UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Appliquées et fondamentales

Par

Oussama ZIANE

Sujet

METHODE PARALLELE POUR LES EQUATIONS INTEGRALES LINEAIRES

Dirigé par :

Mr. M.NADIR

Promotion: 2010/2011

RESUME

Dans ce travail nous proposons une nouvelle méthode de résolution numérique des équations intégrales linéaires de Fredholm de seconde espèce à noyau dégénéré. Cette méthode est applicable dans le cas où le noyau $K(x, y)$ s'écrit comme somme de deux parties l'un est dégénéré $K_s(x, y)$ et l'autre n'est pas dégénérée $K_R(x, y)$.

Mots clés: équation de Fredholm, noyau dégénéré, Méthode parallèle.

ABSTRACT

In this work we propose a new method of a numerical resolution of Fredholm's lineare integral equations of the second kind with degenerate kernel.This methode is applicable in the case in which the kernel $K(x, y)$ would be Witten as in sum of two parties one is degenerate $K_s(x, y)$ and the other is not degenerate $K_R(x, y)$.

Keywords: Fredholm equation, degenerate kernel, Method parallel.

ملخص المذكرة

في هذه المذكرة نقدم طريقة حديثة للحل العددي للمعادلات التكاملية الخطية لـ Fredholm من النوع الثاني ذات نواة منحلة ، هذه الطريقة تطبق في حالة نواة$K(x, y)$ تكتب على شكل مجموع جزئين أحدهما منحل $K_s(x, y)$ والآخر غير منحل $K_R(x, y)$.

«REMERCIMENTS »

Mes remerciements vont tout premièrement à Dieu tout puissant pour la volonté, la santé et la patience, qu'il nous a donnée durant toutes ces longues années.

Nous exprimons nos profondes gratitudes à nos parents pour leurs encouragements, leur soutien et pour les sacrifices qu'ils ont enduré.

Nous tenons également à exprimer nos vifs remerciements à notre encadreur Monsieur ***Mostefa Nadir*** *pour avoir d'abord proposé ce thème, pour suivi continuel tout le long de la réalisation de cette thèse et qui n'a pas cessée de nous donner ses conseils et remarques.*

Nous remercions les membres de jury pour l'honneur qu'ils me font en participant au jugement de ce travail.

Aussi je tiens à remercier par l'occasion qui m'est offerte, l'enseignants Lakhali.B et Gagui Bachir pour son encouragement et son aide fidèle.

Tout les professeurs du primaire jusqu'à l'université a qui sans eux on n'aurai pas fais toutes cette formation.

Les mêmes expressions de reconnaissance vont également au chef de département ***M.D.Aissa*** *et tous les enseignants du département d'agronomie qui a contribué à notre formation.*

Nous tenons à remercier vivement toutes personnes qui nous ont aidé à élaborer et réaliser ce mémoire, ainsi à tous ceux qui nous aidés de prés ou de loin à accomplir ce travail.

Enfin nous tenons à exprimer notre reconnaissance à tous nos amis et collèges pour le soutient tout moral et matériel…

Z.Oussama

Introduction

Une équation intégrale est une équation fonctionnelle dans laquelle la fonction inconnue paraît sous le signe d'intégrale.

Le but de ce travail est de présenter les résultats de résolutions d'équation intégral de Fredholm de seconde espèce à noyau dégénéré. La solution exacte (analytique) de cette équation n'est pas disponible, donc on va utiliser des méthodes approchées, par exemple (Méthode de Nyström, Méthode des approximations successives, Méthode de noyau dégénéré, Méthode Parallèle ....).

Le mémoire est basé sur la Méthode Parallèle, cette dernière nécessite la décomposition du noyau en fonction dégénéré avec ou sans reste.

Le mémoire se divise en trois chapitres.

Premiére chapitre. On donne un rappel sur la théorie des opérateurs intégraux, et plus précisément le théorie de Riesz, et celle de Fredholm concernant la solubilité des équations intégrales.

Deuxième chapitre. On donne la résolution numérique d'équation intégrale de Fredholm à noyau dégénéré par des méthodes classiques.

Troisième chapitre. Il à noter que cette partie représente le but de ce mémoire où, on trouve une étude sur la méthode parallèle où on décompose tout noyau continu en somme de deux noyaux le premier dégénéré et le second sous forme de reste, avec un exemple pratique, on met en œuvre certaines techniques de résolutions d'équations intégrales de Fredholm de seconde espèce.

Sommaire

CHAPITRE 1

Notions fondamentales et définitions

Dans la suite de cette partie , on se place dans l'espace $C(D)$ des fonctions continues de D dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dans notre étude l'ensemble D sera un compact mesurable $D \in \mathbb{R}^N$ fermeture de son intérieur, l'Intérêt principal de l'espace $C(D)$ est de disposer d'un produit scalaire:

$$\langle f, g \rangle = \int_D f(x)g(x)dx$$

Et de la norme de convergence uniforme : $\|f\|_\infty = \max \{|f(x)|, x \in D\}$.

