec{\imath},\quad \vec{\jmath}\wedge\vec{\jmath} = 0, \vec{k}\wedge\vec{\imath} = \vec{\jmath},\quad \vec{k}\wedge\vec{k} = 0.$

I.1.2.2. Somme de vecteurs



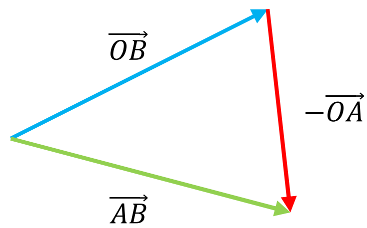
La somme des vecteurs $\vec{V_1}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{V_2}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$

S'écrit dans la même base

$$\vec{V_3} = \vec{V_1} + \vec{V_2} \Rightarrow \vec{V_3}\begin{pmatrix} x_1 & + & x_2 \\ y_1 & + & y_2 \\ z_1 & + & z_2 \end{pmatrix}$$

En conséquence si on connait les coordonnées de deux points A et B dans une base on peut facilement calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} \text{et} \overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B & - & x_A \\ y_B & - & y_A \\ z_B & - & z_A \end{pmatrix}$$



I.1.2.3. Produit de vecteurs :

I.1.2.3.1. Produit scalaire et projection

On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{V_1}$et $\vec{V_2}$, faisant entre eux l'angle θ, le nombre :

$$\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = \|\vec{V_1}\| \cdot \|\vec{V_2}\| \cdot cos(\theta)$$

<u>Conséquences</u>

Un vecteur est nul si et seulement si sa norme est nulle. Il est noté $\vec{0}$.

La norme d'un vecteur peut s'exprimer comme un produit scalaire :

$$\vec{V} \cdot \vec{V} = \|\vec{V}\|^2$$

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{\vec{V} \cdot \vec{V}}$$

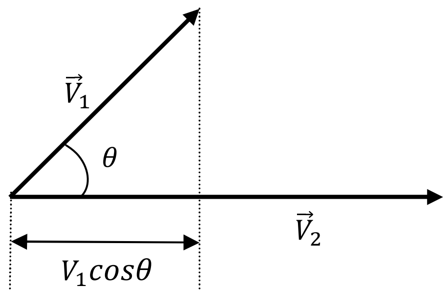


Figure I.3: Produit scalaire

Si deux vecteurs sont perpendiculaires (forment un angle droit), leur produit scalaire est nul :

$$\vec{V_1} \perp \vec{V_2} \Rightarrow \vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = 0$$

Si on connait les coordonnées de deux vecteurs dans une base orthonormée, le produit scalaire s'exprime uniquement en fonction des coordonnées : $\vec{V_1}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{V_2}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

- le carré du module du vecteur est : $\Rightarrow \|\vec{V}\| = |\vec{V}| = V = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Le produit scalaire possède les propriétés suivantes:

- Le produit scalaire est **<u>commutatif</u>**: $\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = \vec{V_2} \cdot \vec{V_1}$puisque, $cos\left(\widehat{\vec{V_1};\vec{V_2}}\right) = cos\left(\widehat{\vec{V_2};\vec{V_1}}\right)$

- Le produit scalaire est **distributif** par rapport à la somme : $\vec{V_1}\left(\vec{V_2}+\vec{V_3}\right)=\vec{V}_1\cdot\vec{V}_2+\vec{V}_1\cdot\vec{V}_3$
- **Positivité** : $\vec{V}\cdot\vec{V}\geq 0$ car $cos\left(\widehat{\vec{V};\vec{V}}\right)=1$, l'égalité ne se produit que si $\vec{V}=\vec{0}$
- Deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont dits orthogonaux si : $\vec{V}_1\cdot\vec{V}_2=0$ (**condition d'orthogonalité**$(\vec{V}_1\perp\vec{V}_2)$).

Géométriquement, les deux vecteurs sont perpendiculaires, puisque le cosinus de l'angle qu'ils forment est nul.

On a: $\vec{\imath}\cdot\vec{\imath}=\vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath}=\vec{k}\cdot\vec{k}=(1)(1)cos(0^\circ)=1$ et $\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath}=\vec{\jmath}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{\imath}=(1)(1)cos(90^\circ)=0$

Le produit scalaire représente géométriquement la projection d'un vecteur sur un autre

$$\begin{cases}\vec{V}\circ\vec{\imath}=\left(x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}\right)\circ\vec{\imath}=x\\ \vec{V}\circ\vec{\jmath}=\left(x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}\right)\circ\vec{\jmath}=y\\ \vec{V}\circ\vec{k}=\left(x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}\right)\circ\vec{k}=z\end{cases}$$

I.1.2.3.2. Produit vectoriel et surface orientée

Le produit vectoriel des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est un vecteur $\vec{C}$, noté $\vec{C}=\vec{A}\wedge\vec{B}$, dont :

$$\|\vec{A}\wedge\vec{B}\|=\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|sin\left(\widehat{\vec{A};\vec{B}}\right)$$

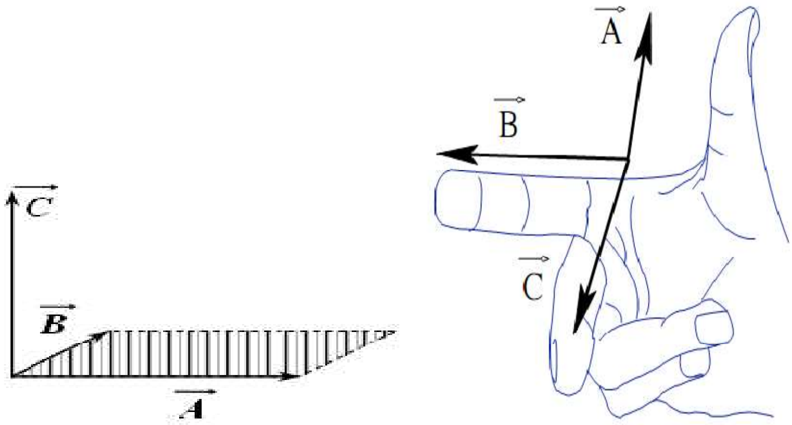


Figure I.4: Produit vectoriel

Connaissant les composantes des deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ dans une base orthonormée directe

$$\vec{A}\begin{pmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{pmatrix}\text{ et }\vec{B}\begin{pmatrix}x_B\\y_B\\z_B\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{A}\wedge\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{\imath}&\vec{\jmath}&\vec{k}\\x_A&y_A&z_A\\x_B&y_B&z_B\end{vmatrix}=(y_Az_B-y_Bz_A)\vec{\imath}-(x_Az_B-x_Bz_A)\vec{\jmath}+(x_Ay_B-x_By_A)\vec{k}$$

Le produit vectoriel possède les propriétés suivantes :

- Le produit vectoriel est non commutatif (**anticommutatif**): $\vec{A}\wedge\vec{B}=-\vec{B}\wedge\vec{A}$
- Le produit vectoriel est **distributif** par rapport à l'addition**:** $\vec{A}\wedge\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=\vec{A}\wedge\vec{B}+\vec{A}\wedge\vec{C}$
- Le vecteur résultant du produit vectoriel est toujours perpendiculaire aux vecteurs opérandes.
- Le produit vectoriel est nul si :$\|\vec{A}\|=0$, $\|\vec{B}\|=0$ ou $\vec{A}\parallel\vec{B}$

- Le produit vectoriel représente géométriquement l'aire de la surface orientée formée par les vecteurs opérandes.

I.1.2.3.3. Produit mixte

Le produit mixte, est un scalaire définit par la relation suivante : $\vec{A} \circ (\vec{B} \wedge \vec{C}) = V$

Le produit mixte possède les propriétés suivantes :

- Le produit mixte est invariant par permutation cyclique:

$\vec{A} \circ (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{C} \circ (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \circ (\vec{C} \wedge \vec{A})$

- Le produit mixte est nul si:

$\|\vec{A}\| = 0, \|\vec{B}\| = 0, \|\vec{C}\| = 0,$ ou $\vec{A}, \vec{B}$ et $\vec{C}$ sont coplanaires.

- Le produit mixte représente géométriquement le volume formé par les vecteurs opérandes.

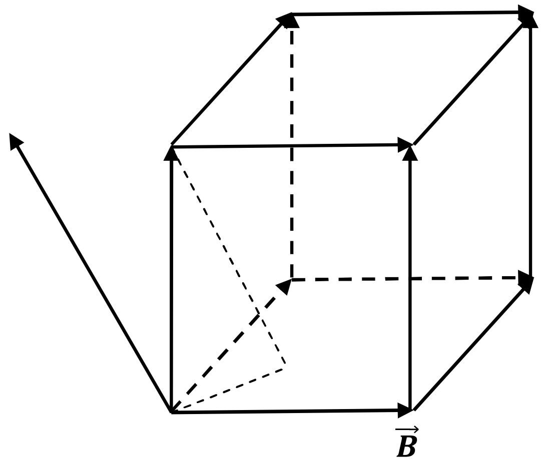


Figure I.5: Produit mixte

I.1.2.3.4. Double produit vectoriel

Le double produit vectoriel est un vecteur définit par la relation suivante :

$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \circ \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \circ \vec{B})\vec{C} = \alpha\vec{B} + \beta\vec{C} = \vec{V}$

I. 2. Systèmes de coordonnées [3, 4]

I.2.1. Coordonnées cartésiennes

Soient $R(x,y,z)$ un repère orthonormé direct de base$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et M la particule à repérer.

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Le vecteur déplacement élémentaire (M'est très voisin de M) s'écrit:

$\overrightarrow{MM'} = d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{dM} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

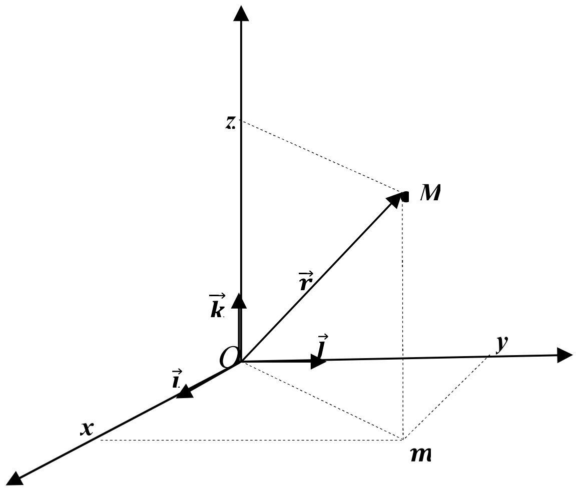


Figure I.6: coordonnées cartésiennes

I.2.2. Coordonnées polaires (mouvement dans le plan) (ρ, θ)

En coordonnées polaires un point M est caractérisé par les variables linéaire 'ρ' et angulaire 'θ'.

La Base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ est une base mobile liée à M

Vecteur position

$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho$ et $\|\overrightarrow{OM}\| = \rho$

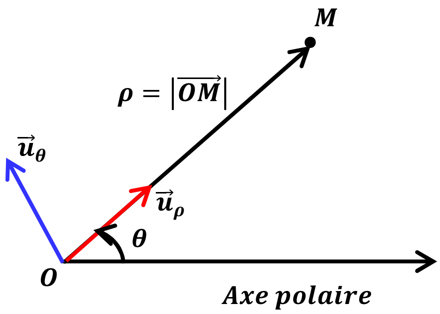


Figure I.7: coordonnées polaires

I.2.3. Coordonnées cylindriques

Lorsqu'on parle des coordonnées cylindriques on oublie complètement les coordonnées cartésiennes seulement dans le cas où on cherche à trouver un lien (relation) entre eux.

Base : trièdre directe mobile $\left(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{k}\right)$

M' : la projection de M sur la base du cylindre **(*xoy*)**

$\vec{u}_\rho$: Vecteur unitaire de $\overrightarrow{OM'}$

$\vec{u}_\theta$: Vecteur unitaire dans le plan du cylindre directement orthogonal à $\overrightarrow{OM'}$

$\vec{k}$: Vecteur unitaire de l'axe du cylindre $\overrightarrow{OZ}$.

Vecteur position

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{k}$$

et $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \|\vec{r}\| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$

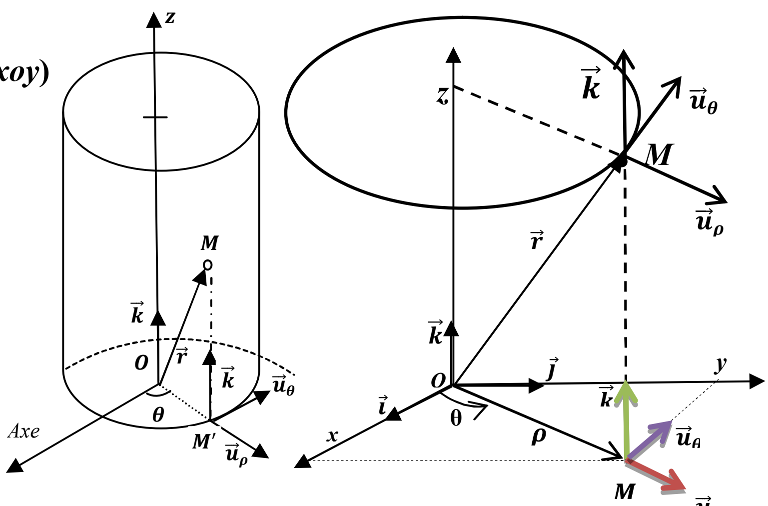


Figure I.8: coordonnées cylindriques

I.2.4. Coordonnées sphériques (r, θ, φ)

En coordonnées sphériques, un point M est caractérisé par les variables $'r'$,et angulaire$'\theta, \varphi'$.

- r est la distance $\left\|\overrightarrow{OM}\right\|$. **θ** est l'angle entre l'axe polaire OZ et $\overrightarrow{OM}$, il varie donc entre **0** et π

- φ est l'angle entre l'axe $\overrightarrow{Ox}$, et la projection de $\overrightarrow{OM}$, dans le plan **(*xoy*)**, il varie entre **0** et 2π .

Base : trièdre direct mobile $\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\right)$

Vecteur position: $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M} = r\vec{u}_r$ et $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \|\vec{r}\| = r$

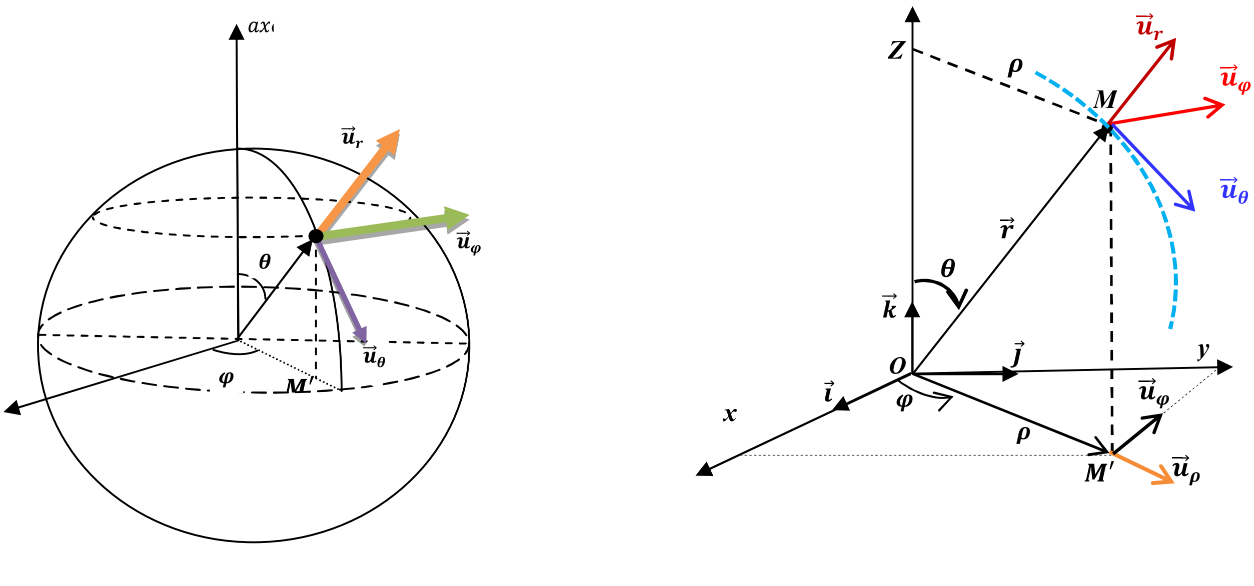
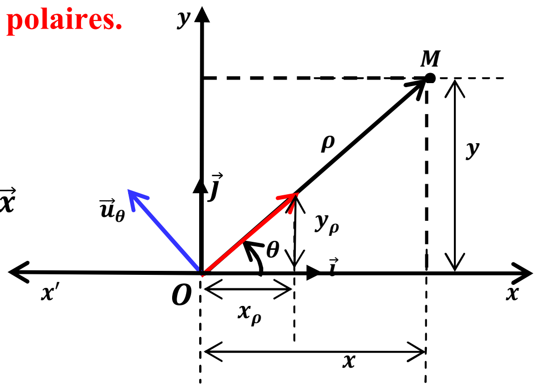


Figure I.9: coordonnées sphériques.

I.3. Relation entre les coordonnées des différents systèmes.

I.3.1. Relation entre coordonnées cartésiennes et coordonnées polaires.



En coordonnées cartésiennes $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$

En coordonnées polaires $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho$

Si on fait un choit tels que l'axe polaire soit confondu avec l'axe $\overrightarrow{ox}$

$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = \rho\vec{u}_\rho$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = arctg(y/x) \end{cases}$$

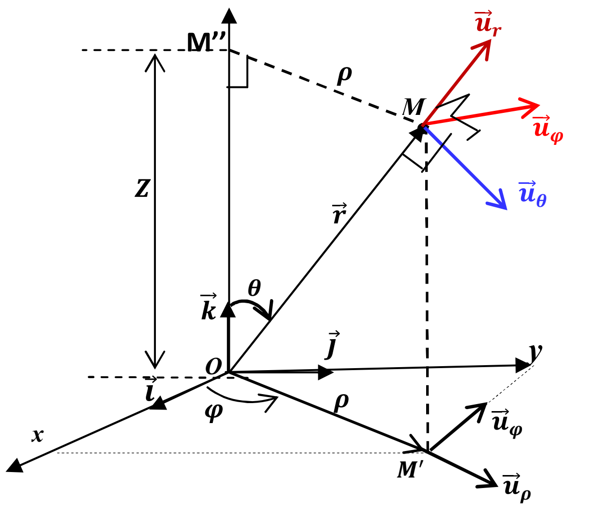
I.3.2. Relation entre coordonnées cartésiennes et coordonnées cylindriques.

En coordonnées cartésiennes $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

En coordonnées cylindriques $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{k} = \rho\cos\theta\,\vec{\imath} + \rho\sin\theta\,\vec{\jmath} + z\vec{k}$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = arctg(y/x) \\ z = z \end{cases}$$

I.3.3. Relation entre coordonnées cartésiennes et coordonnées *sphériques.*



En coordonnées cartésiennes $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

En coordonnées sphériques $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{k}$$

$$\sin\theta = \frac{\rho}{r} \Rightarrow \rho = r\sin\theta \quad et\ \vec{u}_\rho = cos\varphi\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath}$$

$$\Rightarrow \rho\vec{u}_\rho = r\sin\theta\,cos\varphi\vec{\imath} + r\sin\theta\,\sin\varphi\,\vec{\jmath}$$

Du triangle OM 'M'' : $\cos\theta = \frac{z}{r} \Rightarrow Z = r\cos\theta$

Alors: $\overrightarrow{OM} = r\sin\theta\,cos\varphi\vec{\imath} + r\sin\theta\,sin\varphi\vec{\jmath} + r\cos\theta\,\vec{k}$

$\overrightarrow{OM} = r(\sin\theta\,cos\varphi\vec{\imath} + \sin\theta\,sin\varphi\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k}) = r\vec{u}_r$

de plus

$$\vec{u}_r = \sin\theta\,cos\varphi\vec{\imath} + \sin\theta\,sin\varphi\vec{\jmath} + cos\,\theta\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} = r\sin\theta\,cos\varphi\vec{\imath} + r\sin\theta\,sin\varphi\vec{\jmath} + r\cos\theta\,\vec{k}$$

$$\text{donc :} \begin{cases} x = r\sin\theta\,cos\varphi \\ y = r\sin\theta\,sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \varphi = arctg\left(\frac{y}{x}\right) \\ \theta = arcos(z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}) \end{cases}$$

Série n°1: Rappel Mathématique

Exercice 01:

1°/Les formules suivantes sont-elles valides dimensionnellement? Faire une analyse dimensionnelle pour confirmer ou rectifier.

- $F = m\frac{v}{R}$

Où F est une force, v est une vitesse et R une longueur.

- $P = \rho g h_1 + h_2.F$

Où P est une pression, g est l'accélération de la pesanteur, h_1 et h_2 sont des hauteurs, F est une force et ρ la densité volumique.

2°/Etablir l'équation aux dimensions de la constante de gravitation G, sachant que la force gravitationnelle appliquée entre deux planètes est donnée par :$F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}$,

F la force, m_1 et m_2 la masse la planète 1 et 2 et d la distance entre elles.

Quelle est son nuitée en SI.

Exercice 02:

Une bille est lâchée d'une hauteur h, à son arrivée au sol elle avait une vitesse $v = \sqrt{2.g.h}$ Si la hauteur h =53,6 m, mesurée avec une erreur de $\Delta h = 1\ cm$, et l'accélération gravitationnelle $g = 9{,}81\ m.s^{-2}$, donnée avec une précision $\varepsilon_g = \frac{\Delta g}{g} = 0{,}1\%$. Calculer la vitesse de la bille à l'arrivée au sol, et estimer l'erreur Δv ?

Exercice 03:

Soient les points suivants : $A(1,1,1),\ B(2,2,1),\ C(2,1,0)$.

1°/ Représenter les points A, B et C, dans un repère cartésien (O, xyz).

2°/ Calculer l'angle φcompris entre les vecteur $\overrightarrow{AB}$et $\overrightarrow{AC}$.

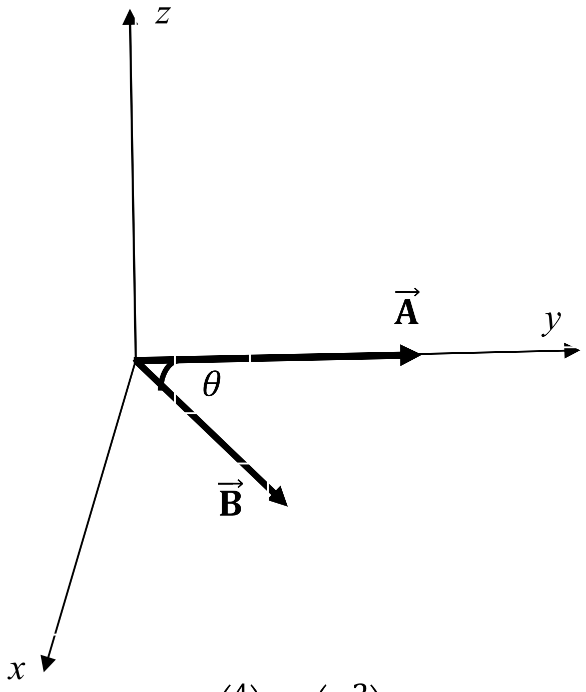
Exercice 04:

Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les vecteurs $\vec{A}\ et\ \vec{B}$, comme le montre la figure ci-dessous.

1°/ - Montrer que le produit scalaires des deux vecteurs $\vec{A}\ et\ \vec{B}$, s'écrit :

$$\vec{A} \circ \vec{B} = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \cos(\theta).$$

- Montrer que si le produit scalaire est nul ($\|\vec{A}\| \neq 0 \; et \; \|\vec{B}\| \neq 0$), les deux vecteurs sont orthogonaux.



2°/ les composantes respectives de $\vec{V}_1 \; et \; \vec{V}_2$ sont : $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

- Calculer les modules de $\vec{V}_1 \; et \; \vec{V}_2$.
- Calculer les produits scalaires $\vec{V}_1 \circ \vec{V}_2$ et $\vec{V}_2 \circ \vec{V}_1$. Qu'en déduisez-vous ?
- Quelles sont les composantes du vecteur somme $\vec{S} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$?
- Quel est l'angle formé entre les deux vecteurs $\vec{V}_1 \; et \; \vec{V}_2$?
- En utilisant les résultats précédents. Calculer $\|\vec{S}\|$des deux manières.

Exercice 05:

Dans une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on donne les vecteurs $\vec{V}_1 \; et \; \vec{V}_2$

1°/ les composantes respectives de $\vec{V}_1 \; et \; \vec{V}_2$ sont : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Calculer les modules de $\vec{V}_1 \; et \; \vec{V}_2$.
- Calculer les produits vectoriels $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$et $\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1$. Qu'en déduisez-vous ?
- Quelles sont les composantes du vecteur différence $\vec{D} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$?

2°/ Soient les vecteurs $\vec{A} \; et \; \vec{B}$, comme le montre la figure de **l'exercice 04**

- Montrer que le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{A} \; et \; \vec{B}$, s'écrit :

$$\vec{B} \wedge \vec{A} = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\| \sin(\theta).\vec{u}$$

- Dans quelle direction est orienté ce vecteur ?
- Montrer que le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{A}$ *et* $\vec{B}$ représente une surface orientée formée par les vecteurs opérandes.
- Calculer $\|\vec{D}\|$ en utilisant les résultats précédents.
- Montrer que si le produit vectoriel est nul ($\|\vec{A}\| \neq 0$ *et* $\|\vec{B}\| \neq 0$), les deux vecteurs sont parallèles.

Exercice 06:

On considère, dans un repère orthonormé $\mathscr{R}(Oxyz)$, les trois vecteurs suivants :

$$\vec{V}_1 = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 2\vec{k}\ ;\ \vec{V}_2 = 3\vec{\imath} - 4\vec{k};\ \vec{V}_3 = \vec{\imath} - 5\vec{\jmath} + 3\vec{k}$$

1°/ Calculer leurs modules.

2°/ Calculer les composantes du vecteur $\vec{U} = 3\vec{V}_1 + 2\vec{V}_2 - 4\vec{V}_3$ et le module$\|\vec{W}\| = \|\vec{V}_1 - \vec{V}_2\|^2$.

3°/ Déterminer les composantes du vecteur unitaire porté par le vecteur $\vec{V}_1$. Montrer qu'elles représentent les cosinus des angles (α) que fait le vecteur $\vec{V}_1$avec les axes Ox,Oy et Oz.

4°/ Calculer le produit scalaire $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ en déduire l'angle formé par ces deux vecteurs.

5°/ Calculer le produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ en déduire l'aire du parallélogramme formé par ces deux vecteurs.

6°/ Trouver la composante de la projection de$\vec{V}_3$ suivant la direction de $\vec{V}_1$.

7°/ Calculer le produit mixte $\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$et le double produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$.

8°/ Vérifier que $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3) \cdot \vec{V}_2 - (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3$.

9°/Montrer que le produit mixte représente le volume formé par les vecteurs opérandes.

Exercice 07:

Soit les fonctions vectorielles suivantes de la variable réelle t :

$$\vec{r}_1(t) = 3t^2\vec{\imath} - 2t^2\vec{\jmath} + (t+1)\vec{k}$$

$$\vec{r}_2(t) = \cos(\omega t)\vec{\imath} - \sin(\omega t)\vec{\jmath} + e^{-\alpha}\ \vec{k}$$

Où α et ω sont des constantes réelles positives. Calculer:

1°/ Leurs dérivées première et seconde par rapport à t ainsi que leurs modules.

2°/ L'intégrale$\vec{u}_1(t) = \int \vec{r}_1(t)dt$, sachant que pour t=0, on a $\vec{u}_1(t=0) = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$.

Exercice 08 :

Dans une base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on donne le vecteur $\overrightarrow{OA}$ tel que : $\overrightarrow{OA} = \vec{\imath} + \sqrt{3}\vec{\jmath}$

1°/ Ecrire le vecteur unitaire $\vec{u}_{OA}$ (vecteur unitaire de $\overrightarrow{OA}$) dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

On prend ce vecteur unitaire $\vec{u}_{OA}$ comme un vecteur de la base polaire, $\vec{u}_{OA} = \vec{u}_\rho$

2°/ Donner l'expression du second vecteur $\vec{u}_\theta$ de cette base.

3°/ Ecrire le vecteur $\overrightarrow{OA}$ dans la base polaire.

On donne le vecteur $\overrightarrow{OB} = \rho\vec{u}_\rho + \sin\theta\ \vec{u}_\theta$

4°/ Donner l'expression de $\overrightarrow{OB}$ dans la base cartésienne

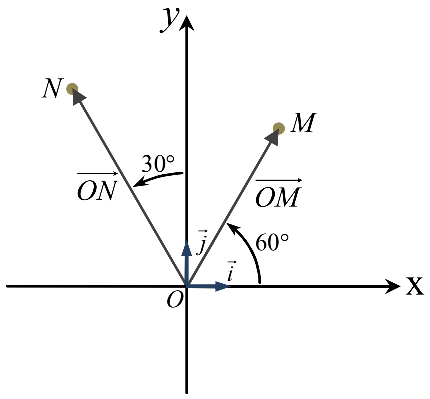
Exercice 09:

Soient les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$, illustrés à la figure ci-contre.

1°/ Calculer les coordonnées polaires $(\rho,\ \theta)$ et cartésiennes $(x,\ y)$ des points *M* et *N*.

2°/ Déterminer et représenter, dans le plan $(O,\ xy)$ les bases vectorielles $(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\theta)$ associées aux points *M* et *N* .

Données : $\|\overrightarrow{OM}\| = OM = 4{,}5\ et\ \|\overrightarrow{ON}\| = ON = 5$



Exercice 10:

On donne le vecteur $\vec{A} = 1\vec{\imath} + 1\vec{\jmath} + \sqrt{2}\vec{k}$

1°/ Donner les coordonnées sphériques de $\vec{A}$?

2°/ Ecrire les expressions de la base sphérique $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$ correspondante, dans la base cartésienne

3°/ Refaire la même chose pour le vecteur $\vec{A}$ dans la base cylindrique $(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\theta,\vec{k})$

Corrigé type : Série n°1

Exercice 01:

1- Homogénéité des formules:

Formule ***a*:**

$F = m\,.\,a \Rightarrow [\mathrm{F}] = [m][a] = \mathrm{ML}T^{-2}$ (01)

$F = \frac{mv}{R} \Rightarrow [\mathrm{F}] = \frac{[m][v]}{[\mathrm{R}]} = \frac{\mathrm{ML}T^{-1}}{L} = \mathrm{M}T^{-1}$ (02)

La force : $[\mathrm{F}] = \mathrm{M.L.\ T^{-1}}$

La masse : $[m] = \mathrm{M}$

L'accélération : $[a] = \mathrm{L.\ T^{-2}}$

Longueur : $[\mathrm{R}] = \mathrm{L}$

Cette loi n'est pas homogène puisque (1) ≠ (2).

Rectification

$$\mathrm{ML}T^{-2} = (\mathrm{M}T^{-1}).\left(\frac{L}{T}\right)$$

Donc, on peut écrire:

$$\mathrm{F} = \frac{mv}{R}v'$$

Où v' a la dimension d'une vitesse.

Formule ***b*:**

$P = \rho g h_1 + h_2.F \Rightarrow [P] = [\rho][g][h_1] + [h_2][F]$

$P = \frac{F}{S} \Rightarrow [P] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{\mathrm{M.L.T^{-1}}}{L^2} = ML^{-1}T^{-1}$ (01)

$[\rho] = \frac{[m]}{[V]} = \frac{M}{L^3} = ML^{-3};\ [g] = [a] = Lt^{-2};\ [h_1] = L$

$\Rightarrow [\rho][g][h_1] = ML^{-1}T^{-2}$ (02)

$[h_2][F] = LMLT^{-1} = ML^2T^{-1}$ (03)

Cette équation n'est pas homogène : (1) ≠ (2)+(3)

Pour rectifier cette formule, il faut multiplier le deuxième terme de la somme avec paramètre de dimension L^{-3}(inverse d'un volume). Par exemple :

$$P = \rho g h_1 + \frac{h_2 F}{V}$$

2- Les dimensions et unités de la constante de gravitation :

$$F = G\frac{m_1 m_2}{d^2} \Rightarrow G = G\frac{Fd^2}{m_1 m_2}$$

$$\Rightarrow [\boldsymbol{G}] = \frac{[\boldsymbol{F}][d^2]}{[m_1][m_2]} = \frac{MLT^{-1}L^2}{MM} = M^{-1}L^3T^{-1}$$

Son unité **SI** est : $\boldsymbol{kg^{-1}.m^3.s^{-1}}$

Exercice 02:

1. La vitesse de la bille à l'arrivée au sol : $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$

$$= \sqrt{2 \times 9{,}81 \times 53{,}6} \approx 32{,}43 \quad \text{m/s}$$

2. L'erreur Δvest calculée par la formule : $\Delta v = \left|\frac{\partial v}{\partial g}\right| \cdot \Delta g + \left|\frac{\partial v}{\partial h}\right| \cdot \Delta h$

Calcul des dérivées partielles :

$$\frac{\partial v}{\partial g} = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot g \cdot h}} = \frac{h}{v} \text{et} \frac{\partial v}{\partial h} = \frac{g}{\sqrt{2 \cdot g \cdot h}} = \frac{g}{v}$$

Donc, $\Delta v = \frac{h}{v} \cdot (g \cdot \varepsilon_g) + \frac{g}{v} \cdot \Delta h$

$$= \left[\frac{53{,}6}{32{,}43} \times (0{,}001 \times 9{,}81)\right] + \left[\frac{9{,}81}{32{,}43} \times \left(\frac{1}{100}\right)\right] \approx 0{,}02 \quad \text{m/s}$$

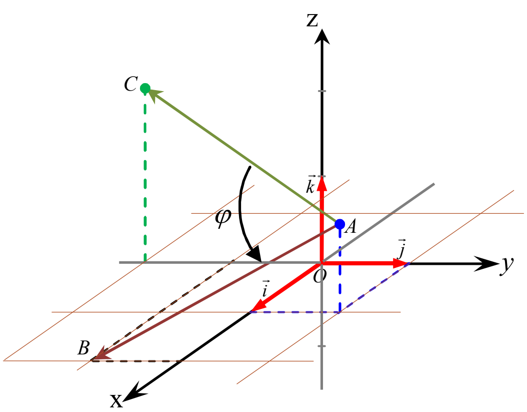
Donc, la vitesse à l'arrivée au sol s'écrit :

$$v = v \pm \Delta v = 32{,}43 \pm 0{,}02 \quad \text{m/s}$$

Exercice 03:

1- Représenter des points

2- <u>Le vecteur $\overrightarrow{AB}$</u> :



$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A) \cdot \vec{\imath} + (y_B - y_A) \cdot \vec{\jmath} + (z_B - z_A) \cdot \vec{k}$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{AB} = \vec{\imath} - 2 \cdot \vec{\jmath} - \vec{k}}$$

<u>Le vecteur $\overrightarrow{AC}$</u> :

$$\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A) \cdot \vec{\imath} + (y_C - y_A) \cdot \vec{\jmath} + (z_C - z_A) \cdot \vec{k}$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{AC} = -\vec{\imath} - 3 \cdot \vec{\jmath} + \vec{k}}$$

1. D'après la formule du produit scalaire :

$$\vec{U} \bullet \vec{V} = \|U\| \cdot \|V\| \cdot cos(\phi) = x_U \cdot x_V + y_U \cdot y_V + z_U \cdot z_V$$

Donc, l'angle entre deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ est :

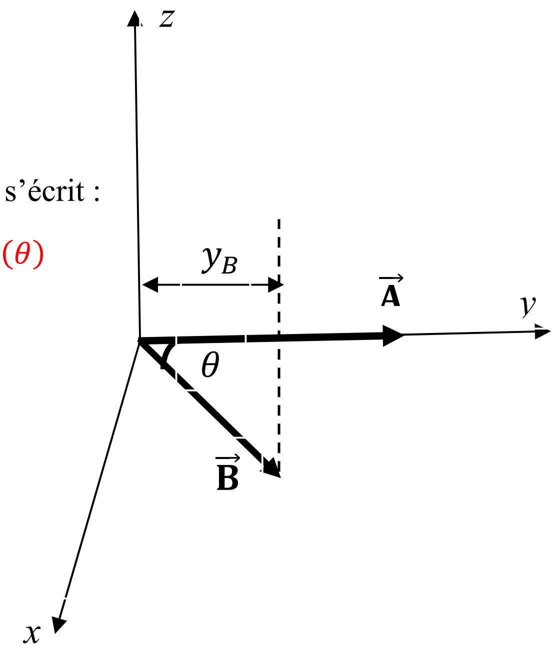
$$\boldsymbol{\varphi = arccos\left(\frac{\vec{U} \circ \vec{V}}{\|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|}\right)}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\varphi = arccos\left(\frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \circ \|\overrightarrow{AC}\|}\right)};$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 4 \\ \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6} \approx 2{,}45 \\ \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + (1)^2} = \sqrt{11} \approx 3{,}32 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\phi = arccos\left(\frac{4}{\sqrt{66}}\right) = 1,06}(\text{rad}) = \boldsymbol{60,5°}$$

Exercice 04:



1°/ En se basant sur la figure ci-contre

• Nous montrons le produit scalaires des deux vecteurs $\vec{A}$ *et* $\vec{B}$, s'écrit :

$$\vec{A} \circ \vec{B} = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\| \cos(\theta)$$

$\vec{A} = y_A\vec{j}$ et $\vec{B} = x_B\vec{i}+y_B\vec{j}$

$$\vec{A} \circ \vec{B} = (y_A\vec{j}) \circ (x_B\vec{i}+y_B\vec{j}) = y_A y_B$$

$$y_A = \|\vec{A}\| \text{ et } y_B = \|\vec{B}\| \cos\theta$$

$$\boldsymbol{\vec{A} \circ \vec{B} = y_A y_B = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\| \cos\theta}$$

- le produit scalaire est nul ($\|\vec{A}\| \neq 0$ *et* $\|\vec{B}\| \neq 0$), les deux vecteurs sont orthogonaux.

$$\vec{A} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \circ \vec{B} = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\| cos\left(\widehat{\vec{A},\vec{B}}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{A} \circ \vec{B} = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\| cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{A} \circ \vec{B} = 0$$

2°/ les composantes respectives de $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont : $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

- Les modules

$$A = \|\vec{A}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$\|\vec{V}_1\| = \sqrt{(4)^2 + (2)^2 + (4)^2} = 6$$

$$\|\vec{V}_2\| = \sqrt{(-2)^2 + (1)^2 + (2)^2} = 3$$

- Le produit scalaire:

$$\vec{V}_1 \circ \vec{V}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = -8 + 2 + 8 = 2$$

$$\vec{V}_2 \circ \vec{V}_1 = x_2x_1 + y_2y_1 + z_2z_1 = -8 + 2 + 8 = 2$$

$\vec{V}_2 \circ \vec{V}_1 = \vec{V}_1 \circ \vec{V}_2$ ⇒Le produit scalaire est commutatif.

- les composantes du vecteur somme

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (x_1 + x_2)\vec{\imath} + (y_1 + y_2)\vec{\jmath} + (z_1 + z_2)\vec{k}$$

$$\boldsymbol{\vec{S} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 6\vec{k}}$$

- l’angle formé entre les deux vecteurs $\vec{V}_1\ et\ \vec{V}_2$?

$$\vec{V}_1 \circ \vec{V}_2 = \|\vec{V}_1\|\|\vec{V}_2\| \cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{V}_1 \circ \vec{V}_2}{\|\vec{V}_1\|\|\vec{V}_2\|} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \theta = 83{,}62°$$

- Calcul du vecteur somme $\|\vec{S}\|$ de deux manières en utilisant les résultats précédents

1- Par la somme des carrés des composantes

$$\vec{S} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 6\vec{k}$$

$$\|\vec{S}\| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (6)^2} = 7 \qquad (01)$$

2- Par le produit scalaire

$$\|\vec{S}\| = \sqrt{\vec{S} \circ \vec{S}} = \sqrt{(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) \circ (\vec{V}_1 + \vec{V}_2)}$$

$$\Rightarrow \|\vec{S}\| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2\vec{V}_1 \circ \vec{V}_2} \Rightarrow \|\vec{S}\| = \sqrt{36 + 9 + 4} = 7 \qquad (02)$$

Exercice 05:

1°/ les composantes respectives de$\vec{V}_1$et $\vec{V}_2$sont$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$

- Les modules

$$A = \|\vec{A}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$\|\vec{V_1}\| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\|\vec{V_2}\| = \sqrt{(-2)^2 + (1)^2 + (1)^2} = \sqrt{6}$$

- les produits vectoriels

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 5\vec{k}$$

$$\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1 = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 5\vec{k} = -(\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 5\vec{k}) = -\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$$

$\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1 = -\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ ⇒le produit vectoriel est anticommutatif.

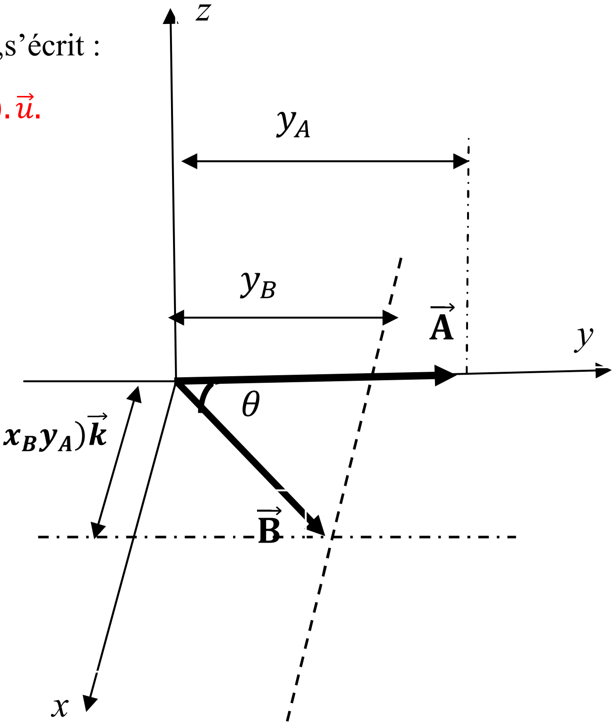
- composantes du vecteur différence $\vec{D} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$

$$\vec{D} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 = (x_1 - x_2)\vec{\imath} + (y_1 - y_2)\vec{\jmath} + (z_1 - z_2)\vec{k} = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath}$$

2°/ Soient les vecteurs$\vec{A}$ *et* $\vec{B}$,commele montre la figure de **l'exercice 04**

- Montrons que le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{A}$ *et* $\vec{B}$,s'écrit :

$$\vec{B} \wedge \vec{A} = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\| \sin(\theta).\vec{u}.$$



$$\vec{A}\begin{pmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{pmatrix}\text{et}\vec{B}\begin{pmatrix}x_B\\y_B\\z_B\end{pmatrix}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{A} \wedge \vec{B} = (\boldsymbol{y_A z_B - y_B z_A})\vec{\boldsymbol{\imath}} - (\boldsymbol{x_A z_B - x_B z_A})\vec{\boldsymbol{\jmath}} + (\boldsymbol{x_A y_B - x_B y_A})\vec{\boldsymbol{k}}$$

$$\vec{A}\begin{pmatrix}0\\\|\vec{A}\|\\0\end{pmatrix}\text{et}\vec{B}\begin{pmatrix}\|\vec{B}\|\sin(\theta)\\\|\vec{B}\|\cos\theta\\0\end{pmatrix}$$

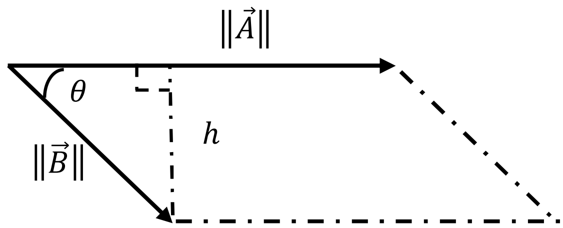
$$\vec{B} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \|\vec{B}\|\sin(\theta) & \|\vec{B}\|\cos\theta & 0 \\ 0 & \|\vec{A}\| & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{B} \wedge \vec{A} = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\| \sin(\theta) . \vec{\boldsymbol{k}}$$

Direction est orientation de ce vecteur

$\vec{u} = \vec{k}$Qui est la direction du produit vectoriel

- le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ représente une surface orientée formée par les vecteurs opérandes.



La surface d'un parallélogramme est

$S = base \times hauteur = \|\vec{A}\| \times h$

Or $h = \|\vec{B}\| \sin(\theta)$

$S = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\| \sin(\theta)$

d'où $\vec{A} \wedge \vec{B} = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\| \sin(\theta) . \vec{\boldsymbol{u}} = |\vec{A} \wedge \vec{B}| . \vec{\boldsymbol{u}} = S . \vec{\boldsymbol{u}} = \vec{S}$

- Calcul de $\|\vec{D}\|$ en utilisant les résultats précédents.

$$\vec{D} = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath}$$

$$\|\vec{D}\| = \sqrt{(3)^2 + (1)^2} = \sqrt{10}$$

- Montre que le produit vectoriel est nul $\left(\left\|\|\vec{A}\|\right\| \neq 0 \; et \; \left\|\|\vec{B}\|\right\| \neq 0\right)$, les deux vecteurs sont parallèles.

$$\vec{A} \parallel \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \wedge \vec{B} = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\| \sin(\theta) . \vec{\boldsymbol{u}}$$

$\Rightarrow \vec{A} \wedge \vec{B} = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\| \sin(0) . \vec{\boldsymbol{u}}$

$\Rightarrow \vec{A} \wedge \vec{B} = 0$

Exercice 06:

On considère, dans un repère orthonormé $\mathscr{R}(Oxyz)$, les trois vecteurs suivants :

$$\vec{V}_1 = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 2\vec{k} \; ; \vec{V}_2 = 3\vec{\imath} - 4\vec{k}; \; \vec{V}_3 = \vec{\imath} - 5\vec{\jmath} + 3\vec{k}$$

1°/ Calcul de leurs modules.

$$\|\vec{V}_1\| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = 3$$

$$\|\vec{V}_2\| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = 5$$

$$\|\vec{V}_3\| = \sqrt{(1)^2 + (-5)^2 + (3)^2} = \sqrt{35}$$

2°/Calcul des composantes des vecteurs $\vec{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{3}\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{1}} + \boldsymbol{2}\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{2}} - \boldsymbol{4}\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{3}}$ et $\vec{\boldsymbol{W}} = \left\|\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{1}} - \vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{2}}\right\|^{\boldsymbol{2}}$.

$$\vec{U} = 3\vec{V}_1 + 2\vec{V}_2 - 4\vec{V}_3 = 3(2\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 2\vec{k}) + 2(3\vec{\imath} - 4\vec{k}) - 4(\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} + 3\vec{k})$$

$$\vec{U} = (6\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - 6\vec{k}) + (6\vec{\imath} - 8\vec{k}) + (-4\vec{\imath} + 20\vec{\jmath} - 12\vec{k})$$

$$\vec{U} = (6+6-4)\vec{\imath} + (-3+20)\vec{\jmath} + (-6-8-12)\vec{k}$$

$$\boldsymbol{\vec{U} = 8\vec{\imath} + 17\vec{\jmath} - 26\vec{k}}$$

$$\left\|\vec{V}_1 - \vec{V}_2\right\|^2 = \left(\vec{V}_1 - \vec{V}_2\right) \circ \left(\vec{V}_1 - \vec{V}_2\right) = \left(2\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 2\vec{k} - (3\vec{\imath} - 4\vec{k})\right) \circ \left(2\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 2\vec{k} - (3\vec{\imath} - 4\vec{k})\right)$$

$$\left\|\vec{V}_1 - \vec{V}_2\right\|^2 = \left(-\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}\right)\left(-\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}\right) = 6$$

3°/ La composante du vecteur unitaire porté par le vecteur $\vec{V}_1$.

$$\vec{u}_{V_1} = \frac{\vec{V}_1}{\|\vec{V}_1\|} = \frac{2}{3}\vec{\imath} - \frac{1}{3}\vec{\jmath} - \frac{2}{3}\vec{k}$$

Les cosinus directeurs**:**

$$\cos\alpha = \frac{\vec{V}_1\vec{\imath}}{\|\vec{V}_1\|\|\vec{\imath}\|} = \frac{2}{3} = \left(\vec{u}_{V_1}\right)_x$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{V}_1\vec{\jmath}}{\|\vec{V}_1\|\|\vec{\jmath}\|} = -\frac{1}{3} = \left(\vec{u}_{V_1}\right)_y$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{V}_1\vec{k}}{\|\vec{V}_1\|\|\vec{k}\|} = -\frac{2}{3} = \left(\vec{u}_{V_1}\right)_z$$

4°/ Le produit scalaire $\vec{V}_1 \circ \vec{V}_2$:

$$\vec{V}_1 \circ \vec{V}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 6 + 8 = 14$$

L'angle entre les deux vecteurs**:**

$$\vec{V}_1 \circ \vec{V}_2 = \|\vec{V}_1\|\|\vec{V}_2\|\cos\theta \quad \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{V}_1 \circ \vec{V}_2}{\|\vec{V}_1\|\|\vec{V}_2\|} = \frac{14}{15}$$

$$\Rightarrow \theta = 21.04°$$

5°/ Le produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = 4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$$

La surface du parallélogramme**:**

$$S = \|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\| = \sqrt{(4)^2 + (2)^2 + (3)^2} = \sqrt{29}$$

6°/ La composante de la projection**:**

$$\vec{V}_3 \circ \vec{u}_{V_1} = \left(\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} + 3\vec{k}\right) \circ \left(\frac{2}{3}\vec{\imath} - \frac{1}{3}\vec{\jmath} - \frac{2}{3}\vec{k}\right) = \frac{2}{3} + \frac{5}{3} - \frac{6}{3} = \frac{1}{3}$$

7°/Le produit mixte **:**

$$\vec{V}_3 \circ (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = (\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} + 3\vec{k}) \circ (4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}) = 4 - 10 + 9 = 3$$

le double produit vectoriel

$$\vec{V}_1 = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 2\vec{k}\ ; \vec{V}_2 = 3\vec{\imath} - 4\vec{k};\ \vec{V}_3 = \vec{\imath} - 5\vec{\jmath} + 3\vec{k}$$

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \wedge \left(\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & 0 & -4 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} \right) = \vec{V}_1 \wedge \left(\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} \vec{k} \right)$$

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = (2\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 2\vec{k}\ ) \wedge (-20\vec{\imath} - 13\vec{\jmath} - 15\vec{k}\ )$$

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -2 \\ -20 & -13 & -15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -13 & -15 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -20 & -15 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -20 & -13 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = -11\vec{\imath} + 70\vec{\jmath} - 46\vec{k}$$

8°/Vérification de la relation**:**$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 \circ \vec{V}_3)\vec{V}_2 - (\vec{V}_1 \circ \vec{V}_2)\vec{V}_3$

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = -11\vec{\imath} + 70\vec{\jmath} - 46\vec{k}$$

$$(\vec{V}_1 \circ \vec{V}_3)\vec{V}_2 = [(2\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 2\vec{k}) \circ (\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} + 3\vec{k})](3\vec{\imath} - 4\vec{k})$$

$$(\vec{V}_1 \circ \vec{V}_3)\vec{V}_2 = 3\vec{\imath} - 4\vec{k}$$

$$(\vec{V}_1 \circ \vec{V}_2)\vec{V}_3 = \left((2\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 2\vec{k}) \circ (3\vec{\imath} - 4\vec{k})\right)(\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} + 3\vec{k})$$

$$(\vec{V}_1 \circ \vec{V}_2)\vec{V}_3 = ((14))(\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} + 3\vec{k}) = 14\vec{\imath} - 70\vec{\jmath} + 42\vec{k}$$

$$(\vec{V}_1 \circ \vec{V}_3)\vec{V}_2 - (\vec{V}_1 \circ \vec{V}_2)\vec{V}_3 = 3\vec{\imath} - 4\vec{k} - 14\vec{\imath} + 70\vec{\jmath} - 42\vec{k}$$

$$(\vec{V}_1 \circ \vec{V}_3) \circ \vec{V}_2 - (\vec{V}_1 \circ \vec{V}_2) \circ \vec{V}_3 = -11\vec{\imath} + 70\vec{\jmath} - 46\vec{k}$$

Alors**:**

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 \circ \vec{V}_3) \circ \vec{V}_2 - (\vec{V}_1 \circ \vec{V}_2) \circ \vec{V}_3$$

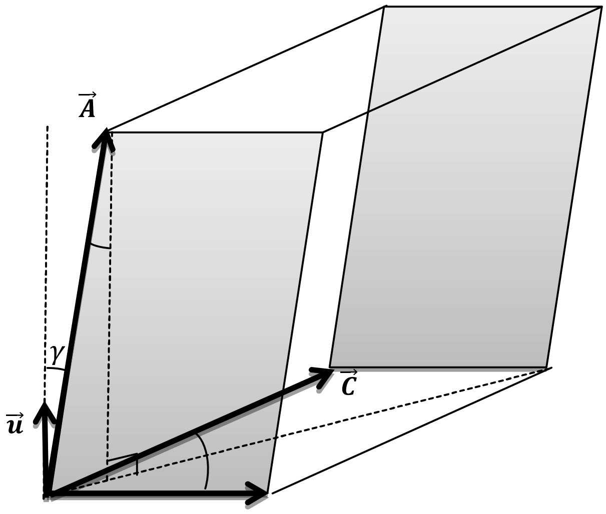
9°/Le produit mixte représente le volume formé par les vecteurs opérandes.

Le volume formé par les trois vecteurs est :

$v = surface\ de\ la\ base \times Hauteur$

$S = |\vec{B} \wedge \vec{C}| = \|\vec{B}\|\|\vec{C}\| \sin(\theta)$

$\vec{S} = \|\vec{B}\|\|\vec{C}\| \sin(\theta)\, \vec{\boldsymbol{u}}$



La hauteur : $h = \|\vec{A}\| \cos(\gamma)$

$v = \|\vec{B}\|\|\vec{C}\| \sin(\theta) \circ \|\vec{A}\| \cos(\gamma)$

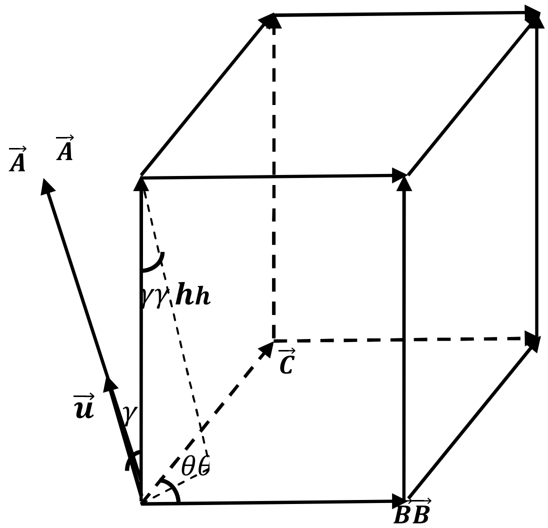
$v = \vec{A} \circ \vec{\boldsymbol{u}}\|\vec{B}\|\|\vec{C}\| \sin(\theta)$

$v = \vec{A} \circ \|\vec{B}\|\|\vec{C}\| \sin(\theta)\, \vec{\boldsymbol{u}}$

$\boldsymbol{v} = \vec{\boldsymbol{A}} \circ \left(\vec{\boldsymbol{B}} \wedge \vec{\boldsymbol{C}}\right)$

Exercice 07:

1°/ Les première et seconde dérivées et leurs modules :



$$\frac{d\vec{r}_1(t)}{dt} = 6t\vec{\imath} - 4t\vec{\jmath} + \vec{k}$$

$$\left\|\frac{d\vec{r}_1(t)}{dt}\right\| = \sqrt{(6t)^2 + (-4t)^2 + (1)^2}$$

$$\left\|\frac{d\vec{r}_1(t)}{dt}\right\| = \sqrt{52t^2 + 1}$$

$$\frac{d^2r_1(t)}{dt^2} = 6\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$$

$$\left\|\frac{d^2r_1(t)}{dt^2}\right\| = \sqrt{52}$$

$$\frac{d\vec{r}_2(t)}{dt} = -\omega\sin(\omega t)\vec{\imath} - \omega\cos(\omega t)\vec{\jmath} - \alpha e^{-\alpha t}\vec{k}$$

$$\left\|\frac{d\vec{r}_2(t)}{dt}\right\| = \sqrt{(-\omega\sin(\omega t))^2 + (-\omega\cos(\omega t))^2 + (-\alpha e^{-\alpha t})^2}$$

$$\left\|\frac{d\vec{r}_2(t)}{dt}\right\| = \sqrt{\omega^2 + \alpha^2 e^{-2\alpha t}}$$

$$\frac{d^2r_2(t)}{dt^2} = -\omega^2\cos(\omega t)\vec{\imath} + \omega^2\sin(\omega t)\vec{\jmath} + \alpha^2 e^{-\alpha t}\vec{k}$$

$$\left\|\frac{d^2r_2(t)}{dt^2}\right\| = \sqrt{\omega^4 + \alpha^4 e^{-2\alpha t}}$$

2°/ L'intégrale:

$$\vec{u}_1(t) = \int \vec{r}_1(t)dt = \int \left((3t^2)\vec{\imath} - (2t^2)\vec{\jmath} + (t+1)\vec{k}\right) dt$$

$$\vec{u}_1(t) = \int \left((3t^2dt)\vec{\imath} - (2t^2dt)\vec{\jmath} + ((t+1)dt)\vec{k}\right)$$

$\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k}$: sont constantes

$$\Rightarrow \vec{u}_1(t) = \left(\int (3t^2dt)\right)\vec{\imath} + \left(\int -(2t^2dt)\right)\vec{\jmath} + \left(\int (t+1)dt\right)\vec{k}$$

$$\vec{u}_1(t) = t^3\vec{\imath} - \frac{2}{3}t^3\vec{\jmath} + \left(\frac{1}{2}t^2 + t\right)\vec{k} + \vec{C}_1$$

Condition initiale :

$$t = 0 \ \Rightarrow \vec{u}_1(t=0) = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k} = \vec{C}_1$$

On a finalement :

$$\vec{u}_1(t) = \int \vec{r}_1(t)dt = (t^3+1)\vec{\imath} - (\frac{2}{3}t^3 - 1)\vec{\jmath} + \left(\frac{1}{2}t^2 + t + 1\right)\vec{k}$$

Exercice 08 :

Dans une base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on donne le vecteur$\overrightarrow{OA}$tel que : $\overrightarrow{OA} = \vec{\imath} + \sqrt{3}\vec{\jmath}$

1°/ On sait que chaque vecteur en général s'écrit :

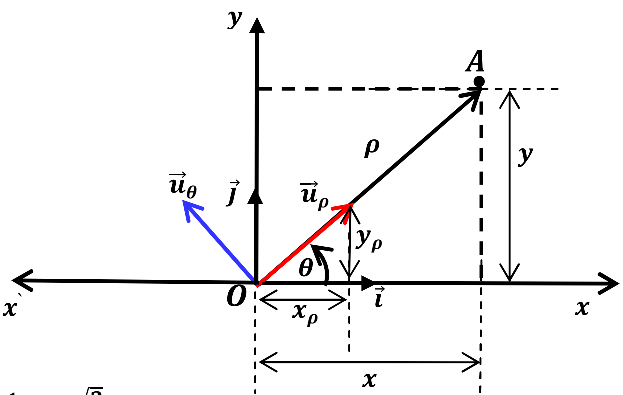
$$\vec{V} = \|\vec{V}\|\vec{u}$$

$\|\vec{V}\|$: le module du vecteur (intensité).et $\vec{u}$: le vecteur unitaire (orientation).

$\Rightarrow\overrightarrow{OA} = \|\overrightarrow{OA}\|\vec{u}_{OA}\Rightarrow\vec{u}_{OA} = \frac{\overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{OA}\|}$; $\|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{(1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$

$\Rightarrow\vec{u}_{OA} = \frac{1}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}$

2°/ On prend ce vecteur unitaire $\vec{u}_{OA}$ comme un vecteur de la base polaire, $\vec{u}_{OA} = \vec{u}_\rho$



$$\vec{u}_{OA} = \frac{1}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath} = \vec{u}_\rho = x_\rho\vec{\imath} + y_\rho\vec{\jmath}$$

$$\cos\theta = \frac{x_\rho}{\|\vec{u}_\rho\|} \Rightarrow x_\rho = \cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{y_\rho}{\|\vec{u}_\rho\|} \Rightarrow y_\rho = \sin\theta$$

de plus $\vec{u}_\rho = x_\rho\vec{\imath} + y_\rho\vec{\jmath} = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath} = \frac{1}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \ \theta = \frac{\pi}{3}$$

$\vec{u}_\theta$: est le second vecteur unitaire de la base polaire $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$, il est perpendiculaire $\vec{u}_\rho \perp \vec{u}_\theta$.

$\theta \rightarrow \theta + \frac{\pi}{2}$: dans le sens positif.

c.à.d. :$\vec{u}_\theta = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\vec{\imath} + \sin(\theta + \frac{\pi}{2})\vec{\jmath} \Rightarrow \vec{u}_\theta = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)\vec{\imath} + \sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2})\vec{\jmath}$

$$\Rightarrow \vec{u}_{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{cos}\left(\frac{\mathbf{5\pi}}{\mathbf{6}}\right)\vec{\boldsymbol{\imath}} + \mathbf{sin}(\frac{\mathbf{5\pi}}{\mathbf{6}})\vec{\boldsymbol{\jmath}} \Rightarrow \vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\theta}} = -\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

3°/ le vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}$ dans la base polaire.

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OA}} = \boldsymbol{A_\rho}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{A_\theta}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\overrightarrow{OA} = \left\|\overrightarrow{OA}\right\|\vec{u}_{OA}$$

$$\left\|\overrightarrow{OA}\right\| = 2\text{et}\vec{u}_{OA} = \vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\rho}}$$

$$\overrightarrow{OA} = 2\vec{u}_{OA} = 2\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\rho}}$$

$$\begin{cases} A_\rho = 2 \\ A_\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OA} = 2\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\rho}}$$

4°/ l'expression de $\overrightarrow{\boldsymbol{OB}}$ dans la base cartésienne

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OB}} = \boldsymbol{\rho}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\rho}} + \mathbf{sin}\,\boldsymbol{\theta}\ \vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\theta}}$$

Les relations de passage entre la base polaire et cartésienne sont :

$$\begin{cases} \vec{u}_\rho = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath} \\ \vec{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{\imath} = \cos\theta\,\vec{u}_\rho - \sin\theta\,\vec{u}_\theta \\ \vec{\jmath} = \sin\theta\,\vec{u}_\rho + \cos\theta\vec{u}_\theta \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OB} = \rho(\cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}) + \sin\theta\ \ (-\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OB} = \rho\cos\theta\,\vec{\imath} + \rho\sin\theta\,\vec{\jmath} - \sin^2\theta\ \ \vec{\imath} + sin\theta\cos\theta\,\vec{\jmath}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OB} = (\rho\cos\theta - \sin^2\theta\ )\,\vec{\imath} + (\rho\sin\theta + sin\theta\cos\theta)\,\vec{\jmath} = B_x\vec{\imath} + B_y\vec{\jmath}$$

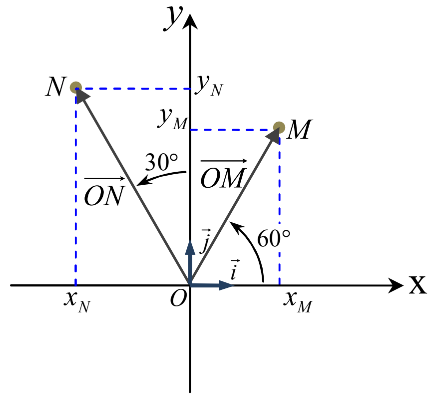
$$\begin{cases} B_x = \rho\cos\theta - \sin^2\theta \\ B_y = \rho\sin\theta + sin\theta\cos\theta \end{cases}$$

Exercice 09:

1. Les coordonnées polaires de :

$$M : \begin{cases} \rho_M = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = 4 \\ \theta_M = 60° \end{cases}$$

$$N : \begin{cases} \rho_N = \left\|\overrightarrow{ON}\right\| = 5 \\ \theta_N = 90° + 30° = 120° \end{cases}$$



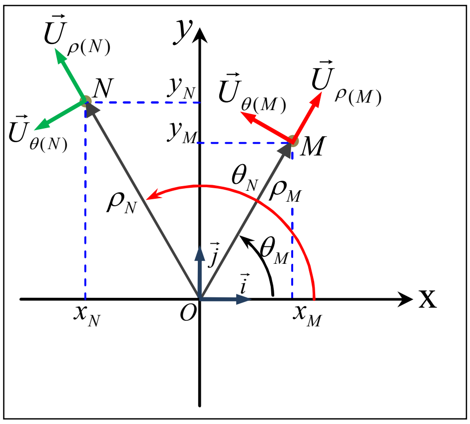
Les coordonnées cartésiennes de :

$$M : \begin{cases} x_M = \rho_M \cdot cos(\theta_M) = 2 \\ y_M = \rho_M \cdot sin(\theta_M) = 2\sqrt{3} \end{cases} \text{et} N : \begin{cases} x_N = \rho_N \cdot cos(\theta_N) = -2{,}5 \\ y_N = \rho_N \cdot sin(\theta_N) = 2{,}5\sqrt{3} \end{cases}$$

2. La base vectorielle $(\vec{U}_\rho , \vec{U}_\theta)$ de :

$$M : \begin{cases} \vec{U}_{\rho(M)} = cos(\theta_M) \cdot \vec{\imath} + sin(\theta_M) \cdot \vec{\jmath} = \frac{1}{2}(\vec{\imath} + \sqrt{3} \cdot \vec{\jmath}) \\ \vec{U}_{\theta(M)} = -sin(\theta_M) \cdot \vec{\imath} + cos(\theta_M) \cdot \vec{\jmath} = \frac{1}{2}(-\sqrt{3} \cdot \vec{\imath} + \vec{\jmath}) \end{cases}$$

$$N : \begin{cases} \vec{U}_{\rho(N)} = cos(\theta_N) \cdot \vec{\imath} + sin(\theta_N) \cdot \vec{\jmath} = \frac{1}{2}(-\vec{\imath} + \sqrt{3} \cdot \vec{\jmath}) \\ \vec{U}_{\theta(N)} = -sin(\theta_N) \cdot \vec{\imath} + cos(\theta_N) \cdot \vec{\jmath} = \frac{1}{2}(-\sqrt{3} \cdot \vec{\imath} - \vec{\jmath}) \end{cases}$$



Exercice 09:

On donne le vecteur $\vec{A} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$

1°/ les coordonnées sphériques de $\vec{A}$

La base sphérique est $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$dont les coordonnées sont (r, θ, φ) les relations de passage entre la base sphérique et la base cartésienne sont données par :

$$\text{donc: } \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi = arctg\left(\frac{y}{x}\right) \\ \theta = arcos(z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \end{cases}$$

$$\vec{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{1^2 + 1^2 + (\sqrt{2})^2} = 2 \\ \varphi = arctg(1) = \frac{\pi}{4} \\ \theta = arcos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\vec{A}\begin{pmatrix} r = 2 \\ \varphi = \dfrac{\pi}{4} \\ \theta = \dfrac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

2°/ les expressions de la base sphérique $(\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}}, \vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\theta}}, \vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\varphi}})$, dans la base cartésienne

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \sin\theta \cos\varphi \vec{i} + \sin\theta \sin\varphi \vec{j} + \cos\theta \vec{k} \\ \vec{u}_\theta = \cos\theta \cos\varphi \vec{i} + \cos\theta \sin\varphi \vec{j} - \sin\theta \vec{k} \\ \vec{u}_\varphi = -\sin\varphi \vec{i} + \cos\varphi \vec{j} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \sin(\frac{\pi}{4}) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\varphi \vec{j} + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \vec{k} \\ \vec{u}_\theta = \cos(\frac{\pi}{4}) \cos(\frac{\pi}{4}) \vec{i} + \cos(\frac{\pi}{4}) \sin(\frac{\pi}{4}) \vec{j} - \sin(\frac{\pi}{4}) \vec{k} \\ \vec{u}_\varphi = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \vec{i} + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \vec{j} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k} \\ \vec{u}_\theta = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k} \\ \vec{u}_\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} \end{cases}$$

3°/ Les coordonnées cylindriques de $\vec{\boldsymbol{A}}$

La base cylindrique est $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{k})$dont les coordonnées sont (ρ, θ, z) les relations de passage entre la base cylindrique et la base cartésienne sont données par:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = arctg(y/x) \\ z = z \end{cases}$$

$$\vec{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \theta = arctg(1) = \dfrac{\pi}{4} \\ z = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\vec{A}\begin{pmatrix} \rho = \sqrt{2} \\ \theta = \dfrac{\pi}{4} \\ z = \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Exercices Supplémentaires

Exercice 01 :

On considère les vecteurs suivants : $\vec{A} = 2 \cdot \vec{\imath} + 2 \cdot \vec{\jmath} - 3 \cdot \vec{k}$ et $\vec{B} = \vec{\imath} - 2 \cdot \vec{\jmath} + 4 \cdot \vec{k}$

1. Représenter, sur un repère cartésien(O, xyz), les vecteurs $\vec{A}$et $\vec{B}$, puis calculer leurs modules.
2. Calculer le produit scalaire $\vec{A} \bullet \vec{B}$, et le produit vectoriel$\vec{A} \wedge \vec{B}$.
3. Déterminer le vecteur unitaire $\vec{U}$ perpendiculaire au plan $(\vec{A}, \vec{B})$.
4. Représenter sur le repère précédent, le vecteur : $\vec{C} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 4 \cdot \vec{k}$.
5. Calculer le produit mixte : $\vec{C} \bullet (\vec{A} \wedge \vec{B})$, et déduire le volume du parallélépipède formé par les vecteurs$\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$.

Rep.

1°/ $A = \|\vec{A}\| = \sqrt{17}$ et $B = \|\vec{B}\| = \sqrt{21}$.

2°/$\vec{A} \bullet \vec{B} = -14$ et $\vec{A} \wedge \vec{B} = 2 \cdot \vec{\imath} - 11 \cdot \vec{\jmath} - 6 \cdot \vec{k}$

3°/ $\vec{U} = \frac{1}{\sqrt{161}}(2 \cdot \vec{\imath} - 11 \cdot \vec{\jmath} - 6 \cdot \vec{k})$.

5°/ $\vec{C} \bullet (\vec{A} \wedge \vec{B}) = -37$ et Vol $= |\vec{C} \bullet (\vec{A} \wedge \vec{B})| = 37$.

Exercice 02 :

1. Soient les points $P_1(1, 2, 2)$et$P_2(-1, -2, 2)$ définis dans les coordonnées cartésiennes.
   - Calculer leurs coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) et sphériques (r, θ, ϕ).
2. Déterminer les coordonnées cartésiennes d'un point Mdéfini par ses coordonnées cylindriques$(3, 30°, 2)$.
3. Déterminer les coordonnées cartésiennes d'un point Ndéfini par ses coordonnées sphériques $(2, 45°, 60°)$.

Rep.

1°/ Le point $P_1\ (1, 2, 2) : \begin{cases} \rho_1 \approx 2{,}24 \\ \theta_1 \approx 63{,}43° \\ z_1 = 2 \end{cases}$ *et* Le point $P_2\ (-1, -2, 2) : \begin{cases} \rho_2 \approx 2{,}24 \\ \theta_2 \approx 243{,}34° \\ z_2 = 2 \end{cases}$

Le point $P_1\ (1, 2, 2) : \begin{cases} r_1 = 3 \\ \theta_1 \approx 48{,}19 \\ \phi_1 \approx 63{,}43 \end{cases}$ et Le point $P_2\ (-1, -2, 2) : \begin{cases} r_2 = 3 \\ \theta_2 \approx 48{,}19° \\ \phi_2 \approx 243{,}34° \end{cases}$

2°/Le point $M\ (3, 30°, 2) : \begin{cases} x_M \approx 2{,}6 \\ y_M = 1{,}5 \\ z_M = 2 \end{cases}$

3°/ Le point $A\ (2, 45°, 60°) : \begin{cases} x \approx 0{,}71 \\ y \approx 1{,}22 \\ z \approx 1{,}41 \end{cases}$

Exercice 03 :

Dans une base orthonormée$(\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$, on donne les vecteurs $\vec{\mathbf{V}}_1$ et $\vec{\mathbf{V}}_2$telle que :

$$\vec{\mathbf{V}}_1 = \vec{\mathbf{i}} + 2\vec{\mathbf{j}} + 2\vec{\mathbf{k}} \text{et} \vec{\mathbf{V}}_2 = 2\vec{\mathbf{i}} - 2\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$$

1°/Calculer les modules $|\vec{\mathbf{V}}_1|$, $|\vec{\mathbf{V}}_2|$.

2°/Calculer le vecteur somme $\vec{\mathbf{S}} = \vec{\mathbf{V}}_1 + \vec{\mathbf{V}}_2$et le vecteur différence $\vec{\mathbf{D}} = \vec{\mathbf{V}}_1 - \vec{\mathbf{V}}_2$.

3°/Calculer les modules $|\vec{\mathbf{S}}| = |\vec{\mathbf{V}}_1 + \vec{\mathbf{V}}_2|$ et $|\vec{\mathbf{D}}| = |\vec{\mathbf{V}}_1 - \vec{\mathbf{V}}_2|$de deux manières.

4°/Est-ce-que les égalités $|\vec{\mathbf{S}}| = |\vec{\mathbf{V}}_1| + |\vec{\mathbf{V}}_2|$ et $|\vec{\mathbf{D}}| = |\vec{\mathbf{V}}_1| - |\vec{\mathbf{V}}_2|$ sont-elles vraies **?**

Rep.

1°/ $V_1 = \|\vec{V}_1\| = 3$ et $V_2 = \|\vec{V}_2\| = 3$.

2°/$\vec{S} = 3(\vec{\imath} + \vec{k})$ et $\vec{D} = -\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + \vec{k}$

3°/ $|\vec{S}| = 3\sqrt{2}$ et $|\vec{D}| = 3\sqrt{2}$

4°/ $|\vec{S}| \neq |\vec{V}_1| + |\vec{V}_2|$ et $|\vec{D}| \neq |\vec{V}_1| - |\vec{V}_2|$

Exercice 04 :

Dans une base orthonormée$(\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$, on donne les vecteurs $\vec{\mathbf{A}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$telle que :

$$\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{i}} - 2\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}} \text{et} \vec{\mathbf{B}} = 2\vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$$

1°/ Calculer le produit scalaire $\vec{\mathbf{A}} \circ \vec{\mathbf{B}}$. Vérifier que$\vec{\mathbf{A}} \circ \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}} \circ \vec{\mathbf{A}}$

2°/ Quel est l'angle formé entre ces deux vecteurs ?

3°/ Donner les composantes des vecteurs $\vec{\mathbf{A}}$et $\vec{\mathbf{B}}$. Comparer les avec $\vec{\mathbf{A}} \circ \vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{A}} \circ \vec{\mathbf{j}}$ et $\vec{\mathbf{A}} \circ \vec{\mathbf{k}}$ainsi que$\vec{\mathbf{B}} \circ \vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{B}} \circ \vec{\mathbf{j}}$ et $\vec{\mathbf{B}} \circ \vec{\mathbf{k}}$ respectivement ?Que peut-on dire du produit scalaire.

Peut-on écrire $\vec{\mathbf{A}}$et $\vec{\mathbf{B}}$ sous formes : $\begin{cases} \vec{\mathbf{A}} = (\vec{\mathbf{A}} \circ \vec{\mathbf{i}})\vec{\mathbf{i}} + (\vec{\mathbf{A}} \circ \vec{\mathbf{j}})\vec{\mathbf{j}} + (\vec{\mathbf{A}} \circ \vec{\mathbf{k}})\vec{\mathbf{k}} \\ \vec{\mathbf{B}} = (\vec{\mathbf{B}} \circ \vec{\mathbf{i}})\vec{\mathbf{i}} + (\vec{\mathbf{B}} \circ \vec{\mathbf{j}})\vec{\mathbf{j}} + (\vec{\mathbf{B}} \circ \vec{\mathbf{k}})\vec{\mathbf{k}} \end{cases}$

4°/ Quel est l'angle $'\boldsymbol{\theta}'$entre les deux vecteurs $\vec{\mathbf{A}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$

5°/ Que vaut la projection de $\vec{\mathbf{A}}$ sur la direction de $\vec{\mathbf{B}}$.

Rep.

1°/ $\vec{A} \bullet \vec{B} = 5$ et $\vec{A} \bullet \vec{B} = \vec{B} \bullet \vec{A} = 5$.

2°/$\theta = 33.58°$

3°/ $\begin{cases} \vec{A} \circ \vec{\imath} = 1 \\ \vec{A} \circ \vec{\jmath} = -2 \\ \vec{A} \circ \vec{k} = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} \vec{B} \circ \vec{\imath} = 2 \\ \vec{B} \circ \vec{\jmath} = -1 \\ \vec{B} \circ \vec{k} = 1 \end{cases}$

4°/ $\theta = 33.58°$

Exercice 05 :

Dans une base orthonormée$(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on donne les vecteurs $\vec{A}$,$\vec{B}$et$\vec{C}$telle que :

$$\vec{A} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}\ ;\ \vec{B} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}\text{et}\vec{C} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$$

1°/ Calculer le produit vectoriel $\vec{A} \wedge \vec{B}$. Vérifier que$\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$

2°/ Comparer l'aire de la surface formée par les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$et le produit vectoriel $\vec{A} \wedge \vec{B}$.

3°/ Déterminer le volume formé par les trois vecteurs $\vec{A}$,$\vec{B}$et$\vec{C}$

4°/ Si $\vec{A} \circ (\vec{B} \wedge \vec{C}) = 0$ les **3** vecteurs sont coplanaires.

5°/ Vérifier la permutation cyclique : $\vec{A} \circ (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B} \circ (\vec{C} \wedge \vec{A}) = \vec{C} \circ (\vec{A} \wedge \vec{B})$.

Exercice 06 :

Dans une base orthonormée$(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on donne les vecteurs $\vec{A}(t)$ et $\vec{B}(t)$telle que :

$\vec{A} = (t-1)\vec{\imath} - (t+1)\vec{\jmath}et\vec{B} = t\vec{\imath} - \vec{\jmath}$

1°/ Calculer les dérivées des vecteurs $\vec{A}(t)$et $\vec{B}(t)$.

2°/ Calculer les dérivées des produits scalaire $\vec{A} \circ \vec{B}$ et vectoriel $\vec{A} \wedge \vec{B}$de deux manières.

3°/ Assurer vous que l'ordre est sans importance pour $\vec{A} \circ \vec{B}$, alors qu'il l'est pour $\vec{A} \wedge \vec{B}$.

Exercice 07 :

Dans une base orthonormée$(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, $\vec{a}$ et $\vec{b}$sontdans le plan (xoy) avec $\theta = \theta_1 + \theta_2$

1°/ En se basant sur la figure ci-contre, montrer que le produit scalaire de $\vec{a}$et $\vec{b}$, s'écrit : $\vec{a} \cdot \vec{b} = \| \vec{a} \| \| \vec{b} \| \cos(\theta)$.

- Montrer que si le produit scalaire est nul $(\| \vec{a} \| \neq 0, \| \vec{b} \| \neq 0)$,les deux vecteurs sont orthogonaux.

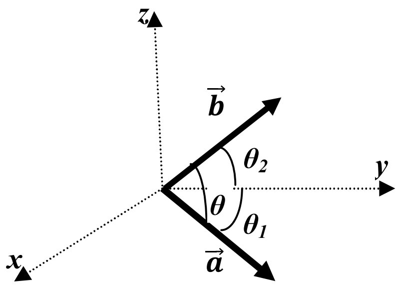


Figure-1

2°/ les composantes respectives de $\vec{a}$et $\vec{b}$, sont $(4, 2, 4)$ et $(-2, 1, 2)$:

- Calculer les modules de $\vec{a}$ et de $\vec{b}$.
- Quelles sont les composantes du vecteur somme $\vec{C}^{+} = \vec{a} + \vec{b}$?
- Quel est l'angle formé entre les deux vecteurs $\vec{a}$et$\vec{b}$?

Exercice 08 :

Dans une base orthonormée$(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on donne $\vec{a}$et $\vec{b}$. Comme le montre la figure-1

1°/Montrer que le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{a}$et $\vec{b}$, s'écrit :

$\vec{a} \wedge \vec{b} = \| \vec{a} \| \| \vec{b} \| \sin(\theta) . \vec{u}$. Dans quelle direction est orienté ce vecteur ?

2°/ Si $\vec{a}$ et $\vec{b}$, ont pour composantes, respectivement, $(1, 2, 1)$ et $(-2, 1, 1)$:

- Quels sont les cosinus directeur du vecteur $\vec{u}$? Si « α, β, γ » sont les angles que fait $\vec{u}$ avec les axes « $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ » respectivement.
- Montrer que le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ représente une surface orientée formées par
- Montrer que si le produit vectoriel est nul ($\| \vec{a} \|$ **et** $\| \vec{b} \| \neq 0$) les deux vecteurs sont Parallèles

Exercice 09 :

Dans une base orthonormée$(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on donne les vecteurs :

$\vec{A}(t) = 2t\vec{\imath} + (t+1)\vec{\jmath} + (1-t)\vec{k}$ et $\vec{B}(t) = 4t\vec{\imath} - 3t\vec{\jmath} + 2\vec{k}$

Calculer : $\frac{d\vec{A}}{dt}$, $\frac{d\vec{B}}{dt}$, $\frac{d(\vec{A} \circ \vec{B})}{dt}$ et $\frac{d(\vec{A} \wedge \vec{B})}{dt}$

Chapitre II

Cinématique du point matériel

II.1. Définitions

a. **Point matériel:** Un point matériel est défini comme étant un élément de matière, de dimensions négligeables, que l'on assimile à un point géométrique. En réalité, on étudie le mouvement d'un point particulier, le centre de masse d'un corps, point au quel est supposé concentré toute la masse du corps.

b. **Repère d'espace:** Un repère est un système de trois axes (**base**), affectés à un point pris comme origine, permettant de repérer n'importe quel point matériel dans l'espace. ($\boldsymbol{rep\grave{e}re} = \boldsymbol{origine} + \boldsymbol{base}$). Par exemple le repère cartésien$(\boldsymbol{O}, \vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}, \vec{\boldsymbol{k}})$.

c. **Notion de référentiel:** Il est constitué d'un instant d'origine et d'une échelle de temps. Le temps est une notion absolue, c'est-à-dire indépendante du référentiel d'étude : ainsi, deux observateurs liés à des référentiels différents attribuent les mêmes dates aux mêmes événements.

d. **Repère du temps:** $\boldsymbol{r\acute{e}f\acute{e}rentiel} = (\boldsymbol{rep\grave{e}re}\ (\boldsymbol{origine} + \boldsymbol{base}) + \boldsymbol{observateur})$

e. **Vecteur position:** Dans un repère $(\boldsymbol{o}, \vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}, \vec{\boldsymbol{k}})$ le vecteur position est donné par :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \vec{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{x}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{y}\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \boldsymbol{z}\vec{\boldsymbol{k}}$$

f. **Équation horaire:** Les coordonnées du point matériel$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{z}(\boldsymbol{t}))$, sont les équations paramétriques.

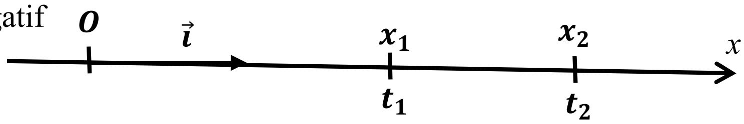
g. **Équation de la trajectoire:** Puisque le vecteur position $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$ change de position lors de l'écoulement du temps on a :

$\begin{cases} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) \\ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}(\boldsymbol{t}) \end{cases}$ $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})$ ***et*** $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})$Sont dites équations paramétriques du mouvement. Pour trouver l'équation de la trajectoire, on élimine le temps des équations paramétriques :$f(x, y, z) = 0$

II.2. Mouvement rectiligne [5, 6]

Le mouvement d'un corps est rectiligne si sa trajectoire est une droite. La position de l'objet est définie par son déplacement ***« x »*** à partir d'un point arbitraire O pris comme origine.

x = f(t) avec: ***x :*** Peut être positif ou négatif



II.3. Vecteur vitesse

a. Vecteur vitesse moyenne

La vitesse d'un mobile caractérise le taux de variation de sa position dans le temps. Soit deux positions du mobile $'x_1'$ et $'x_2'$ à deux instants $'t_1'$ et $'t_2'$ $(t_1 < t_2)$. La vitesse moyenne du mobile entre ces deux positions est donnée par : $\vec{v}_{moy} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{\imath} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\vec{\imath}$

Dans l'espace (trois dimensions): $\vec{v}_{moy} = \frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}\vec{i} + \frac{y_2-y_1}{t_2-t_1}\vec{j} + \frac{z_2-z_1}{t_2-t_1}\vec{k} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k}$

b. Vecteur vitesse instantanée:

Définit la vitesse instantanée à l'instant t par : $\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} = \frac{dx}{dt}\vec{i}$

Dans l'espace (trois dimensions): $\vec{v}(t) = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \Rightarrow v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

Par conséquent, pour retrouver la position d'un mobile à chaque instant, à partir de sa vitesse instantanée, on calcule l'intégrale : $\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} vdt \Rightarrow x = x_0 + \int_{t_0}^{t} vdt$.

II.4. Vecteur accélération

a. Vecteur accélération moyenne

L'accélération d'un mobile caractérise le taux de variation de sa vitesse au cours du temps. Procédant comme pour la vitesse, on définit l'accélération par $\vec{a}_{moy} = \frac{v_x(t_2)-v_x(t_1)}{t_2-t_1}\vec{i}$

Trois dimensions: $\vec{a}_{moy} = \frac{v_x(t_2)-v_x(t_1)}{t_2-t_1}\vec{i} + \frac{v_y(t_2)-v_y(t_1)}{t_2-t_1}\vec{j} + \frac{v_z(t_2)-v_z(t_1)}{t_2-t_1}\vec{k} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta v_z}{\Delta t}\vec{k}$

b. Vecteur accélération instantanée

L'accélération instantanée d'un mobile est la dérivée de sa vitesse par rapport au temps, à l'instant considéré : $\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{moy} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\vec{i} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}$

Trois dimensions: $\vec{a}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2x}{dt^2}\vec{k} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \Rightarrow a(t) = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Par conséquent, pour retrouver la vitesse d'un mobile à chaque instant, à partir de son accélération, on calcule l'intégrale : $\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} adt \Rightarrow v = v_0 + \int_{t_0}^{t} adt$

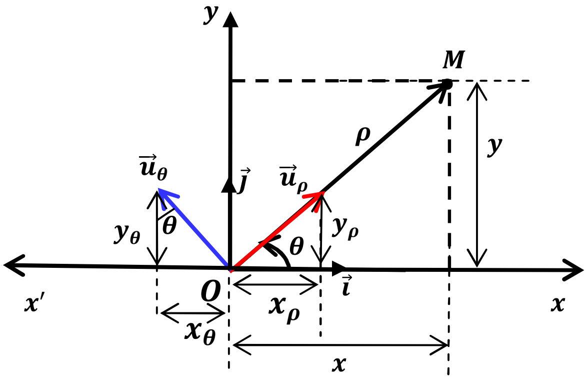
II.5. Position, vitesse et accélération dans les différents systèmes de coordonnées

II.5.1. Dérivées des vecteurs unitaires

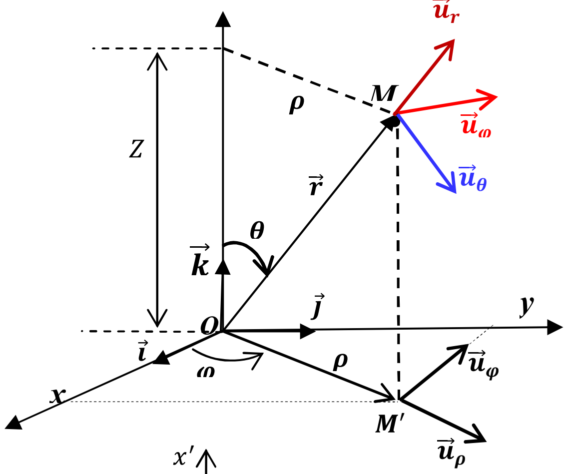
a. Base polaire $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$

$\theta(t)$ et $\rho(t)$ sont variables dans le temps ainsi que les vecteurs unitaires $\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_\theta$ qui s'écrivent dans la base cartésienne comme suit :

$$\begin{cases} \vec{u}_\rho = \cos(\theta)\,\vec{i} + \sin(\theta)\,\vec{j} \\ \vec{u}_\theta = -\sin(\theta)\,\vec{i} + \cos(\theta)\,\vec{j} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\vec{u}}_\rho = \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \\ \dot{\vec{u}}_\theta = \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_\rho \end{cases}$$



***Remarque**: La base cylindrique donne des résultats similaires que la base polaire en ajoutant la coordonnée "Z"*



b. Base Sphérique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$

$\overline{OM} = r(\sin\theta\, cos\varphi\vec{\imath} + \sin\theta\, sin\varphi\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k}) = r\vec{u}_r$

$\Rightarrow \vec{u}_r = sin\,\theta\, cos\varphi\vec{\imath} + sin\,\theta\, sin\varphi\vec{\jmath} + cos\,\theta\,\vec{k}$

$\vec{u}_\varphi = -x_\varphi\vec{\imath} + y_\varphi\vec{\jmath} \Rightarrow \vec{u}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath}$

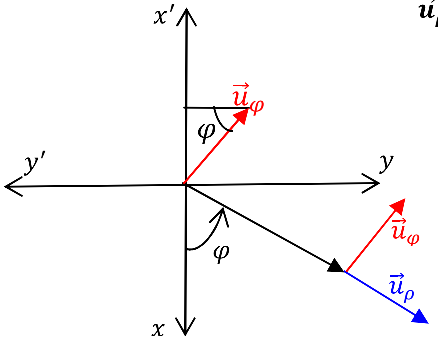
Il nous reste à déterminer le vecteur $\vec{u}_\theta$: $\vec{u}_\theta = \vec{u}_\varphi \wedge \vec{u}_r$

$$Finalement: \begin{cases} \vec{u}_r = sin\,\theta\, cos\varphi\vec{\imath} + sin\,\theta\, sin\varphi\vec{\jmath} + cos\,\theta\,\vec{k} \\ \vec{u}_\theta = cos\,\theta\, cos\varphi\vec{\imath} + cos\,\theta\, sin\varphi\vec{\jmath} - sin\,\theta\,\vec{k} \\ \vec{u}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath} \end{cases}$$

$$\dot{\vec{u}}_r = \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{\partial\vec{u}_r}{\partial\theta} + \frac{d\varphi}{dt}\frac{\partial\vec{u}_r}{\partial\varphi} \Rightarrow \dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}sin\theta\vec{u}_\varphi$$

$$\dot{\vec{u}}_\theta = \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{\partial\vec{u}_\theta}{\partial\theta} + \frac{d\varphi}{dt}\frac{\partial\vec{u}_\theta}{\partial\varphi} \Rightarrow \dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{u}_r + \dot{\varphi}cos\theta\vec{u}_\varphi$$

$$\dot{\vec{u}}_\varphi = \frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\frac{d\vec{u}_\varphi}{d\varphi} \Rightarrow \dot{\vec{u}}_\varphi = -\dot{\varphi}(sin\,\theta\,\vec{u}_r + cos\theta\vec{u}_\varphi)$$



II.5.2. Coordonnées polaires

a. Vecteur position: Comme on l'a déjà vu : $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho \Rightarrow \|\overrightarrow{OM}\| = \rho$

b. Vecteur vitesse: D'après la définition :$\vec{v}(t) = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta = \vec{v}_\rho + \vec{v}_\theta$ et $v(t) = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\theta})^2}$

c. Vecteur accélération: D'après la définition : $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta)}{dt} = \frac{d(\dot{\rho}\vec{u}_\rho)}{dt} + \frac{d(\rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta)}{dt}$

$$\Rightarrow \vec{a}(t) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta = \vec{a}_\rho + \vec{a}_\theta \Rightarrow a(t) = \sqrt{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})^2}$$

II.5.3. Coordonnées cylindriques

a. Vecteur position: Comme on l'a déjà vu : $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{k} \Rightarrow \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$

b. Vecteur vitesse: D'après la définition : $\Rightarrow \vec{v}(t) = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{k} = \vec{v}_\rho + \vec{v}_\theta + \vec{v}_z$

$$et\ \|\vec{v}(t)\| = v(t) = \sqrt{{v_\rho}^2 + {v_\theta}^2 + {v_z}^2} \Rightarrow v(t) = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2}$$

c. Vecteur accélération: $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{k} = \vec{a}_\rho + \vec{a}_\theta + \vec{a}_z$

$$et\ \|\vec{a}(t)\| = a(t) = \sqrt{{a_\rho}^2 + {a_\theta}^2 + {a_z}^2} \Rightarrow a(t) = \sqrt{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})^2 + \ddot{z}^2}$$

II.5.4. Coordonnées sphériques

a. Vecteur position: Comme on l'a déjà vu : $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r \Rightarrow \|\overrightarrow{OM}\| = r$

b. Vecteur vitesse: D'après la définition : $\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(r\vec{u}_r)}{dt} = \dot{r}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\vec{u}}_r$

$$\vec{v}(t) = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\varphi}sin\theta\vec{u}_\varphi = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta + \vec{v}_\varphi$$

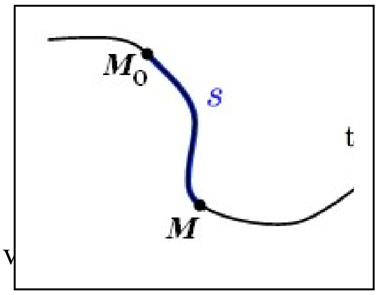
$$\Rightarrow \|\vec{v}(t)\| = v(t) = \sqrt{{v_r}^2 + {v_\theta}^2 + {v_\varphi}^2} \Rightarrow v(t) = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + (r\dot{\varphi}sin\theta)^2}$$

c. Vecteur accélération: : $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\varphi}sin\theta\vec{u}_\varphi)}{dt} \Rightarrow \vec{a}(t) = \vec{a}_r + \vec{a}_\theta + \vec{a}_\varphi$

$$\vec{a}(t) = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 sin^2\theta\right)\vec{u}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 sin\theta cos\theta\right)\vec{u}_\theta + (r\ddot{\varphi}sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}cos\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}sin\theta)\vec{u}_\varphi$$

$$a(t) = \sqrt{\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 sin^2\theta\right)^2 + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 sin\theta cos\theta\right)^2 + (r\ddot{\varphi}sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}cos\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}sin\theta)^2}$$

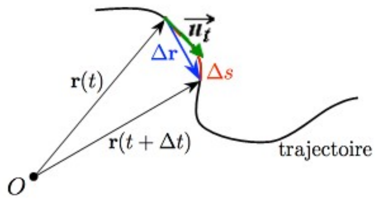
II.5.5. Coordonnées curvilignes (intrinsèques)



a) Abscisse curviligne: On appelle abscisse curviligne s la mesure de la distance parcourue le long de la trajectoire, soit $S(t) = \widehat{M_0M}$

b) Vecteur vitesse: Sur la figure ci-contre,

le module de la variation du vecteur déplacement $|\Delta\vec{r}| = \Delta r$ et la v curviligne Δs. Mais en faisant tendre $\Delta t \to 0$, ces deux derniers tendent à se confondre. On peut écrire alors : $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\|\Delta\vec{r}\|}{\Delta s} = 1 \Rightarrow \frac{\|d\vec{r}\|}{ds} = 1$



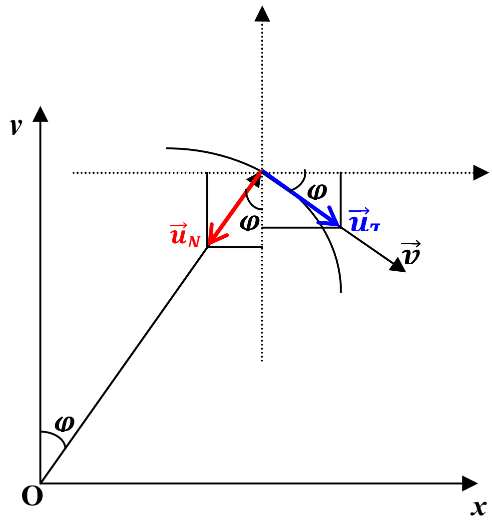
On définit un vecteur unitaire $\vec{u}_T$: $d\vec{r} = ds\vec{u}_T \Rightarrow \vec{u}_T = \frac{d\vec{r}}{ds}$.