1.1 Opérateur intégral linéaire

Soit $K : C[a.b] \times C[a.b] \longrightarrow \mathbb{R}$.une fonction continue,l'opérateur intégral linéaire sur $C[a.b]$ est défini par la formule suivante :

$$A : \varphi \in C[a, b] \longrightarrow A\varphi \in C[a, b] \tag{1.1}$$

$$(A\varphi)(x) = \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy \tag{1.2}$$

Où la fonction $K(x, y)$, s'appelle le noyau de l'opérateur intégral A.

Cet opérateur est continu, de norme $\|A\|_{\pounds(C(D),C(D))} \leq \max \left\{ \int_D |K(x, y)| dy, x \in D \right\}$.

1.2 Opérateur intégral linéaire auto-adjoint

On considère $C(D)$ muni du produit scalaire identique à celui défini sur $L^2(D)$,

à savoir :$\forall(f,g) \in C(D)^2, \langle f,g\rangle = \int_D f(x)g(x)dx$

Ce produit scalaire permet de définir la notion d'orthogonalité, ainsi que celle d'adjoint.

On dit que l'opérateur $A : C(D) \longrightarrow C(D)$ et l'opérateur $B : C(D) \longrightarrow C(D)$ sont adjoints s'ils vérifient :

$$\forall(f,g) \in C(D)^2, \langle Af,g\rangle = \langle f,Bg\rangle \tag{1.3}$$

Théorème 1:

Soient X et Y deux espaces de Hilbert et soit A un operateur linéaire défini par $A : X \longrightarrow Y$, alors il existe un opérateur linéaire borné unique noté $A^* : Y \longrightarrow X$,

de plus

$$\|A\| = \|A^*\|$$

On note A^* l'adjoint de A

1.3 Equations intégrales de Fredholm

1.3.1 équation de Fredholm de première espèce

On appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce une équation de la forme

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy \tag{1.4}$$

Où la fonction $\varphi(y)$ est la fonction inconnue que l'on souhaite déterminer, $K(x,y)$ et $f(x)$ des fonctions données.

1.3.2 équation de Fredholm de seconde espèce

l'equation de Fredholm de deuxième espèce est une équation de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy \tag{1.5}$$

Où $\varphi(x)$ est la fonction inconnue que l'on souhaite déterminer, $K(x,y)$ et $f(x)$ des fonctions données, λ est un paramètre numérique.

On écrit

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda A\varphi(x) \tag{1.6}$$

$$T\varphi = (I - \lambda A)\varphi = f$$

et la solution est donnée par

$$\varphi = (I - \lambda A)^{-1} f$$

Dans la suite de ce mémoire on veut approcher numériquement cette solution.

Remarque

1) si $f(x) \neq 0$, l'équation (1.5) est dit non homogène .

2) si $f(x) = 0$, l'équation (1.5) est dit homogène.

Théorème 2:

Si l'opérateur A linéaire continu à la propriété suivante

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|\lambda^n A^n\|^{\frac{1}{n}} < 1$$

Alors l'équation de Fredholm admet une solution est donné par

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A^n f$$

donc, on obtient une itération constructive même

$$\begin{aligned}
\varphi^0 &= f \\
\varphi^n &= f + \lambda A \varphi^{n-1} \ , \ n > 0 \\
\text{avec } q(x,y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A^n(x,y)
\end{aligned}$$

Pour plus le détail voir [8]

Définition 1 *(noyau dégénéré)*

Le noyau $K(x,y)$ d'une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce est dit dégénére si il est la somme d'un nombre fini des produits de fonctions de x seul par de fonction de y seul i.e il est de la forme

$$K(x,y) = \sum_{j=1}^{n} u_j(x) v_j(y)$$

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} \int_a^b u_j(x) v_j(y) \varphi(y) dy \tag{1.7}$$

$$\varphi(x) - \lambda \sum_{j=1}^{n} u_j(x) \int_a^b v_j(y) \varphi(y) dy = f(x) \tag{1.8}$$

les fonctions $u_j(x)$ et $v_j(y)$ $(j = 1, 2....n)$ sont supposées continues dans le carré fondamental $a \leq x, y \leq b$ et linéairement indépendantes.

Théorème 3:

L'équation intégrale (1.5) a un noyau dégénérer, à savoir ils peuvent être représentés comme dans (1.8), $\lambda \neq 0$,Toute solution de l'équation linéaire de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=0}^{n} u_i(x) \xi_i(x) \tag{1.9}$$

avec $\xi_i(x)$, $(i = 1....n)$,est la solution de (1.9) si et seulement si le $(\xi_i(x))_{i=1....n}$ solution du système linéaire suivant:

$$\xi_i - \lambda \sum_{i=1}^{N} \int_a^b u_i(y) v_i(y) dy \xi_j = \int_a^b v_i(y) f(y) dy \qquad (1.10)$$

1.4 Opérateurs compacts

Soit A un opérateur linéaire d'un éspace normé E dans un espace normé F, on dit que A est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné dans E à un ensemble relativement compact dans F.