Le vecteur vitesse est défini par : $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} \Rightarrow v\vec{u}_T$

c) Accélération tangentielle et normale

En dérivant par rapport au temps le vecteur vitesse $\vec{v}(t) = v\vec{u}_T$

on obtient l'accélération sous la forme : $\vec{a}(t) = \frac{d(v\vec{u}_T)}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + v\frac{d\vec{u}_T}{dt}$

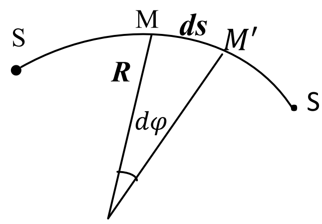


D'après la figure précedente:

$$\begin{cases} \vec{u}_T = \cos(\varphi)\,\vec{i} - \sin(\varphi)\,\vec{j} \\ \vec{u}_N = -\sin(\varphi)\,\vec{i} - \cos(\varphi)\,\vec{j} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\vec{u}}_T = \frac{d\vec{u}_T}{dt} = \dot{\varphi}\vec{u}_N \\ \dot{\vec{u}}_N = \frac{d\vec{u}_N}{dt} = -\dot{\varphi}\vec{u}_T \end{cases}$$

$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + v\dot{\varphi}\vec{u}_N$ soit: $\widehat{MM'} = ds = Rd\varphi$

$\frac{ds}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt} = v \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{v}{R}$



Finalement: $\vec{a}(t) = \vec{a}_T + \vec{a}_N = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\vec{u}_N$

$\vec{a}_T = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T$ *et* $\vec{a}_N = \frac{v^2}{R}\vec{u}_N \Rightarrow a = \sqrt{{a_T}^2 + {a_N}^2}$

II.6. Deux cas particuliers de mouvement rectiligne : le MRU et le MRUV

a. mouvement rectiligne uniforme (MRU)

Il se caractérise par : trajectoire rectiligne (une droite), vitesse constante et accélération nulle.

$v = \frac{dx}{dt} = cste \Rightarrow dx = vdt$ $donc$ $\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} vdt = v\int_{t_0}^{t} dt \Rightarrow x - x_0 = v(t - t_0)$

Si $x_0 = 0$ et $t_0 = 0$ alors $\boldsymbol{x(t) = vt}$c'est l'équation du mouvement rectiligne uniforme (**MRU**).

b. *Le mouvement rectiligne uniformément varié (MRUV)*

Il se caracterise par : trajectoire rectiligne et accélération constante non nulle.$\boldsymbol{a = \frac{dv}{dt} = cste}$

Si la vitesse croit ($\vec{v}.\vec{a} > 0$), le MUA et Si la vitesse décroit ($\vec{v}.\vec{a} < 0$), le MUD.

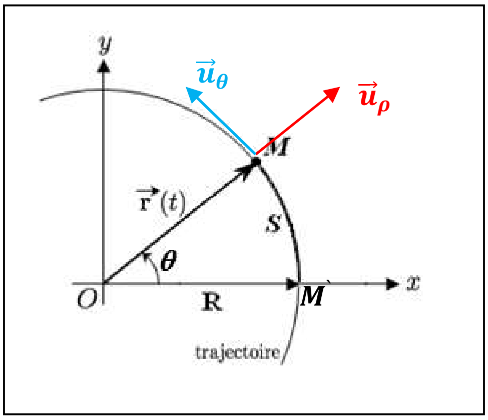
$\frac{dv}{dt} = a_0$ $donc$ $\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a_0 dt = a_0\int_{t_0}^{t} dt \Rightarrow$ $\boldsymbol{v - v_0 = a_0(t - t_0)} \Rightarrow \boldsymbol{v(t) = a_0(t - t_0) + v_0}$

$\frac{dx}{dt} = a_0(t - t_0) + v_0 \Rightarrow \boldsymbol{x(t) = \frac{1}{2}a_0(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + x_0}$ c'est l'équation du **MRUV**.

On trouve la relation entre la variation de la vitesse et le déplacement: $\Rightarrow \boldsymbol{v^2 - v_0^2 = 2a_0(x - x_0)}$

II.7. Deux cas particuliers de mouvement circulaire

a. *Mouvement circulaire uniforme (MCU)*



- la trajectoire est circulaire (circonférence)
- vitesse linéaireet angulaire sont constantes.

la distance parcourue est l'arc $\widehat{M'M} = s \Rightarrow \boldsymbol{s = R\theta}$

le vecteur position est : $\boldsymbol{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = R\vec{u}_\rho}$

- ***la vitesse angulaire et la vitesse linéaire***

-la vitesse angulaire: $\boldsymbol{\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \omega}$

-la vitesse linéaire: $\boldsymbol{\vec{v} = \frac{d(R\vec{u}_\rho)}{dt} = \dot{R}\vec{u}_\rho + R\dot{\vec{u}}_\rho} \Rightarrow \boldsymbol{\|\vec{v}\| = v = R\dot{\theta} = R\omega}$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{\frac{\|d\overrightarrow{OM}\|}{dt} = v = \frac{ds}{dt}}$

- ***L'accélération angulaire et l'accélération linéaire***

L'accélération angulaire : $\boldsymbol{\frac{d\dot{\theta}}{dt} = \ddot{\theta} = \varepsilon}$ **(*pour un mouvement circulaire uniforme*$\boldsymbol{\varepsilon = 0}$)**

L'accélération linéaire : $\boldsymbol{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(R\dot{\theta}\vec{u}_\theta)}{dt} = \dot{R}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + R\dot{\theta}\dot{\vec{u}}_\theta}$

$\boldsymbol{\dot{R} = 0, \ddot{\theta} = 0}$ **et** $\boldsymbol{\dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{u}_\rho \Rightarrow \vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_\rho}$ (mouvement circulaire uniforme) :

L'accélération linéaire est radiale et dirigée vers le centre (elle est centripète)

b. *Mouvement circulaire uniformément varié (MCUV)*

Trajectoire circulaire et accélération angulaire constante $\boldsymbol{\frac{d\dot{\theta}}{dt} = \ddot{\theta} = \varepsilon = Cste}$

Si la vitesse angulaire croit($\dot{\theta} > 0$) ***et Si la vitesse angulaire décroit*** ($\dot{\theta} < 0$).

$$\boldsymbol{\frac{d\dot{\theta}}{dt} = \ddot{\theta} \Rightarrow d\dot{\theta} = \ddot{\theta}dt} \text{ Donc } \boldsymbol{\int_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} d\dot{\theta} = \int_{t_0}^{t} \ddot{\theta}dt = \ddot{\theta}\int_{t_0}^{t} dt}$$

Donc d’une manière générale: $\dot{\theta} - \dot{\theta}_0 = \ddot{\theta}(t - t_0) \Rightarrow \boldsymbol{\dot{\theta}(t) = \ddot{\theta}(t - t_0) + \dot{\theta}_0}$

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \ddot{\theta}(t-t_0) + \dot{\theta}_0 \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} (\ddot{\theta}(t-t_0) + \dot{\theta}_0) dt \Rightarrow \theta(t) = \frac{1}{2}\ddot{\theta}(t-t_0)^2 + \dot{\theta}_0(t-t_0) + \theta_0$$

Expression vectorielle entre la vitesse angulaire et la vitesse linéaire: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \omega\vec{k} \wedge \vec{r} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$

II.8. Mouvement relatifs [7, 8]

II.8.1. Changement de référentiels

Soit le 1er référentiel $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ avec la base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ considérée fixe, qu'on appelle repère absolu. Dans $\mathcal{R}$ on définit :

Le vecteur position :$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$, Le vecteur vitesse absolue : $\vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}$

et Le vecteur accélération absolue : $\vec{a}_a = \vec{a} = \frac{d\vec{v}_a}{dt} = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k}$

Soit le 2ème référentiel $\mathcal{R}'(O', x', y', z')$, de base orthonormée $(\vec{\imath}', \vec{\jmath}', \vec{k}')$, en mouvement par rapport à $\mathcal{R}$, qu'on l'appelle repère relatif. Dans $\mathcal{R}'$on définit :

Le vecteur position: $\overrightarrow{O'M} = x'\vec{\imath}' + y'\vec{\jmath}' + z'\vec{k}'$, Le vecteur vitesse relative : $\vec{v}_r = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \dot{x}'\vec{\imath}' + \dot{y}'\vec{\jmath}' + \dot{z}'\vec{k}'$ et Le vecteur accélération relative : $\vec{a}_r = \frac{d\vec{v}_r}{dt} = \ddot{x}'\vec{\imath}' + \ddot{y}'\vec{\jmath}' + \ddot{z}'\vec{k}'$

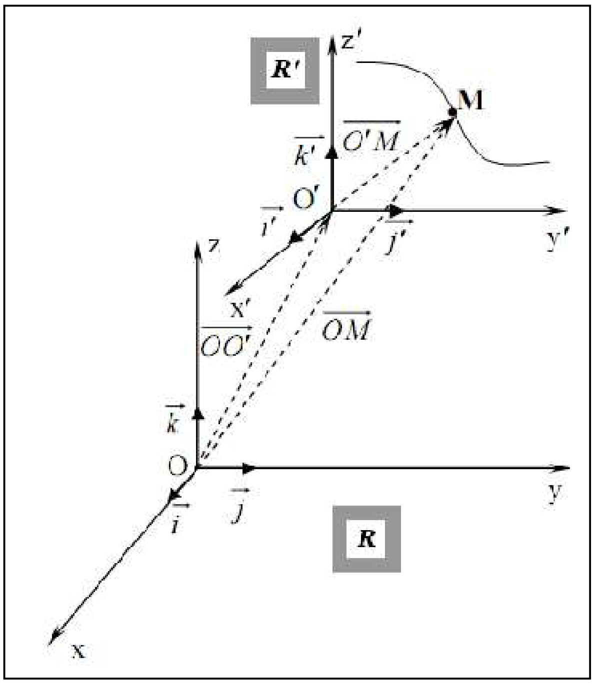
II.8.2. Vecteur position

Dans référentiel absolu (fixe) $\mathcal{R}$: $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Dans référentiel relatif $\mathcal{R}'$:$\overrightarrow{O'M} = x'\vec{\imath}' + y'\vec{\jmath}' + z'\vec{k}'$

Le lien entre les deux vecteurs positions est :

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \Rightarrow x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} = \overrightarrow{OO'} + x'\vec{\imath}' + y'\vec{\jmath}' + z'\vec{k}'$



II.8.3. Vecteur vitesse

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$$

$$\vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d}{dt}\left(x'\vec{\imath}' + y'\vec{\jmath}' + z'\vec{k}'\right)$$

Puisque le repère $\mathcal{R}'$est mobile, alors les vecteurs $(\vec{\imath}', \vec{\jmath}', \vec{k}')$, ne sont pas constants au cours du temps. Leurs dérivées par rapport au temps ne sont pas nulles.

$$\vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \left(x'\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + y'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}\right) + \left(\dot{x}'\vec{\imath}' + \dot{y}'\vec{\jmath}' + \dot{z}'\vec{k}'\right)$$

La base mobile $(\vec{\imath}', \vec{\jmath}', \vec{k}')$, est en translation et en rotation avec une vitesse angulaire $''\vec{\omega}''$ par rapport à la base fixe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Nous avons écrit précédemment : $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \Rightarrow \frac{d\vec{\imath}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{\imath}'$, $\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{\jmath}'$ et $\frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{k}'$

$$\vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \left(x'\left(\vec{\omega} \wedge \vec{i}'\right) + y'\left(\vec{\omega} \wedge \vec{j}'\right) + z'\left(\vec{\omega} \wedge \vec{k}'\right)\right) + \vec{v}_r$$

$$\vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{v}_r;\ \vec{v}_r = \left(\dot{x}'\vec{\imath}' + \dot{y}'\vec{\jmath}' + \dot{z}'\vec{k}'\right);\ \vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

II.8.4. Vecteur accélération

$$\frac{d\vec{v}_a}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \left(x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}\right) + \left(\dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}'\right)\right)$$

$$\vec{a}_a = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{\imath}'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{\jmath}'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}'}{d^2t}\right) + 2\left(\dot{x}'\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + \dot{y}'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + \dot{z}'\frac{d\vec{k}'}{dt}\right) + \left(\ddot{x}'\vec{\imath}' + \ddot{y}'\vec{\jmath}' + \ddot{z}'\vec{k}'\right)$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_c + \vec{a}_r$$

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$$

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$$

$$\vec{a}_a = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)\right) + \left(2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r\right) + \left(\ddot{x}'\vec{i}' + \ddot{y}'\vec{j}' + \ddot{z}'\vec{k}'\right)$$

Cas particuliers :

- Si M est fixe dans $\mathcal{R}'$: $\vec{a}_r = \vec{v}_r = 0 \Rightarrow \vec{a}_a = \vec{a}_e$
- Si les axes de $\mathcal{R}'$ ne tournent pas par rapport à $\mathcal{R}$ (translation) : $\vec{\omega} = 0 \Rightarrow \vec{a}_c = 0, \vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}$
- Si de plus $\mathcal{R}'$ est en translation *uniforme* par rapport à $\mathcal{R}$: $\vec{a}_a = \vec{a}_r$

Donc les accélérations mesurées dans les deux repères sont les mêmes

Série n°2 :Cinématique du Point

Exercice 01 :

Une particule P se déplace le long de l'axe $\overrightarrow{Ox}$ avec une accélération a donnée par :

$a = 6t - 4 \ \ ms^{-2}$

Initialement P est au point $\boldsymbol{x_0 = 20\ m}$ et se déplace à une vitesse $v_0 = 15\ ms^{-1}$ dans **le sens négatif** de $\overrightarrow{Ox}$.

1- Trouver la vitesse et le déplacement de P à un instant t.

2- Déterminer le temps et la position de la particule lorsqu'elle s'arrête.

Exercice 02 :

Un point matériel M est animé d'un mouvement défini par les équations :

$\begin{cases} x = v_1 t \\ y = -ct^2 + v_2 t + y_0 \end{cases}$ Où v_1, v_2, c et y_0 sont des constantes positives.

1. Trouver l'équation de la trajectoire de M.
2. Déterminer les composantes cartésiennes du vecteur vitesse et déduire son module.
3. Déterminer les composantes cartésiennes du vecteur accélération et déduire son module. Quelles sont les phases du mouvement.
4. Déterminer les composantes tangentielle et normale de l'accélération. Déduire le rayon de courbure de la trajectoire.
5. Trouver le temps au sommet S de la trajectoire et établir les coordonnées x_s et y_s de S.

Exercice 03 :

Les coordonnées cartésiennes, dans le plan oxy, d'un point matériel M à un instant donné sont $(1, \sqrt{3})$.

1. Donner les coordonnées polaires de M
2. Donner le vecteur position de M dans la base polaire .
3. Déterminer les coordonnées cylindriques puis sphériques du point P de coordonnées cartésiennes $(2, 2\sqrt{3}, 4)$.
4. Les coordonnées cylindriques d'un point matériel H à un instant donné sont $\left(3, \frac{\pi}{4}, 4\right)$.

a. Donner les coordonnées sphériques puis cartésiennes de H.

b. Donner son vecteur position dans les bases cylindrique, sphérique puis cartésienne.

Exercice 04 :

Un point matériel M décrit, dans un repère $\mathcal{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, une trajectoire définie par les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = b\sin(\omega t) \\ y = b(1-\cos(\omega t)) \end{cases} \text{où } b \text{ et } \omega \text{ sont des constantes positives}$$

1. Donner l'équation de la trajectoire.

2. Donner les coordonnées polaires ρ et θ de M.

3. Donner les composantes cartésiennes, polaires et intrinsèques des vecteurs vitesse et accélération de et calculer leurs modules. Conclusion.

Exercice 05 :

Une voiture de course se déplace sur **une piste circulaire** de rayon $\boldsymbol{R}$. La voiture part du repos et sa vitesse augmente linéairement avec le temps $v = \beta t$ (β *est constante*).

1. Trouver L'abscisse curviligne S, sachant que à$t_0 = 0s$, l'abscisse initiale est $S_0 = 0$.
2. Calculer les composantes tangentielle et normale de l'accélération.
3. Trouver l'angle entre les vecteurs vitesse et accélération à un instant t.

Exercice 06 :

Un point matériel se déplace sur une courbe(C) tel que sa position est donnée à chaque instant par :

$$\vec{r}(t) = 3\cos(t)\vec{\imath} + 3\sin(t)\vec{\jmath} + (4t-2)\vec{k}$$

1. Trouver les expressions des vecteurs vitesse et accélération. En déduire leurs modules.

2. Trouver les expressions des vecteurs unitaires tangentiel $\vec{u}_t$ et normal $\vec{u}_n$ de la base intrinsèque. En déduire le rayon de courbure de la courbe(C) .

3. Ecrire le vecteur position $\vec{r}(t)$ dans la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ associée aux coordonnées cylindriques (ρ, θ, z).

4. Déduire les expressions des vecteurs vitesse et accélération dans la base $((\vec{u}_\rho,\vec{u}_\theta,\vec{k})$

Exercice 07 :

Un avion atteint une vitesse de $500\ km/h$ par rapport au vent. Le pilote établit une destination de $800 km$versle nord, mais découvre qu'il faut diriger l'avion vers le nord-est avec un angle de $20°$ pout y voler directement. L'avion arrive à sa destination après $2h$.

1. Calculer la vitesse de l'avion par rapport au sol ?
2. Calculer la vitesse du vent ainsi que sa direction ?

Exercice 08 :

Un nageur plonge d'un point situé sur la rive d'un fleuve et veut atteindre l'autre rive. Pour cela, il nage perpendiculairement au courant avec une vitesse $\overrightarrow{v_1}$. Sa vitesse par rapport à la terre est $\overrightarrow{v_3}$ et la vitesse du courant est $\overrightarrow{v_2}$. On demande :

1. Identifier chacune des vitesses $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ aux vitesses, absolue $\overrightarrow{v_a}$, relative $\overrightarrow{v_r}$ et d'entrainement $\overrightarrow{v_e}$.
2. Calculer la vitesse du nageur par rapport à la terre (module et direction). Faites un schéma.
3. Suivant quelle direction le nageur doit-il s'orienté pour qu'il se déplace en ligne droite et perpendiculaire à la rive à la vitesse constante $\overrightarrow{v_3}$. Faites un schéma.
4. Quelle est alors la vitesse du nageur par rapport à la terre.

$$\boldsymbol{A.N.\, v_1 = 4m/s\ et\ \ v_2 = 3m/s}$$

Corrigé type : Série n°2

Exercice 01 :

1. La vitesse et le déplacement de P à un instant t

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = adt \Rightarrow v = \int adt \Rightarrow \ v = \int (6t - 4)dt$$

$$\Rightarrow \ v = \ 3t^2 - 4t + C\ (m/s)$$

à$t_0 = 0s\ et v_0(t_0 = 0) = -15\ m/s$ (la particule se déplace dans **le sens négatif** de x

$C = \ -15m/s,$

donc : $v = 3t^2 - 4t - 15m/s$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow x = \int (3t^2 - 4t - 15)dt = t^3 - 2t^2 - 15t + D$$

a $t_0 = 0s\ et\ x_0 = 20m$

$$20 = 0^3 - 2.0^2 - 15.0 + D \Rightarrow D = 20m$$

donc:$x = t^3 - 2t^2 - 15t + 20\ m$

2. Le temps et la position de la particule au moment de l'arrêt

Arrêt$\Rightarrow v = 0 \Rightarrow 3t^2 - 4t - 15 = 0 \Rightarrow (t-3)(3t+5) = 0$

$$\Rightarrow t_1 = 3s\ \ et\ \ t_2 = -\frac{5}{3}\ (refusé)$$

$$\Rightarrow x = 3^3 + 2 \times 3^2 + 15 \times 3 + 20 = 16\ m$$

Exercice 02 :

$$\begin{cases} x = v_1 t \\ y = -ct^2 + v_2 t + y_0 \end{cases}$$

1. L'équation de la trajectoire

$$x = v_1 t \Rightarrow t = \frac{x}{v_1} \Rightarrow y = -\frac{c}{v_1^2}x^2 + \frac{v_2}{v_1}x + y_0$$

2.

- Les composantes cartésiennes du vecteur vitesse.

$$\vec{v} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} = v_1\vec{\imath} + (-2ct + v_2)\vec{\jmath}$$

- Le module du vecteur vitesse

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_1^2 + (-2ct + v_2)^2} = \sqrt{4c^2t^2 - 4cv_2t + (v_1^2 + v_2^2)}$$

3.

- Les composantes cartésiennes du vecteur accélération

$$\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} = \frac{dv_x}{dt}\vec{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\vec{\jmath} = -2c\vec{\jmath}$$

- Le module du vecteur accélération

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 2c$$

La nature de mouvement

$$\vec{a}.\vec{v} = 4c^2t - 2cv_2$$

Mouvement uniformément accéléré$\Rightarrow \vec{a}.\vec{v} \succ 0 \Rightarrow t \succ \frac{v_2}{2c}$

Mouvement uniformément décéléré$\Rightarrow \vec{a}.\vec{v} \prec 0 \Rightarrow t \prec \frac{v_2}{2c}$

4.

a. Accélération tangentielle :

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{2c(2ct - v_2)}{\sqrt{4c^2t^2 - 4cv_2t + (v_1^2 + v_2^2)}}$$

b. Accélération normale :

$$a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} = \frac{2cv_1}{\sqrt{4c^2t^2 - 4cv_2t + (v_1^2 + v_2^2)}}$$

c. Rayon de courbure :

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} \Leftrightarrow \rho = \frac{v^2}{a_N} = \frac{(4c^2t^2 - 4cv_2t + (v_1^2 + v_2^2))^{3/2}}{2cv_1}$$

5. Le temps Au sommet S de la trajectoire le vecteur vitesse est suivant ox

$v_y = 0 \Leftrightarrow -2ct_s + v_2 = 0 \Leftrightarrow t_s = \frac{v_2}{2c}$

Ce qui donne les coordonnéesx_s et $y_s$de S.

$\Rightarrow x_s = v_1t = \frac{v_1v_2}{2c}ety_s = -ct^2 + v_2t + y_0 = \frac{v_2^2}{4c} + y_0$

$$\Rightarrow S\begin{pmatrix} \frac{v_1v_2}{2c} \\ \frac{v_2^2}{4c} + y_0 \end{pmatrix}$$

Exercice 03 :

1. Les coordonnées polaires de M

On a : $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$

$\Rightarrow \ \rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+3} = 2 \Rightarrow \boldsymbol{\rho = \sqrt{1+3} = 2}$

et $tg(\theta) = \frac{y}{x} = \sqrt{3} \Rightarrow \boldsymbol{\theta = \pi/3}$

donc, $M(2, \frac{\pi}{3})$

2. Le vecteur position de M dans la base polaire .

$$\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u_\rho} = 2\overrightarrow{u_\rho}$$

3. Les coordonnées cylindriques puis sphériques du point P de coordonnées cartésiennes (2, $2\sqrt{3}$, 4).

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\theta = \dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{4 + 12} \\ tg\theta = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} \\ z = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \rho = 4 \\ \theta = \dfrac{\pi}{3} \\ z = 4 \end{cases}}$$

Les coordonnées cylindriques de M sont donc : $(4, \frac{\pi}{3}, 4)$.

Pour déterminer les coordonnées sphériques, il faut déterminer la longueur $r = \|\overrightarrow{OM}\|$ et une mesure de l'angle $(\vec{k}, \overrightarrow{OM})$.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\rho^2 + z^2} = 4\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 4\sqrt{2} \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x} \\ \cos\theta = \dfrac{z}{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 4\sqrt{2} \\ tg\varphi = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} \\ \cos\theta = \dfrac{4}{4\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \rho = 4 \\ \varphi = \dfrac{\pi}{3} \\ \theta = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}}$$

Les coordonnées sphériques de M sont donc : $(4\sqrt{2}, \pi/3, \pi/4)$.

4. Les coordonnées sphériques puis cartésiennes de H

a. Cordonnées sphérique du point H :

$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} = 5$, $\varphi = 45°$ et$\theta = arcos\frac{z}{r} = 36.38° H(4, 45°, 36{,}38°)$.

Cordonnées cartésiennes : $\begin{cases} x = \rho cos\varphi \\ y = \rho sin\varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3cos\frac{\pi}{4} \\ y = 3sin\frac{\pi}{4} \\ z = 4 \end{cases}$

Les coordonnées cartésiennes de$H$ sont donc :$H\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}, 4\right)$

b. Vecteur position dans les bases sphérique, cylindrique et cartésienne.

- Dans la base sphérique : $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r} = 5\overrightarrow{u_r}$.
- Dans la base cylindrique : $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u_\rho} + z\vec{k} = 3\overrightarrow{u_\rho} + 4\vec{k}$.
- Dans la base cartésienne :$\overrightarrow{OM} = \frac{3}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{2}}\vec{j} + 4\vec{k}$.

Exercice 04 :

1. L'équation de la trajectoire.

$$\begin{cases} x = bsin(\omega t) \\ y = b(1 - cos(\omega t)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = bsin(\omega t) & (1) \\ y - b = -bcos(\omega t) & (2) \end{cases}$$

$\Rightarrow (1)^2 + (2)^2 = x^2 + (y - b)^2 = b^2$

La trajectoire est un cercle de centre **C (0, b)** et de rayon **b**.

2. Les coordonnées polaires ρ et θ de M.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(bsin(\omega t)\right)^2 + (b(1 - cos(\omega t))^2}$$

$$\rho = b\sqrt{sin^2(\omega t) + 1 - 2cos(\omega t) + cos^2(\omega t)}$$

$$\rho = b\sqrt{2 - 2cos(\omega t)}$$

Utilisant la relation : $\cos(2\alpha) = cos^2(\alpha) - sin^2(\alpha)$

Après simplification :

$$\rho = 2bsin\left(\frac{\omega t}{2}\right)$$

Sachant que : $tg\varphi = \frac{y}{x} = \frac{b(1-cos(\omega t))}{bsin(\omega t)}$,

Utilisant les relations : $\cos(2\alpha) = cos^2(\alpha) - sin^2(\alpha) et \sin(2\alpha) = 2cos(\alpha)sin(\alpha)$,

On trouve :

$$tg\theta = tg\left(\frac{\omega t}{2}\right) \Rightarrow \theta = \frac{\omega t}{2}$$

3. Les composantes cartésiennes, polaires et intrinsèques des vecteurs vitesse et accélération de M

a. En cordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{OM} = bsin(\omega t)\vec{\imath} + b(1 - \cos(\omega t))\vec{\jmath}$$

$$\vec{v} = b\omega\cos(\omega t)\,\vec{\imath} + b\omega\sin(\omega t)\vec{\jmath}$$

$$\vec{a} = -b\omega^2\sin(\omega t)\,\vec{\imath} + b\omega^2\cos(\omega t)\vec{\jmath}$$

b. En cordonnées polaire

$$\overrightarrow{OM} = 2bsin\left(\frac{\omega t}{2}\right)\overrightarrow{u_\rho}$$

$$\theta = \frac{\omega t}{2}$$

Avec : $\dot{\rho} = b\omega\cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)$, $\ddot{\rho} = -\frac{b\omega^2}{2}\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)$,$\dot{\theta} = \frac{\omega}{2}et\ddot{\theta} = 0$

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta = b\omega\cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)\vec{u}_\rho + \; b\omega\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_\rho + \left(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)\vec{u}_\theta = b\omega^2\left(-\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)\vec{u}_\rho + \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)\vec{u}_\theta\right)$$

c. Cordonnées intrinsèque :

- Calcul de l'abscisse curviligne, S :

  Puisque la trajectoire est circulaire on peut écrire

  - $s = R\theta \Leftrightarrow s = b\omega t$
  - $v'' = \frac{ds}{dt} = b\omega \Rightarrow \vec{v}'' = b\omega\vec{u}_T$
  - $\vec{a}'' = a_T\vec{u}_T + a_N\vec{u}_N$

$$\begin{cases} a_T = \frac{dv}{dt} = 0 \text{ Mouvement circulaire uniforme} \\ a_N = \frac{v^2}{R} = b\omega^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{a}'' = \; b\omega^2\vec{u}_N$$

Calcul des modules :

$v = \; b\omega \; m/s$et$a = b\omega^2 \; m/s^2$

$v' = b\omega \; m/s$et$a' = b\omega^2 \; m/s^2$

$v'' = \; b\omega \; m/s$et$a'' = b\omega^2 \; m/s^2$

La valeur de la vitesse et de l'accélération ne dépend du choix de système de cordonnées.

Exercice 05 :

1. L'abscisse curviligne S, sachant que à $t_0 = 0s$; $S_0 = 0$.

$$ds = \frac{dv}{dt} \Rightarrow ds = vdt \Rightarrow \int_0^s ds = \int_0^t vdt = \frac{1}{2}\beta t^2\Big|_0^t$$

$$\Rightarrow s = \frac{1}{2}\beta t^2$$

2. Le mouvement et circulaire (curviligne), alors le vecteur vitesse s'exprime en cordonnées intrinsèque :$\vec{v} = \beta t \vec{u}_T$

L'accélération est :

$$\vec{a} = a_T\vec{u}_T + a_N\vec{u}_N = \beta\vec{u}_T + \frac{\beta^2 t^2}{R}\vec{u}_N$$

3. L'angle entre $\vec{v}$ et $\vec{a}$ est donné par :

$$cos\alpha = \frac{\vec{v}.\vec{a}}{\|\vec{v}\|\|\vec{a}\|} = \frac{\beta^2 t}{\beta t\left(\frac{\beta^4 t^4}{R^2} + \beta^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{R}{(R^2 + \beta^2 t^4)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow \alpha = cos^{-1}\left(\frac{R}{(R^2 + \beta^2 t^4)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

Exercice 06 :

On donne :$\vec{r}(t) = 3\,cos(t)\,\vec{\imath} + 3\,sin(t)\,\vec{\jmath} + (4t - 2)\vec{k}$

1.

- L'expressions du vecteurs vitesse.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -3\sin(t)\,\vec{\imath} + 3\cos(t)\vec{\jmath} + 4\vec{k}$$

- L'expressions du vecteurs vitesse

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -3\cos(t)\,\vec{\imath} - 3\sin(t)\vec{\jmath}$$

- Modules des vecteurs vitesse et accélération
  Vitesse : $\|\vec{v}\| = 5\; m/s$
  Accélération : $\|\vec{a}\| = 3\; m/s^2$

2. Les expressions des vecteurs unitaires tangentiel $\vec{u}_T$ et normal$\vec{u}_N$ de la base intrinsèque.

- Vecteur unitaire tangentiel $\vec{u}_T$

$\overrightarrow{u_T} = \frac{\vec{v}}{v} = -\frac{3}{5}\sin(t)\,\vec{\imath} + \frac{3}{5}\cos(t)\vec{\jmath} + \frac{4}{5}\vec{k}$.

- Vecteur unitaire normal$\vec{u}_N$

$$\vec{a} = a_T\vec{u}_T + a_N\vec{u}_N$$

or$a_T = \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow a_N = a = 3\frac{m}{s^2}$

$\Rightarrow \vec{u}_N = \frac{\vec{a}}{a_N} = -\cos(t)\,\vec{\imath} - \sin(t)\vec{\jmath}$;

- Le rayon de courbure de la courbe(C) :

$$R_N = \frac{v^2}{a_N} = \frac{25}{3}m$$

3. Le vecteur position$\vec{\boldsymbol{r}}$(t) dans la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ associée aux coordonnées cylindriques (ρ, θ, z).

$$\vec{r} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{k} \quad \Rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3\cos(\mathrm{t}))^2 + (3\sin(\mathrm{t}))^2} = 3$$

et $tg\theta = \frac{y}{x} = tgt \rightarrow \theta = t.$

$$\vec{r} = 3\vec{u}_\rho + (4t - 2)\vec{k}$$

4. Les expressions des vecteurs vitesse et accélération dans la base $((\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{k})$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\left(3\overrightarrow{u_\rho} + (4t - 2)\vec{k}\right)}{dt} = 3\vec{u}_\theta + 4\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\left(3\vec{u}_\theta + 4\vec{k}\right)}{dt} = -3\vec{u}_\rho + 4\vec{k}$$

Exercice 07 :

1. La vitesse de l'avion par rapport au sol :

Repère absolu : la terre

Repère relatif : le vent

Le mobile : l'avion

$\overrightarrow{v_a}$: la vitesse de l'avion par rapport au sol.

$\overrightarrow{v_e}$: la vitesse du vent.

$\overrightarrow{v_r}$: la vitesse de l'avion par rapport au vent.

L'avion a traversé la distance de 800 km pendent 2 h,

$v = \frac{d}{t} = 400km/h$, $v_a = v = 400km/h$

2. La vitesse du vent ainsi que sa direction

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \Rightarrow \vec{v}_e = \vec{v}_a - \vec{v}_r$$

$$v_e = \sqrt{v_a^2 + v_2^2 - 2\vec{v}_a.\vec{v}_r} = \sqrt{v_a^2 + v_r^2 - 2v_a.v_r.cos(20°)} \approx 185km/h$$

$$\frac{\sin(\theta)}{v_r} = \frac{\sin(20°)}{v_e} \Rightarrow \sin(\theta) = 0.92 \Rightarrow \theta \approx 68°$$

Donc, la direction du vent par rapport à l'ouest est :

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta = 22°\text{vers le sud.}$$

Exercice 08 :

Un nageur plonge d'un point situé sur la rive d'un fleuve et veut atteindre l'autre rive. Pour cela, il nage perpendiculairement au courant avec une vitesse $\overrightarrow{v_1}$. Sa vitesse par rapport à la terre est $\overrightarrow{v_3}$ et la vitesse du courant est $\overrightarrow{v_2}$. On demande :

1. Identifier chacune des vitesses $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ aux vitesses, absolue $\overrightarrow{v_a}$, relative $\overrightarrow{v_r}$ et d'entrainement $\overrightarrow{v_e}$.

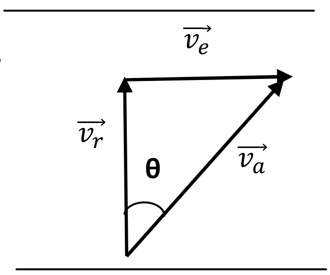
   Repère absolu : la rive

   Repère relatif : le courant

   Le mobile : le nageur

   - ✓ La vitesse du nageur par rapport au courant$\vec{v}_1$, est la vitesse relative $\vec{v}_r$
   - ✓ La vitesse du nageur par rapport à la rive $\vec{v}_3$, est la vitesse absolu $\vec{v}_a$
   - ✓ La vitesse du courant par rapport à la rive $\vec{v}_2$, la vitesse d'entrainement$\vec{v}_e$

2. La vitesse du nageur par rapport à la terre (module et direction). Faites un schéma.

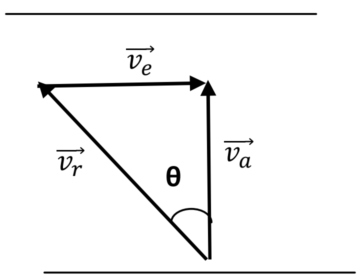


$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \Rightarrow \vec{v}_3 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$$

$$v_3 = \sqrt{v_2^2 + v_1^2} = 5m/s$$

$$tg\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \theta = 37°$$

3. L'orientation du nageur pour qu'il se déplace en ligne droite et perpendiculaire à la rive à la vitesse constante $\overrightarrow{v_3}$.



$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_e} + \overrightarrow{v_r}$$

D'après le schéma on a $v_3 = \sqrt{v_1^2 - v_2^2} = 2.64\ m/s$

$$sin\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \theta = 39$$

Exercices Supplémentaires

Exercice 01 :

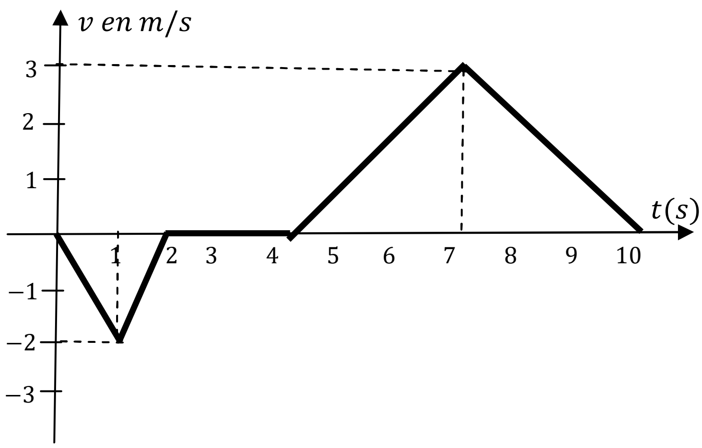
Le diagramme des vitesses d'un mobile, animé d'un mouvement rectiligne, est donné par la figure ci-contre. Sachant qu'à $t = 0\ (s), v(0) = 0 (m/s)$ et $x(0) = 0\ m$:

1. Dans l'intervalle de temps $[0\ (s), 10\ (s)]$, tracer le diagramme des accélérations du mobile.

2. Exprimer les lois des accélérations, des vitesses et des abscisses dans l'intervalle de temps $[0\ (s), 10\ (s)]$.

3. Evaluer la distance parcourue par le mobile entre les instants $t = 0\ s$ et $t = 10\ s$.

4. Décrire le mouvement du mobile dans l'intervalle de temps$[0\ (s), 10\ (s)]$.



Rep.

$t(s)$	0	1	2	4	5	6	7	8	9	10
$x(m)$	0	−1	−2	−2	−1.5	0	2.5	5	6.5	7

$$v(t) = \begin{cases} -2t & si \quad 0 \le t \le 1 \\ 2t - 4 & si \quad 1 \le t \le 2 \\ 0 & si \quad 2 \le t \le 4 \\ t - 4 & si \quad 4 \le t \le 7 \\ -t + 10 & si \quad 7 \le t \le 10 \end{cases} \qquad x(t) = \begin{cases} -t^2 & si \quad 0 \le t \le 1 \\ t^2 - 4t + 2 & si \quad 1 \le t \le 2 \\ -2 & si \quad 2 \le t \le 4 \\ 0.5t^2 - 4t + 6 & si \quad 4 \le t \le 7 \\ -0.5t^2 + 10t - 43 & si \quad 7 \le t \le 10 \end{cases}$$

Exercice 02 :

Un conducteur conduit la voiture pendant la nuit sur une route droite avec une vitesse constante $v_s = 20$ m/ s. Soudain, il aperçoit une bicyclette qui surgisse devant lui et qui déplace avec une vitesse constante $v_b = 5$ m/ s dans la même direction. Le conducteur appuis sur la pédale du frein quand il est à une distance $D = 50$ mètres de la bicyclette. L'accélération de la voiture après freinage est $a = -5$ m /s2

1. Ecrire les équations horaires de la voiture et du vélo.

2. Est-ce que le conducteur peut éviter le vélo ?

3. Si le vélo se déplace dans sens opposé. Refaire la question 2.

Rep.

Choisir l'origine de temps et de distance l'instant où le conducteur à appuyer sur la pédale de frein.

Pour la voiture : $\boldsymbol{x = -\frac{5}{2}t^2 + 20t}$ et $\boldsymbol{v = -5t + 20}$

Pour le vélo : $\boldsymbol{x' = 2t + 50}$.

Chercher le temps $\mathbf{t_0}$ nécessaire pour l'arrêt de la voiture.

Résoudre l'équation $\boldsymbol{x - x'}$ ensuite

Si $\boldsymbol{t > t_0}$ pas d'acide . Si $t < t_0$ l'accident va avoir lieu.

Exercice 03 :

Dans un repère R(O,$\vec{i}$,$\vec{j}$), le vecteur accélération d'un mobile M est $\vec{a} = -5\vec{j}$. A l'instant t=0, $\overrightarrow{OM} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{v_0} = 5\vec{i} + 10\vec{j}$

1. Trouver les expressions des vecteurs de vitesse et de position à l'instant **t** quelconque.

2. Quelle est l'équation de la trajectoire.

3. Déterminer les accélérations tangentielle a_T et normal a_N et déduire le rayon de courbure de la trajectoire. A quel instant la composante tangentielle de l'accélération est-elle nulle.

Exercice 04 :

Dans un plan oxy, une particule M est repérée à tout instant t par ses coordonnées polaires (ρ, θ) telles que : $\begin{cases} \rho(t) = \mathrm{bc} \quad (\omega t) \\ \theta(t) = \omega t \end{cases}$ où b et ω sont des constantes positives.

1. Dans la base locale $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ associée aux coordonnées polaires, déterminer les vecteurs position, vitesse et accélération de la particule M.

2. Toujours dans la même base, déterminer puis représenter les vecteurs position, vitesse et accélération aux instants $t_1 = 0s$ et $t_2 = \frac{\pi}{4\omega}s$.

Rep.

$\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u_\rho} = \mathrm{b}\cos(\omega t)\overrightarrow{u_\rho}$, $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = b\omega\left(-\sin(\omega t)\overrightarrow{u_\rho} + \cos(\omega t)\overrightarrow{u_\theta}\right)$ et $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -2b\omega^2\left(\cos(\omega t)\overrightarrow{u_\rho} + \sin(\omega t)\overrightarrow{u_\theta}\right)$

Exercice 05 :

Un point M se déplace sur une spirale logarithmique d'équations polaires paramétriques :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\rho = \rho_0 e^{\theta}} \\ \boldsymbol{\theta = \omega t} \end{cases} \text{avec } \boldsymbol{\omega} \text{ constant.}$$

1. Dessiner schématiquement une spirale logarithmique. Représenter les axes des coordonnées polaires et le repère de Frenet en un point M quelconque de cette trajectoire.
2. Calculer les composantes des vecteurs vitesse et accélération de M en coordonnées polaires. En déduire les normes de ces vecteurs. Que vaut l'angle $\boldsymbol{\alpha}$ que fait la vitesse avec le vecteur unitaire $\vec{u}_\rho$?
3. Calculer le rayon de courbure de la trajectoire.
4. Le point M décrit la même spirale $\boldsymbol{\rho = \rho_0 e^\theta}$mais cette fois-ci c'est la vitesse linéaire $v$qui est constante. Comment varie alors la vitesse angulaire au cours du temps ?

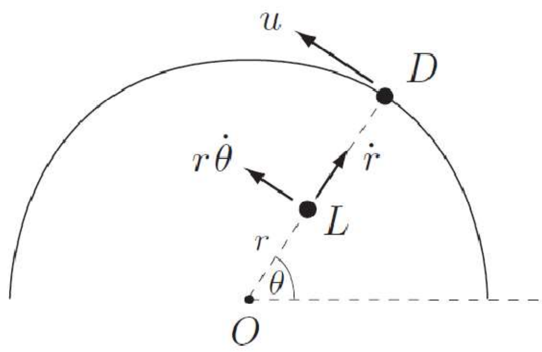
Rep.

2/ $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{O}}{dt} = \rho\omega(\overrightarrow{u_\rho} + \overrightarrow{u_\theta}), \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\rho\omega^2\overrightarrow{u_\theta} ,\alpha = \pi/4,$

3/ $R = \sqrt{2\rho}4. et4/\theta = ln\left(\frac{v}{\rho_0\sqrt{2}}t\right) \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{v}{\rho_0\sqrt{2}}t\left(\frac{v}{\rho_0\sqrt{2}}t + 1\right)^{-1}$

Exercice 06 :

Un animal malchanceux(D) est jeté dans une piste circulaire de rayon a contenant un lion (L). Initialement, le lion est au centre O de la piste tandis que l'animal est au niveau du périmètre.



La stratégie de l'animal est de courir avec sa vitesse maximale u autour du périmètre. Le lion réagit en tournant à sa vitesse maximale U de telle sorte qu'il reste sur le (déplacement) rayon OD. Montrer que r, la distance de L à partir de O, vérifie l'équation différentielle :

$$\dot{r}^2 = \frac{u^2}{a^2}\left(\frac{U^2a^2}{u^2} - r^2\right)$$

1. Trouver R en fonction de t.
2. Si U> u, montrer que l'animal sera pris, et trouver après combien de temps cela va se passer.
3. Montrer que le chemin emprunté par le lion est un cercle. Pour le cas particulier dans lequel U = u, dessiner le chemin emprunté par le lion et trouver le point de capture.

Exercice 07 :

Un jour sans vent, la pluie vue du wagon d'un train roulant à 72 Km/h parait inclinée de 45° par rapport à la verticale. Quelle est la vitesse de chute des gouttes de pluie par rapport au sol ? Faites un schéma des vitesses.

Exercice 08 :

On laisse tomber d'un immeuble de hauteur h une bille sans vitesse initiale. La chute de celle-ci s'effectue à la vertical selon un mouvement uniformément accéléré d'accélération $\vec{g}$

1. Quelle est la trajectoire de la bille dans un référentiel lié à une voiture se déplaçant suivant un mouvement rectiligne et uniforme $\vec{v}$ et passant à la verticale de chute au moment du lâcher.
2. Quelle est la trajectoire de la bille dans le même référentiel si on admet que la voiture entame au moment du lâcher et à partir de la vertical de la chute un mouvement uniformément accéléré d'accélération $\vec{a_e}$.

CHAPITRE III

DYNAMIQUE DU POINT MATÉRIEL

III.1. Généralités [9, 10]

La cinématique a pour objet l'étude des mouvements des corps en fonction du temps, sans tenir compte des causes qui les provoquent. La dynamique est la science qui étudie (ou détermine) les causes des mouvements de ces corps.

III.2. Principe d'inertie (1ère loi de Newton)

III.2.1. Particule libre

Une particule libre est celle qui n'est soumise à aucune interaction. Une telle particule n'existe pas réellement car elle doit être seule dans l'univers ! (Particule isolée). Néanmoins,on peut supposer qu'une particule suffisamment éloignée des autres est isolée.

Si la résultante des interactions appliquées sur une particule est nulle on dit que celle-ci est pseudo isolée, elle réagit comme une particule libre.

III.2.2. Enoncé du principe d'inertie

C'est Galilée qui a le premier suggéré ce principe. Il constitue la première loi deNewton et qui s'énonce comme suit :

« Toute particule libre conserve son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme en l'absence de forces agissant sur elle »

Cette 1ère loi peut aussi s'énoncer :

Si aucune force n'agit sur un objet ou si la force résultante est nulle,

- Un objet au repos reste au repos ;
- Un objet en mouvement continue à se déplacer à vitesse constante.

III.2.3. Référentiels d'inertie ou galiléens

On appelle référentiel d'inertie, un système de référence (ou repère) dans lequel lapremière loi de Newton est applicable. D'après cette définition, un référentiel d'inertien'existe pas, on ne dispose que de référentiels approximatifs.

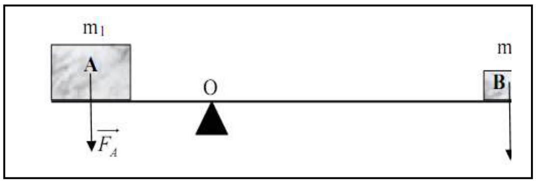
Remarque

- *Tout système de coordonnées qui se déplace à vitesse constante par rapport à unréférentiel d'inertie, est aussi un référentiel d'inertie.*
- *Les vitesses et les accélérations des corps, mesurées dans les référentiels galiléens, sont dites absolues et celles mesurées dans les référentiels non galiléens sont dites relatives.*

III.2.4. Masse et centre de masse

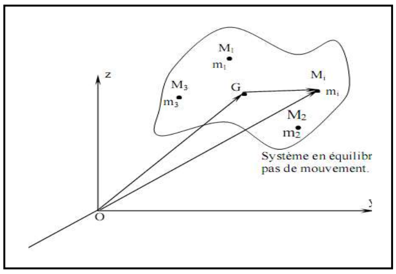
Masse: la masse d'un système correspond à la quantité de matière qu'il renferme. Elle estinvariable dans la mécanique newtonienne. Elle caractérise l'inertie d'un corps soit sarésistance à tout changement du vecteur vitesse.

Centre de masse ou Barycentre: appelé aussi centre d'inertie ou centre de gravité. Il a été défini au début par le physicien Archimède. Pour avoir la relation donnant le point centre d'inertie d'un système quelconque, étudions l'équilibre du système présenté dans la figure suivante :



Pour que le système soit enéquilibre il faut que la somme desmoments des forces par rapport à O soit nulle

$\sum_{i=1}^{2} \vec{\mathcal{M}}\left(\vec{F}_i\right)_{/o} = \vec{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$



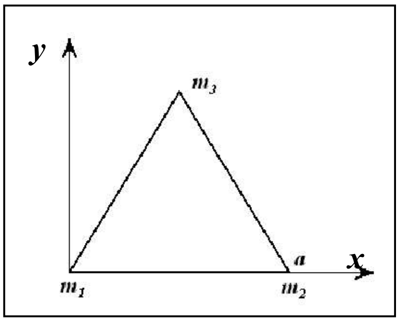
D'autre part, $\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM_i} = \overrightarrow{OM_i}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OM_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OM_i}}{M}$$

$\overrightarrow{OG}$: vecteur position, $\overrightarrow{OM_i}$: vecteur position pour la i^{eme} particule de masse "m_i".

M: représente la masse totale du système en équilibre.

Exemple: Soient trois masses m_1, $m_2 = 2\ m_1$ et $m_3 = 3\ m_1$ posées aux sommés d'un triangle équilatéral decotéa (voire figure ci-dessous).



Déterminer la position du centre de gravité du système.

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OM_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \Rightarrow \begin{cases} x_g = \dfrac{\sum_{i=1}^{3} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{3} m_i} = \dfrac{7}{12} a \\ y_g = \dfrac{\sum_{i=1}^{3} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{3} m_i} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} a \end{cases}$$

III.3. Quantité de mouvement

La quantité de mouvement d'un point matériel de masse m et se déplace à la vitesse$\vec{v}$ est défini par le vecteur $\vec{P}$ donné par : $\vec{P} = m\vec{v}$

Le principe d'inertie peut s'énoncer alors de la façon suivante :

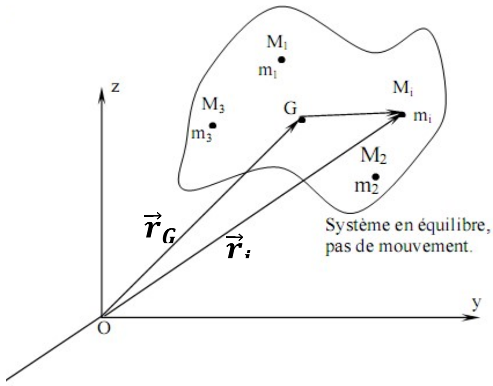
« *Dans un repère galiléen, une particule libre, se déplace avec une quantité de mouvement constante.* »

III.3.1. Quantité de mouvement d'un système de particules

Soit un système isolé constitué de ″n`` particules de vitesses respectives ″$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n$``.

On définit le centre de masse″ G ″de vecteur position ″$\overrightarrow{OG} = \vec{r}_G$``tels que :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OM_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OM_i}}{M}$$



$\vec{r}_G = \overrightarrow{OG}$: vecteur position, $\vec{r}_i = \overrightarrow{OM_i}$: vecteur position pourlai^{eme} particule de masse "m_i". et M : représente la masse totale du système enéquilibre.

$$\vec{r}_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{M} \Rightarrow \frac{d\vec{r}_G}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{M} \Rightarrow \quad M\vec{v}_G = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i$$

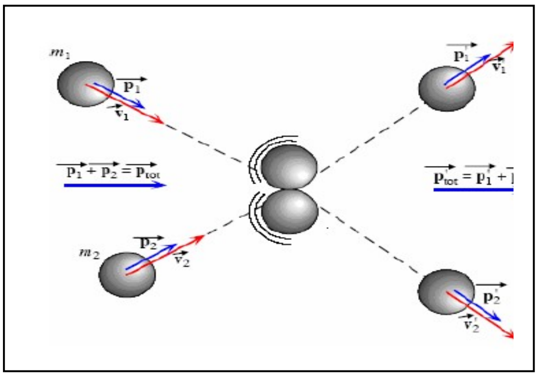
$$\Rightarrow \vec{P} = M\vec{v}_G = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \cdots + \vec{P}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i$$

Le vecteur quantité de mouvement d'un système matériel est égal au vecteur quantité de mouvement d'un point matériel fictif confondu avec le centre d'inertie du système où serait concentrée la masse totale du système.

III.3.2. Principe de conservation de la quantité de mouvement

Soient deux particules de masse m_1 et m_2 interagissant l'une avec l'autre.

L'expérience montre que pour un système isolé la relation suivante est toujours valable :



$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \vec{P}' = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2$$

$$\Rightarrow m_1\vec{v}'_1 - m_1\vec{v}_1 = m_2\vec{v}_2 - m_2\vec{v}'_2$$

$$\Rightarrow m_1(\vec{v}'_1 - \vec{v}_1) = -m_2(\vec{v}'_2 - \vec{v}_2)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{m_1\Delta\vec{v}_1 = -m_2\Delta\vec{v}_2}$$

$\vec{v}_1$ ***et*** $\vec{v}_2$**:** les vitesses des masses m_1 et $m_2$avant l'interaction.

$\vec{v}'_1$***et*** $\vec{v}'_2$**:** les vitesses des masses m_1 et m_2 après l'interaction.

Donc nous pouvons aussi écrire : $\Delta\vec{P}_1 = -\Delta\vec{P}_2$

$$\textbf{avec} \begin{cases} \Delta\vec{P}_1 = m_1(\vec{v}'_1 - \vec{v}_1) = m_1\Delta\vec{v}_1 \\ \Delta\vec{P}_2 = m_2(\vec{v}'_2 - \vec{v}_2) = m_2\Delta\vec{v}_2 \end{cases}$$

Ce résultat indique que, la quantité de mouvement perdue par une des particules en interaction est égale à celle gagnée par l'autre particule.

$$\Delta\vec{P}_1 = -\Delta\vec{P}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{P}'_1 - \vec{P}_1 = -(\vec{P}'_2 - \vec{P}_2) \Rightarrow \vec{P}_{tot} = \vec{P}'_{tot}$$

$$\vec{P}_{tot}(Avant\ l'interaction) = \vec{P}'_{tot}(Après\ l'interaction) = constante$$

La quantité de mouvement totale d'un système isolé de deux particules reste constante.Sous la forme générale le principe de la conservation de la quantité du mouvement, s'énonce ainsi : la quantité de mouvement totale d'un système isolé de plusieurs particules est constante.

$$\vec{P}_{tot} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 + \cdots + \vec{P}_n = constante$$

Remarque: *le principe de conservation de la quantité de mouvement ne s'applique qu à un système isolé.*

III.4. La notion de force et les lois de Newton

La force est une grandeur physique qui caractérise à chaque instant l'action des autres particules sur la particule considérée. Cette grandeur doit nécessairement dépendre de la variation de la quantité de mouvement.

III.4.1. 1ere loi de Newton

Particule libre $\Leftrightarrow \vec{P} = constante \Leftrightarrow \vec{P} = \vec{P}' \Leftrightarrow \Delta\vec{P} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_i^n \vec{F}_i^{ext} = \vec{0}$

Remarque : *Ne pas confondre une particule isolée et une particule en équilibre*

III.4.2. Notion de Force (2ème loi de Newton)

Dans un référentiel galiléen, toute cause capable de modifierle vecteur quantité demouvement d'un point matériel est appelée FORCE.

On peut très bien définir une *force moyenne*, pendant un intervalle de temps Δt telle que,

$$\vec{F}_{moy} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$$

Ou encore, *force instantanée*, telle que: $\vec{F} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} = \frac{d\vec{P}}{dt}$

- ✓ **Principe Fondamental de la Dynamique (*PFD*)(2ème loi de Newton)**

Dans un référentiel galiléen, la somme des forces extérieures appliquées à un système est égale à la dérivée du vecteur quantité de mouvement du centre d'inertie de ce système.

$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$; Si la masse du système est constante alors: $\sum \vec{F}_{ext} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$

III.4.3. Principe de l'action et de la réaction (3ème loi de Newton)

Soient deux points materiels (1) et (2) interagissant entre eux. Le principe deconservation de la quantité de mouvement, pendant un intervalle de temps Δt, s'ecrit :

$\Delta\vec{P}_1 = -\Delta\vec{P}_2 \Rightarrow \frac{\Delta\vec{P}_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta\vec{P}_2}{\Delta t}$ **avec** $\Delta t \to 0$ **on aura** $\frac{d\vec{P}_1}{dt} = -\frac{d\vec{P}_2}{dt} \Rightarrow \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

La force exercée par (1) sur (2) '$\vec{F}_{12}$' est égale et opposée à celle exercée par (2) sur (1) '$\vec{F}_{21}$'. Ces deux actions (forces) s'exercent simultanément et sont de même nature.

III.5. Quelques lois de forces:

D'après la loi fondamontale de la dynamique on a:

$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d^2r}{dt^2}$ **Où** $\vec{F} = \vec{F}(\vec{v}, \vec{r}, t)$

III.5.1. Force constante

Dans ce cas la force résultante est : $\vec{F}(\vec{v},\vec{r},t)=\vec{F}_0 \Rightarrow \vec{F}=\vec{F}_0=m\vec{a} \Rightarrow \vec{a}=\frac{\vec{F}_0}{m} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{\vec{F}_0}{m}$

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v}=\frac{\vec{F}_0}{m}\int_{t_0}^{t} dt \qquad \Rightarrow \vec{v}-\vec{v}_0=\frac{\vec{F}_0}{m}(t-t_0) \Rightarrow \vec{v}=\frac{\vec{F}_0}{m}(t-t_0)+\vec{v}_0$$

Finalement: $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{\vec{F}_0}{m}(t-t_0)+\vec{v}_0 \Rightarrow \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}=\int_{t_0}^{t}\left[\frac{\vec{F}_0}{m}(t-t_0)+\vec{v}_0\right]dt$

$\Rightarrow \boldsymbol{r}=\frac{1}{2}\frac{\vec{F}_0}{m}(t-t_0)^2+\vec{v}_0(t-t_0)+\vec{r}_0$ C'est la loi du mouvement uniformément varié.

III.5.2. Force dépendante du temps : $\vec{F}=\vec{F}(\vec{v},\vec{r},t)=\vec{F}(t)$

$\Rightarrow \vec{F}=\vec{F}(t)=m\vec{a} \Rightarrow \vec{a}=\frac{\vec{F}(t)}{m} \qquad \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{\vec{F}(t)}{m} \qquad \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v}=\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}\vec{F}(t)dt \quad \Rightarrow \quad \vec{v}=\vec{v}_0+\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}\vec{F}(t)dt \Rightarrow \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}=\int_{t_0}^{t}\left[\vec{v}_0+\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}\vec{F}(t)dt\right]dt \Rightarrow \vec{r}=\int_{t_0}^{t}\left[\vec{v}_0+\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}\vec{F}(t)dt\right]dt+\vec{r}_0$

III.5.3. Force dépendante de la vitesse : $\vec{F}=\vec{F}(\vec{v},\vec{r},t)=\vec{F}(\vec{v})$

$\vec{F}=\vec{F}(\vec{v})=m\vec{a} \Rightarrow \vec{a}=\frac{\vec{F}(\vec{v})}{m} \Rightarrow \int_{v_0}^{v} m\frac{dv}{F(v)}=\int_{t_0}^{t}dt \Rightarrow \int_{v_0}^{v} m\frac{dv}{F(v)}=t-t_0 \Rightarrow t=t_0+f(v,v_0)$

$\vec{F}(\vec{v})=m\vec{a} \Rightarrow F(v)=m\frac{dr}{dt}.\frac{dv}{dr}=mv\frac{dv}{dr} \Rightarrow \int_{r_0}^{r}dr=m\int_{v_0}^{v}\frac{vdv}{F(v)} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{m}\int_{v_0}^{v}\frac{vdv}{F(v)}$

III.6. Moment cinétique d'une particule

La quantité de mouvement s'est révélée très utile dans l'étude des mouvements de translation. Le **moment cinétique** est la grandeur physique qui joue un rôle analogue dans lecas des mouvements de rotation ; on l'appelle aussi **quantité de mouvement de rotation (moment angulaire).**

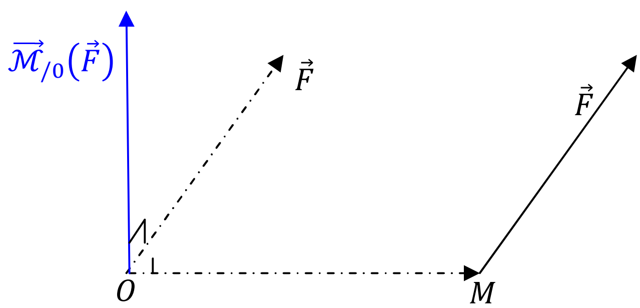
III.6.1. Moment d'une force en un point

Soit une particule ***M*** de masse ***m*** se trouvant en un point repéré par le vecteur position

$\vec{r}=\overrightarrow{OM}$ et soumis à une force $\vec{F}$.

On définit le moment de $\vec{F}$ par rapport au point ***O*** par : $\vec{\mathcal{M}}_{/0}(\vec{F})=\overrightarrow{OM}\wedge\vec{F}$

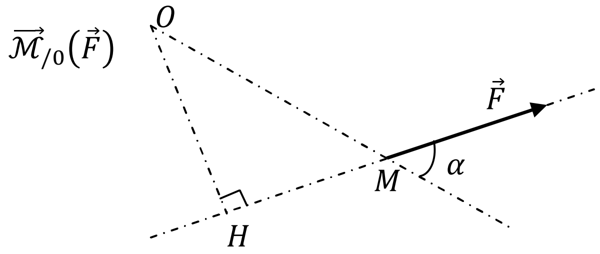
Le vecteur $\vec{\mathcal{M}}_{/0}(\vec{F})$ est doncperpendiculaire



au plan formé par lesvecteurs$\overrightarrow{OM}$ et $\vec{F}$

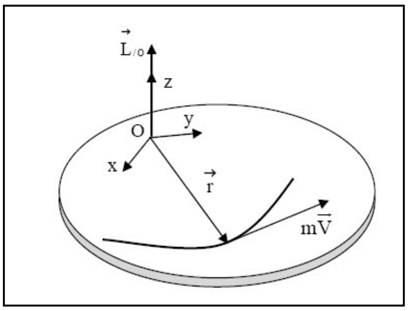
Dans le plan (O,M,$\vec{F}$)

$\|\vec{\mathcal{M}}_{/0}(\vec{F})\| = \|\overrightarrow{OM}\| \times \|\vec{F}\| \times |\sin\alpha| = OH \times \|\vec{F}\|$



III.6.2. Moment cinétique

Si la particule ***M*** de masse ***m*** se déplace à la vitesse $\vec{v}$, son moment cinétique $\vec{L}$ par rapport au point ***O***, est défini par :



$\vec{L}_{/o} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}$ ***ou*** $\vec{L}_{/o} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$

$\vec{P}$: étant la quantité de mouvement de ***M***

$[\vec{L}_{/o}] = ML^2t^{-1}(kgm^2s^{-1})$

L'intérêt de l'introductiondecettegrandeur vientdelarelationentresavariation temporelle (dérivée) et la somme des moments des forces extérieures appliquées au système: c'est ***Le théorème du moment cinétique.***

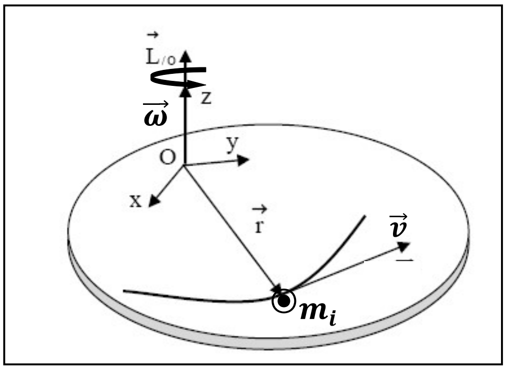
III.6.3. Théorème du moment cinétique

$\vec{L}_{/o} = \vec{r} \wedge \vec{P} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_{/o}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{P} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{P}}{dt}$ car $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_{/o}}{dt} = \vec{v} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{P}}{dt}$

Car $\vec{v} \wedge m\vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}_{/o}}{dt} = \vec{r} \wedge \sum \vec{F}_{ext} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_{/o}}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_{/0}(\vec{F})$

III.6.4. moment cinétique d'un corps rigide (non déformable)

La rotation se fait autour de l'axe $\overrightarrow{oz}$**,** le point m_i possède la vitesse $\vec{v}_i$



$\vec{L}_{i/o} = \vec{r}_i \wedge \vec{P}_i$ **or** $\vec{v}_i = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i$**et**$\vec{\omega} = \omega\vec{k}$

$\Rightarrow \vec{L}_{i/o} = m_i\vec{r}_i \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i) = m_i\vec{r}_i \wedge (\omega\vec{k} \wedge \vec{r}_i)$

$\Rightarrow \vec{L}_{i/o} = m_i\vec{r}_i \wedge \omega r_i\vec{k} = m_i\omega r_i(\vec{r}_i \wedge \vec{k}) \Rightarrow \vec{L}_{i/o} = m_i r_i^2\omega\vec{k}$

$\vec{L}_{i/\overrightarrow{oz}} = \vec{L}_{i/o}\vec{k} = m_i r_i^2\omega\vec{k} \bullet \vec{k} \Rightarrow \vec{L}_{i/\overrightarrow{oz}} = m_i r_i^2\omega$

Le moment cinétique d'un point "m_i" du solide est "$\vec{L}_i$"

le moment cinétique total est: $\vec{L}_{/o} = \sum_i m_i r_i^2\omega\vec{k}et\vec{L}_{/\overrightarrow{oz}} = (\sum_i m_i r_i^2\omega\vec{k}) \bullet \vec{k} = \sum_i m_i r_i^2\omega$

Sachant que le moment d'inertie d'un ensemble de point qui tournent autour d'un axe est:

$$I_{/o} = I_o = \sum_i m_i r_i^2$$

Le moment cinétique par rapport à un point est : $\vec{L}_{/o} = \left(\sum_i m_i r_i^2\right).\vec{\omega} = I_o \vec{\omega}$

le moment cinétique par rapport à un axe $''\overrightarrow{oz}''$ est: $\vec{L}_{/\overrightarrow{oz}} = \vec{L}_{/o} \bullet \vec{k} = \left(\sum_i m_i r_i^2\right).\omega = I_o.\omega$

la seconde loi de Newton devient: $\sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}}_{i/o}(\vec{F}) = \frac{d\vec{L}_{i/o}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = I\vec{\varepsilon}$

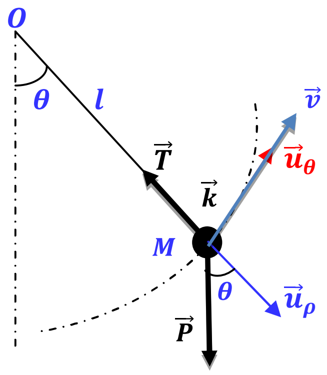
avec $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$et I: moment d'inertie (constant)

C'est la loi de Newton appliquée au mouvement de rotation.

Exemple (Le pendule simple):

On considère un point matériel de masse m reliéà un point fixe O d'un référentielgalileén par l'intermédiaire d'un fil tendu, de masse negligeable et de longueur L. Lemouvement de ce pendule simple est supposé dans un plan vertical. La masse m est soumise à deux forces : le poids de la masse $\vec{P}$ et la tension du fil $\vec{T}$.

Le mouvement de Métant plan, on a priori deuxinconnues, $\rho(t)$et $\theta(t)$qui sont les coordonnees polairesdu point M. En prenant comme origine le point O etcomme axe polaire, l'axe vertical orienté vers le bas.Dans notre cas,il est évident que le fil étant tendu, on anécessairement $\rho(t) = l$. Il reste donc une seuleinconnue $\theta(t)$ qu'on peut obtenir en utilisant soit leprincipe fondamental de la dynamique (une page decalcul !).Mieux est d'utiliser la conservation de l'énergie mécanique totale (car par chance, la tension du fil ne travaille pas) qu'on verra plus tard oubien la conservation du moment cinetique.



$\overrightarrow{OM} = l\vec{u}_\rho \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Rightarrow \vec{v} = l\dot{\theta}\vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{L}_{\_o} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}$

$\Rightarrow \vec{L}_{/o} = l\vec{u}_\rho \wedge m\vec{v} = l\vec{u}_\rho \wedge ml\dot{\theta}\vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{L}_{/o} = ml^2\dot{\theta}(\vec{u}_\rho \wedge \vec{u}_\theta)$

Le moment cinétique de la masse par rapport à O est donc $\Rightarrow \vec{L}_{/o} = ml^2\dot{\theta}\vec{k}$

Les moments de la tension et du poids par rapport à O sont :

$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{/0}(\vec{T}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0}\ car\ \overrightarrow{OM} \| \vec{T}$

$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{/0}(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = -\left(\|\overrightarrow{OM}\|\|\vec{P}\| \sin\theta\right)\vec{k} = -mgl\sin\theta\,\vec{k} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_{/o}}{dt} = \frac{d(ml^2\dot{\theta}\vec{k})}{dt} = ml^2\ddot{\theta}\vec{k}$

En appliquant le théorème du moment cinétique on aura :

$$\frac{d\vec{L}_{/o}}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/0}(\vec{P}) \Rightarrow mL^2\ddot{\theta}\vec{k} = -mgl\sin\theta\,\vec{k} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Pour θ faible on a $\sin\theta \approx \theta$ donc on ecrit finalement: $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$

Cette équation différentielle du mouvement est l'équation d'un oscillateur de pulsation

$\boldsymbol{\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{L}} d'ou \;\; T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$; $\boldsymbol{T}$: étant la période du pendule

III.7. Types de forces

III.7.1. Forces de lorentz

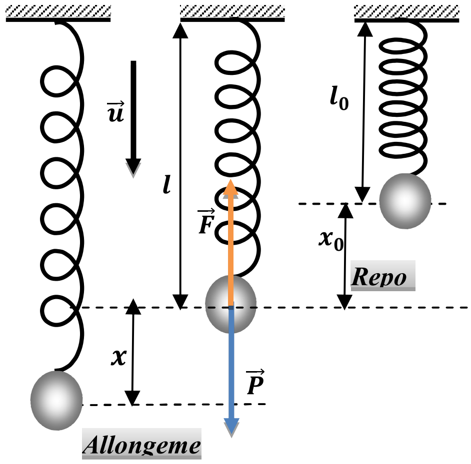
La force dépend de la position et de la vitesse.

Exemple: charge électrique $\boldsymbol{''q''}$ plongée dans un champ électromagnétique :

$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ avec $\vec{E}$: champ électrique et $\vec{B}$:champ magnétique.

III.7.2. Forces élastiques

C'est des forces du aux déformations élastiquedes matériaux.



Exemple: une masse $\boldsymbol{''m''}$ suspendue à un ressortde raideur $\boldsymbol{''k''}$ subit une force dite de rappelle quiobéit à la loi de Hooke c.à.d. qu'elle est proportionnelle à la déformation.

- Ressort à vide : longueur $\boldsymbol{l_0}$
- Ressort tendu dû à la suspension de la masse. $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}$

$\vec{F} = -kx_0\vec{u}$; $\vec{u}$:vecteur unitaire dirigésuivant la direction du fil.

Mais reste en équilibre: $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{g} + \vec{F} = \vec{0}$

Après projection sur $\overrightarrow{ox}$: $mg - kx_0 = 0 \;\Rightarrow\; mg = kx_0$

- Donner une élongation$'\boldsymbol{x}\,'$au ressort puis laisser le système seul, il exécute des oscillations.

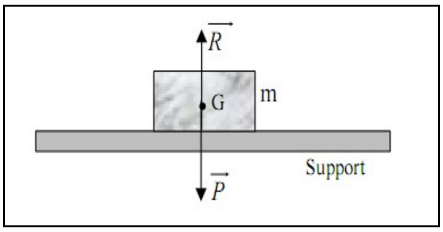
La loi de Newton donne : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{g} + \vec{F} = m\vec{a}$

Par projection sur $\overrightarrow{ox}$: $mg - k(x + x_0) = m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \;\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

$\Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ où $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ Solution de l'équation : $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ ⇒C'est un mouvement harmonique avec $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{\varphi}$ sont determinées à partir des conditions initiales

III.7.3. Réaction d'un support

Considérons un objet placé sur un support solide. L'objet ne peut pas pénétrer dans le support : il y a uneforce appelée réaction du support et notée R ou N qui s'yoppose. Cette réaction s'applique sur l'objet au niveau ducontact objet-support, et sa direction est orthogonale à lasurface du support au niveau du contact.



L'objet étant en équilibre

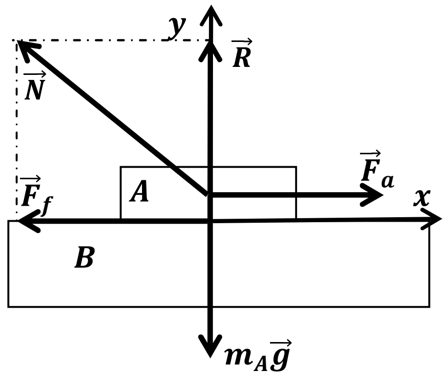
$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{g} + \vec{R} = \vec{0} \Rightarrow m\vec{g} = -\vec{R}$$

III.7.4. Force de frottement solide

Les forces de frottement sont des forces qui apparaissent, soit lors du mouvement d'unobjet, soit cet objet est soumis à une force qui tend à le déplacer. Les frottements s'opposent au déplacement relatif des objets en mouvement.

a. Frottement statique :

En appliquant une force "F_a" au corps "A", il ya oppositionau mouvement relatif jusqu'à une certaine limite où "A"commence à bouger (début du muovement), on est dans unétat d'équilibre critique



- Appliquant la deuxième loi de Newton

$$\sum \vec{F}_{ext} = m_A\vec{g} + \vec{R} + \vec{F}_f + \vec{F}_a = m\vec{a}$$

- $m_A\vec{g}$: Poids du corps "A".,
- $\vec{F}_f$: force de frottement à la surface de contact.
- $\vec{R}$: la réaction de "B" à l'action de "A".
- $\vec{F}_a$: force appliquée à "A" pour le faire bouger.

A la limite le corps "A" est toujours au repos : $\sum \vec{F}_{ext} = m_A\vec{g} + \vec{R} + \vec{F}_f + \vec{F}_a = \vec{0}$

Faisons la projection de l'équation sur les axes : $\begin{cases} \overrightarrow{ox}: F_a - F_f = 0 \\ \overrightarrow{oy}: R - m_A g = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{ox}: F_a = F_f \\ \overrightarrow{oy}: R = m_A g \end{cases}$

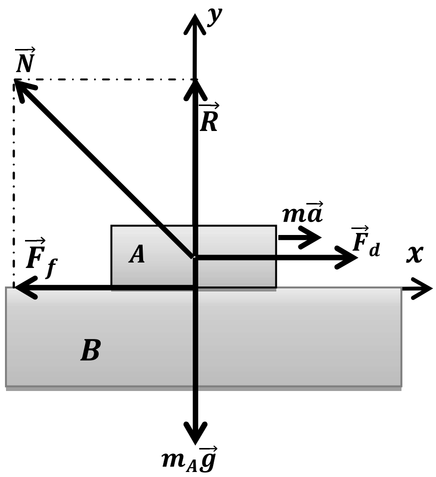
- L'expérience montre que la force de frottement est proportionnelle au poids

$\boldsymbol{F_f = \mu_s mg}$; $\boldsymbol{\mu_s}$: est le coefficient de frottement statique.

$$\mu_s = \frac{F_f}{mg} = \frac{F_a}{R} \Rightarrow \text{a la limite statique } (F_a)_{max} = F_s \Rightarrow \mu_s = \frac{F_s}{R}$$

le coefficient de frottement statique ″μ_s`` se détermine par le rapport de la force limite ″$F_s$`` nécessaire pour débuter le mouvement et réaction normale ″R``.

b. Frottement dynamique :



L'expérience montre que lors du mouvement relatif, la force de frottement dynamique $\vec{F}_d$ est inferieure àla force de frottement statique $\vec{F}_s$. Ainsi on définit lecoefficient de frottement dynamique ″μ_d``tels que : $\mu_d = \frac{F_d}{R}$

La loi fondamentale de la dynamique s'écrit :

$\sum \vec{F}_{ext} = m_A\vec{g} + \vec{R} + \vec{F}_f + \vec{F}_d = m\vec{a}$ ⇒ Mouvement uniforme : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$

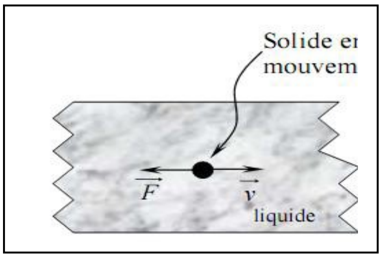
Faisons la projection de l'équation sur les axes : $\begin{cases} \overrightarrow{ox}: F_d - F_f = 0 \\ \overrightarrow{oy}: R - m_A g = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{ox}: F_d = F_f \\ \overrightarrow{oy}: R = m_A g \end{cases}$

F_d: Force nécessaire pour avoir un mouvement uniforme. ⇒ $\mu_d = \frac{F_f}{m_A g} = \frac{F_d}{R}$

Le coefficient de frottement dynamique ″μ_d`` se détermine par le rapport de la force dynamique ″$F_d$`` nécessaire pour avoir un mouvement uniforme et la réaction normale ″R``.

III.7.5. Force de frottement visqueux

Le frottement visqueux est lié au mouvement de l'objet M dans un milieu fluide (air, liquide ou autre). Il est créé par les particules du fluide qui viennent choquer la surface del'objet$M$ quand ce dernier est en mouvement. Il existe des modélisations de ce phénomènequi sont très complexes. On se limte ici à ne donner qu'une loi approchée déterminéeexpérimentalement. Pour des faibles vitesses, le frottement est quasiment proportionnel ennorme à la vitesse de déplacement de l'objet.



$$\vec{F} = -k\vec{v}$$

$\vec{F}$: force de frottement

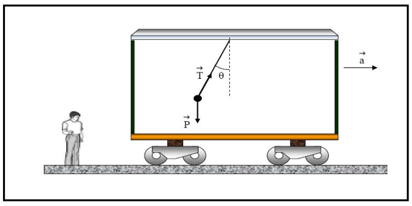
$\vec{v}$:vitesse de l'objet M

k: constante positive

III.7.6. Forces d'inertie

Nous avons vu que la deuxième loi de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$, est valable dans n'importequel repère d'inertie. Nous allons voir, dans cette partie, l'incidence de l'utilisation d'unrepère non-galiléen.

Considérons un pendule simple constitué d'une masse m suspendue, par un fil inextensible, au plafond d'un véhicule en mouvement uniformément accéléré, d'accélération horizontale $\vec{a}$. Ce pendule forme un angle θ avec la verticale. L'analyse de son inclinaisonn'est pas effectuée de la même façon par un observateur fixe et par un autre qui se trouve dans le véhicule.

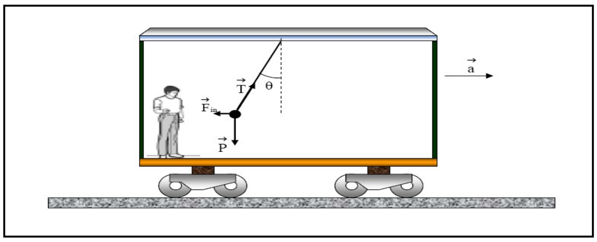


Pour l'observateur (inertiel) au sol, les forces exercées sur le pendule sont le poids $\vec{P}$et la tension $\vec{T}$du fil. Il applique ainsi la deuxième loi de Newton en constatant que le pendule est entraîné par le véhicule avec l'accélération $\vec{a}$: $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$

L'observateur (non-inertiel) se trouvant dans le véhicule, constate que le pendule est immobile et conclut que le poids ne peut à lui seul équilibrer la tension du fil, une troisième force $\vec{F}_{in}$ devrait intervenir. Il formula ainsi la deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{in} = \vec{0}$

En comparant ces deux dernières équations, il conclut que: $\vec{F}_{in} = -m\vec{a}$

Cette force est d'origine immatérielle puisqu'il n'y a pas de corps qui en soit la cause. C'estune force dite d'inertie.



Série n°3 : Dynamique du point matériel

Exercice 01 :

Une masse' $\boldsymbol{m = 1kg}$ *'se déplace le long du chemin* $\boldsymbol{OABCD}$*.La portion* $\boldsymbol{OABC\ (BC = 8x_0)}$ *est horizontale et rugueuse de coefficient de frottement* $\boldsymbol{\mu = 0.1}$ *.La portion* $\boldsymbol{CD = 3x_0}$ *est lisse et inclinée de '*$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{6}}$*' par rapport à l'horizontale. Au départ la masse est lâchée du repos à partir du point* $\boldsymbol{A}$ *après avoir comprimé le ressort, de raideur '*$\boldsymbol{k = 200\frac{N}{m}}$*', de '*$\boldsymbol{x_0 = 0.5\,m = AB}$*'. Arrivant à* $\boldsymbol{B}$ *elle continue son mouvement et entame la portion* $\boldsymbol{CD}$ *.(*$\boldsymbol{g = 10\ m/s^2}$*)*

<u>En utilisant le théorème de la variation de l'énergie totale :</u>

<u>1°</u>/ - *Représenter toutes les forces agissantes sur* $\boldsymbol{m}$ *dans le tronçon* $\boldsymbol{AB}$**.**

- *Déterminer la vitesse* $\boldsymbol{v_B}$ *de* $\boldsymbol{m}$ *au point* $\boldsymbol{B}$.

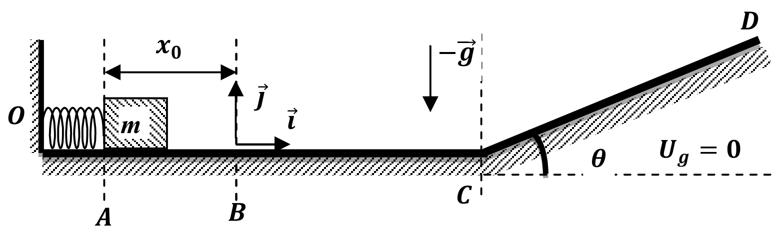
<u>En utilisant le principe fondamental de la dynamique</u> :

<u>2°</u>/- *Représenter toutes les forces agissantes sur* $\boldsymbol{m}$ *dans le tronçon* $\boldsymbol{BC}$.

- *Déterminer sa vitesse* $\boldsymbol{v_C}$ *au point* $\boldsymbol{C}$.

<u>3°</u>/ - *Représenter toutes les forces agissantes sur* $\boldsymbol{m}$ *dans le tronçon* $\boldsymbol{CD}$.

- *Déterminer sa vitesse* $\boldsymbol{v_D}$ *au point* $\boldsymbol{D}$.



Exercice 02 :

Deux masses m_1 *et* m_2 *sont liées par un fil inextensible qui passe par une poulie. La masse* m_1 *glisse sur un plan incliné qui fait un angle a = 30° par rapport à l'horizontale. Le contact entre la masse* m_1 *et le plan incliné est caractérisé par les coefficients de frottement μs = 0,7 et μc = 0,3. On prendra g =* $9,8\ m/s^2$.

Partie I : 1) Si m_1 = 1 kg, déterminer la valeur maximum m_{2max} de m_2 pour que le système reste au repos.

2) Représenter les forces qui agissent sur m_1 et m_2.

Partie II : On prend, une masse m_2 = 1,5 kg. Elle est lâchée, sans vitesse initiale, d'une hauteur h = 20cm.

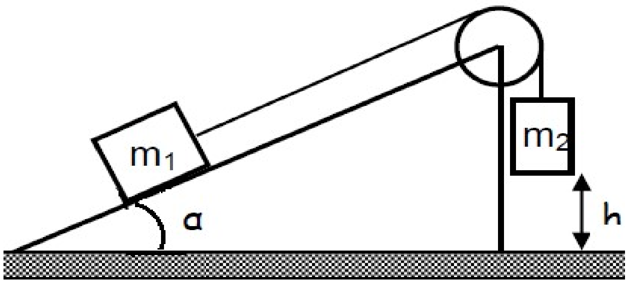
1) Calculer l'accélérations prise par les deux masses et la tension T du fil.

2) Calculer les vitesses des deux masses lorsque la masse m_2 touche le sol.

3) La masse m_2 s'immobilise, le fil se détend et la masse m_1 continue son mouvement.

a. Déterminer la nouvelle accélération de la masse m_1.

b. En déduire la distance totale parcourue par la masse m_1 avant de s'arrêter ?



Exercice 03 :

Une masse"$\boldsymbol{m}$", supposéeponctuelle, est lancée suite à la compression d'un ressort de"$\boldsymbol{x}$ ". Acquiert une vitesse initiale "$\boldsymbol{v_0} = \boldsymbol{v_C} = \sqrt{2Rg}$"(Le ressort est au repos lorsque sa longueur est "$\boldsymbol{l_0} = \boldsymbol{CD}$ "). Elle parcourt le tronçon '$\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{R}$' <u>rugueux</u> de coefficient de frottement dynamique "$\boldsymbol{\mu} = 0.5$", ensuite entame le tronçon <u>lisse</u>"$\boldsymbol{BA}$"qui est un quart de cercle de rayon '$\boldsymbol{R}'$.En utilisant les coordonnées intrinsèques

1°/ *Quelle est sa vitesse au point '$\boldsymbol{B}$' ?*

2°/ Quelle *est sa vitesse à un point quelconque du tronçon '$\boldsymbol{BA}$' (l'angle'$\boldsymbol{\theta}$' est compté à partir de$\boldsymbol{OB}$).*

3°/ Est-*ce qu'elle atteint le point '$\boldsymbol{A}$' ? Justifier. A quelle position s'arrête-t-elle?*

4°/ A *quel point s'arrête-t-elle si elle reprend son mouvement ? (**CD** est aussi lisse).*

Exercice 04 :

Un cube de masse $\boldsymbol{m = 1kg}$, *supposé ponctuel, est lancée de* **A** *avec une vitesse initiale* $\vec{v}_A = \vec{v}_0$ *parallèlement à la piste* **ABC**, *inclinée de* $\boldsymbol{\alpha = \pi/6}$ *par rapport à l'horizontale,* $\boldsymbol{AB = 10m}$ *est* <u>*lisse*</u>, ***BC est rugueuse*** *dont le coefficient de frottement dynamique est* $\boldsymbol{\mu_d = 0.4}$. *(on donne* $\boldsymbol{g = 10m/s^2}$*)*

1°/ *Représenter les forces appliquées au cube, lors de la montée, sur les tronçons* ***AB*** *et* ***BC*** *de la piste.*

2°/ *Quelle doit-être la vitesse de lancement "*$\boldsymbol{v_{A_1}}$*" pour que ce cube s'arrête au point* ***B*** *?*

3°/ *Lancer à la vitesse* $\boldsymbol{v_{A_2}}$, *le cube s'immobilisera au point* ***D*** *entre* ***B*** *et* ***C***. *Donner l'expression de* ***BD*** *en fonction de* $\boldsymbol{v_{A_2}}$, ***AB***, ***g***, $\boldsymbol{\alpha}$ *et* $\boldsymbol{\mu_d}$. *Que vaut* ***BD*** *si* $\boldsymbol{v_{A_2} = 12m/s}$ *?*

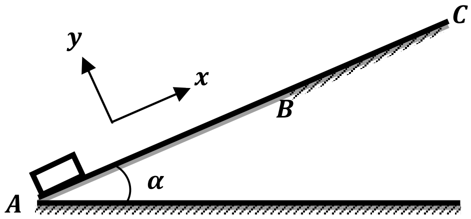
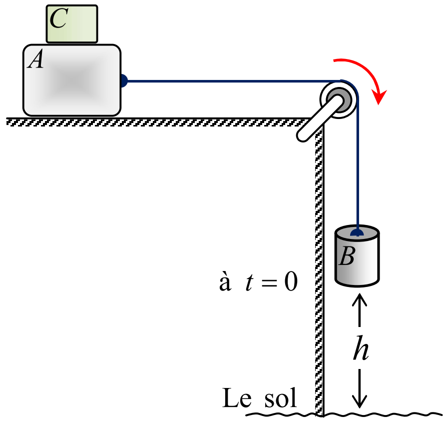


Fig.01

Exercice 05 :



On considère le système représenté par la figure ci-dessous. Les masses des corps A , B et C sont respectivement m_1 , m_2 et m_3 . Les masses de la poulie et du fil sont négligeables, et le fil est inextensible.

Au repos, le corps B se trouve à une hauteur h par rapport au sol.

1. Si le coefficient de frottement statique de la table est $\mu_s = 0{,}1$. Trouver la valeur minimale de m_3 qui empêche le corps A de déplacer.

A l'instant $t = 0$, on soulève le corps C, et après 2 s le corps B atteint le sol.

1. Calculer le coefficient de frottement cinétique μ_c de la table.

Données : $m_1 = 1$ Kg, $m_2 = 110$ g, $h = 40$ cm, $g = 10$ m·s^{-2}.

Exercice 06 :

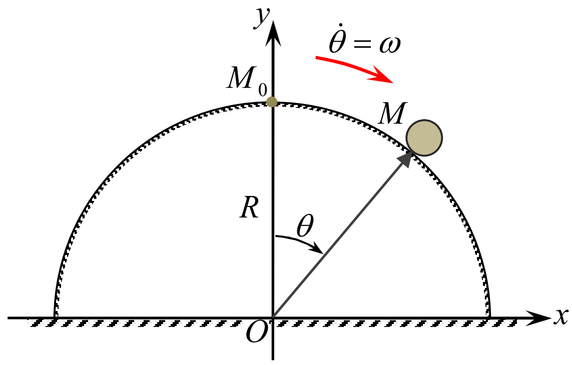
Dans un repère galiléen $\mathcal{R}(O, \text{xyz})$, la position à l'instant t d'un point matériel M, de masse $m = 1$ Kg , est donnée par le vecteur :

$\overrightarrow{OM}(t) = (3t^2 - 6t)\cdot\vec{i} - (t^3)\cdot\vec{j} + (3t + 2)\cdot\vec{k}$

Trouver à l'instant t :

1. La force $\vec{F}(t)$ agissant à l'instant sur le point M .
2. Le moment $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{/O}(\vec{F})$ par rapport à l'origine O.
3. La quantité de mouvement $\vec{p}(t)$ du corps, et vérifier que $\vec{F}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\vec{p}(t)}{\mathrm{d}t}$.
4. Le moment cinétique $\vec{\mathcal{L}}_{/O}$ par rapport à l'origine O, et vérifier que $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{/O}(\vec{F}) = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{L}}_{/O}}{\mathrm{d}t}$.

Exercice 07 :



On considère un hémisphère de rayon $R = 1$ m et de centre O, placé sur un plan horizontal (figure ci-contre). Une particule de masse m glisse sans frottement sur la surface extérieure de l'hémisphère. A l'instant $t = 0$, la particule entame son mouvement sans vitesse initiale à partir de la position M_0 située en haut de l'hémisphère.

En utilisant le système des coordonnées intrinsèques muni de la base de Frenet $(\vec{U}_N, \vec{U}_T)$:

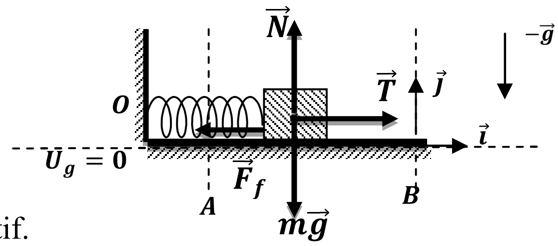
1. Démontrer que la vitesse de la particule, à la position quelconque M, est donnée par : $v = \sqrt{2 \cdot R \cdot g \cdot (1 - cos(\theta))}$; tels que θ est l'angle entre les vecteurs position $\overrightarrow{OM_0}$ et $\overrightarrow{OM}$.
2. En fonction de θ , trouver l'expression de la réaction normale $\vec{N}$.
3. Déduire l'angle θ' sous lequel la particule quitte la surface de l'hémisphère.

Corrigé type : Série n°3

Exercice 01 :

- **Utilisation du théorème dela variation de l'énergie totale**

1°/ **Le tronçon AB**



-Les forces sont représentées sur la figure ci-contre.

- **Calcul de la vitesse au point B**

Puisqu'il ya des frottements le système n'est pas conservatif.

$\Delta E = E_f - E_i = W^{NC}$ *avec* $E = T + U$

Ou W^{NC} *: Travaux des forces non-conservatives et* $T = \frac{1}{2}mv^2$; $U = U_e + U_g$

U_e *: énergie potentielle élastique ;* U_e *:énergie potentielle gravitationnelle*

L'énergie totale initiale est :

$E_i = E_A = T_A + U_A$ *Ici l'énergie potentielle gravitationnelle est nulle*

$E_i = E_A = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}kx_0^2$ *ou* $v_A = 0$ (Départ du repos)

L'énergie totale finale est :

$E_f = E_B = T_B + U_B$ *Ici l'énergie potentielle gravitationnelle est nulle*

$E_f = E_B = \frac{1}{2}mv_B^2 (U_B)_e$ **:** *l'énergie potentielle élastique est aussi nulle (pas d'action du ressort)*

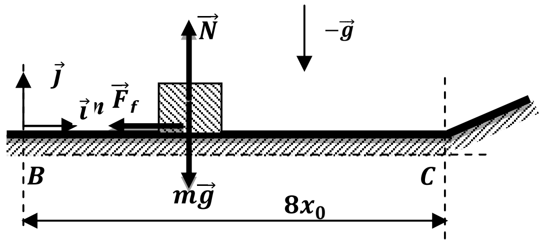
$W^{NC} = W(\vec{F}_f) = -F_f\Delta x F_f = \mu N$ *et* $N = mg \Rightarrow W^{NC} = -\mu mgx_0$

$$\Delta E = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}kx_0^2 = -\mu mgx_0 \Rightarrow v_B = \sqrt{\frac{kx_0^2}{m} - 2\mu g x_0}$$

A.N: $v_B = 7\ m/s$

- **<u>Utilisation du principe fondamental de la dynamique</u>**

2°/ <u>Le tronçon BC</u>



- Les forces sont représentées sur la figure ci-contre.

- <u>Calcul de la vitesse au point C</u>

D'après la 2éme loi de Newton :

$\sum \vec{F}_i^{ex} = m.\vec{a}$(masseconstante)$\Rightarrow \sum \vec{F}_i^{ex} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_f = m.\vec{a}$

Pour résoudre le problème on passe aux équations scalaires c.à.d. on va faire la projection sur les axes du repère adéquat.

$$\begin{cases} \overrightarrow{ox}: -F_f = ma & (1) \\ \overrightarrow{oy}: N - mg = 0 & (2) \\ F_f = \mu.N & (3) \end{cases} \Rightarrow a = -\mu.g$$

A.N: $a = -1 m/s$

Pour déterminer la vitesse, on passe aux équations de la cinématique. Puisque l'accélération est constante, le mouvement est rectiligne uniformément varié. L'équation qui relie la vitesse à l'abscisse est :

$$v_f^2 - v_i^2 = 2.a(x_f - x_i)$$

Ici :$v_f = v_C$ *: la vitesse à chercher ;* $v_i = v_B$ *, l'intervalle* $x_f - x_i = BC = 8.x_0$

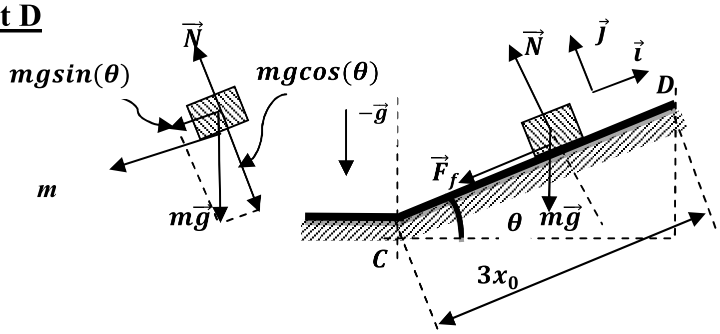
On trouve :$v_C = \sqrt{v_B^2 + 2.a.BC}$

A.N : $v_C = 6.4\, m/s$

3°/ <u>Le tronçon CD</u>

- Les forces sont représentées sur la figure ci-contre.

- <u>Calcul de la vitesse au point D</u>



D'après la 2éme loi de Newton :

$\sum \vec{F}_i^{ex} = m.\vec{a}$(masse constante) $\Longrightarrow \sum \vec{F}_i^{ex} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_f = m.\vec{a}$

Pour résoudre le problème on passe aux équations scalaires c.à.d. on va faire la projection sur les axes du repère adéquat.

$$\begin{cases} \overrightarrow{ox}: \ -F_f - mgsin(\theta) = ma & (4) \\ \overrightarrow{oy}: \ N - mgcos(\theta = 0 & (5) \\ \qquad F_f = \mu.N & (6) \end{cases} \quad \Longrightarrow a = -(sin\,\theta + \mu.cos\,\theta).g$$

AN : $a = -5.88 m/s^2$

Pour déterminer la vitesse, on passe aux équations de la cinématique. Puisque l'accélération est constante, le mouvement est rectiligne uniformément varié. L'équation qui relie la vitesse à l'abscisse est :

$$v_f^2 - v_i^2 = 2.a(x_f - x_i)$$

Ici : $v_f = v_D$ *: la vitesse à chercher ;* $v_i = v_C$ *, l'intervalle* $x_f - x_i = CD = 3.x_0$

On trouve : $v_D = \sqrt{v_C^2 + 2.a.CD}$

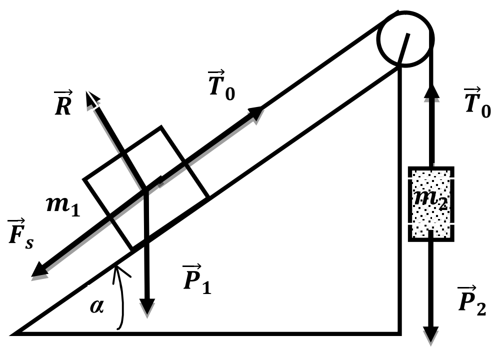
A.N :$v_C = 4.83\ m/s.$

Exercice 02 :

Partie I

1. Condition d'équilibre sur m_1 :

$$\vec{P_1} + \vec{R} + \vec{T_0} + \vec{F_s} = \vec{0}$$



<u>Projection sur la verticale</u> :*<u>Projection sur la parallèle</u>* :

$$R = P_1 cos\alpha T_0 = P_1 sin\alpha + F_s$$

Sachant que :$F_s = \mu_s R$

Donc$T_0 = m_1 g(sin\alpha + \mu_s cos\alpha)$ ----- *(1)*

Condition d'équilibre sur m_2 :

$\vec{P_2} + \vec{T_0} = \vec{0}$

Donc $T_0 = P_2 = m_{2\,max}g$ -----*(2)*

L'égalité entre (1) et (2) donne :

$$m_{2\,max} = m_1(sin\alpha + \mu_s cos\alpha)$$

D'où : $\boldsymbol{m_{2\,max} = 1,1\,kg}$

Partie II

1. PFD sur m_1:

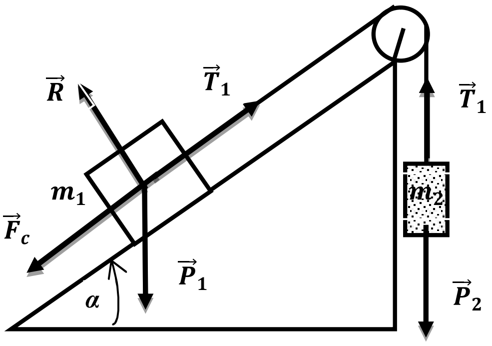
$\overrightarrow{P_1} + \vec{R} + \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{F_c} = m_1\vec{a}$

Projection sur la parallèle :

$$T_1 - P_1 sin\alpha - F_c = m_1 a$$

Sachant que $F_c = \mu_c R$

Donc : $m_1 a = T_1 - m_1 g(sin\alpha + \mu_c cos\alpha)$ ----- *(3)*



2. *PFD sur* m_2 *:*

$$\overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{T_1} = m_2\vec{a}$$

Donc $m_2\,a = P_2 - T_1$----- *(4)*

En additionnant (3) et (4) on obtient :

$$\boldsymbol{a = g\frac{m_2 - m_1(sin\alpha + \mu_c cos\alpha)}{m_1 + m_2}}$$

Donc $a = 2{,}9\ m/s^2$

En remplaçant cette valeur dans (4) on obtient :

$$\boldsymbol{T_1 = m_2\,(g - a) = 10,35N}$$

3. Le mouvement est uniformément accéléré pour les deux masses qui auront les mêmes vitesses donc$v_1^2 - v_0^2 = 2\,ah$.

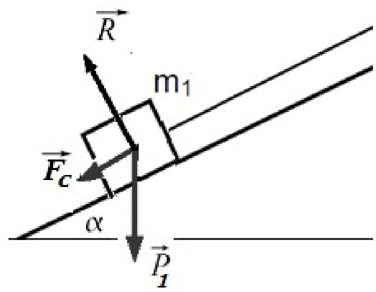
Les masses étaient au repos ($v_0 = 0$*)*

d'où$v_1 = \sqrt{2\,ah}v_1 = 1{,}1\ m/s$

4. La masse $\boldsymbol{m_2}$ s'immobilise et $\boldsymbol{m_1}$ continue son mouvement

a- PFD sur m_1:

$$\overrightarrow{P_1} + \vec{R} + \overrightarrow{F_c} = m_1\overrightarrow{a'}$$



$$m_1 a' = -P_1 sin\alpha - F_c$$

$donc a' = -g(sin\alpha + \mu_c cos\alpha)$

on obtient

$$a' = -7{,}45\ m/s^2$$

b- Durant cette phase de décélération $\boldsymbol{m_1}$ va parcourir la distance $\boldsymbol{d_1}$ avant de s'arrêter

$$v_f^2 - v_1^2 = 2\,a' d_1$$

$$puisque\, v_f = 0 \Longrightarrow d_1 = -\frac{v_1^2}{2\,a'}$$

$alors\, d_1 = 0{,}08\ m$

La distance totale parcourue est :

$$\boxed{\boldsymbol{D = d + d_1 = 0,28\ m}}$$

Exercice 03 :

$$\boldsymbol{v_0 = v_C = \sqrt{2Rg}BC = R\mu = 0.5}$$

1°- <u>TronçonCB : Vitesse du pointB</u>:

Le système part du point **C** $\left(\boldsymbol{v_0 = v_C = \sqrt{2Rg}}\right)$sur un plan rugueux($\boldsymbol{\mu = 0.5}$)

On applique le principe fondamental de la dynamique :(2nd loi de Newton).

$\sum \vec{F}^{ex} = \frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a}$ (Masse ponctuelle). $\Rightarrow m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$

La projection sur la base$(\vec{u}_T; \vec{u}_N)$:

$$\begin{cases} \vec{u}_T: \ -F_f = ma_T = m\dfrac{dv}{dt} \ (1) \\ \vec{u}_N: \ \ N - mg = ma_N = \dfrac{mv^2}{\mathcal{R}} \ (2) \end{cases}$$

et on a $\boldsymbol{F_f = \mu N}$ **(3)**

Le mouvement se fait suivant « x », on va positionner $\boldsymbol{C}$ par $\boldsymbol{x_C}$et $\boldsymbol{B}$ par $\boldsymbol{x_B}$

Le mouvement est rectiligne. Le rayon de courbure est infini $\mathcal{R} \to \infty$

L'équation (2) donne :$\boldsymbol{N - mg = ma_N = 0 \Rightarrow N = mg}$

L'équation (3) donne :$\boldsymbol{F_f = \mu mg}$

L'équation (1) donne $\boldsymbol{-F_f = -\mu mg = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow -\mu g = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}.\frac{dx}{dt} \Rightarrow -\mu g dx = v.dv}$

$$-\int_{x_C}^{x_B} \mu g dx = \int_{v_C}^{v_B} v.dv \Rightarrow -\mu g x|_{x_C}^{x_B} = \frac{1}{2}v^2\Big|_{v_C}^{v_B} \Rightarrow -\mu g(x_B - x_C) = \frac{1}{2}(v_B^2 - v_C^2)$$

$$v_B^2 = v_C^2 - 2\mu g(x_B - x_C) = 2Rg - 2 * 0.5Rg \Rightarrow v_B = \sqrt{Rg}$$

Une autre variante :On fait la projection sur la base$(\vec{\imath};\vec{\jmath})$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{ox}: -F_f = ma_x\ (1) \\ \overrightarrow{oy}:\ N - mg = ma_y (2) \end{cases}$$

Puisqu'il n'y a pas de mouvement sur $\overrightarrow{oy} \Rightarrow a_y = 0$ **et** $\quad a_x = a$

L'équation (2) donne :$\boldsymbol{N - mg = ma_y = 0 \Rightarrow N = mg}$; $\boldsymbol{F_f = \mu N = \mu mg}$

L'équation (1) donne :$\boldsymbol{-F_f = -\mu mg = ma \Rightarrow a = -\mu g}$

Utilisant l'équation de la cinématique du mouvement rectiligne uniformément varié indépendante du temps :$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$

On a: $v_0 = v_C$; $v = v_B$; $a = -\mu g$;$x_0 = x_C$; $x = x_B \Rightarrow x - x_0 = R$

$$v_B^2 = v_C^2 - 2\mu g(x_B - x_C) = 2Rg - 2 * 0.5Rg \Rightarrow v_B = \sqrt{Rg}$$

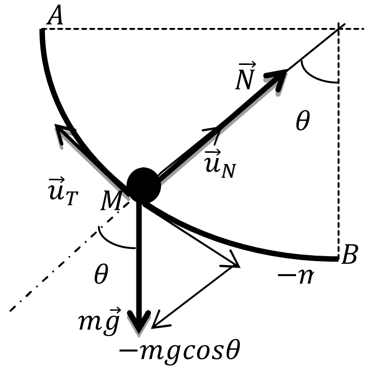
2°- <u>TronçonBA: Vitesse du point quelconque M</u>:

On applique le principe fondamental de la dynamique :(2nd loi de Newton).

$\sum \vec{F}^{ex} = \frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a}$ (Masse ponctuelle). $\Rightarrow m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$

La projection sur la base intrinsèque$(\vec{u}_T;\vec{u}_N)$:

$$\begin{cases} \vec{u}_T:\ -mg\sin(\theta) = ma_T = m\frac{dv}{dt}(1) \\ \vec{u}_N:\ \ N - mg\cos(\theta) = ma_N = \frac{mv^2}{\mathcal{R}}(2) \end{cases}$$



L'équation (1) donne :$\boldsymbol{-g\sin(\theta) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt}}$

Or $\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R}$

$$\Rightarrow -Rgsin(\theta)d\theta = vdv \Rightarrow -\int_0^{\theta} Rgsin(\theta)d\theta = \int_{v_B}^{v_M} v.dv$$

$$\Rightarrow 2Rg(cos\theta - 1) = v_M^2 - v_B^2 \Rightarrow v_M = \sqrt{Rg(2cos\theta - 1)}$$

3°-Arrive-t-elle au point **A ?**

Au point **A**L'angle θ est : $\theta_A = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow v_A = \sqrt{Rg(2cos\theta_A - 1)}v_A = \sqrt{-Rg} = i\sqrt{Rg}$$

L'expression de la vitesse au point **A** est imaginaire ⇒ Elle n'y arrive pas

La particule s'arrête au point ou l'angle θ esttelle que $v_M = 0$

$$v_M = \sqrt{Rg(2cos\theta - 1)} = 0 \Rightarrow 2cos\theta - 1 = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

4°- En reprenant le mouvementla masse part de$\theta_0 = \frac{\pi}{3}$

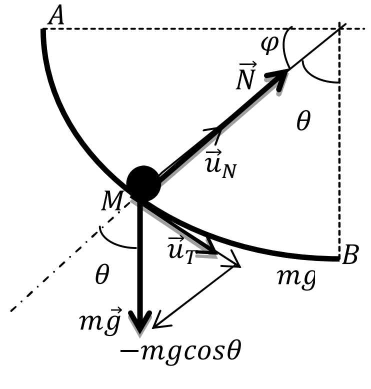
- La vitesse au point B
  - On applique le principe fondamental de la dynamique :(2nd loi de Newton).
  - $\sum \vec{F}^{ex} = \frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a}$ (masse ponctuelle). $\Rightarrow m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$

$$\begin{cases} \vec{u}_T: \ mgcos(\varphi) = ma_T = m\dfrac{dv}{dt} (1) \\ \vec{u}_N: \ N - mgsin(\varphi) = ma_N = \dfrac{mv^2}{\mathcal{R}} (2) \end{cases} \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta = 0 \ \rightarrow \ \varphi = \dfrac{\pi}{2} \\ \theta = \dfrac{\pi}{3} \ \rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$Rgcos(\varphi)d\varphi = vdv \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{3}} Rg\, cos(\varphi)d\varphi = \int_{v_B}^{v_M} v.dv$$

$$\Rightarrow 2Rg\, sin(\varphi)|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = v_B^2 - v_0^2 \Rightarrow v_B^2 = 2Rg\left(1 - \frac{1}{2}\right) = Rg$$



$$v_B = \sqrt{Rg}$$

Ou bien : puisque le tronçon est lisse la vitesse $v_B$est la même que cesoit en montée ou en descente.

- La vitesse au point C :

  Sur le tronçon BC rugueux

$$-F_f = -\mu mg = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow -\mu g = \frac{dv}{dt}$$

$$v_C^2 = v_B^2 - 2\mu g(x_B - x_C) = Rg - 2 * 0.5Rg = 0$$

$$v_C = 0$$

La particule s'arrête au point **C.**

Exercice 04 :

1°-

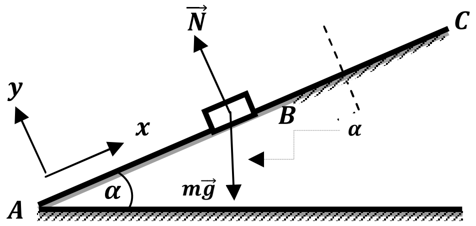


Fig.01

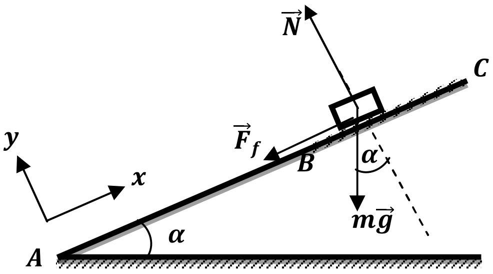


Fig.01

2°- Le cube s'arrête au point $B \Rightarrow v_B = 0$

- L'équation de la cinématique indépendante du temps explicitement :

$$v_B^2 - v_A^2 = 2a.(x_B - x_A) \quad (1)$$

- On cherche l'accélération à partir de l'équaton fondanetale de la dynamique:

$$\sum \vec{F}^{ex} = \frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a}$$

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a} = m\vec{a}_x + m\vec{a}_y \Rightarrow \text{Parprojection :} \begin{cases} \overline{ox}: \ -mg.sin(\alpha) = ma_x & (2) \\ \overline{oy}: \ N - mg.cos(\alpha) = ma_y & (3) \end{cases} \begin{pmatrix} a_x = a \\ a_y = 0 \end{pmatrix}$$

L'équation (2)*donne :* $a = -g.sin(\alpha)$*et d'après l'équation* (1)

$v_{A_1} = v_A = \sqrt{2.AB.g.sin(\alpha)}$ *A.N:*$v_{A_1} = 10m/s$

3°- Le cube s'arrête au point $D \Rightarrow v_D = 0$Icile cube traverse deux zone lisse et rugueuse

Zone lisse $x_A < x < x_B$: *on a* $\boldsymbol{v_B^2 = v_A^2 + 2a.(x_B - x_A) = v_A^2 - 2g.AB.sin(\alpha)}$ (4)

Zone rugueuse$x_B < x < x_C$: *on a*$\boldsymbol{v_D^2 - v_B^2 = 2a.(x_B - x_B) = 2a.BD}$

Puisque $\boldsymbol{v_D = 0 \Rightarrow v_B^2 = -2a.BD}$ (5)

- On cherche l'accélération à partir de l'équaton fondanetale de la dynamique:

$\boldsymbol{m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a} = m\vec{a}_x + m\vec{a}_y}$ ⟹Par projection :

$$\begin{cases} \overrightarrow{ox}:\ -mg.sin(\alpha) - F_f = ma_x (6) \\ \overrightarrow{oy}:\ N - mg.cos(\alpha) = ma_y (7) \\ F_f = \mu N \qquad (8) \end{cases}$$

L'équation (7)*donne :* $\boldsymbol{N = mg.cos(\alpha) \Rightarrow F_f = \mu.mg.cos(\alpha)}$ (9)

On porte (9)*dans* (6)*on obtient :* $\boldsymbol{a = -g[sin(\alpha) + \mu.g.cos(\alpha)]}$ (10)

On se sert de (10)*on obtient :* $\boldsymbol{v_B^2 = 2g.BD.(sin(\alpha) + \mu.g.cos(\alpha))}$ (11)

On se sert de (11)*et* (4)*on obtient :*

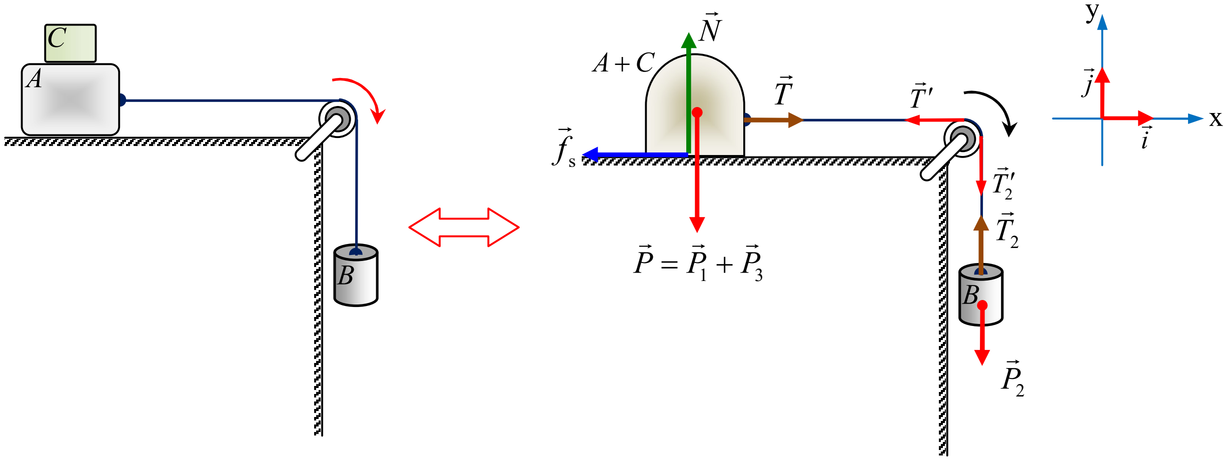
$$BD = \frac{v_A^2 - 2g.AB.sin(\alpha)}{2g.(sin(\alpha) + \mu.g.cos(\alpha))} \qquad (12)$$

- ***Pour*** $\boldsymbol{v_A = v_{A_2} = 12m/s \Rightarrow BD \approx 2.6m}$

Exercice 05:

1. Le corps A ne déplace pas $\Rightarrow$ le système est au repos.

On peut remplacer les deux corps A et C par un seul corps de masse $m_1 + m_3$, et puis on représente toutes les forces agissant sur le nouveau système.



Au repos, les forces agissant sont :

- sur le corps $A + C$: – Le poids : $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_3$ (module $P = P_1 + P_3$)
  – La réaction normale : $\vec{N}$ (module N)
  – La tension du fil : $\vec{T}$ (module T)
  – Le frottement statique : $\vec{f}_s$ (module $f_s = \mu_s \cdot N$)

- sur le corps B : – Le poids : $\vec{P}_2$ (module P_2)
  – La tension du fil : $\vec{T}_2$ (module T_2)

- sur la poulie : – La tension $\vec{T}'$ (réaction due à $\vec{T}$ $\Rightarrow \vec{T}' = -\vec{T}$) (module T')
  – La tension $\vec{T}_2'$ (réaction due à $\vec{T}_2$ $\Rightarrow \vec{T}_2' = -\vec{T}_2$) (module T_2')

La poulie est sans masse, et sans frottement avec le fil

$\Rightarrow T' = T_2'$; et par conséquence : $T = T_2$

Les expressions des vecteurs forces par rapport au repère choisi sont :

- sur le corps $A + C$: $\vec{P} = -P \cdot \vec{j}$; $\vec{N} = N \cdot \vec{j}$; $\vec{T} = T \cdot \vec{i}$; $\vec{f}_s = -f_s \cdot \vec{i}$
- sur le corps B : $\vec{P}_2 = -P_2 \cdot \vec{j}$; $\vec{T}_2 = T_2 \cdot \vec{j}$

Au repos (c'est-à-dire à l'équilibre), le PFD s'écrit : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$

- sur le corps $A+C$: $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{f}_s = 0$ ....Eq ①

  La projection de l'équation ① sur le repère choisi, nous donne :

$$\begin{array}{l} \text{sur l'axe } (x) : \\ \text{sur l'axe } (y) : \end{array} \begin{cases} T - f_s = 0 \\ N - P = 0 \end{cases} \; ; \text{ avec : } f_s = \mu_s \cdot N$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T = \mu_s \cdot N \\ N = P \end{cases} \Leftrightarrow T = \mu_s \cdot P = \mu_s \cdot g \cdot (m_1 + m_3) \text{ ....Eq ②}$$

- sur le corps B : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{P}_2 + \vec{T}_2 = 0$ ....Eq ③

La projection de l'équation ③ sur le repère choisi, nous donne :

$$\begin{array}{l} \text{sur l'axe } (x) : \\ \text{sur l'axe } (y) : \end{array} \begin{cases} 0 = 0 \\ T_2 - P_2 = 0 \end{cases} \; ; \text{ avec : } T_2 = T$$

$$\Rightarrow \quad T = P_2 = m_2 \cdot g \text{ ....Eq ④}$$

En remplaçant par l'équation ④ dans l'équation ②, on trouve :

$$m_2 \cdot g = \mu_s \cdot g \cdot (m_1 + m_3)$$

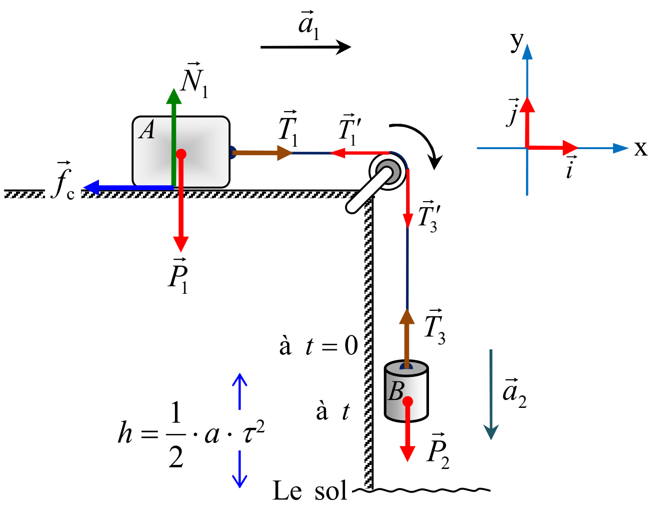
Cette équation représente la relation entres les masses des corps au repos,

Donc, la condition au repos est : $m_3 = \dfrac{m_2}{\mu_s} - m_1$

Cette valeur de m_3 est la masse minimale qui doit être placée au dessus du corps A pour assurer le repos du système.

Application Numérique : Pour : $m_1 = 1$ Kg , $m_2 = 110$ g $= 0{,}11$ Kg et $\mu_s = 0{,}1$, la valeur minimale de m_3 est : $m_3 = \dfrac{0{,}11}{0{,}1} - 1 = 0{,}1$ Kg $= 100$ g

2. Lorsque on soulève le corps C, les deux corps A et B commencent à se déplacer spontanément, de sorte que le corps A avance suivant l'horizon (l'axe (x) choisi) et le corps B tombe suivant la verticale (l'axe (y) choisi)



a) L'accélération de mouvement du système (A , B)

Les forces agissant sur les corps A et B sont :

- sur le corps A : – Le poids : $\vec{P}_1$ (module $P_1 = m_1 \cdot g$)
  - La réaction normale : $\vec{N}_1$ (module N_1)
  - La tension du fil : $\vec{T}_1$ (module T_1)
  - Le frottement cinétique : $\vec{f}_s$ (module $f_c = \mu_c \cdot N_1$)
- sur le corps B : – Le poids : $\vec{P}_2$ (module P_2)
  - La tension du fil : $\vec{T}_3$ (module $T_3 = T_1$, à cause de la poulie)

Les expressions des vecteurs forces par rapport au repère choisi sont :

- sur le corps A : $\vec{P}_1 = -P_1 \cdot \vec{j}$; $\vec{N}_1 = N_1 \cdot \vec{j}$; $\vec{T}_1 = T_1 \cdot \vec{i}$; $\vec{f}_c = -f_c \cdot \vec{i} = -\mu_c \cdot N_1 \cdot \vec{i}$
- sur le corps B : $\vec{P}_2 = -P_2 \cdot \vec{j}$; $\vec{T}_3 = T_3 \cdot \vec{j} = T_1 \cdot \vec{j}$

Les accélérations des corps A et B sont :

- le corps A : $\vec{a}_1$ (module a_1)
- le corps B : $\vec{a}_2$ (module a_2)

Le fil est inextensible $\Rightarrow a_1 = a_2 = a$

Donc, Les expressions des vecteurs accélération par rapport au repère choisi sont :

$\vec{a}_1 = a \cdot \vec{i}$ et $\vec{a}_2 = -a \cdot \vec{j}$

En mouvement, le PFD s'écrit : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \cdot \vec{a}$

- sur le corps A : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m_1 \cdot \vec{a}_1 \Leftrightarrow \vec{P}_1 + \vec{N}_1 + \vec{T}_1 + \vec{f}_c = m_1 \cdot \vec{a}_1$ ....Eq ⑤

La projection de l'équation ⑤ sur le repère choisi, nous donne :

$$\begin{aligned} &\text{sur l'axe } (x) : \\ &\text{sur l'axe } (y) : \end{aligned} \begin{cases} T_1 - \mu_c \cdot N_1 = m_1 \cdot a \\ N_1 - P_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow T_1 = m_1 \cdot a + \mu_c \cdot P_1$$

$$\Leftrightarrow \quad T_1 = m_1 \cdot (a + \mu_c \cdot g) \text{ ....Eq ⑥}$$

- sur le corps B : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m_2 \cdot \vec{a}_2 \Leftrightarrow \vec{P}_2 + \vec{T}_3 = m_2 \cdot \vec{a}_2$ ....Eq ⑦

La projection de l'équation ⑦ sur le repère choisi, nous donne :

$$\begin{aligned} &\text{sur l'axe } (x) : \\ &\text{sur l'axe } (y) : \end{aligned} \begin{cases} 0 = 0 \\ T_1 - P_2 = -m_2 \cdot a \end{cases} \Rightarrow \quad T_1 = -m_2 \cdot (a - g) \text{ ....Eq ⑧}$$

En remplaçant par l'équation ⑧ dans l'équation ⑥, on trouve :

$$m_1 \cdot (a + \mu_c \cdot g) = -m_2 \cdot (a - g)$$

Donc, l'expression de l'accélération est : $a = \left(\dfrac{m_2 - \mu_c \cdot m_1}{m_1 + m_2} \right) \cdot g$

b) Calcul de l'accélération a à partir du mouvement du corps B :

Le mouvement B suivant l'axe (y) est uniformément accéléré (sans vitesse initiale), donc son équation horaire est : $y(t) - y_0 = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$ (y_0 est sa position à $t = 0$)

Le corps B parcourue la distance jusqu'au sol pendant une durée $\tau = 2 \text{ s}$, donc :

$$y_{\text{sol}} - y_0 = h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \tau^2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2 \cdot h}{\tau^2}$$

c) L'expression du coefficient de frottement cinétique μ_c

$$a = \left(\frac{m_2 - \mu_c \cdot m_1}{m_1 + m_2} \right) \cdot g \quad \Rightarrow \quad \mu_c = -\frac{a}{g} \cdot \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1} \right) + \left(\frac{m_2}{m_1} \right)$$

Application Numérique : Pour : $m_1 = 1 \text{ Kg}$, $m_2 = 110 \text{ g} = 0{,}11 \text{ Kg}$, $h = 40 \text{ cm} = 0{,}4 \text{ cm}$,

et $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$,

- La valeur de l'accélération est : $a = \dfrac{2 \times 0{,}4}{2^2} = 0{,}2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

La valeur du coefficient de frottement cinétique est : $\mu_c = -\frac{0{,}2}{10}\cdot\left(\frac{1+0{,}11}{1}\right)+\left(\frac{0{,}11}{1}\right)\approx 0{,}09$

Exercice 06:

Le vecteur d'un mobile M de masse $m=1$ Kg, est:

$$\overrightarrow{OM}(t)=(3t^2-6t)\cdot\vec{i}-(t^3)\cdot\vec{j}+(3t+2)\cdot\vec{k}$$

$\Rightarrow$ Le vecteur vitesse de M à l'instant t est : $\vec{V}(t)=\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t)}{\mathrm{d}t}$

$$=(6t-6)\cdot\vec{i}-(3t^2)\cdot\vec{j}+3\cdot\vec{k}$$

$\Rightarrow$ Le vecteur accélération de M à l'instant t est : $\vec{a}(t)=\frac{\mathrm{d}\vec{V}(t)}{\mathrm{d}t}$

$$=6\cdot\vec{i}-(6t)\cdot\vec{j}$$

1. La force $\vec{F}(t)$ agissant à l'instant sur le point M :

Par application du PFD : $\vec{F}(t)=\sum\vec{F}_{\text{ext}}=m\cdot\vec{a}$

$$=6\cdot\vec{i}-(6t)\cdot\vec{j}$$

2. Le moment $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{/O}(\vec{F})$ par rapport à l'origine O :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{/O}(\vec{F})=\overrightarrow{OM}\wedge\vec{F}=\begin{bmatrix}\vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}\\ (3t^2-6t) & -t^3 & (3t+2)\\ 6 & -6t & 0\end{bmatrix}$$

$$=(18t^2+12t)\cdot\vec{i}+(18t+12)\cdot\vec{j}+(-12t^3+36t^2)\cdot\vec{k}$$

3. La quantité de mouvement $\vec{p}(t)$ du corps :

$$\vec{p}(t)=m\cdot\vec{V}$$

$$=(6t-6)\cdot\vec{i}-(3t^2)\cdot\vec{j}+3\cdot\vec{k}$$

Théorème de la quantité de mouvement : $\vec{F}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\vec{p}(t)}{\mathrm{d}t}$

Nous avons : $\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}(t)}{\mathrm{d}t} = 6\cdot\vec{i} - (6t)\cdot\vec{j} = \vec{F}(t)$

4. Le moment cinétique $\vec{\mathcal{L}}_{/O}$ par rapport à l'origine O :

$$\vec{\mathcal{L}}_{/O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} \quad = \begin{bmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k} \\ (3t^2-6t) & -t^3 & (3t+2) \\ (6t-6) & -3t^2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= (6t^3+6t^2)\cdot\vec{i} + (9t^2+12t-12)\cdot\vec{j} + (-3t^4+12t^3)\cdot\vec{k}$$

Théorème du moment cinétique : $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{/O}(\vec{F}) = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{L}}_{/O}}{\mathrm{d}t}$

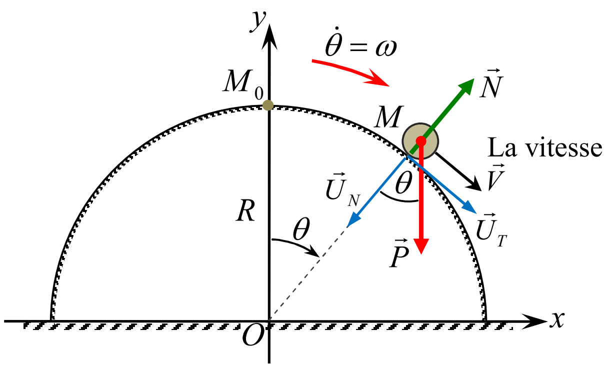
Nous avons : $\dfrac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{L}}_{/O}}{\mathrm{d}t} = (18t^2+12t)\cdot\vec{i} + (18t+12)\cdot\vec{j} + (-12t^3+36t^2)\cdot\vec{k}\ \vec{F}(t)$

$= \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/O}(\vec{F})$

Exercice 07:

1. Au cours de son mouvement, la particule est soumise aux forces suivantes :

- Le poids : $\vec{P}$ (module $P = m\cdot g$)
- La réaction normale : $\vec{N}$ (module N)



En appliquant le PFD : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\cdot\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{N} = m\cdot\vec{a}$ ....Eq ①

En utilisant le système des coordonnées intrinsèques :

Les expressions des vecteurs force et de l'accélération dans la base $(\vec{U}_N, \vec{U}_T)$ sont :

- $\vec{P} = P \cdot cos(\theta) \cdot \vec{U}_N + P \cdot sin(\theta) \cdot \vec{U}_T$;
- $\vec{N} = -N \cdot \vec{U}_N$;
- $\vec{a} = a_N \cdot \vec{U}_N + a_T \cdot \vec{U}_T = \frac{v^2}{R} \cdot \vec{U}_N + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{U}_T$

  Avec v est le module du vecteur vitesse la vitesse, et R le rayon de l'hémisphère.

La projection de l'équation ① sur la base $(\vec{U}_N, \vec{U}_T)$, nous donne :

$$\begin{cases} \text{sur } \vec{U}_N : & P \cdot cos(\theta) - N = m \cdot \frac{v^2}{R} \quad \text{............Eq(2)} \\ \text{sur } \vec{U}_T : & P \cdot sin(\theta) = m \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \text{..................Eq(3)} \end{cases}$$

Avec : $P = m \cdot g$, donc l'équation ③ $\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g \cdot sin(\theta)$

En multipliant cette dernière équation par $\mathrm{d}\theta$, donc :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}v = g \cdot sin(\theta) \cdot \mathrm{d}\theta$$

Avec : $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta} = \omega = \frac{v}{R}$ (le mouvement est circulaire)

Donc, l'équation différentielle de mouvement est : $v \cdot \mathrm{d}v = R \cdot g \cdot sin(\theta) \cdot \mathrm{d}\theta$

Par intégration entre la position M_0 ($\theta = 0$ et $v = 0$) et la position M (θ et v), on trouve : $\int_0^v v \cdot \mathrm{d}v = R \cdot g \cdot \int_0^\theta sin(\theta) \cdot \mathrm{d}\theta \quad \Leftrightarrow$

$$\frac{v^2}{2} = R \cdot g \cdot [-cos(\theta)]_0^\theta = R \cdot g \cdot (1 - cos(\theta))$$

Et donc, la vitesse en position M est : $v = \sqrt{2 \cdot R \cdot g \cdot (1 - cos(\theta))}$

2. L'expression de la réaction normale $\vec{N}$:

L'équation ② $\Rightarrow N = m \cdot g \cdot cos(\theta) - m \cdot \frac{v^2}{R}$

En remplaçant par l'expression de v, on trouve l'expression de N en fonction de θ:

$$N = m \cdot g \cdot cos(\theta) - 2 \cdot m \cdot g \cdot (1 - cos(\theta))$$
$$= m \cdot g \cdot (3\, cos(\theta) - 2)$$

3. Lorsque la particule quitte la surface de l'hémisphère, donc la réaction normale $\vec{N}$ s'annule :

$$\vec{N} = \vec{0} \Leftrightarrow N_{\text{à}\,\theta'} = m \cdot g \cdot (3\cos(\theta') - 2) = 0$$

$$\Rightarrow 3\cos(\theta') - 2 = 0$$

Donc l'angle θ' égal à : $\theta' = arccos\left(\frac{2}{3}\right) \approx 48{,}2°$

Exercices Supplémentaires

Exercice 01 :

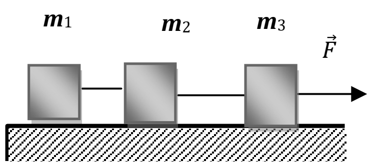
Trois blocs de masse "$\boldsymbol{m_1}$", "$\boldsymbol{m_2}$" et "$\boldsymbol{m_3}$" reliés par un fil inextensible et glissent sur une table horizontale lisse. Si on applique une force horizontale "$\vec{\boldsymbol{F}}$" sur "$\boldsymbol{m_3}$",

***1°/** Déterminer l'accélération du système et les tensions dans le fil.*

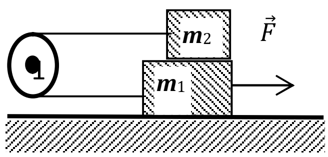
On prend maintenant deux blocs de masse "$\boldsymbol{m_1}$" et "$\boldsymbol{m_2}$" ont les superposent ($\boldsymbol{m_2}$ sur $\boldsymbol{m_1}$)et on les relit par un fil inextensible passant à travers la gorge d'une poulie de masse "$\boldsymbol{M}$", de rayon "$\boldsymbol{r}$"et de moment d'inertie "$\boldsymbol{I}$". Si le coefficient de frottement entre les deux masses et le même que celui de "$\boldsymbol{m_1}$"avec la table supposée rugueuse est "$\boldsymbol{\mu}$"et la force appliquée "$\vec{\boldsymbol{F}}$" à "$\boldsymbol{m_1}$" est horizontale,

2°/ Représenter *les forces sur les différents éléments.*

3°/ calculer *l'accélération du système.*



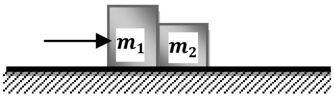
a

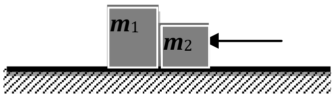


b

Exercice 02 :

Sur un plan lisse on met deux masses "$\boldsymbol{m_1}$"et "$\boldsymbol{m_2}$" en contact. En appliquant une force $\vec{\boldsymbol{F}}$horizontale sur "$\boldsymbol{m_1}$". Quelle est la force de contact de "$\boldsymbol{m_2}$" sur "$\boldsymbol{m_1}$" ? Si on inverse le sens de la force, mais on l'applique cette fois sur la masse "$\boldsymbol{m_2}$". Est-ce-que la force de contacte de "$\boldsymbol{m_1}$" sur "$\boldsymbol{m_2}$" est la même que précédemment ? Justifier.





Exercice 03 :

On donne $\vec{r} = (3t^2 - 6t)\vec{\imath} - 4\,t^3\vec{\jmath} + (3t+2)\vec{k}$ *le vecteur position d'un corps de masse*

m = 6 kg.

Trouver la force agissant sur le corps et sa quantité de mouvement. Vérifier que $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$

Exercice 04 :

Un trièdre orthonormé $(\boldsymbol{O}, \vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}, \vec{\boldsymbol{k}})$ *est lié au sol d'axe* $\boldsymbol{Oy}$ *ascendant. Le champ de pesanteur, supposé uniforme, est noté* $\vec{g}$. *A* $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{0}$, *un projectile* M, *de masse* $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{1}\ \boldsymbol{kg}$ *est lancé du point* $\boldsymbol{O}$ *avec une vitesse initiale* $\vec{v}_0$ *située dans le plan* $0xy$, *faisant un angle* α *avec l'horizontale avec* $\boldsymbol{v_0} = \boldsymbol{10}\ \boldsymbol{m/s}$.

1. *En projetant la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel terrestre supposé galiléen, déterminer les composantes du vecteur* $\overrightarrow{OM}$.

2. *Exprimer, en fonction de* v_0, g *et* α *, le temps nécessaire pour que le projectile atteigne sa plus haute altitude* S. *Quelles sont les coordonnées de ce point* S.

3. *Pour quelle valeur de l'angle* α, *la portée du lancement* (OP) *est-elle maximale ? Calculer cette portée.*

Exercice 05 :

Une voiture se déplace sur une route droite à vitesse constante $\vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v_0}\vec{\boldsymbol{\imath}}$, *passant à côté d'une station de bus prise comme origine fixe. A ce moment un motocycliste, situé à une distance* $\boldsymbol{l}$ *de cette station, part avec une accélération*

'a_0' *dans la direction perpendiculaire* $\vec{a} = a_0\vec{j}$. *Etudier le mouvement du motocycliste en donnant :*

1°/*Le référentiel fixe et le référentiel mobil.*

2°/ *L'équation de la trajectoire du motocycliste par rapport à la voiture.*

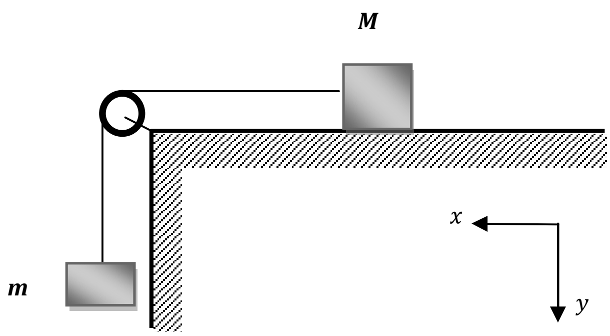
3°/ *La distance parcourue par le motocycliste lorsque la voiture arrive au point de départ de ce dernier*

Exercice 06 :

Un système est constitué de deux masse(,). La masse = . se déplace verticalement et reliée à la masse = ,qui se déplace horizontalement sur une table lisse, par un fil inextensible de masse négligeable à travers une poulie idéale (masse#0 et frottements nuls)

1°/*Déterminer l'accélération du système ainsi que la tension dans le fil.*

2°/*La même question si cette fois la table est rugueuse de coefficient de frottement .*



CHAPITRE IV

TRAVAIL ET ENERGIE

Objectif

- Calculer le travail d'une force variable ou non sur un déplacement quelconque.
- Application au calcul du travail de la force de pesanteur et de la force élastique quelle que soit l'orientation des axes choisis.
- Savoir utiliser le théorème de l'énergie cinétique.
- Comprendre comment définir l'énergie potentielle à partir de la notion de force conservative.
- Apprendre à utiliser la notion d'énergie mécanique.

IV.1. TRAVAIL D'UNE FORCE [11, 12]

IV.1.1. Force constante sur un déplacement rectiligne

Soit une force constante agissant sur un point matériel **M**. Sous l'effet de $\vec{F}$, **M** se déplace entre les points **A** et **B**. Par définition, le travail de la force $\vec{F}$ sur le déplacementrectiligne **AB** est donné par : $w_{\vec{F}} = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = F.AB\cos\alpha$

α**:** est l'angle que fait $\vec{F}$avec $\overrightarrow{AB}$

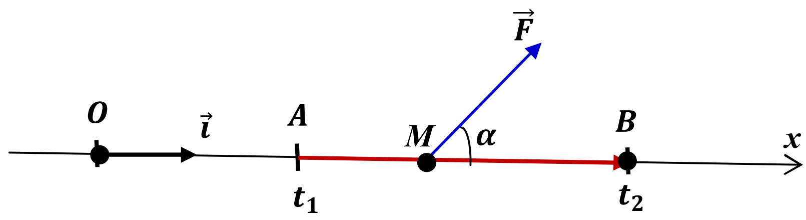
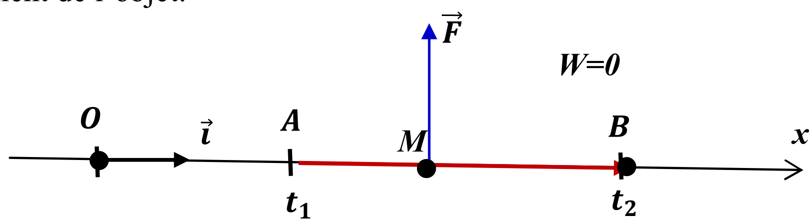


Figure IV.1 : Déplacement *du point d'application d'une force sur un chemin rectiligne.*

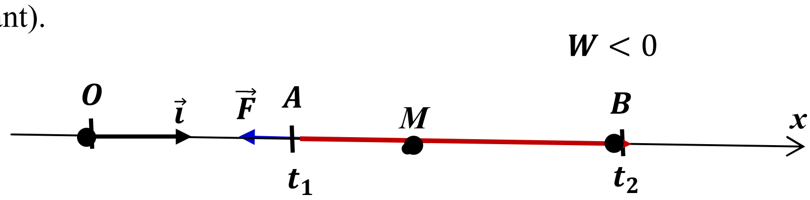
Remarque

Le travail est soit positif, nul ou négatif selon la direction de la force $\vec{F}$ *par rapport au deplacement.*

- Si $\vec{F}$ est perpendiculaire à AB le travail est nul, la force $\vec{F}$n'effectue aucun travail lors du déplacement de l'objet.



- Lorsque la force s'oppose au déplacement, elle est **résistante** et le travail est négatif (travail résistant).



- Lorsque la force est **motrice** le travail est positif (travail moteur). (*Figure IV.1*).

L'unité de travail, dans le système **SI**, est le **Joule** (symbole **J**).

IV.1.2. Travail élémentaire

Dans le cas où la force $\vec{F}$ varie au cours de déplacement, qui peut être quelconque, il n'est plus possible d'utiliser l'expression précédente. On décompose le trajet AB en une succession de déplacements élémentaires $\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{MM'}$ infiniment petits et donc rectilignes.

Sur $\overrightarrow{MM'}$, la force $\vec{F}$ peut être considéré comme constante ; alors on définit le travail élémentaire donné par : $\boldsymbol{dw_{M\to M'}(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{dl}}$

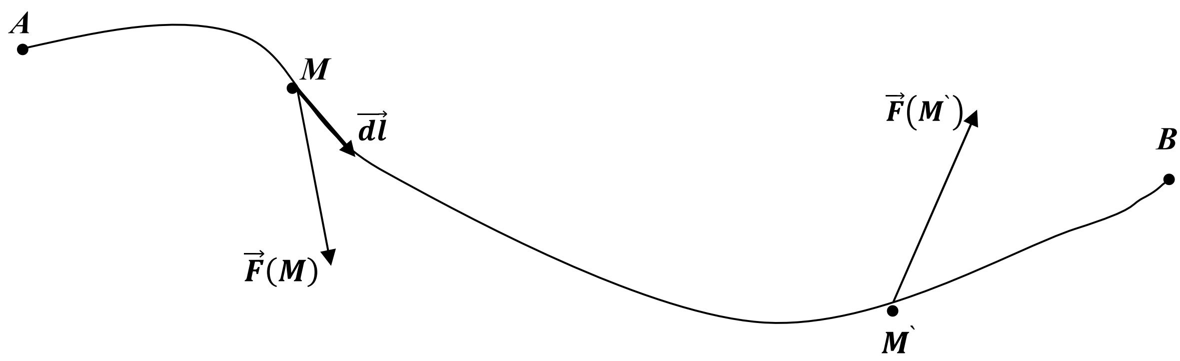


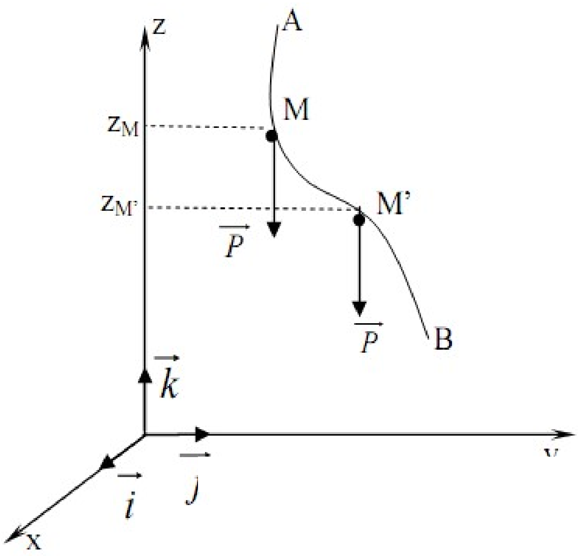
***Figure IV.2 : Force** variable sur le déplacement AB quelconque. Sur le déplacement élémentaire, la force est considérée comme constante car le déplacement est infiniment petit et la force n'a pas le temps de varier.*

IV.1.3. Force variable sur un déplacement quelconque

Pour obtenir le travail total sur le déplacement total ***AB***, il suffit d'additionner les travaux élémentaires. $\boldsymbol{W_{M\to M'}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{dl}}$

Le travail d'une force sur un déplacement ***AB*** correspond à la circulation ***C*** du vecteur force le long de ce trajet.

IV.1.4. Travail de la force de pesanteur



$h = z_M - z_{M'}$

$$w_{\vec{P}} = \int_M^{M'} \vec{P}.\overrightarrow{dl}$$

Or $\vec{P} = -P\vec{k}$, et $\overrightarrow{dl} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$

$\Rightarrow \quad \vec{P}.\overrightarrow{dl} = -Pdz$

donc, $W_{\vec{P}} = \int_M^{M'} \vec{P}.\overrightarrow{dl} = \int_M^{M'} -Pdz$

$W_{\vec{P}} = -P(z_{M'} - z_M) = P(z_M - z_{M'}) = Ph$

$W_{\vec{P}} =$

IV.1. 5. Travail d'une force élastique

$\vec{F} = -k\Delta l\vec{\imath} = -k\ (l - l_0)\vec{\imath}$

Avec $\Delta l = l - l_0 = x$

$\vec{F} = -kx\vec{\imath}$

$dW_{\vec{F}} = \vec{F}.\vec{dl} = -kx\vec{\imath}dx\vec{\imath}$

$dW_{\vec{F}} = -kxdx = -d\left(\frac{1}{2}kx^2\right)$

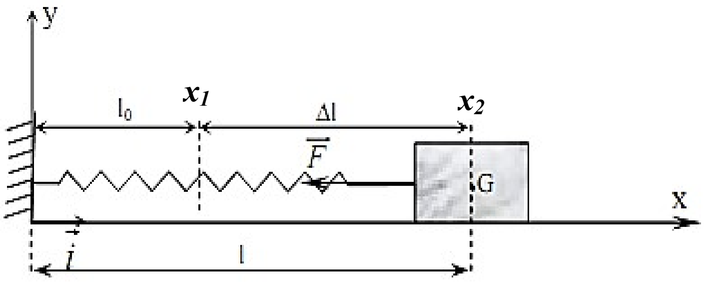


Figure IV.4:*Illustration de la force de tension*

Lorsque $\vec{F}$ passe de la position x_1 à x_2, on a :

$$W_{\vec{F}} = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}.\vec{dl} = \int_{x_1}^{x_2} -kxdx = -\frac{1}{2}k({x_2}^2 - {x_1}^2)$$

IV.2. Puissance d'une force

La puissance d'une force $\vec{F}$ est le rapport du travail de celle-ci au temps mis pourl'accomplir. Selon la durée considérée, cette puissance est dite moyenne ou instantanée. L'unité de la puissance, dans le système **SI**, est le **Watt**.

Puissance moyenne : $P_{moy} = \frac{\Delta W_{\vec{F}}}{\Delta t}$

Puissance instantanée :$P(t) = \frac{dW_{\vec{F}}}{dt}$

La puissance d'une force $\vec{F}$ qui, dans l'intervalle de temps ***dt,*** parvient à mouvoir un mobile de la distance $\vec{dl}$ (i.e. lui confère la vitesse$\vec{v} = \frac{\vec{dl}}{dt}$) peut s'écrire,

$$P(t) = \frac{dW_{\vec{F}}}{dt} = \frac{\vec{F}.\vec{dl}}{dt} = \vec{F}.\frac{\vec{dl}}{dt} = \vec{F}.\vec{v}$$

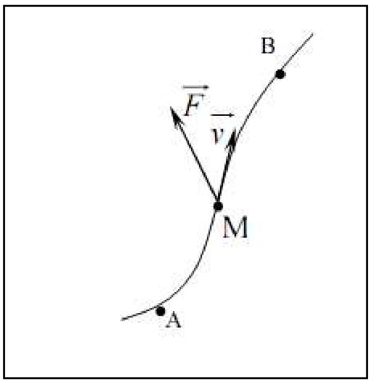
IV.3. ÉNERGIE

IV. 3.1. Énergie cinétique

On définit l'énergie cinétique d'un point matériel ***M***, de masse ***m*** et animé avec une vitesse $\vec{v}$, par la grandeur E_c , telle que :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Soit un point matériel ***M***, de masse ***m***, déplacé entre les points ***A*** et ***B*** sous l'action d'une force extérieure $\vec{F}$.D'après le principe fondamental de la dynamique, on a :



$$\sum \vec{F}_{ext} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Le travail élémentaire de $\vec{F}$ est donné par :

$$dW_{\vec{F}} = \vec{F}.\vec{dl} = \left(m\frac{d\vec{v}}{dt}\right).(\vec{v}(t)dt)$$

Car$\vec{v}(t) = \frac{\vec{dl}}{dt} \Rightarrow \vec{dl} = \vec{v}(t)dt$

Il vient $dW_{\vec{F}} = \vec{F}.\vec{dl} = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$

Le travail effectué entre les points A et B sera :

$$\overrightarrow{W}_F = \int_A^B \vec{F}.\vec{dl} = \int_A^B d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \int_A^B dE_c = E_c(B) - E_c(A)$$

IV.3.2. Théorème de l'énergie cinétique

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel soumis à un ensemble de forces extérieures entre une position **A** et une autre position **B,** est égale à la somme des travaux effectué par ces forces entre ces deux points.

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \sum w_{A\to B}(\vec{F}_{ext})$$

Remarque :

Dans un référentiel non inertiel R' *on peut encore appliquer ce théorème mais il convient alors de prendre en compte les travaux des forces d'inertie !*

IV.3.3. Forces conservatives et non conservatives

Les Forces conservatives sont les forces dont le travail ne dépend pas du chemin suivi mais que des points de départ et d'arrivée.

Exemples

- Travail du poids ;

- Travail d'une force constante ;
- Travail de la tension du ressort.

Les forces sont dites non conservatives lorsque leur travail dépend du chemin suivi.

Exemple

- Force de frottement.

IV.3.4. Énergie potentielle

Par définition, le travail des forces conservatives ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de l'état initial et de l'état final. Le travail de ces forces peut s'exprimer à partir d'une fonction d'état appelée énergie potentielle $\boldsymbol{E_P}$

$$\Delta E_P = E_P(B) - E_P(A) = -W_{A\to B}(\vec{F}_C)$$

Avec $\vec{F}_C$: force conservative.

Lorsque la variation est très faible, $\Delta E_P \to dE_P$.

En utilisant la notion du travail élémentaire, on a :

$$dE_P = -\vec{F}_c.\overrightarrow{dl}$$

D'autre part, le gradient $(\overrightarrow{grad})$ d'une fonction $\boldsymbol{f}$ est défini par :

$$\overrightarrow{grad}f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

La différentielle totale de $\boldsymbol{f}$ est donnée par :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

On définit un point M, repéré dans le référentiel$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ par son vecteur $\overrightarrow{OM}$, tel que,

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \quad \Rightarrow \quad d\overrightarrow{OM} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$$

$$\overrightarrow{grad}f.\overrightarrow{dOM} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right).(dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k})$$

Alors $\overrightarrow{grad}f.d\overrightarrow{OM} = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$

Il vient, $\overrightarrow{grad}f.d\overrightarrow{OM} = df \qquad (*)$

A partir de l'équation $(*)$, on peut facilement remarquer que :

$dE_P = -\vec{F}_c.\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{grad}f.\overrightarrow{dl}$avec $\overrightarrow{dl} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$

$\vec{F}_c = -\overrightarrow{grad}E_P = \vec{\nabla}E_P$ où $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$

$$\boldsymbol{dE_P = \overrightarrow{grad}E_P.\overrightarrow{dl}}$$

Alors

En appliquant l'opérateur rotationnel des deux cotés de l'équation précédente on aura

$$\overrightarrow{rot}\vec{F}_c = -\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}E_P) = \vec{0}$$

On peut vérifier si une force est conservative sans pour autant déterminer $\boldsymbol{E_P}$

IV.3. 5. Exemples d'énergie potentielle

➢ Énergie potentielle élastique

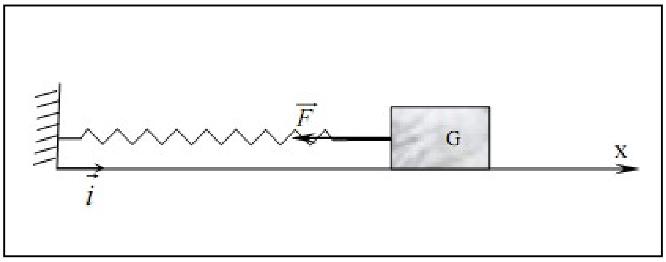
$\vec{F}$ est une force conservatrice

$\vec{F} = -kx\vec{\imath}$

$\vec{F}_c = -\overrightarrow{grad}E_P = -\frac{dE_P}{dx}\vec{\imath}$

$\Rightarrow \frac{dE_P}{dx} = kx \Rightarrow E_P = \int kxdx$

$E_P = \frac{1}{2}kx^2 + cste$



➢ Énergie potentielle gravitationnelle

$\vec{F}_g$ est une force conservatrice

$\vec{F}_g(r) = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}$

$\vec{F}_g(r) = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$

avec $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$

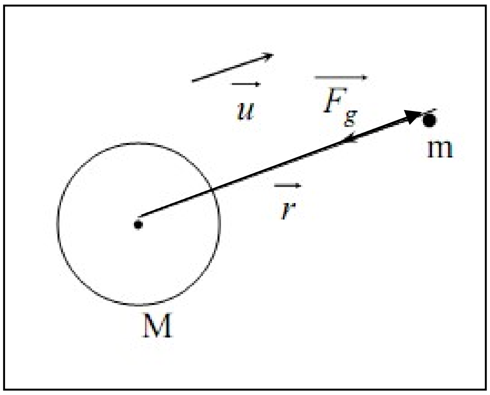
$\vec{F}_g(r) = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}$

$\vec{F}_g = -\overrightarrow{grad}E_P(r) = -\frac{dE_P}{dr}\vec{u}$

$\Rightarrow \frac{dE_P}{dr} = G\frac{Mm}{r^2}$

$E_P(r) = \int G\frac{Mm}{r^2}dr$

$\Rightarrow E_P(r) = -G\frac{Mm}{r} + cste$



IV. 3.6. Énergie mécanique

Soit un système qui se déplace, entre les points ***A*** et ***B*** sous l'effet des forces conservatives et non conservatives. D'après le théorème de l'énergie cinétique, on a :

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \sum W_{A\to B}(\vec{F}_C) + \sum W_{A\to B}(\vec{F}_{NC})$$

$\vec{F}_C$ **:** Forces conservatives. $\vec{F}_{NC}$ **:** Forces non conservatives

Alors $E_c(B) - E_c(A) = -\left(E_p(B) - E_p(A)\right) + \sum W_{A\to B}(\vec{F}_{NC})$

Puisque $\sum W_{A\to B}(\vec{F}_C) = -\left(E_p(B) - E_p(A)\right)$

Il vient$\boldsymbol{E_c(B) + E_p(B) - \left(E_c(A) + E_p(A)\right) = \sum W_{A\to B}(\vec{F}_{NC})}$

On introduit une nouvelle quantité qu'on va l'appeler ***Energie Total*** du système Symbolisée par (***E***), telle que,

$$\boldsymbol{E_c + E_p = Energie\ Cinétique + Energie\ Potentielle}$$

Alors, entre les deux points A et B

$$\boldsymbol{E(B) - E(A) = \sum W_{A\to B}(\vec{F}_{NC})}$$

➤ Théorème de l'énergie mécanique

La variation de l'énergie mécanique d'un système, en mouvement entre deux points ***A*** et ***B***, est égale à la somme des travaux des forces extérieures non conservatives appliquées à ce système,

$$\boldsymbol{E(B) - E(A) = \sum w_{A\to B}(\vec{F}_{NC})}$$

Cependant, lorsque le système est isolé (c'est-à- dire, il ne subit aucune force extérieure non conservative) l'énergie mécanique se conserve.

Théorème de l'énergie mécanique

La variation d'énergie mécanique d'un système entre deux points A et B est égalela somme des travaux des forces extérieures non-conservatives appliquées à ce système.

IV.4. Stabilité d'un système

IV.4.1. Définition de la stabilité

Pour un système soumis uniquement à une force conservative $\vec{F}$, il est intéressant de savoir s'il existe ou pas des états d'équilibre. La forme locale de l'énergie potentielle permet d'écrire que : $\boldsymbol{\vec{F}_c = -\overrightarrow{grad}E_P}$

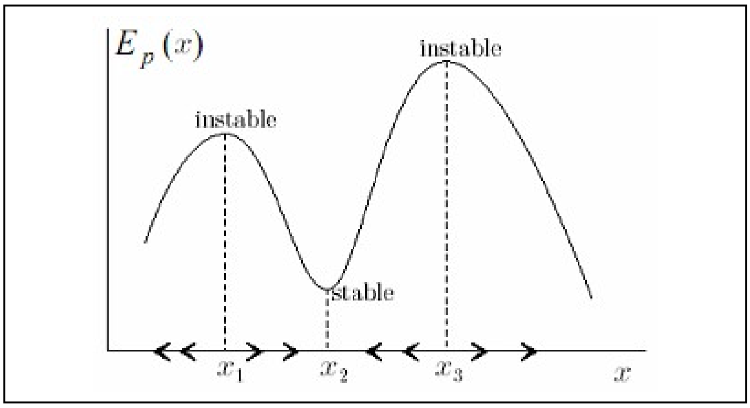
Dans le cas où l'énergie ne dépend que de la variable $\boldsymbol{x}$, cela revient à dire que : $\boldsymbol{\vec{F}_c = -\frac{dE_P}{dx}\vec{i}}$

La condition d'équilibre, pour n'importe quel système soumis à un ensemble de forces, est que la somme ou la résultante de l'ensemble des forces est égale a zéro ($\sum \vec{F} = \vec{0}$)

Dans le cas d'un système soumis uniquement à une force conservative $\boldsymbol{\vec{F}_c}$ celle-cidevrait être nulle, il vient : $F_c = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dE_P}{dx} = 0$

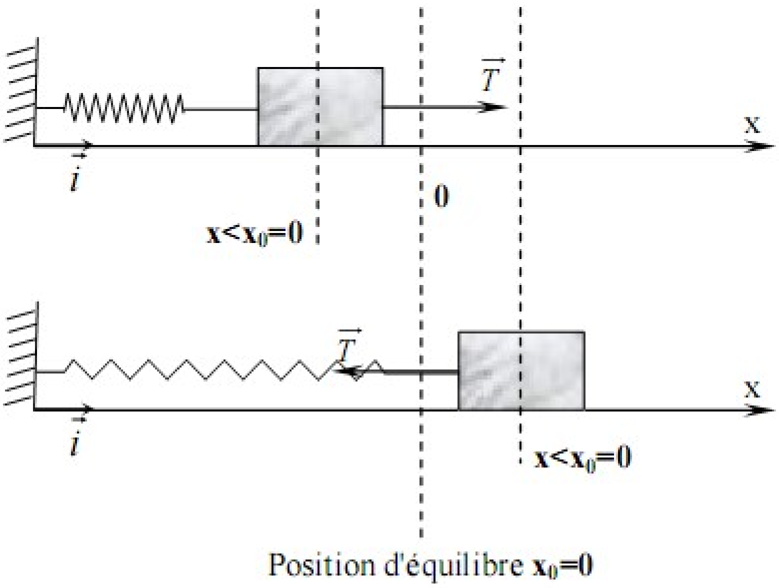
Une position d'équilibre se traduit donc par un extremum de la fonction énergie potentielle. En d'autres termes, l'énergie potentielle devrait être maximale ou minimal pour que le système soit en équilibre.

Un équilibre est dit stable si, à la suite d'une perturbation qui a éloigné le système de cette position, celle-ci y retourne spontanément. Dans le cas contraire, l'équilibre est dit instable.



IV.4.2. Condition de stabilité

Soit le cas de la figure ci-dessous, cas où l'énergie potentielle ne dépend que d'une variable x.



Supposant que la dérivée de l'énergie potentielle à x_0 est nulle $\left(\frac{dE_P}{dx}\Big|_{x=x_0} = 0\right)$

Pour une perturbation amenant le système à $x < x_o$, la valeur algébrique de la force doit être positive pour ramener le système vers x_o, $F_c > 0$

Donc $\frac{dE_P}{dx} < 0$ $\quad puisque \quad$ $\boldsymbol{F_c} = -\frac{dE_P}{dx}$

Dans le cas contraire $x > x_o$, la force doit être négative et donc $\frac{dE_P}{dx} > 0$

L'énergie potentielle E_P décroît avant x_o et croit après x_o. Elle présente donc un minimum pour $x = x_0$. Dans ce cas, la fonction $\frac{dE_P}{dx}$ est une fonction croissante qui s'annule pour $x = x_0$. La condition de stabilité, c'est-à-dire, E_P minimale, peut donc se traduire par $\frac{d^2E_P}{dx^2} > 0$ au voisinage de x_o et donc pour $x = x_0$. Dans le cas contraire, la position sera une position d'équilibre instable.

Equilibre stable pour $x = x_0 \Leftrightarrow E_p(x_0)\ minimale$

$$\Downarrow$$

$$\left.\frac{dE_P}{dx}\right|_{x=x_0} = 0 \qquad et \qquad \left.\frac{d^2E_P}{dx^2}\right|_{x=x_0} > 0$$

Equilibre instable pour $x = x_0 \Leftrightarrow E_p(x_0)\ maximale$

$$\Downarrow$$

$$\left.\frac{dE_P}{dx}\right|_{x=x_0} = 0 \qquad et \qquad \left.\frac{d^2E_P}{dx^2}\right|_{x=x_0} < 0$$

Un système, livré à lui-même, évolue spontanément vers un état d'équilibre qui correspond à une position pour laquelle l'énergie potentielle est minimale.

Série n°4 :Travail et Energie

Exercice 01 :

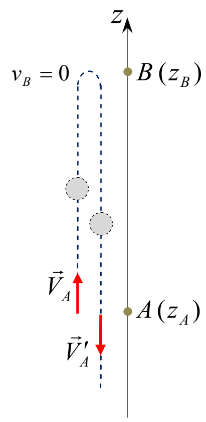
Dans le plan (xOy), un champ vectoriel $\vec{F}(x,y)$ est définie par :

$$\vec{F}(x,y)=3(y-x^2)\ \vec{i}+3(x-y^2)\ \vec{j}$$

1. Démonter que le champ $\vec{F}$ dérive d'une fonction scalaire $f(x,y)$.
2. Trouver l'expression de $f(x,y)$, sachant que $f(0,0)=0$.

Exercice 02 :

Une masse ponctuelle m est lancée vers le haut depuis le point A avec une vitesse initiale v_A, comme le montre la figure ci-contre.



En supposant que la force de frottement de l'air est verticale et de valeur constante f.

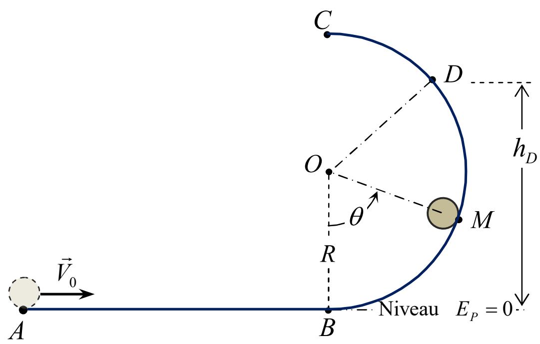
En utilisant le théorème de l'énergie cinétique $\Delta E_C = \sum W(\vec{F}_{\text{ext}})$, calculer :

1. La hauteur ($h = \left\| \overrightarrow{AB} \right\|$) atteinte par la masse m.
2. La vitesse (v'_A) de la masse m lorsqu'elle repasse par le point de lancement.

On donne : $g=10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, $m = 200\ \text{g}$, $v_A = 10\ \text{m.s}^{-1}$, $f = 0{,}5\ \text{N}$

Exercice 03 :

Une bille, de masse $\boldsymbol{m}$, se déplace sans frottement sur une trajectoire $\boldsymbol{ABC}$ formée de deux parties. La partie $\boldsymbol{BC}$ est un demi-cercle de centre O et de rayon R (figure ci-contre).

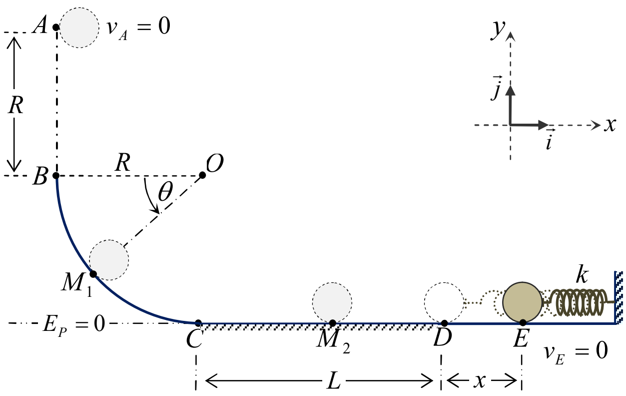


À l'instant $\boldsymbol{t = 0}$, la bille est lancée de $\boldsymbol{A}$ avec une vitesse initiale horizontale de valeur $\boldsymbol{v_0}$. Sur la partie AC, la position M de la bille est repérée par l'angle θ ,entre les vecteurs $\overrightarrow{\boldsymbol{OB}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$.

1. Représenter en position M , les forces agissant sur la bille.
2. En utilisant le principe de conservation de l'énergie mécanique $\Delta E_T = 0$, déterminer, en fonction de g, v_0, R et θ, la vitesse de la bille à la position M .
3. En utilisant le P.F.D, trouver, en fonction de g, v_0, R et θ, l'expression du module N de la réaction normale appliquée sur la bille en position M .
4. Déterminer, en fonction de g et R , la valeur de v_0 pour laquelle la bille peut quitter la surface du demi-cercle à un point D de hauteur $h_D = \frac{5R}{3}$.

Exercice 04 :

A l'instant $t = 0$, un corps ponctuel, de masse m, est libéré du repos au point A , et se déplace le long du chemin $ABCDE$ (figure ci-contre).



1. Entre les positions A et B , le corps est en chute libre, puis se déplace sans frottement le long d'un quart de cercle BC de rayon R .
   a) En utilisant le principe de conservation de l'énergie mécanique, déterminer, en fonction de g, R et θ, la vitesse du corps à la position M_1.
   b) Déduire la vitesse (v_C) du corps au point C .
2. Sur la piste horizontale CD , de longueur $L = \frac{3}{2}R$, le corps est soumis à une force de frottement ($\vec{f}_c$) qui fait diminuer progressivement sa vitesse jusqu'à $v_D = \frac{v_C}{2}$ au point D .
   a) Représenter en position M_2, les forces agissant sur le corps.
   b) En utilisant le P.F.D, trouver l'expression de f_c en fonction du coefficient de frottement cinétique (μ_c) de la piste CD .
   c) A l'aide du théorème de l'énergie cinétique, calculer la valeur de μ_c .

3. En fin de la piste CD (au point D), le corps percute un ressort horizontal libre de raideur k et le comprime d'une contraction $x = \frac{R}{4}$.
   a) Représenter en position E, les forces agissant sur le corps.
   b) Si le corps arrive au point E avec une vitesse nulle ($v_E = 0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$), déterminer en fonction de m et g, la constante de raideur k du ressort.

Exercice 05 :

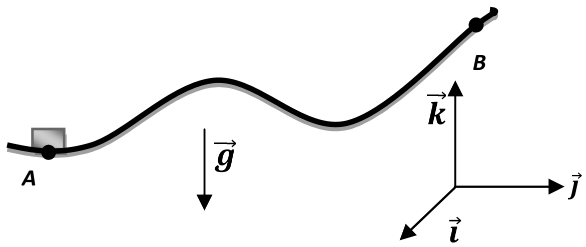
Une masse $\boldsymbol{m = 3\ kg}$ est déplacée de **A** à $\boldsymbol{B}$ $\left(\vec{r}_B = 15\vec{i} + 7\vec{j} - 6\vec{k}\right)$ pendant un temps $\boldsymbol{t = 2\ s}$ sous l'action de la gravité et d'une force constante $\vec{F}_a = 12\vec{i} - 3\vec{j} + 21\vec{k}$. Lorsqu'elle atteint $\boldsymbol{B}$ sa vitesse est $\vec{v}_B = 12\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$

1°/Déterminer sa vitesse $\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{A}}$ lorsqu'elle était au point ***A***.

2°/Déterminer le déplacement $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$.

3°/Quel est le travail effectué par la force $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{a}}$?

4°/Quelle est la variation de l'énergie potentielle **ΔU** lorsqu'elle passe de **A** à **B**.

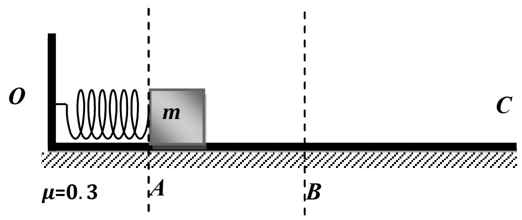


Exercice 06 :

Une masse $\mathbf{m = 2\ kg}$, est lâché du repos à partir du point **A** sur un plan horizontal rugueux de coefficient de frottements $\boldsymbol{\mu = 0.3}$ après une compression du ressort, de raideur $\mathbf{k = 200\ N/m}$, de $\mathbf{x_0 = 0.5}$. Arrive à **B**, elle quitte le ressort et continue son mouvement sur ce plan jusqu'à ce qu'elle s'arrête à **C.** (Utiliser les théorèmes de l'énergie)

1°/Quelle est sa vitesse $\mathbf{v_B}$ au point **B.**

2°/Quelle est la distance **' BC '** parcourue de **B** jusqu'à l'arrêt au point **C.** ($\mathbf{g = 10\ m/s^2}$)



Corrigé type : Série n°4

Exercice 01 :

Dans le plan (xOy), un champ vectoriel $\vec{F}(x,y)$ est définie par :

$\vec{F}(x,y)=3(y-x^2)\ \vec{i}+3(x-y^2)\ \vec{j}$

1. $\vec{F}$ est dérivé d'une fonction scalaire $f(x,y) \Leftrightarrow \overrightarrow{Rot}(\vec{F})=\vec{0}$

Avec : $\overrightarrow{Rot}(\vec{F})=\vec{\nabla}\wedge\vec{F}=\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix}=\left[\dfrac{\partial F_z}{\partial y}-\dfrac{\partial F_y}{\partial z}\right]\cdot\vec{i}-\left[\dfrac{\partial F_z}{\partial x}-\dfrac{\partial F_x}{\partial z}\right]\cdot\vec{j}+\left[\dfrac{\partial F_y}{\partial x}-\dfrac{\partial F_x}{\partial y}\right]\cdot\vec{k}$

Pour : $\begin{cases} F_x=3(y-x^2) \\ F_y=3(x-y^2) \\ F_z=0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{Rot}(\vec{F})=[0-0]\cdot\vec{i}-[0-0]\cdot\vec{j}+[3-3]\cdot\vec{k}=\vec{0}$

$\Rightarrow$ Le champ $\vec{F}(x,y)=3(y-x^2)\cdot\vec{i}+3(x-y^2)\cdot\vec{j}$ est dérivé d'une fonction scalaire $f(x,y)$.

2. L'expression de $f(x,y)$:

$\vec{F}$ est dérivé de $f(x,y) \Leftrightarrow \vec{F}=\overrightarrow{grad}(f)=\vec{\nabla}(f)$

$$\Rightarrow F_x\cdot\vec{i}+F_y\cdot\vec{j}+F_z\cdot\vec{k}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\vec{k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=3(y-x^2) \ \text{.............Eq(1)} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=3(x-y^2) \ \text{.............Eq(2)} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}=0 \ \text{..........................Eq(3)} \end{cases}$$

Etape① : D'après l'équation (1) : $\dfrac{\partial f}{\partial x}=3(y-x^2) \Rightarrow \partial f=3(y-x^2)\partial x$

Par intégration, on trouve : $\int\partial f=f=\int 3(y-x^2)\partial x$

L'intégrale est par rapport à "x", donc : $f=3y\int\partial x-\int 3x^2\,\partial x$

$=3yx-x^3+C_1(y,z)$

Tels que : $C_1(y,z)$ est la constante de l'intégrale par rapport à "x", donc elle est indépendante de "x" mais variable en fonction de "y" et "z".

Alors, pour déterminer la fonction $f(x,y,z)$, on doit chercher l'expression de la fonction $C_1(y,z)$

Etape② : En remplaçant par l'expression $f = x^3 - 3yx + C_1(y,z)$ dans l'équation (2) :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3(x - y^2) \Rightarrow 3x + \frac{\partial C_1}{\partial y} = 3x - 3y^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial C_1}{\partial y} = -3y^2$$

$\Rightarrow \partial C_1 = -3y^2\, \partial y$

Par intégration, on trouve : $\int \partial C_1 = C_1 = -\int 3y^2\, \partial y$

L'intégrale est par rapport à "y", donc : $C_1 = -y^3 + C_2(z)$

Tels que : $C_2(z)$ est la constante de l'intégrale par rapport à "y", donc elle est indépendante de "x" et de "y" mais variable en fonction de "z".

Etape③ : En remplaçant par l'expression $f = -x^3 + 3yx - y^3 + C_2(z)$ dans l'équation (3) :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial C_2}{\partial z} = 0$$

$\Rightarrow C_2(z) = cte = C$

Tels que : C est une constante indépendante de "x", de "y" et de "z".

$\Rightarrow$ l'expression de la fonction f est $f(x,y) = -x^3 - y^3 + 3yx + C$

La constante C peut être déterminée à partir de la condition initiale : $f(0,0) = 0 \Rightarrow C = 0$

Alors : le champ $\vec{F}(x,y) = 3(y - x^2)\cdot\vec{i} + 3(x - y^2)\cdot\vec{j}$ est dérivé de la fonction scalaire : $f(x,y) = -x^3 - y^3 + 3yx$

Exercice 02 :

Une masse ponctuelle m est lancée vers le hautdepuis le point A avec une vitesse initiale v_A.

Le mouvement de m se déroule en trois phase :

- **Mouvement ascendant :** dirigé vers le haut (de A vers B)
- **Repos momentané :** au point B $(v_B = 0)$

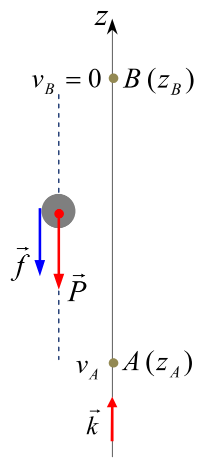
- **Mouvement descendant :** dirigé vers le bas (de B vers A)

1. Au cours du mouvement ascendant (de A vers B) :

a masse m est soumise aux forces suivantes :

– Le poids : $\vec{P} = -m\,g\;\vec{k}$

– Laforce de frottement de l'air: $\vec{f} = -f\;\vec{k}$



n utilisant le théorème de l'énergie cinétique $\Delta E_C = \sum W(\vec{F}_{\text{ext}})$:

$$\Delta E_C = E_C(B) - E_C(A) = \frac{1}{2} m\,v_B^2 - \frac{1}{2} m\,v_A^2$$

Avec : $v_B = 0 \Rightarrow \Delta E_C = -\frac{1}{2} m\,v_A^2 = W_{A\to B}(\vec{P}) + W_{A\to B}(\vec{f})$

– Le travail de $\vec{P}$: $W_{A\to B}(\vec{P}) = \int_A^B \vec{P} \bullet \overrightarrow{\mathrm{d}\,l} = \vec{P} \bullet \overrightarrow{AB}$

$= -m\,g\,(z_B - z_A)$

– Le travail de $\vec{f}$: $W_{A\to B}(\vec{f}) = \int_A^B \vec{f} \bullet \overrightarrow{\mathrm{d}\,l} = \vec{f} \bullet \overrightarrow{AB}$

$= -f\,(z_B - z_A)$

Avec : $h = \left\| \overrightarrow{AB} \right\| = z_B - z_A \Rightarrow \begin{cases} W_{A\to B}(\vec{P}) = -m\,g\,h & \left(W_{A\to B}(\vec{P}) < 0 :\ \vec{P}\ \textit{est résistante}\right) \\ W_{A\to B}(\vec{f}) = -f\,h & \left(W_{A\to B}(\vec{f}) < 0 :\ \vec{f}\ \textit{est résistante}\right) \end{cases}$

Donc : $-\frac{1}{2} m\,v_A^2 = -h\,(m\,g + f) \Rightarrow h = \dfrac{m\,v_A^2}{2\,(m\,g + f)}$

<u>Application Numérique :</u> Pour : $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $m = 200\ \mathrm{g}$, $v_A = 10\ \mathrm{m.s^{-1}}$, $f = 0{,}5\ \mathrm{N}$

$$h = \frac{0{,}2 \times (100)}{2 \times \left((0{,}2 \times 10) + 0{,}5\right)} = 4\ \mathrm{m}$$

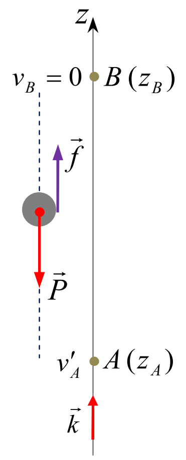
2. Au cours du mouvement descendant (de B vers A) :

La masse m est soumise aux forces suivantes :

– Le poids : $\vec{P} = -m\,g\;\vec{k}$

– Laforce de frottement de l'air: $\vec{f} = f\;\vec{k}$

En utilisant le théorème de l'énergie cinétique $\Delta E_C = \sum W(\vec{F}_{\text{ext}})$:



$$\Delta E_C = E'_C(A) - E_C(B) = \frac{1}{2} m\, v'^2_A - \frac{1}{2} m\, v_B^2$$

Avec : $v_B = 0 \Rightarrow \Delta E_C = \frac{1}{2} m\, v'^2_A = W_{B\to A}(\vec{P}) + W_{B\to A}(\vec{f})$

– Le travail de $\vec{P}$: $W_{B\to A}(\vec{P}) = \int_B^A \vec{P} \bullet \vec{\mathrm{d}l} = \vec{P} \bullet \overrightarrow{BA}$

$= -m\,g\,(z_A - z_B)$

$= m\,g\,h > 0$ ($\vec{P}$ *est motrice*)

– Le travail de $\vec{f}$: $W_{B\to A}(\vec{f}) = \int_B^A \vec{f} \bullet \vec{\mathrm{d}l} = \vec{f} \bullet \overrightarrow{BA}$

$= f\,(z_A - z_B)$

$= -f\,h < 0$ ($\vec{f}$ *est résistante*)

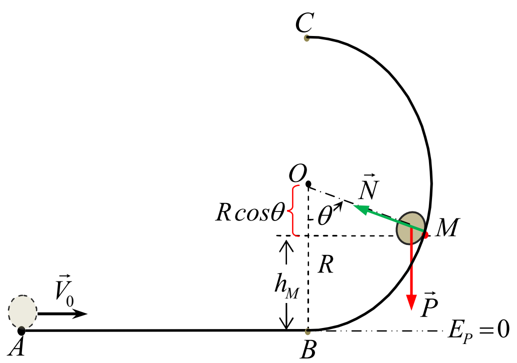
Donc : $\frac{1}{2} m\, v'^2_A = h\,(m\,g - f)$

Avec : $h = \frac{m\, v_A^2}{2\,(m\,g + f)} \Rightarrow v'^2_A = \frac{(m\,g - f)}{(m\,g + f)}\; v_A^2$

Alors : $v'_A = v_A \sqrt{\frac{(m\,g - f)}{(m\,g + f)}}$

Application Numérique : $v'_A = 10 \times \sqrt{\frac{((0{,}2 \times 10) - 0{,}5)}{((0{,}2 \times 10) + 0{,}5)}} \approx 7{,}7 \;\; \mathrm{m.s^{-1}}$

Exercice 03 :



1. A la position M , la bille est soumise aux forces suivantes :
   – Le poids : $\vec{P}$
   – La réaction normale : $\vec{N}$

2. En absence de frottement (forces non conservatives sont nulles), on peut utiliser le principe de conservation de l'énergie mécanique : $\Delta E_T = 0$

   Donc, entre la position A et la position M : $E_T(M) - E_T(A) = 0 \Leftrightarrow E_T(A) = E_T(M)$

   $\Leftrightarrow E_C(A) + E_P(A) = E_C(M) + E_P(M)$

   <u>A la position A</u> : l'énergie cinétique est : $E_C(A) = \frac{1}{2} m\, v_0^2$

l'énergie potentielle gravitationnelle est : $E_P(A) = m\,g\,h_A = 0$ (puisque : $h_A = 0$) ;

A la position M : l'énergie cinétique est : $E_C(M) = \frac{1}{2} m\,v_M^2$ (avec : $v_M = \left\| \vec{V}_M \right\|$) ;

l'énergie potentielle gravitationnelle est : $E_P(M) = m\,g\,h_M$

Avec : $h_M = R\,(1 - \cos\theta) \Rightarrow E_P(M) = m\,g\,R\,(1 - \cos\theta)$

Alors : $\Delta E_T = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} m\,v_0^2 = \frac{1}{2} m\,v_M^2 + m\,g\,R\,(1 - \cos\theta)$

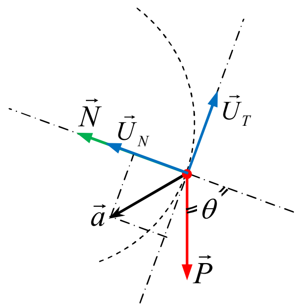
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m\,v_M^2 = \frac{1}{2} m\,v_0^2 - m\,g\,R\,(1 - \cos\theta)$$

$\Rightarrow$la vitesse de la bille à la position M est : $v_M = \sqrt{v_0^2 - 2\,g\,R\,(1 - \cos\theta)}$

3. En appliquant le P.F.D, à la position M : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{N} = m \cdot \vec{a}$

La projection sur la base de Frenet $(\vec{U}_T, \vec{U}_N)$, nous donne :

$$\begin{aligned} &\text{sur } \vec{U}_T \\ &\text{sur } \vec{U}_N \end{aligned} \begin{cases} -P\sin\theta = m\,a_T \text{ ....Eq (1)} \\ -P\cos\theta + N = m\,a_N \text{ ....Eq (2)} \end{cases}$$



D'après l'équation (2), l'expression du module N est :

$$N = m\,a_N + m\,g\cos\theta$$

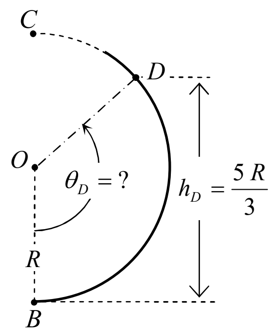
Avec : $a_N = \frac{v_M^2}{R} = \frac{v_0^2 - 2\,g\,R\,(1 - \cos\theta)}{R}$

$$= \frac{v_0^2}{R} - 2\,g\,(1 - \cos\theta)$$

Donc : $N = \frac{m\,v_0^2}{R} - 2\,m\,g\,(1 - \cos\theta) + m\,g\cos\theta$

$$= m\,g\left[\frac{v_0^2}{g\,R} - 2 + 3\cos\theta\right]$$

4. La bille quitte la surface du demi-cercle $\Leftrightarrow$la réaction normale $\vec{N}$ est nulle : $N=0$



Donc, au point D : $m\,g\left[\frac{v_0^2}{g\,R}-2+3\cos\theta_D\right]=0 \;\Leftrightarrow v_0^2 = g\,R\,(2-3\cos\theta_D)$

Avec : $\cos\theta_D = \frac{R-h_D}{R} = 1-\frac{h_D}{R}$ (d'après le résultat de $h_M = R\,(1-\cos\theta_M)$)

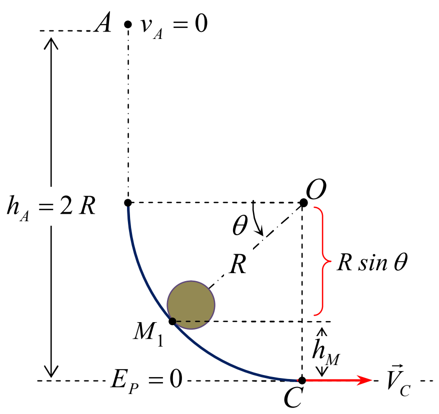
Alors : $v_0^2 = g\,R\left(-1+3\frac{h_D}{R}\right)$

Pour : $h_D = \frac{5\,R}{3}$ $\Rightarrow$la vitesse initiale $v_0$doit être : $v_0 = 2\sqrt{g\,R}$

Exercice 04 :

1. **Mouvement du corps sur la partie du chemin *ABC*** :

a) En absence de frottement, on peut utiliser le principe de conservation de l'énergie mécanique : $\Delta E_T = 0$
Alors, entre la position A et la position M_1 :



$E_T(M)-E_T(A)=0 \Leftrightarrow E_T(A)=E_T(M_1)$

Avec, $E_T(A)=E_C(A)+E_P(A)=\frac{1}{2}m\,v_A^2+m\,g\,h_A$

$=0+m\,g\,(2\,R)=2\,m\,g\,R$

Et : $E_T(M_1)=E_C(M_1)+E_P(M_1)=\frac{1}{2}m\,v_M^2+m\,g\,h_M$

$=\frac{1}{2}m\,v_M^2+m\,g\,R\,(1-\sin\theta)$

Donc : $\Delta E_T=0 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}m\,v_M^2 = 2\,m\,g\,R-m\,g\,R\,(1-\sin\theta)$
$=m\,g\,R\,(1+\sin\theta)$

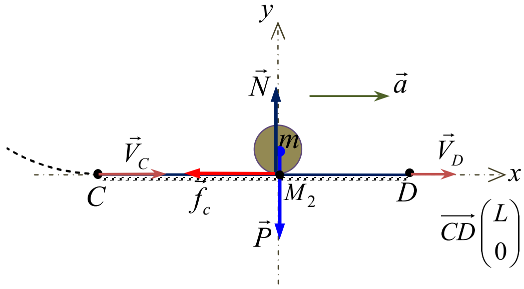
$\Rightarrow v_{M_1} = \sqrt{2\,g\,R\,(1+\sin\theta)}$

b) La vitesse du corps au point C : $v_C = v_{M_1}(\text{à } \theta=\frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow v_C = 2\sqrt{g\,R}$

2. Mouvement du corps sur la piste horizontale *CD* :

a) Entre la position C et la position D :



corps est soumis aux forces suivantes :

-Le poids $\vec{P}$

-La normale de la réaction $\vec{N}$

-La force de frottement $\vec{f}_c$

lon le repère choisi, les forces s'écrivent :

$$\vec{P}\begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{N}\begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix}; \quad \vec{f}_c\begin{pmatrix} -f_c \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) En appliquant le P.F.D, à la position M_2 : $\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{N} + \vec{f}_c = m \cdot \vec{a}$

La projection sur le repère choisi, nous donne :

$$\begin{array}{l} \text{sur l'axe}\,(x) \\ \text{sur l'axe}\,(y) \end{array} \begin{cases} -f_c = m\,a \,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Eq}\,(1) \\ -P + N = 0 \,\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Eq}\,(2) \end{cases}$$

D'après l'équation (2) : $N = P = m\,g$

Alors, la force de frottement est : $f_c = \mu_c\,N = \mu_c\,m\,g$

c) En utilisant le théorème de l'énergie cinétique :

Entre C et D : $\Delta E_C = \sum W(\vec{F}_{ext}) \quad \Leftrightarrow \quad E_C(D) - E_C(C) = W_{C\to D}(\vec{P}) + W_{C\to D}(\vec{N}) + W_{C\to D}(\vec{f}_c)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m\, v_E^2 - \frac{1}{2} m\, v_D^2 = W_{C\to D}(\vec{P}) + W_{C\to D}(\vec{N}) + W_{C\to D}(\vec{f}_c)$$

– Le travail de $\vec{P}$: $W_{C\to D}(\vec{P}) = \int_C^D \vec{P} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = \vec{P} \bullet \overrightarrow{CD}$

$= 0$ ($\vec{P}$ *est perpendiculaire au déplacement* $\overrightarrow{CD}$)

– Le travail de $\vec{N}$: $W_{C\to D}(\vec{N}) = \int_C^D \vec{N} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = \vec{N} \bullet \overrightarrow{CD}$

$= 0$ ($\vec{N}$ *est perpendiculaire au déplacement* $\overrightarrow{CD}$)

– Le travail de $\vec{f}_c$: $W_{C\to D}(\vec{f}_c) = \int_C^D \vec{f}_c \bullet \mathrm{d}\vec{l} = \vec{f}_c \bullet \overrightarrow{CD}$

$= -f_c\,L$ (avec $L = \frac{3}{2} R$)

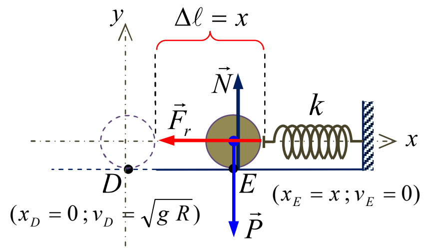
$$= -\frac{3}{2}\mu_c\, m\, g\, R$$

Alors : $\frac{1}{2}m\,v_D^2 - \frac{1}{2}m\,v_C^2 = -\frac{3}{2}\mu_c\, m\, g\, R$ ($avec \;\; v_C = 2\sqrt{g\,R}\;\;$ $et\;\; v_D = \frac{v_C}{2} = \sqrt{g\,R}$)

Donc, le coefficient de frottement cinétique de la piste CD est : $\mu_c = \frac{-3\,m\,g\,R}{-3\,m\,g\,R} = 1$

3. **Mouvement du système corps + ressort entre les positions *D* et *E* :**

a) En position E , le corps est soumis aux forces suivantes :



- Le poids $\vec{P}$
- La normale de la réaction $\vec{N}$
- La force de rappel du ressort $\vec{F}_r$

lon le repère choisi, les forces s'écrivent :

$$\vec{P}\begin{pmatrix}0\\-P\end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{N}\begin{pmatrix}0\\N\end{pmatrix}; \quad \vec{F}_r\begin{pmatrix}-k\,\Delta\ell\\0\end{pmatrix}$$

b) En utilisant le théorème de l'énergie cinétique :

Entre D et E : $\Delta E_C = \sum W(\vec{F}_{ext}) \Leftrightarrow E_C(E) - E_C(D) = W_{D\to E}(\vec{P}) + W_{D\to E}(\vec{N}) + W_{D\to E}(\vec{F}_r)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m\,v_E^2 - \frac{1}{2}m\,v_D^2 = W_{D\to E}(\vec{P}) + W_{D\to E}(\vec{N}) + W_{D\to E}(\vec{F}_r)$$

– Les travaux de $\vec{P}$ et de $\vec{N}$ sont nuls : $W_{D\to E}(\vec{P}) = 0$ et $W_{D\to E}(\vec{N}) = 0$

($\vec{P}$ *et* $\vec{N}$ *sont perpendiculaires au déplacement* $\overrightarrow{DE}$)

– Le travail de $\vec{F}_r$: $W_{D\to E}(\vec{F}_r) = \int_D^E \vec{F}_{rc} \bullet \overrightarrow{\mathrm{d}\,l}$

Le déplacement élémentaire du trajet de D à E est : $\overrightarrow{\mathrm{d}\,l}\begin{pmatrix}\mathrm{d}\,x\\0\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow W_{D\to E}(\vec{F}_r) = \int_{x_D=0}^{x_E=x} -k\,x\;\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}k\,x^2$$

Alors : $\frac{1}{2}m\,v_E^2 - \frac{1}{2}m\,v_D^2 = -\frac{1}{2}k\,x^2$ ($avec \;\; v_E = 0$) $\Rightarrow \frac{1}{2}m\,(g\,R) = \frac{1}{2}k\,x^2$

Donc, la constante de raideur du ressort est : $k = \frac{m\,g\,R}{x^2}$

Pour une contraction finale du ressort : $x = \frac{R}{4}$

$\Rightarrow$ La constante de raideur, en fonction de m et g, est :

$$k = 16\,m\,g$$

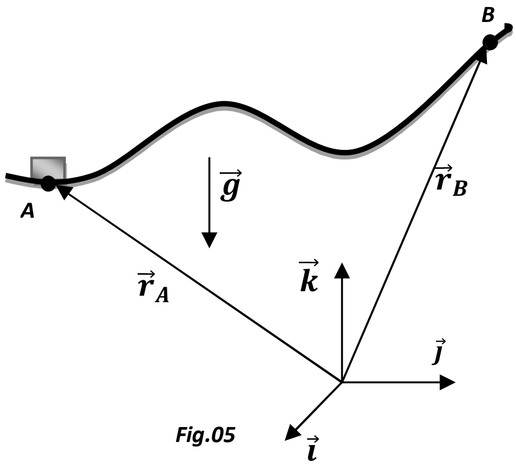
Exercice 05 :

On a: $\boldsymbol{m = 3kg}$ *;* $\vec{r}_B = 15\vec{i} + 7\vec{j} - 6\vec{k}$ *;* $t = 2s$

$\vec{F}_a = 12\vec{i} - 3\vec{j} + 21\vec{k}$ *;* $\vec{v}_B = 12\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$

1°/*Détermination de la vitesse* $\vec{v}_A$ *de la masse* $\boldsymbol{m}$

Lorsqu'elle était au point ***A***



La masse est soumise à l'action de la force $\vec{F}_a$ *et à la force de gravitation* $m\vec{g}$*. La force résultante est :*

$$\vec{F} = \vec{F}_a + m\vec{g}$$

En appliquant la 2ème loi de Newton : $\sum_i \vec{F}_i^{ex} = m\vec{a}$

$$\Longrightarrow \vec{F}_a + m\vec{g} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}_a + m\vec{g}}{m}$$

A.N $\quad \vec{a} = \frac{(12\vec{i} - 3\vec{j} + 21\vec{k}) - 30\vec{k}}{3} \vec{a} = 4\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$

Or $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Longrightarrow \int_{v_A}^{v_B} d\vec{v} = \int_0^2 \vec{a}dt \Longrightarrow \vec{v}|_{\vec{v}_A}^{\vec{v}_B} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = \vec{a}t|_0^2 = 2\vec{a}$

Finalement $\vec{v}_A = \vec{v}_B - 2\vec{a} = (12\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}) - 2(4\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k})$

$$\Longrightarrow \vec{v}_A = (4\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k})\, m/s^2$$

2°/*Le déplacement* $\overrightarrow{AB}$.

Pour un point quelconque entre A et B la vitesse est :

$$\vec{v} = \vec{a}t + \vec{v}_0 = \frac{d\vec{r}}{dt} \Longrightarrow d\vec{r} = (\vec{a}t + \vec{v}_0)dt \Longrightarrow \int_{r_A}^{r_B} d\vec{r} = \int_0^2 (\vec{a}t + \vec{v}_0)dt$$

$$\Longrightarrow \vec{r}_B - \vec{r}_A = \overrightarrow{AB} = (16\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k})\, m$$

3°/*Le travail effectué par la force*$\vec{F}_a$

$\vec{F}_a$ *: est constante* $\quad \Longrightarrow W(\vec{F}_a) = W_{AB} = \vec{F}_a \circ \overrightarrow{AB}$

$$W_{AB} = (12\vec{i} - 3\vec{j} + 21\vec{k}) \circ (16\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}) \Longrightarrow W_{AB} = 138\,J$$

4°/La variation de l'énergie potentielle ΔU *quand* m *passe de* A *à* B

On a $\Delta U = W(m\vec{g}) = mg(z_B - z_A)$

$z_B = -6$ *On cherche* $z_A = ?$

$$\vec{r}_B - \vec{r}_A = \overrightarrow{AB} \Longrightarrow \vec{r}_B - \overrightarrow{AB} = \vec{r}_A = (15\vec{\imath} + 7\vec{\jmath} - 6\vec{k}) - (16\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 2\vec{k})$$

Alors : $z_A = -4 \Longrightarrow \Delta U = -60\, J$

Exercice 06 :

On a: $m = 2\ kg\ ;\ \ \mu = 0.3\ ;\ k = 200 N/m\ ;\ x_0 = 0.5$

1°/La vitesse v_B *au point* B.

Puisqu'il y a des frottements dans ce tronçon (AB), on utilise soit le théorème de l'énergie cinétique, ou le théorème de l'énergie totale.

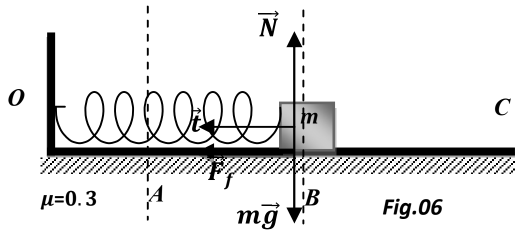


Fig.06

- *Théorème de l'énergie cinétique* :

$$\triangle T = \sum_i W_i = \left(\sum \textit{Travaux moteurs}\right) - \left(\sum \textit{Travaux résistants}\right)$$

- *Théorème de l'énergie totale* :

$$\triangle E = \sum_i W_i\left(\vec{F}^{NC}\right) = \sum \textit{Travaux des forces non conservatives}$$

Lorsque le ressort est comprimé, il va emmagasiner une énergie potentielle élastique : $U_A = \frac{1}{2}kx^2$

Au départ la vitesse initiale est nulle (repos) : $\vec{v}_A = \vec{v}_0 = 0 \Longrightarrow T_i = T_A = \frac{1}{2}mv_A^2 = 0$

Arrivée à B, la masse aura

- une énergie cinétique : $T_B = \frac{1}{2}mv_B^2$

- une énergie potentielle nulle : $U_A = 0$ *Car le ressort est au repos*

Puisque le niveau de référence de l'énergie potentielle gravitationnelle est la surface de contact, alors elle est nulle. $\triangle \boldsymbol{U_A = 0}$

- *Théorème de l'énergie cinétique :*

$\triangle \boldsymbol{T = \sum_i W_i = W(m\vec{g}) + W(\vec{N}) + W(\vec{t}) + W(\vec{F}_f)\vec{t}}$ *; force de rappelle du ressort*

$\boldsymbol{W(m\vec{g}) = W(\vec{N}) = 0}$ *Ces forces ne travaillent pas, car elles sont perpendiculaires au Déplacement.*

$\boldsymbol{W(\vec{F}_f) = \vec{F}_f \circ \overrightarrow{AB} = -\mu N.|\overrightarrow{AB}|}$*or* $\boldsymbol{N = mg}$ *et* $\boldsymbol{|\overrightarrow{AB}| = x_C}$

$\boldsymbol{\Rightarrow W(\vec{F}_f) = -\mu mg x_B = -\mu mg x_0 \Rightarrow W(\vec{t}) = \int_{x_0}^{x} - kx\, dx \Rightarrow W(\vec{t}) = \frac{1}{2}kx_0^2}$

$\boldsymbol{\vec{v}_i = \vec{v}_A = 0}$ ***et*** $\boldsymbol{\vec{v}_f = \vec{v}_B}$ =?

$$\boldsymbol{\Rightarrow \triangle T = \frac{1}{2}v_f^2 - \frac{1}{2}v_i^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 - \mu mg x_0}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow v_B = \sqrt{\frac{1}{m}kx_0^2 - 2\mu g x_0}}$$

$$A.N\ \boldsymbol{v_B \approx 4,69\ m/s}$$

1°/*La distance '* ***BC*** *' parcourue de* ***B*** *jusqu'à l'arrêt au point* ***C :***

Arrivée à B, la masse m a une vitesse $\boldsymbol{v_B \neq 0}$**,** *elle continue son mouvement jusqu'à l'arrêt au point C, elle aura une vitesse nulle* $\boldsymbol{v_C = 0}$

On applique le théorème de l'énergie totale :

$\triangle \boldsymbol{E = \sum_i W_i(\vec{F}^{NC})}$ *Avec* $\boldsymbol{E = T + E}$

$$\boldsymbol{\Rightarrow \triangle E = E_C - E_B = (T_C + U_C) - (T_B + U_B) = W(\vec{F}_f)}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow \triangle E = \left(\frac{1}{2}mv_B{}^2 + mgh_B\right) - \left(\frac{1}{2}mv_C{}^2 + mgh_C\right) = -\mu mg|BC|}$$

Or $\boldsymbol{h_C = h_B = 0 \Rightarrow U_C = U_B = 0}$ ***et*** $\boldsymbol{T_C = 0}$*car*$\boldsymbol{v_C = 0}$

Donc $\boldsymbol{BC = v_B{}^2/2\mu g}$ ***et A.N*** $\boldsymbol{BC \approx 3.67\ m}$

Exercices Supplémentaires

Exercice 01 :

Une particule est soumise à une force $\vec{F}$ définie en coordonnées cartésiennes par :

$\vec{F}(x,y,z) = (x+2y+az)\,\vec{i} + (bx-3y-z)\,\vec{j} + (4x+cy+2z)\,\vec{k}$ (a, b et c sont des constantes)

1. Trouver les valeurs de a, b et c pour que $\vec{F}$ dérive d'un potentiel $E_P(x,y,z)$.
2. Trouver l'expression du potentiel $E_P(x,y,z)$, sachant que $E_P(0,0,0)=0$.

Réponses

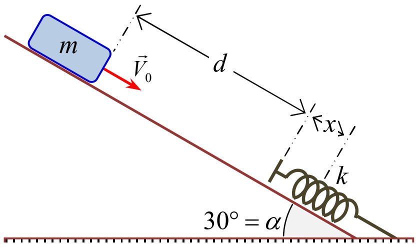
1. $$\overrightarrow{Rot}(\vec{F}) = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{F}(x,y,z) = (x+2y+4z)\,\vec{i} + (2x-3y-z)\,\vec{j} + (4x-y+2z)\,\vec{k}$$

2. $$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}(E_P) \Rightarrow E_P(x,y,z) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 - z^2 - 2xy - 4xz + yz$$

Exercice 02 :

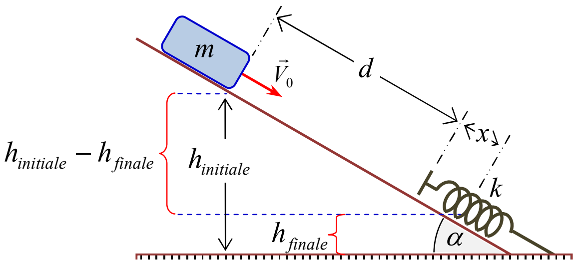
Un ressort de constante de raideur $k = 1000\ \text{N.m}^{-1}$, est solidement fixé en bas d'un plan lisse incliné d'un angle α.



Sur ce même plan et à une distance $d = 1\ \text{m}$ de l'extrémité libre du ressort, un bloc de masse $m = 1\ \text{Kg}$ commence à glisser vers le bas avec une vitesse initiale $v_0 = 1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ en direction du ressort, comme le montre la figure ci-contre.

En utilisant le principe de conservation de l'énergie mécanique $\Delta E_T = 0$, calculer la contraction maximale (x) du ressort lorsque le bloc s'arrête momentanément. On prend : $g = 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Réponses



$$\Delta E_T = E_T(psoition\ \ finale) - E_T(psoition\ \ initiale) = 0$$

$$\Rightarrow E_C(initiale) + E_P(initiale) = E_C(finale) + E_P(finale)$$

$$\Leftrightarrow E_C(initiale) - E_C(finale) = E_P(finale) - E_P(initiale)$$

$$\begin{cases} E_C(initiale) = \frac{1}{2} m\, v_0^2 \\ E_P(initiale) = m\, g\, h_{initiale} \\ E_C(finale) = 0 \\ E_P(finale) = m\, g\, h_{finale} + \frac{1}{2} k\, x^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m\, v_0^2 = -m\, g\, (h_{initiale} - h_{finale}) + \frac{1}{2} k\, x^2$$

Avec : $h_{initiale} - h_{finale} = (d+x)\, sin\,\alpha \Rightarrow$

$$\frac{1}{2} k\, x^2 - m\, g\, (d+x)\, sin\,\alpha - \frac{1}{2} m\, v_0^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$k\, x^2 - (2\, m\, g\, sin\,\alpha)\, x - ((2\, m\, g\, sin\,\alpha)\, d + m\, v_0^2) = 0 \quad ....E$$

Pour : $\alpha = 30°$, $m = 1$ Kg,

$k = 1000$ N.m^{-1} (*valeur à corriger*) , $d = 1$ m,

$g = 10$ m.s^{-2} et $v_0 = 1$ m.s^{-1} :

Nous avons : Eq(1) $\Leftrightarrow$

$$1000\, x^2 - 10x - 11 = 0 \quad ....Eq(2)$$

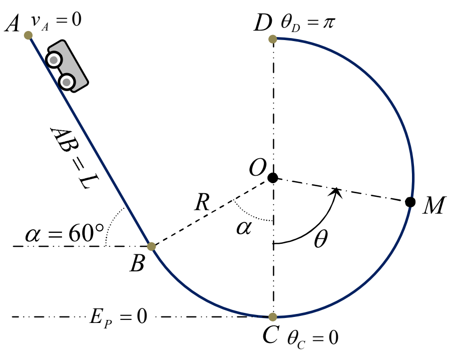
L'équation (2) admet deux solutions :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{10 - 210}{2000} = -0{,}1 < 0 & (\textit{valeur refusée}) \\ x_2 = \frac{10 + 210}{2000} = 0{,}11 > 0 & (\textit{valeur acceptée}) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ La contraction maximale du ressort est :

$x = 11$ cm

Exercice 03 :



On considère un chariot (ponctuel), de masse $m = 1$ Kg, se déplace sans frottement sur un rail $ABCD$ situé dans le plan vertical (figure ci-contre).

Le rail est constitué de trois parties :

- *Une partie rectiligne AB de longueur L et d'un angle d'inclinaison $\alpha = 60°$;*
- *Une portion de cercle BC de rayon $R = \frac{L}{\sqrt{3}}$ et de centre O ;*
- *Un demi cercle CD de rayon R et de centre O (les points C et D sont situés sur la même ligne verticale).*

A l'instant $t = 0$, on lâche le chariot sans vitesse initiale à partir du point A, et on étudie son mouvement dans le référentiel terrestre (supposé galiléen).

1. *En utilisant le théorème de l'énergie cinétique $\Delta E_C = \sum W(\vec{F}_{ext})$. Donner, en fonction de g et R, l'expression de la vitesse (v_B) du chariot au point B.*
2. *En utilisant le principe de conservation de l'énergie mécanique $\Delta E_T = 0$:*
   a) *Déterminer, en fonction de g, R et θ, la vitesse (v_M) du chariot à son passage en point M repéré par l'angle θ.*
   b) *Calculer la vitesse (v_D) du chariot lorsqu'il arrive au point D ($\theta_D = \pi$).*
   c) *Quel est le mouvement du chariot au delà du point D ?*

d) ***Réponses***

1. $\Delta E_C = E_C(B) - E_C(A) = \sum W(\vec{F}_{ext}) \Rightarrow v_B = \sqrt{3\, g \cdot R}$

2. a) $\Delta E_T = E_T(M) - E_T(A) = 0 \Rightarrow v_M = \sqrt{2 \cdot g \cdot R\,(1 + cos(\theta))}$

2. b) $v_D = 0$

2. c) *Chute libre suivant la verticale CD*

LES CONTRÔLEE DE PHYSIQUE 01

MÉCANIQUE DU POINT MATÉRIEL

Niveau : LICENCE : L1 (ST) **CONTRÔLE DE PHYSIQUE 01** ***Durée : 1h30mn***

Questions générales:(09 pts)

1°/ *Exprimer les vecteurs unitaires sphériques*($\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi$)*dans la base cartésiennes*($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$)

2°/ *Qu'est-ce qu'on peut déduire de la relation* $\vec{r} \wedge \vec{F} = 0$?

3°/ *Pour que la forme de la 2ème loi de Newton soit valable dans le référentiel non inertiel. Qu'est-ce qu'on doit ajouter aux forces effectives (extérieures) ?*

4°/ *Pour le déplacement et la distance. Lequel qui est scalaire et lequel qui est vectoriel ?*

5°/ *Les coefficients de frottement statique et dynamique sont:* $\mu_s = \frac{F_s}{N}$ *et* $\mu_s = \frac{F_d}{N}$.

Que représentent les forces F_s *et* F_d *? Lequel des coefficients est supérieur à l'autre ?*

6°/ *Les mouvements des planètes se font dans des plans c'est la conséquence de la conservation d'une grandeur physique fondamentale. Laquelle ?*

Exercice 01*:(05pts)(Dans le système cartésiens)*

Une particule se déplace dans le plan dont la position est donnée par : $\overrightarrow{OM} = \alpha \cos(\omega t)\vec{i} + \beta \sin(\omega t)\vec{j}$

1°/ *Montrer que l'équation de la trajectoire est une ellipse que se met sous la forme :* $\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 = 1$.

2°/ *Donner les composantes des vecteurs vitesse et accélérations, ainsi que leurs modules.*

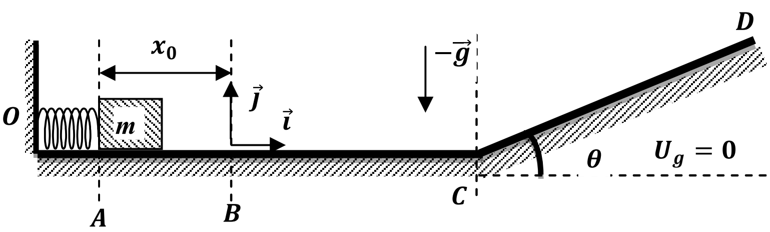
3°/ *Montrer que l'accélération se met sous la forme :* $\vec{a} = -k\overrightarrow{OM}$ *où* k *est une constante à déterminer.*

($\alpha; \beta; \omega$) *:sont des constantes*

Exercice 02*:(06 pts)*

Une masse '$m = 1kg$' *se déplace le long du chemin* $OABCD$ *.La portion* $OABC$ ($BC = 8x_0$) *est horizontale et rugueuse de coefficient de frottement* $\mu = 0.1$*.La portion* $CD = 3x_0$ *est lisse et inclinée de* '$\theta = \frac{\pi}{6}$' *par rapport à l'horizontale. Au départ la masse est lâchée du repos à partir du point* A *après avoir comprimé le ressort, de raideur* '$k = 200\frac{N}{m}$', *de* '$x_0 = 0.5\ m = AB$'. *Arrivant à* B *elle continue son mouvement et entame la portion* CD. ($g = 10\ m/s^2$)

En utilisant le théorème de la variation de l'énergie totale :



1°/- *Représenter toutes les forces agissantes sur* m *dans le tronçon* AB.

- Déterminer la vitesse v_B *de m au point* B.

En utilisant le principe fondamental de la dynamique :

2°/- *Représenter toutes les forces agissantes sur* m *dans le tronçon* BC.

- Déterminer sa vitesse v_C *au point* C.

3°/- *Représenter toutes les forces agissantes sur* m *dans le tronçon* CD.

- Déterminer sa vitesse v_D *au point* D.

1°/- *Les vecteurs unitaires de la base sphérique s'expriment dans la base cartésienne comme suit :*

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \sin(\theta)\cos(\varphi)\vec{i} + \sin(\theta)\sin(\varphi)\vec{j} + \cos(\theta)\vec{k} & 0.5 \\ \vec{u}_\theta = \cos(\theta)\cos(\varphi)\vec{i} + \cos(\theta)\sin(\varphi)\vec{j} - \sin(\theta)\vec{k} & 0.5 \\ \vec{u}_\varphi = -\sin(\varphi)\vec{i} + \cos(\varphi)\vec{j} & 0.5 \end{cases}$$

2°/- $\vec{r}\wedge\vec{F} = 0 = |\vec{r}||\vec{F}|\sin(\vec{r};\vec{F})\vec{u} = r.F.\sin(\theta)\vec{u} \Longrightarrow \begin{cases} * \ r = 0 \ \Longrightarrow \textit{Le système est au repos} & 0.5 \\ * \ F = 0 \ \Longrightarrow \textit{le système est en équilibre} & 0.5 \\ \quad \textit{ou bien il a un mouvement réctiligne uniforme} \\ * \sin(\theta) = 0 \ \Longrightarrow \textit{Le système est sous l'action d'une force centrale} & 0.5 \end{cases}$

3°/ - *La forme de la 2éme loi de Newton reste valable dans le référentiel non inertiel si aux forces extérieures*

(effectives) on ajoute les forces d'inerties(fictives) 1.5

4°/- *Le déplacement est une quantité vectorielle.* 0.75

- *La distance est une quantité scalaire.* 0.75

5°/ - F_s *: C'est la force minimale pour amorcer le mouvement.* 0.5

- F_d *: C'est la force nécessaire pour avoir un mouvement uniforme.* 0.5

- $\mu_s > \mu_d$ 0.5

6°/ - *Le mouvement des planètes se fait dans le plan, vu que leur moment cinétique est constant :* $\vec{L} = C^{ste}$ 1.5

Exercice :01

On donne : $\overrightarrow{OM} = \alpha\cos(\omega t)\vec{i} + \beta\sin(\omega t)\vec{j}$

1°/ $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \alpha\cos(\omega t)\vec{i} + \beta\sin(\omega t)\vec{j} = x\vec{i} + y\vec{j} \Longrightarrow \begin{cases} x(t) = \alpha.\cos(\omega t) & 0.25 \\ y(t) = \beta.\sin(\omega t) & 0.25 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{x(t)}{\alpha} = \cos(\omega t) & 0.25 \\ \frac{y(t)}{\beta} = \sin(\omega t) & 0.25 \end{cases}$

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\alpha}\right)^2 = 1 \quad 0.5$$

2°/ - *Le vecteur accélération est définit par :* $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} \Longrightarrow \begin{cases} v_x = \dot{x} = -\omega.\alpha.\sin(\omega t) & 0.5 \\ v_y = \dot{y} = \omega.\beta.\cos(\omega t) & 0.5 \end{cases}$

Année Universitaire 2022/2023 **Université de M'sila** *10/Janvier/2023*

Niveau : LICENCE : L1 (ST) ***Corrige du Contrôle de Physique 01*** ***Durée : 1h30mn***

- *Le module du vecteur vitesse est définit par :*

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \omega\sqrt{\alpha^2.\sin^2(\omega t) + \beta^2.\cos^2(\omega t)}$$ 0.5

- *Le vecteur accélération est définit par :* $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} \Rightarrow \begin{cases} a_x = \ddot{x} = -\omega^2.\alpha.\cos(\omega t) \\ a_y = \ddot{y} = -\omega^2.\beta.\sin(\omega t) \end{cases}$ 0.5 0.5

- *Le module du vecteur accélération est définit par :*

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2} = \omega^2\sqrt{\alpha^2.\cos^2(\omega t) + \beta^2.\sin^2(\omega t)}$$ 0.5

3°/ - $\vec{a} = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} = -\omega^2.[\alpha.\cos(\omega t)\,\vec{\imath} + \beta.\sin(\omega t)\vec{\jmath}]$ *or* $\overrightarrow{OM} = \alpha\cos(\omega t)\vec{\imath} + \beta\sin(\omega t)\vec{\jmath}$

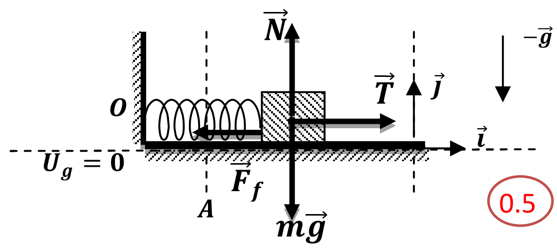
$\Rightarrow \vec{a} = -\omega^2.\overrightarrow{OM} = -k.\overrightarrow{OM} \Rightarrow k = \omega^2$ 0.5

Exercice :02

- ***Utilisation du théorème dela variation de l'énergie totale***

1°/ *Le tronçon AB*

-Les forces sont représentées sur la figure ci-contre.



0.5

- ***Calcul de la vitesse au point B***

Puisqu'il ya des frottements le système n'est pas conservative.

$\Delta E = E_f - E_i = W^{NC}$ *avec* $E = T + U$ 0.25

0.25

ou W^{NC} *: Travaux des forces non-conservatives* **et** $T = \frac{1}{2}mv^2$; $U = U_e + U_g$

U_e *: énergie potentielle élastique ;* U_e *:énergie potentielle gravitationnelle*

L'énergie totale initiale est : 0.25

$E_i = E_A = T_A + U_A$ *Ici l'énergie potentielle gravitationnelle est nulle*

$E_i = E_A = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}kx_0^2$ *ou* $v_A = 0$ *(Départ du repos)*

L'énergie totale finale est : 0.25

$E_f = E_B = T_B + U_B$ *Ici l'énergie potentielle gravitationnelle est nulle*

$E_f = E_B = \frac{1}{2}mv_B^2(U_B)_e$ *: l'énergie potentielle élastique est aussi nulle (pas d'action du ressort)*

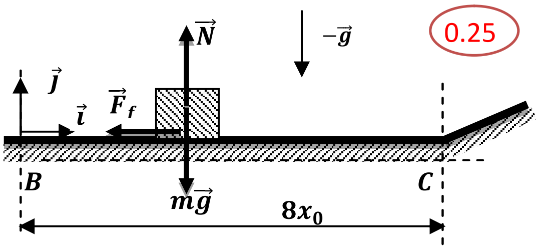
$W^{NC} = W(\vec{F}_f) = -F_f \Delta x F_f = \mu N et N = mg \Rightarrow W^{NC} = -\mu mgx_0$

$\Delta E = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}kx_0^2 = -\mu mgx_0 \Rightarrow v_B = \sqrt{\frac{kx_0^2}{m} - 2\mu gx_0}$ 0.25

A.N: $v_B = 7\ m/s$ 0.25

- ***Utilisation du principe fondamental de la dynamique***

2°/ ***Le tronçon BC***



- Les forces sont représentées sur la figure ci-contre.

- *Calcul de la vitesse au point C*

D'après la 2[éme] loi de Newton : 0.25

$\sum \vec{F}_i^{ex} = m.\vec{a}$ *(masse constante)* $\Rightarrow \sum \vec{F}_i^{ex} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_f = m.\vec{a}$ 0.25

Pour résoudre le problème on passe aux équations scalaires c.à.d. on va faire la projection sur les axes du repère adéquat. 0.25

$$\begin{cases} \vec{ox}: \quad -F_f = ma & (1) \\ \vec{oy}: \quad N - mg = 0 & (2) \\ \quad F_f = \mu.N & (3) \end{cases} \qquad \Rightarrow a = -\mu.g$$ 0.25

A.N: $a = -1m/s$

Pour déterminer la vitesse, on passe aux équations de la cinématique. Puisque l'accélération est constante, le mouvement est rectiligne uniformément varié. L'équation qui relie la vitesse à l'abscisse est :

$$v_f^2 - v_i^2 = 2.a(x_f - x_i)$$ 0.25

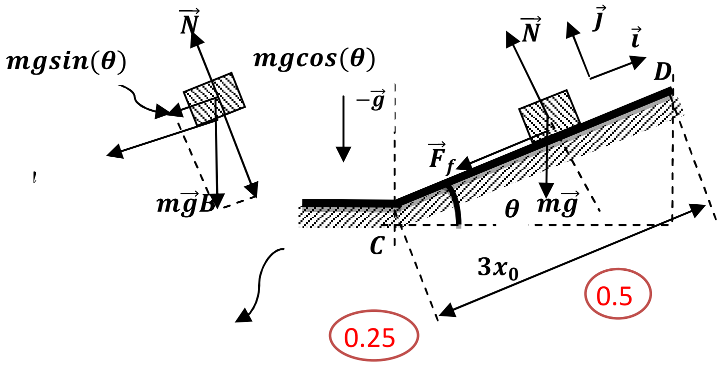
Ici :$v_f = v_C$ *: la vitesse à chercher ;* $v_i = v_B$ *, l'intervalle* $x_f - x_i = BC = 8.x_0$

On trouve :$v_C = \sqrt{v_B^2 + 2.a.BC}$ 0.25

A.N : $v_C = 6.4\ m/s$ 0.25

3°/ ***Le tronçon CD***

- Les forces sont représentées sur la figure ci-contre.



- Calcul de la vitesse au point D

D'après la 2ème loi de Newton :

$\sum \vec{F}_i^{ex} = m.\vec{a}$*(masse constante)*

$\Rightarrow \sum \vec{F}_i^{ex} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_f = m.\vec{a}$

Pour résoudre le problème on passe aux équations scalaires

c.à.d. on va faire la projection sur les axes du repère adéquat.

$$\begin{cases} \vec{ox}: \; -F_f - mgsin(\theta) = ma & (4) \\ \vec{oy}: \; N - mgcos(\theta) = 0 & (5) \\ \quad F_f = \mu.N & (6) \end{cases}$$ 0.25 $$\Rightarrow a = -(\sin\theta + \mu.\cos\theta).g$$ 0.25

AN : $a = -5.88 m/s^2$ 0.25

Pour déterminer la vitesse, on passe aux équations de la cinématique. Puisque l'accélération est constante, le mouvement est rectiligne uniformément varié. L'équation qui relie la vitesse à l'abscisse est :

$$v_f^2 - v_i^2 = 2.a(x_f - x_i)$$

Ici : $v_f = v_D$ *: la vitesse à chercher ;* $v_i = v_C$ *, l'intervalle* $x_f - x_i = CD = 3.x_0$

On trouve : $v_D = \sqrt{v_C^2 + 2.a.CD}$ 0.25

A.N : $v_C = 4.83 \; m/s$ 0.25

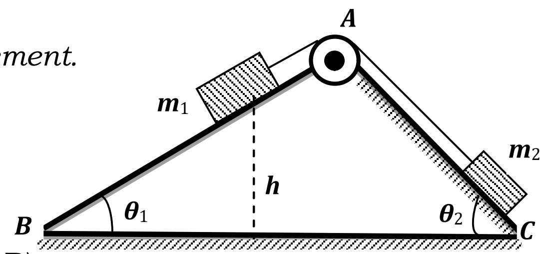
Exercice 01:(03pts)

*Une particule se déplace suivant $\overrightarrow{ox}$. La moitié du trajet est traversée à la vitesse v_1 et la seconde moitié est traversée en deux phase le $1/3$ du temps à la vitesse v_2 et le temps restant(**2/3** du temps de la seconde phase) à la vitesse v_3.*

- *Donner l'expression de la vitesse moyenne.*
- *Que vaut cette vitesse si $v_1 = 10\ m/s$, $v_2 = 15\ m/s$ et $v_3 = 12\ m/s$*

Exercice 02:(10pts)

Dans un double plan incliné, La partie '$AC = l = 3\ m$.' est rugueuse de coefficient de frottement $\mu = 0.1$ et la partie '$AB = l$' est lisse, partent du repos deux masses '$m_1 = 2m_2 = 0.5\ kg$ ', reliées par un fil inextensible qui passe à travers une poulie de masse et de frottement négligeables. La masse m_1 est à côté de la poulie, la masse m_2 est initialement au contact avec le sol. Les deux plans ont la même inclinaison $\theta_1 = \theta_2 = \theta = \pi/6$ par rapport à l'horizontale. (On a :$g = 10\ m/s^2$).



1°/ *Représenter les efforts sur les masses et la poulie séparément.*

2°/ *Déterminer l'accélération des masses m_1 et m_2.*

3°/ *Déterminer la tension dans le fil.*

Lorsque 'm_1' atteint une hauteur '$h = l/4$' le fil se rompe

4°/ *Déterminer le temps mis par m_1 pour arriver au sol (Point **B**).*

5°/ *À quelle hauteur h_2 sera la masse m_2 quand m_1 arrive au sol ?*

6°/ *Quelle sera l'énergie potentielle de m_2 en ce moment, si on prend le sol comme référence ?*

Exercice 03 (07pts)

Un électron est soumis à l'action des champs des armatures horizontales et verticales dans un oscilloscope. Suite à cette action, il exécute un mouvement obéissant aux lois suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = A.\cos(\omega t) \\ y(t) = B.\sin(\omega t) \end{cases} \text{"}A, B, \omega\text{" des constantes positives}$$

1°- *Déterminer l'équation de la trajectoire et représenter-la pour $A > B$.*

2°-*Écrire le vecteur position dans une position quelconque.*

3°- *Déterminer, dans cette base, le vecteur vitesse et son module à un instant quelconque.*

4°- *Déterminer aussi, le vecteur accélération et son module à un instant quelconque en coordonnées*

intrinsèques. En déduire le rayon de courbure.

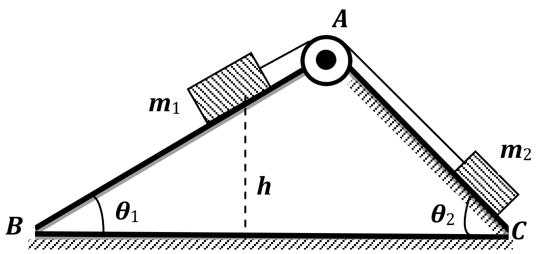
التمريــن الأول

ينتقل جسيم وفق المحور$\overrightarrow{ox}$. نصف المسار يقطعه بالسرعة. v_1 والنصف الثاني يتم في مرحلتين. المرحلة الأولى تتم بالسرعة v_2خلال ثلث الوقت. والزمن المتبقي يقطع بالسرعة v_3 .

- احسب السرعة الوسطية.
- ما هي قيمتها في حالة $v_1 = 10\ m/s$، $v_2 = 15\ m/s$ و $v_3 = 12\ m/s$

التمرين الثاني:

في مستوي مائل مزدوج، القسم $AC = l = 3\ m$ خشن بمعامل الاحتكاك $\mu = 0.1$ والقسم الثاني $' AB = l '$ أملس، تنطلق بدون سرعة ابتدائية كتلتان $' m_1 = 2m_2 '$الموصلتين ببعضهما بخيط مهمل الكتلة وغير قابل للتمطيط يمر عبر محز بكرة بدون احتكاك ومهملة الكتلة كذلك. الكتلة m_1 بجانب البكرة والكتلة m_2 تنطلق من الأرضية. المستويين يميلان بنفس الزاوية على الافق $\theta_1 = \theta_2 = \theta = \pi/6$



1 –مثل القوى المؤثرة على الكتلتين والبكرة كل على حدا.

2 – أحسبتسارع الكتلتين.

3 –أحسب التوتر في الخيط

عند وصول الكتلة m_1 إلى الارتفاع $' h = l/4 '$ يتقطع الخيط

4 –ما الزمن المستغرق لكي تصل الكتلة m_1 إلى B

5 –ما هو الارتفاعh_2 الذي تكون فيه m_2 عندما تبلغ m_1 الى الأرض *(B)*

6–ماهي الطاقة الكامنة في هذه اللحظة إذا أخذنا الأرضية (BC) كمرجع للطاقة الكامنة؟

التمرين الثالث:

يتعرض الكترون لفعل حقول كهربائية أثناء مروره بين الصفائح المتوازية الأفقية والشاقولية في راسم الاهتزازات المهبطي. بفعل هذا التأثير يقوم بحركة تخضع للقوانين التالية

$$\begin{cases} x(t) = A.cos(\omega t) \\ y(t) = B.sin(\omega t) \end{cases}$$

حيث $''A, B, \omega''$ ثوابت موجبة

1 –أوجد معادلة المسار لهذا الالكترون ومثله في حالة $A > B$ (A اكبر من B)

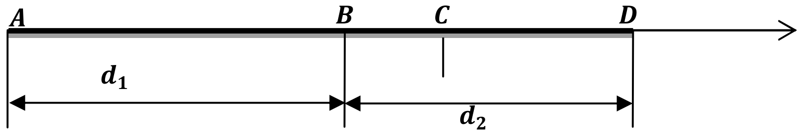
2 –أكتب معادلة شعاع الموضع في لحظة كيفية.

3 –أوجد عبارة شعاع السرعة وكذلك طوليته في لحظة كيفية.

4 –أوجد عبارة شعاع التسارع وطوليته في الإحداثيات الذاتية. استنتج نصف قطر الإنحناء

Exercice 01

On a : $\boldsymbol{d_1 = AB = d_2 = BD = d}$



*-Le trajet **AB** est traversé pendant*

Un temps $\boldsymbol{t_1}$ *tel que :* $\boldsymbol{t_1 = \frac{d_1}{v_1}}$

*-Le trajet **BC** se fait en deux phases :*

- *La première phase, la traversée de **BC** se fait à la vitesse* $\boldsymbol{v_2}$ *pendant* $\boldsymbol{\frac{1}{3}t_2}$
- *La seconde phase, la traversée de **CD** se fait à la vitesse* $\boldsymbol{v_3}$ *pendant* $\boldsymbol{\frac{2}{3}t_2}$

$$\boldsymbol{d_2 = v_2.\frac{1}{3}t_2 + v_3.\frac{2}{3}t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{d_2}{\frac{1}{3}v_2 + \frac{2}{3}v_3} \Rightarrow t_2 = \frac{3d_2}{v_2 + 2v_3}}$$

La vitesse moyenne est : $< v >= \boldsymbol{v_{moy} = \frac{AD}{t_1+t_2} = \frac{d_1+d_2}{t_1+t_2}}$ *or* $\boldsymbol{d_1 = d_2 = d}$

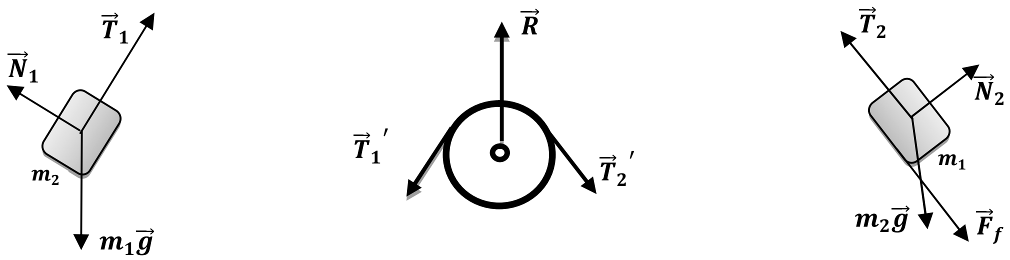
$$\Rightarrow < v >= \frac{\boldsymbol{2d}}{\frac{d}{v_1} + \frac{3d}{v_2+2v_3}} \Rightarrow < v >= \frac{\boldsymbol{2v_1(v_2 + 2v_3)}}{\boldsymbol{3v_1 + v_2 + 2v_3}}$$

- Dans le cas où : $\boldsymbol{v_1 = 10\ m/s,\ v_2 = 15\ m/s}$ *et* $\boldsymbol{v_3 = 12\ m/s}$

$$\boxed{< v >= 7.826\ m/s}$$

Exercice 02

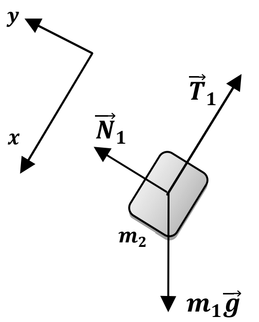
1°/*Représentation des efforts sur les masses et la poulie*

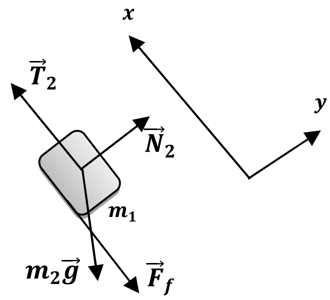


2°/*Détermination de l'accélération des masses* $\boldsymbol{m_1}$ *et* $\boldsymbol{m_2}$

On applique le principe fondamental de la dynamique (2^nd loi de Newton)

$$\boxed{\sum \vec{F}_i^{ex} = \frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a}}$$ *pour une masse constante*





-Pour la masse m_1*-Pour la masse* m_2

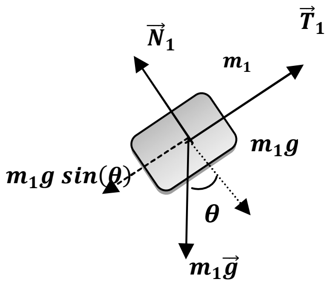
$$\boxed{\sum \vec{F}_i^{ex} = m_1\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{N}_1 = m_1\vec{a}_1}$$

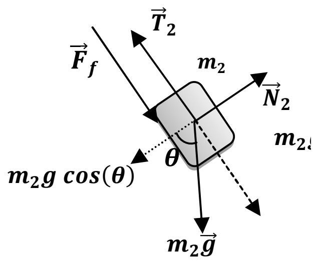
$$\boxed{\sum \vec{F}_i^{ex} = m_2\vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_f = m_2\vec{a}_2}$$

Pour résoudre ce système on passe aux équations scalaires en faisant la projection sur un système de coordonnées bien choisit (dans ce cas on choisit le système cartésien)

- m_1 : $\begin{cases} \overrightarrow{ox} : m_1 g sin(\theta) - T_1 = m_1 a_1 (1) \\ \overrightarrow{oy} : N_1 - m_1 g cos(\theta) = 0 \qquad (2) \end{cases}$ - m_2 : $\begin{cases} \overrightarrow{ox} : -m_2 g sin(\theta) + T_2 - F_f = m_1 a_1 (3) \\ \overrightarrow{oy} : N_2 - m_2 g\, cos(\theta) = 0 \qquad (4) \end{cases}$

$F_f = \mu\, N_2 (5)$





- *L'équation* (2) *donne* : $N_1 = m_1 g cos(\theta)$
- *L'équation* (4) *donne* : $N_2 = m_2 g cos(\theta) \Longrightarrow (5): F_f = \mu\, m_2 g cos(\theta)$

$m_1 g sin(\theta) - T_1 = m_1 a_1 (1) et - m_2 g sin(\theta) + T_2 - F_f = m_1 a_1 (3)$

On a un système de 2 équations donc 4 inconnues $(T_1; T_2; a_1; a_2)$*. Pour le résoudre il nous faut 2 autres équations qu'on déduit des équations dites de contraintes.*

1. *Fil inextensible et de masse négligeable :* $a_1 = a_2 = a$ *;*$T_1 = T_1{}'$ *et* $T_2 = T_2{}'$

2. *Poulie de masse et frottement négligeable :* $T_1{}' = T_2{}' = T$

Ce qui donne pour $(1) et (3)$ $\begin{cases} m_1 g sin(\theta) - T = m_1 a & (1) \\ T - m_2 g sin(\theta) - \mu\, m_2 g cos(\theta) = m_2 a & (3) \end{cases}$

$(1)+(3) \Rightarrow \left[m_1 sin(\theta) - m_2\left(sin(\theta) + \mu\, m_2 cos(\theta)\right)\right].g = (m_1 + m_2)a$

$$\boxed{a = \frac{m_1 sin(\theta) - m_2[sin(\theta) + \mu\, m_2 cos(\theta)]}{m_1 + m_2}.g}$$

Pour $m_1 = 2m_2 = 0.5\ kg$; $\theta_1 = \theta_2 = \theta = \pi/6,$ $= 0.1$ *et* $g = 10\ m/s^2$

$$\boxed{a = 1.378\ m/s^2}$$

2°/ *La tension dans le fil.*

De l'équation **(1)** $m_1 g sin(\theta) - T = m_1 a \Rightarrow T = m_1(g sin(\theta) - a)$

$$\boxed{T = 1.811 N}$$

4°/ *Le temps mis par* m_1 *pour arriver au sol (Point* ***B****).*

m_1 **:** *Part du repos et atteint une hauteur* $h = l/4$ $\Rightarrow$*elle parcours* $\Delta x = \frac{l}{2} = 1.5\ m$

Le mouvement est uniformément varié, l'équation de la cinématique :

$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$

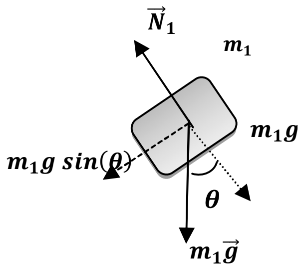
donne : $v = \sqrt{v_0^2 + al} v_0 = 0 \Rightarrow \boxed{v \approx 2\ m/s}$

Après la rupture du fils la vitesse $v \approx 2\ m/s$ *devient une vitesse initiale pour le reste du*

mouvement et la masse m_1 *changeson accélération*

$m_1 g sin(\theta) = m_1 a_1 \Rightarrow a_1 = g sin(\theta) = 5\ m/s^2$

La distance restante après rupture du fil est : $\Delta x = \frac{l}{2}$

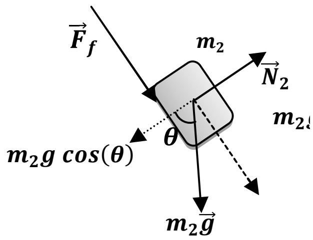


La masse arrive au point ***B****(au sol) avec la vitesse :*

$v_B = \sqrt{v_0^2 + al} = \sqrt{2al} \Rightarrow \boxed{v = 2.875\ m/s}$

Le temps nécessaire pour ce parcours après rupture du fil est :

$t = (v - v_0)/a \Rightarrow \boxed{t_1 = 0.175\ s}$



5°/*La hauteur* h_2 *où sera la masse* m_2 *quand* m_1 *arrive au sol*

La masse aura une décélération :

$$a_2 = -(sin\theta + \mu.cos\theta)g \Rightarrow \boxed{a_2 = -5.866\ m/s^2}$$

La distance parcourue jusqu'à l'arrêt :

$$\boxed{\frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \Delta x = 0.35m}$$

Le temps mis pour s'arrêter est: $\boxed{t_2 = \frac{(v - v_0)}{a} = 0.35\ s}$

On voit que le temps nécessaire pour que m_2 *s'arrête est supérieur au temps mis par* m_1

pour arriver au sol : $t_2 > t_1$

La masse m_2 *se trouve à une distance* Δx_2 *au-delà du milieu de* AC

Pour $t_2 = 0.175\ s$ *la masse* m_2 *aura parcourue :*

$$v = at + v_0 = 1\ m/s \Rightarrow \Delta x_2 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{1 - 4}{2(-5.866)} \Rightarrow \boxed{\Delta x_2 = 0.25\ m}$$

La masse m_2 *se trouve éloignée du point C (du sol) de :* $x_2 = \frac{l}{2} + \Delta x_2 = 1.75\ m$

La hauteur h_2 *:* $sin\theta = h_2/x_2 \Rightarrow \boxed{h_2 = x_2.sin\theta = 0.875\ m}$

5°/*Le sol pris comme référence, l'énergie potentielle est donnée par :*

$$U = m_2gh_2 \Rightarrow \boxed{U = 2.18\ J}$$

Exercice 03

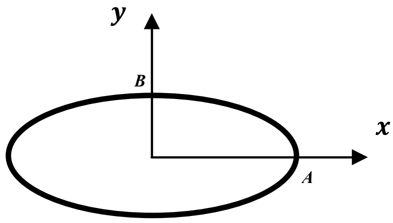
Les équations du mouvement sont :

$$\begin{cases} x(t) = A.cos(\omega t) \\ y(t) = B.sin(\omega t) \end{cases}$$ A , B *et* ω *sont des constantes positives:*

1°/ *L'équation de la trajectoire*

$$\begin{cases} x(t) = A.cos(\omega t) \\ y(t) = B.sin(\omega t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x/A = cos(\omega t) \\ y/B = sin(\omega t) \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = cos^2(\omega t) + sin^2(\omega t) = 1$$

$\boxed{\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 1}$ C'est l'équation d'une ellipse droite$(A > B)$



2°/ Vecteur position :

$\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j}$ Mouvement dans le plan ***xoy***

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t) = A.cos(\omega t)\vec{i} + B.sin(\omega t)\vec{j}}$$

3°/ Vecteur vitesse :

$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$ on a : $\frac{dx}{dt} = -A\omega.sin(\omega t)$ et $\frac{dx}{dt} = B\omega.cos(\omega t)$

$$\boxed{\vec{v} = -A\omega.sin(\omega t)\vec{i} + B\omega.cos(\omega t)\vec{j}}$$

Le module du vecteur vitesse

$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} \Rightarrow \boxed{v = \omega.\sqrt{A^2 sin^2(\omega t) + B^2 cos^2(\omega t)}}$

$$v = \omega.\sqrt{A^2 + (B^2 - A^2)cos^2(\omega t)} = \omega.\sqrt{B^2 + (A^2 - B^2)sin^2(\omega t)}$$

4°/ Vecteur accélération en coordonnées intrinsèque :

$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = a_T\vec{u}_T + a_N\vec{u}_N$ *avec* $a_T = \frac{dv}{dt}$ et $a_N = v^2/\mathcal{R}$

$$a_T = \frac{2\omega^2.(A^2 - B^2)sin(\omega t).cos(\omega t)}{2\sqrt{A^2 sin^2(\omega t) + B^2 cos^2(\omega t)}} = \frac{\omega^2.(A^2 - B^2)sin(2\omega t)}{2\sqrt{A^2 sin^2(\omega t) + B^2 cos^2(\omega t)}}$$

et

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{{a_T}^2 + {a_N}^2} = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2}$$

$$avec \begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = -A\omega^2 cos(\omega t) \\ \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = -B\omega^2 sin(\omega t) \end{cases} \Rightarrow a = \omega^2\sqrt{A^2cos^2(\omega t) + B^2sin^2(\omega t)}$$

$$\Rightarrow a_N = \sqrt{a^2 - {a_T}^2}{a_N}^2 = \omega^4[A^2cos^2(\omega t) + B^2sin^2(\omega t)] - \frac{\omega^4.\left(A^2-B^2\right)^2 sin^2(\omega t).cos^2(\omega t)}{A^2sin^2(\omega t)+B^2cos^2(\omega t)}$$

$$\boxed{a_N = \frac{\omega^2 AB}{\sqrt{A^2sin^2(\omega t) + B^2cos^2(\omega t)}}}$$

$$\boxed{a_N = v^2/\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{R} = \frac{1}{AB}\left[A^2sin^2(\omega t) + B^2cos^2(\omega t)\right]^{3/2}}$$

Année Universitaire 2021/2022 **Université de M'sila** *14/Février/2022*

Niveau : LICENCE : L1 (ST) **CONTRÔLE DE PHYSIQUE 01** ***Durée : 1h30mn***

Questions générales:(4 pts)

1°/ *Exprimer les vecteurs unitaires sphériques*$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$*ans la base cartésiennes*$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

2°/ *Quelle est la disposition de deux vecteurs ayant un produit vectoriel nul ?*

3°/ *Que décrit l'équation de la trajectoire et que décrit l'équation horaire ?*

4°/ *Pour le déplacement et la distance. Laquelle qui est scalaire et lequel qui est vectoriel ?*

Exercice :(08 pts)

Une masse$''\boldsymbol{m}''$*, supposéeponctuelle, se déplace dans le plan*$(\boldsymbol{oxy})$*, régit par les équations paramétriques suivantes :* $\begin{cases} x(t) = a.\cos(\omega t) \\ y(t) = b.\sin(\omega t) \end{cases}$ $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$*et* $\boldsymbol{\omega}$*sont des constantes positives*

Dans la base cartésienne :

1°/ *Donner l'équation de la trajectoire. Représenter ladans le cas*$\boldsymbol{b} < \boldsymbol{a}$.

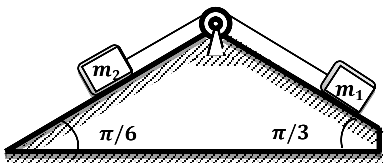
2°/ *Donner l'expression de la vitesse et son module.*

3°/ *Donner l'expression de l'accélération et son module.*

4°/ *Déterminer le rayon de courbure* $\mathcal{R}$.

Exercice 01:(08 pts)

Deux masses $'\boldsymbol{m_1}'$*et* $'\boldsymbol{m_2}'$*reliées par un fil inextensible qui passe à travers une poulie de masse et de frottement négligeables. Les deuxmasses se déplacent sur des planslisses. Pour* $\boldsymbol{m_1}$ *il est incliné de '* $\frac{\pi}{3}$ *'par rapport à l'horizontale, pour*$\boldsymbol{m_2}$*entrainée, il est incliné de '* $\frac{\pi}{6}$ *'.*



1°/ *Représenter les efforts sur les masses et la poulie séparément.*

2°/ *Quelle est la conditionsur '* $\boldsymbol{m_1}$ *' et '* $\boldsymbol{m_2}$ *' pour que le système soiten équilibre ?*

Si ' $\boldsymbol{m_2 = 3m_1}$ *' le système se met en mouvement, (On prend* $\boldsymbol{g = 10\ m/s^2}$*)*

3°/ *Déterminer l'accélération des masses.*

4°/ *Déterminer la tension dans le fil.*

Questions générales:(10 pts)

1°/*Exprimer les vecteurs unitaires sphériques*$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ *dans la base cartésiennes*$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$*et donner les expressions de leurs dérivées par rapport au temps dans la base sphérique* $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$.

2°/*Peut-on définir la base intrinsèque*$(\vec{u}_T, \vec{u}_N)$ *sans connaitre la trajectoire ?*

3°/*Que décrit l'équation de la trajectoire et que décrit l'équation horaire ?*

4°/*Quel type du mouvement vérifiant la condition*$\vec{a} \circ \vec{v} > 0$?

5°/*Donner les expressions de la quantité du mouvement et du moment cinétique.*

6°/*Donner l'expression de la 2[éme] loi de Newton dans le cas de la rotation (théorème du moment cinétique)?*

7°/*Donner les conditions d'équilibre stable et instable.*

8°/*Les coefficients de frottement statique* $\mu_s = \frac{F_s}{N}$ *et dynamique* $\mu_d = \frac{F_d}{N}$. *Que représentent* F_s *et* F_d?

9°/*Dans un système non conservatif, que vaut la variation de l'énergie totale ?*

10°/*Quel type de force vérifiantla condition :*$\oint \vec{F} \circ d\vec{r} = 0$?

L'énergie totale est-elle conservée en présence de ces forces seulement ?

Exercice 01:(pts) Fig.01

Un cube de masse $m = 1kg$, *supposé ponctuel, est lancée de* A *avec une vitesse initiale* $\vec{v}_A = \vec{v}_0$ *parallèlement à la piste ABC, inclinée de* $\alpha = \pi/6$ *par rapport à l'horizontale,* $AB = 10m$ *est lisse,*BC*estrugueuse dont le coefficient de frottement dynamique est*$\mu_d = 0.4$. *(on donne* $g = 10m/s^2$*)*

1°/*Représenter les forces appliquées au cube, lors de la montée, sur les tronçons* AB *et* BC *de la piste.*

2°/*Quelle doit-être la vitesse de lancement*"v_{A_1}"*pour que ce cube s'arrête au point* B?

3°/*Lancer à la vitesse* v_{A_2}, *le cube s'immobilisera au point* D*entre*B *et* C.*Donner l'expression de* BD *en fonction de* v_{A_2}, AB, g, α*et* μ_d. *Que vaut* BD *si* $v_{A_2} = 12m/s$?

Exercice 02:(pts)

Une masse"m", *supposéeponctuelle, se déplace dans le plan*(oxy), *régit par les équations paramétriques suivantes :* $\begin{cases} x(t) = a.cos(\omega t) \\ y(t) = b.sin(\omega t) \end{cases}$ a, b *et* ω*sont des constantes positives*

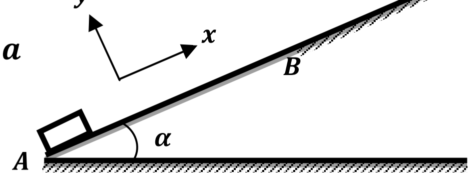


Fig.01

Dans la base cartésienne :

1°/*Donner l'équation de la trajectoire. Représenter la dans le cas*$b < a$

2°/ *Donner l'expression de la vitesse et son module.*

3°/ *Donner l'expression de l'accélération et son module.*

4°/ *Déterminer le rayon de courbure*$\mathcal{R}$.

Questions générales (10pts)

1°- Relation entre coordonnées : cartésiennes et sphériques :

Cartésiennes et sphériques : $\begin{cases} \vec{u}_r = \sin\theta\cos\varphi\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k} \\ \vec{u}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\vec{j} - \sin\theta\vec{k} \\ \vec{u}_\varphi = -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j} \end{cases}$

Les dérivées: $\begin{cases} \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{u}_\varphi \\ \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_r + \dot{\varphi}\cos\theta\vec{u}_\varphi \\ \frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}(\sin\theta\,\vec{u}_r + \cos\theta\vec{u}_\theta) \end{cases}$

2°-No on ne peut-on définir la base intrinsèque$(\vec{u}_T, \vec{u}_N)$ sans connaitre la trajectoire

3°-L'équation de la trajectoire décrit le trajet suivit (rectiligne, circulaire…)
L'équation horaire décrit la façon dont le trajet est traversé (uniforme, accéléré …)

4°- La condition $\vec{v}\cdot\vec{a} > 0$c'est pour le mouvement uniformément accéléré

5°- La quantité du mouvement : $\vec{P} = m\vec{v}$

- Le moment cinétique : $\vec{L}_{/0} = \vec{r}\wedge\vec{P} = m\vec{r}\wedge\vec{v}$

6°- la 2ème loi de Newton dans le cas de la rotation : Théorème du moment cinétique. $\sum\vec{\mathcal{M}}_{/0}(\vec{F}^{ex}) = \frac{d\vec{L}_{/0}}{dt}$

7°- La condition d'équilibre :$\frac{dU}{dx} = 0$ et $\begin{cases} \frac{d^2U}{dx^2} > 0 \quad \text{équilire stable} \\ \frac{d^2U}{dx^2} < 0 \quad \text{équilire instable} \end{cases}$

8°- F_s : la force nécessaire pour amorcer (débuter) le mouvement

- F_d : la force nécessaire pour rendre le mouvement uniforme

9°-Dans un système non conservatif, la variation de l'énergie totale est égale aux travaux des force non conservatives. $\Delta E = W^{NC}$

10°- Les forces qui vérifient la condition$\oint\vec{F}\circ d\vec{r}$sont les forces conservatives

Puisque c'est un système conservatif, la variation de l'énergie totale est nulle.

Exercice 01 :(05pts)

1°-

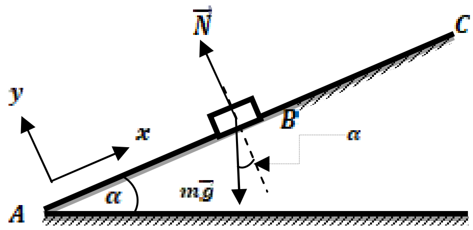


Fig.01

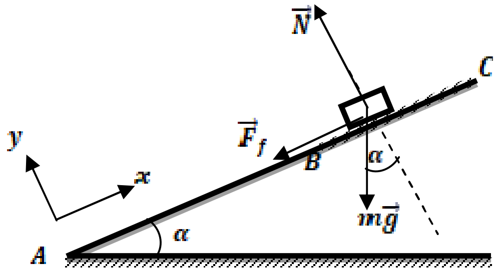


Fig.01

2°- *Le cube s'arrête au point* $B \Rightarrow v_B = 0$

- *L'équation de la cinématique indépendante du temps explicitement :*

$$\boxed{v_B^2 - v_A^2 = 2a.(x_B - x_A)(1)}$$

- *On cherche l'accélération à partir de l'équaton fondanetale de la dynamique*

: $\sum \vec{F}^{ex} = \frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a}$

$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a} = m\vec{a}_x + m\vec{a}_y \Rightarrow$Par projection : $\begin{cases} \overrightarrow{ox}: \ -mg.sin(\alpha) = ma_x & (2) \\ \overrightarrow{oy}: \ N - mg.cos(\alpha) = ma_y & (3) \end{cases} \begin{pmatrix} a_x = a \\ a_y = 0 \end{pmatrix}$

L'équation (2)*donne :* $a = -g.sin(\alpha)$*et d'après l'équation* (1)

$$\boxed{v_{A_1} = v_A = \sqrt{2.AB.g.sin(\alpha)}} \qquad \boxed{A.N: v_{A_1} = 10m/s}$$

2°- *Le cube s'arrête au point* $D \Rightarrow v_D = 0$ *Sicile cube traverse deux zone lisse et rugueuse*

Zone lisse$\underline{x_A < x < x_B}$: *on a* $\boxed{v_B^2 = v_A^2 + 2a.(x_B - x_A) = v_A^2 - 2g.AB.sin(\alpha)(4)}$

Zone rugueuse $x_B < x < x_C$: *on a*$v_D^2 - v_B^2 = 2a.(x_B - x_B) = 2a.BD$

Puisque $v_D = 0 \Rightarrow \boxed{v_B^2 = -2a.BD(5)}$

- *On cherche l'accélération à partir de l'équaton fondanetale de la dynamique:*

$\boxed{m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a} = m\vec{a}_x + m\vec{a}_y} \Rightarrow$Par projection : $\begin{cases} \overrightarrow{ox}: \ -mg.sin(\alpha) - F_f = ma_x & (6) \\ \overrightarrow{oy}: \ N - mg.cos(\alpha) = ma_y & (7) \\ F_f = \mu N & (8) \end{cases}$ *L'équation* (7) *donne :*

$N = mg.cos(\alpha) \Longrightarrow F_f = \mu.mg.cos(\alpha)(9)$

On porte (9) *dans* (6) *on obtient :* $a = -g[sin(\alpha) + \mu.g.cos(\alpha)](10)$

On se sert de (10) *on obtient :* $v_B^2 = 2g.BD.(sin(\alpha) + \mu.g.cos(\alpha))(11)$

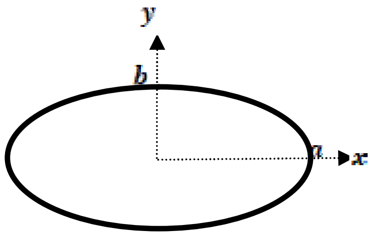
On se sert de (11) *et* (4) *on obtient* $\boxed{BD = \frac{v_A^2 - 2g.AB.sin(\alpha)}{2g.(sin(\alpha)+\mu.g.cos(\alpha))}(12)}$

- *Pour* $\boxed{v_A = v_{A_2} = 12m/s \Longrightarrow BD \approx 2.6m/s}$

Exercice 02 (05pts)

1°- *Equation de la trajectoire*

$\begin{cases} x = a.cos(\omega t) \\ y = b.sin(\omega t) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{x}{a} = cos(\omega t) \\ \frac{y}{b} = sin(\omega t) \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$



La trajectoire est une ellipse droite

2°- *Vecteur vitesse :*

$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \Longrightarrow \vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$

$$\boxed{\vec{v} = \omega\left[-a.sin(\omega t)\vec{i} + \ b.cos(\omega t)\vec{j}\right] v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \omega\sqrt{a^2.sin^2(\omega t) + b^2.cos^2(\omega t)}}$$

3°- *Vecteur vitesse :*

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad et \ \ \overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \Longrightarrow \vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}}$$

$$\boxed{\vec{a} = -\omega^2\left[a.cos(\omega t)\vec{i} + \ b.sin(\omega t)\vec{j}\right] a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \omega^2\sqrt{a^2.cos^2(\omega t) + b^2.sin^2(\omega t)}}$$

4°- *Rayon de courbure :*

$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} = a_T\vec{u}_T + a_N\vec{u}_N$ et $a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{a_T{}^2 + a_N{}^2}$ Avec $\begin{cases} a_T = \frac{dv}{dt} \\ a_N = \frac{a^2}{\mathcal{R}} \end{cases}$

Comme

$$a_T = \frac{d}{dt}\left(\omega\sqrt{a^2.\sin^2(\omega t) + b^2.\cos^2(\omega t)}\right) = \omega^2 \frac{(a^2 - b^2).\sin(\omega t).\cos(\omega t)}{\sqrt{a^2.\sin^2(\omega t) + b^2.\cos^2(\omega t)}}$$

$$= \omega^2 \frac{(a^2 - b^2).\sin(2\omega t)}{2\sqrt{a^2.\sin^2(\omega t) + b^2.\cos^2(\omega t)}}$$

$$a_N = \sqrt{a^2 - a_T{}^2} = \omega^2\left[\left(a^2.\cos^2(\omega t) + b^2.\sin^2(\omega t)\right) - \frac{(a^2 - b^2)^2.\sin^2(\omega t).\cos^2(\omega t)}{a^2.\sin^2(\omega t) + b^2.\cos^2(\omega t)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$\Rightarrow a_N = \frac{a.b\omega^2}{a^2\sin^2(\omega t) + b^2\cos^2(\omega t)}$ *Or* $\boxed{a_N = \frac{v^2}{\mathcal{R}} = \frac{\omega^2\left[a^2\sin^2(\omega t) + b^2\cos^2(\omega t)\right]}{\mathcal{R}}}$

$$\boxed{\mathcal{R} = \left[a^2.\sin^2(\omega t) + b^2.\cos^2(\omega t)\right]^{3/2} \Big/ a.b}$$

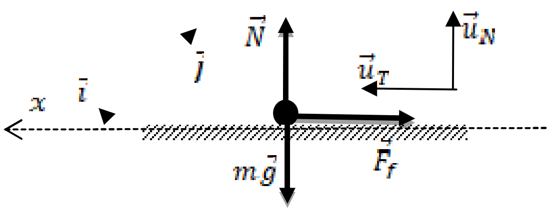
Tronçon CB :

Le système part du point **C** $(v_0 = v_C = \sqrt{2\mathcal{R}g})$ sur un plan rugueux $(\mu = 0.5)$

On applique le principe fondamental de la dynamique :(2nd loi de Newton).

$\sum \vec{F}^{ex} = \frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a}$ (Masse ponctuelle). $\Rightarrow m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$

La projection sur la base $(\vec{u}_T;\vec{u}_N)$:



$$\begin{cases} \vec{u}_T: \ -F_f = ma_T = m\frac{dv}{dt} \ (1) \\ \vec{u}_N: \ N - mg = ma_N = \frac{mv^2}{\mathcal{R}} \ (2) \end{cases}$$

et on a $F_f = \mu N$ **(3)**

Le mouvement se fait suivant « x », on va positionner C par x_C et B par x_B

Le mouvement est rectiligne. Le rayon de courbure est infini $\mathcal{R} \to \infty$

L'équation (2) donne : $N - mg = ma_N = 0 \Rightarrow N = mg$

L'équation (3) donne : $F_f = \mu m g$

L'équation (1) donne $-F_f = -\mu m g = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow -\mu g = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}.\frac{dx}{dt} \Rightarrow -\mu g\,dx = v.dv$

$-\int_{x_C}^{x_B} \mu g dx = \int_{v_C}^{v_B} v.dv \Rightarrow -\mu g x|_{x_C}^{x_B} = \frac{1}{2}v^2\Big|_{v_C}^{v_B} \Rightarrow -\mu g(x_B - x_C) = \frac{1}{2}(v_B^2 - v_C^2)$

$v_B^2 = v_C^2 - 2\mu g(x_B - x_C) = 2Rg - 2 * 0.5Rg \Rightarrow \boxed{v_B = \sqrt{Rg}}$

Une autre variante : On fait la projection sur la base$(\vec{\imath};\vec{\jmath})$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{ox}: -F_f = ma_x (1) \\ \overrightarrow{oy}: N - mg = ma_y (2) \end{cases}$$

Puisqu'il n'y a pas de mouvement sur $\overrightarrow{oy} \Rightarrow a_y = 0$ et $a_x = a$

L'équation (2) donne : $N - mg = ma_y = 0 \Rightarrow N = mg$; $F_f = \mu N = \mu m g$

L'équation (1) donne $-F_f = -\mu m g = ma \Rightarrow a = -\mu g$

Utilisant l'équation de la cinématique du mouvement rectiligne uniformément varié indépendante du temps : $v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$

On a: $v_0 = v_C$; $v = v_B$; $a = -\mu g$; $x_0 = x_C$; $x = x_B \Rightarrow x - x_0 = R$

$v_B^2 = v_C^2 - 2\mu g(x_B - x_C) = 2Rg - 2 * 0.5Rg \Rightarrow \boxed{v_B = \sqrt{Rg}}$

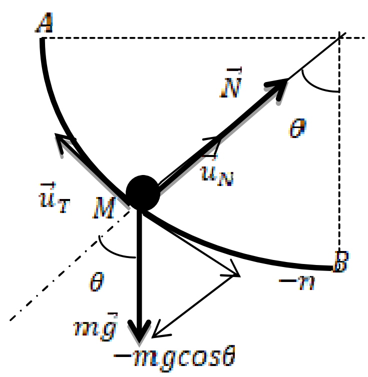
<u>Tronçon BA: Vitesse du point quelconque M</u>:

On applique le principe fondamental de la dynamique :(2nd loi de Newton).

$\sum \vec{F}^{ex} = \frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a}$ (Masse ponctuelle). $\Rightarrow m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$

La projection sur la base intrinsèque$(\vec{u}_T;\vec{u}_N)$:

$$\begin{cases} \vec{u}_T: -mg\sin(\theta) = ma_T = m\frac{dv}{dt} (1) \\ \vec{u}_N: N - mg\cos(\theta) = ma_N = \frac{mv^2}{R} (2) \end{cases}$$



L'équation (1) donne : $-g\sin(\theta) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt}$

Or $\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R}$

$$\Rightarrow -Rg\sin(\theta)d\theta = vdv \Rightarrow -\int_0^{\theta} Rg\sin(\theta)d\theta = \int_{v_B}^{v_M} v.dv$$

$$\Rightarrow 2Rg(\cos\theta - 1) = v_M^2 - v_B^2 \Rightarrow \boxed{v_M = \sqrt{Rg(2\cos\theta - 1)}}$$

3°-Arrive-t-elle au point **A ?**

Au point **A** L'angle θ est : $\theta_A = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow v_A = \sqrt{Rg(2\cos\theta_A - 1)} \Rightarrow \boxed{v_A = \sqrt{-Rg} = i\sqrt{Rg}}$$

L'expression de la vitesse au point **A** est imaginaire $\Rightarrow$ Elle n'y arrive pas

La particule s'arrête au point ou l'angle θ esttelle que $v_M = 0$

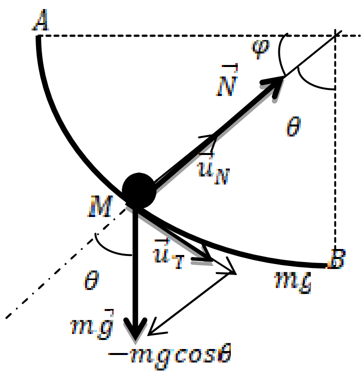
$$v_M = \sqrt{Rg(2\cos\theta - 1)} = 0 \Rightarrow 2\cos\theta - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{3}}$$

4°- En reprenant le mouvement la masse part de$\theta_0 = \frac{\pi}{3}$

- La vitesse au point B

- On applique le principe fondamental de la dynamique :(2nd loi de Newton).
- $\sum \vec{F}^{ex} = \frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a}$ (masse ponctuelle). $\Rightarrow m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$

$$\begin{cases} \vec{u}_T : mg\cos(\varphi) = ma_T = m\frac{dv}{dt}\,(1) \\ \vec{u}_N : N - mg\sin(\varphi) = ma_N = \frac{mv^2}{R}\,(2) \end{cases} \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \theta \Rightarrow \begin{cases} \theta = 0 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \\ \theta = \frac{\pi}{3} \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$



$$Rg\cos(\varphi)d\varphi = vdv \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{3}} Rg\cos(\varphi)d\varphi = \int_{v_B}^{v_M} v.dv$$

$$\Rightarrow 2Rg\sin(\varphi)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = v_B^2 - v_0^2 \Rightarrow v_B^2 = 2Rg\left(1 - \frac{1}{2}\right) = Rg$$

$$\boxed{v_B = \sqrt{Rg}}$$

Ou bien : puisque le tronçon est lisse la vitesse $v_B$est la même que ce soit en montée ou en descente.

- La vitesse au point C :

  Sur le tronçon BC rugueux

  $$-F_f = -\mu mg = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow -\mu g = \frac{dv}{dt}$$

  $$v_C^2 = v_B^2 - 2\mu g(x_B - x_C) = Rg - 2 * 0.5Rg = 0$$

$$\boxed{v_C = 0}$$

La particule s'arrête au point **C.**

Exercice 01 (07pts)

$$\begin{cases}\rho(t) = be^{\omega t}\\ \theta(t) = \omega t\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot{\rho} = \omega be^{\omega t} = \omega\rho\\ \dot{\theta} = \omega\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\ddot{\rho} = \omega^2 be^{\omega t} = \omega^2\rho\\ \ddot{\theta} = 0\end{cases}$$

1°- En coordonnées polaires (ρ, θ) : *soit le vecteur position :* $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \rho\vec{u}_\rho$

Vecteur vitesse :

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \dot{\theta}\rho\vec{u}_\theta = \omega\rho\vec{u}_\rho + \omega\rho\vec{u}_\theta}$$

$$\vec{v} = \omega\rho(\vec{u}_\rho + \vec{u}_\theta) = \omega be^{\omega t}(\vec{u}_\rho + \vec{u}_\theta)$$

Module de la vitesse :

$$\boxed{|\vec{v}| = v = \sqrt{2}\omega\rho = \sqrt{2}\omega be^{\omega t}}$$

Vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta = (\omega^2\rho - \omega^2\rho)\vec{u}_\rho + (2\omega^2\rho)\vec{u}_\theta$$

$$\boxed{\vec{a} = 2\omega^2\rho\vec{u}_\theta = 2\omega^2 be^{\omega t}\vec{u}_\theta}$$

Module de la vitesse :

$$\boxed{|\vec{a}| = a = 2\omega^2\rho = 2\omega^2 be^{\omega t}}$$

2°- $\vec{a}\cdot\vec{v} = a.v.\cos(\alpha) = 2\omega^2\rho.\sqrt{2}\omega\rho\cos(\alpha) = (2\omega^2\rho\vec{u}_\theta)\cdot\left(\omega\rho(\vec{u}_\rho+\vec{u}_\theta)\right) \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\boxed{\alpha = \pi/4}$$

3°- Le rayon de courbure :

On a : $\mathcal{R} = v^2/a_N$ sachant que : $a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2}$ et $a_T = \frac{dv}{dt}$

$a = 2\omega^2\rho = 2\omega^2 b e^{\omega t}$ et $v = \sqrt{2}\omega\rho = \sqrt{2}\omega b e^{\omega t}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} a_T = \dfrac{d(\sqrt{2}\omega\rho)}{dt} = \sqrt{2}\omega\dot{\rho} = \sqrt{2}\omega^2 b e^{\omega t} \\ v^2 = 2\omega^2\rho^2 = 2\omega^2 b^2 e^{2\omega t} \end{cases}}$$

Donc : $a_N = \sqrt{4\omega^4\rho^2 - 2\omega^4\rho^2} = \sqrt{2}\omega^2 b e^{\omega t}$

Alors : $\boxed{\mathcal{R} = \frac{2\omega^2\rho^2}{\sqrt{2}\omega^2\rho} = \sqrt{2}be^{\omega t}}$

3°- L'abscisse « S » :

On a : $ds = vdt \Rightarrow \int_0^S ds = \int_0^t vdt = \int_0^t \sqrt{2}\omega b e^{\omega t}dt \Rightarrow S|_0^s = \sqrt{2}be^{\omega t}|_0^t$

$$\boxed{s = \sqrt{2}b(e^{\omega t} - 1)}$$

Référence

[1] D. Allali, 2018/2019, *Cours de Physique1 Mécanique du Point Matériel*. Université Mohamed Boudiaf – M'sila, pp. 6-13.
file:///D:/Module%20Physique1%20_2021_2022/Cours%20Physique%201%20Allali/Polycopie%20Physique1.pdf

[2] L. Laissaoui, 2015/2016. *Cours de Physique1 Mécanique du Point*. Université Mohamed Boudiaf – M'sila, pp. 9-12.
file:///D:/Module%20Physique1%20_2021_2022/Phys_1_2022/physique%201%20M%C3%A9canique/Cours%20Phys1%20M'sila%202018_2019/cours-phys1_M'sila/01_Rappels-Math%C3%A9matique.pdf

[3] D. Allali, 2018/2019, *Cours de Physique1 Mécanique du Point Matériel*. Université Mohamed Boudiaf – M'sila, pp. 13-17.
file:///D:/Module%20Physique1%20_2021_2022/Cours%20Physique%201%20Allali/Polycopie%20Physique1.pdf

[4] L. Laissaoui, 2015/2016. *Cours de Physique1 Mécanique du Point*. Université Mohamed Boudiaf – M'sila, pp. 13-15.
file:///D:/Module%20Physique1%20_2021_2022/Phys_1_2022/physique%201%20M%C3%A9canique/Cours%20Phys1%20M'sila%202018_2019/cours-phys1_M'sila/02_Systemes-de-coordonn%C3%A9es-Cin%C3%A9matiques.pdf

[5] D. Allali, 2018/2019, *Cours de Physique1 Mécanique du Point Matériel*. Université Mohamed Boudiaf – M'sila, pp. 20-32.
file:///D:/Module%20Physique1%20_2021_2022/Cours%20Physique%201%20Allali/Polycopie%20Physique1.pdf

[6] L. Laissaoui, 2015/2016. *Cours de Physique1 Mécanique du Point*. Université Mohamed Boudiaf – M'sila, pp. 17-27.
file:///D:/Module%20Physique1%20_2021_2022/Phys_1_2022/physique%201%20M%C3%A9canique/Cours%20Phys1%20M'sila%202018_2019/cours-phys1_M'sila/02_Systemes-de-coordonn%C3%A9es-Cin%C3%A9matiques.pdf

[7] D. Allali, 2018/2019, *Cours de Physique1 Mécanique du Point Matériel*. Université Mohamed Boudiaf – M'sila, pp. 32-36.
file:///D:/Module%20Physique1%20_2021_2022/Cours%20Physique%201%20Allali/Polycopie%20Physique1.pdf

[8] L. Laissaoui, 2015/2016. *Cours de Physique1 Mécanique du Point*. Université Mohamed Boudiaf – M'sila, pp. 28-31.
file:///D:/Module%20Physique1%20_2021_2022/Phys_1_2022/physique%201%20M%C3%A9canique/Cours%20Phys1%20M'sila%202018_2019/cours-phys1_M'sila/02_Systemes-de-coordonn%C3%A9es-Cin%C3%A9matiques.pdf

[9] D. Allali, 2018/2019, *Cours de Physique1 Mécanique du Point Matériel*. Université Mohamed Boudiaf – M'sila, pp. 37-55.
file:///D:/Module%20Physique1%20_2021_2022/Cours%20Physique%201%20Allali/Polycopie%20Physique1.pdf

[10] L. Laissaoui, 2015/2016. *Cours de Physique1 Mécanique du Point*. Université Mohamed Boudiaf – M'sila, pp. 37-51.
https://elearning.univ-msila.dz/moodle/pluginfile.php/705043/mod_resource/content/1/04_Dynamique.pdf

[11] D. Allali, 2018/2019, *Cours de Physique1 Mécanique du Point Matériel*. Université Mohamed Boudiaf – M'sila, pp. 56-66.
file:///D:/Module%20Physique1%20_2021_2022/Cours%20Physique%201%20Allali/Polycopie%20Physique1.pdf

[12] L. Laissaoui, 2015/2016. *Cours de Physique1 Mécanique du Point*. Université Mohamed Boudiaf – M'sila, pp. 52-62.
https://elearning.univ-msila.dz/moodle/pluginfile.php/705091/mod_resource/content/1/05_Travail-et-Energie.pdf

[13] A. Gibaud, M. Henry, 2007. *Cours de Physique Mécanique du Point*. Université du Maine (Le Mans), 2e édition, pp. 1-328.

[14] J.L. Caubarrere, H. Djellouah, J. Fourny, F.Z. Khelladi : *Introduction à la Mécanique.*

[15] R. Resnick, D. Halliday : *Mécanique Physique Tome 1.*

[16] M.A. Ruderman, W.D. Knight, C. Kittel : *Cours de Physique de Berkeley Tome 1-Mécanique.*

[17] L. Benallegue, M. Debiane, A. Gourari, A. mahamdia, 2011. *cours de physique1 mécanique du point matériel*. Université du Sciences & de la Technologie H. Boumediene Alger, pp. 1-151.

[18] Y. Tariket, 2017/2018. *Cours de Physique 1 Mécanique*. Université de Bejaia, pp. 1-55.

[19] A. Chelouche,. *Cours de Physique 1 Mécanique*. Université de Bejaia.

[20] http://www.cours-et-exercices.com