Théorème 4:(Arzela-Ascoli)

Soit D un ensemble fermé et bornée dans $\mathbb{R}^n$, et un ensemble $A \subset C(D)$.
A est dit relativement compact si et seulement s'il est borné et équicontinu
c'est à dire, il existe une constante M telle que:

$$|\varphi(x)| \leq M \ \text{ pour tout } x \in D \text{ et pour tout } \varphi \in A$$

Et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $\varphi \in A$ nous avons

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon \quad \text{pour tout } x, y \in D \text{ avec } |x - y| < \delta.$$

Théorème 5:

L'opérateur intégral A de $C(G)$ dans $C(G)$ à noyau continu est un opérateur compact.

Démonstration

En effet, soit E un ensemble borné de $C(G)$, ($\|\varphi\| \leq M$,pour tout $\varphi \in E$) de plus
On a

$$|A\varphi(x)| \leq M\,|G| \max_{x,y \in G} |K(x,y)|\,,\ \forall x \in G \text{ et } \forall \varphi \in E,$$

D'où l'ensemble $A(E)$ est borné .d'autres part ,le noyau K est uniformément continu sur le compact $G \times G$, alors pour tout

x, y et z , on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{telle que } |x - y| < \delta \Longrightarrow |K(x, y) - K(y, z)| < \frac{\varepsilon}{M\,|G|}$$

d'où

$$|A\varphi(x) - A\varphi(y)| < \varepsilon \text{ pour tout } \varphi \in E \text{ et } x, y \in G, \text{avec } |x - y| < \delta$$

Ceci exprime que l'ensemble $A(E)$ est équicontinu, d'où $A(E)$ est relativement compact par le Théoreme D'**Arzela-Ascoli,** alors A est compact.

1.5 La théorie de Riesz et alternative de Fredholm

Dans ce paragraphe nous présentons la théorie de base pour l'équation de seconde espéce.

Soit A un operateur compact d'un espace normé X dans lui même alors l'opérateur $T = I - A$ définit l'équation de seconde espéce donnée par

$$\varphi - A\varphi = f \qquad \varphi, f \in X$$

Où f est une fonction donnée et φ la fonction inconnue et I l'opérateur identité.

Théorème 6:(*Théorème de Riesz*)

On considère un opérateur compact $A : X \longrightarrow X$ sur X un espace normé, ainsi que l'opérateur étudié dans le cadre des équations intégrales, à savoir $T = I - A$.

Cet opérateur a les propriétés suivantes :

1)Le noyau de l'opérateur T défini par

$$\ker T = N(T) = \{\varphi \in X; T\varphi = (I - A)\varphi = 0\} \tag{1.11}$$

est un sous-espace fermé et de dimension finie.

2) L'image de l'opérateur T définie par,.

$$\operatorname{Im} T = R(T) = \{T\varphi : \varphi \in X\} \tag{1.12}$$

est un sous-espace linéaire fermé et de co-dimension finie.

3)Il existe un unique $r \in \mathbb{N}$ $(r = p = q)$ appelé nombre de Riesz de l'opérateur A tel que

$$\begin{aligned} \{0\} &\subset N(T) \subset N(T^2) \subset N(T^3)..... \subset N(T^r) = N(T^{r+1}) = ... \\ X &\supset R(T) \supset R(T^2) \supset R(T^3)..... \supset R(T^r) = R(T^{r+1}) = ... \end{aligned} \tag{1.13}$$

Et on a la somme directe :

$$X = kerT^r \oplus ImT^r.$$

De plus $(I - A)$ est injectif si et seulement si il est surjectif.

Dans ce cas $(I - A)$ est inversible, et son inverse $(I - A)^{-1}$ est un opérateur borné.

Corollaire 1$(Alternative\ deFredholm)$

Soit A un opéraeur compact défini sur un espace de Hilbert X à valeurs dans X et soit l'équation

$$\varphi - A\varphi = f \ ,\varphi, f \in X \tag{1.14}$$

et son adjointe

$$\psi - A^*\psi = g \ , \ \ \psi, g \in X^* \tag{1.15}$$

alors, les équations (1.14) et (1.15) admettent des solutions uniques pour tout second membre si les équations homogénes

$$\varphi - A\varphi = 0 \tag{1.16}$$

$$\psi - A^{*}\psi = 0 \tag{1.17}$$

possédent uniquement les solutions triviales $\varphi = 0$ et $\psi = 0$.

Ou bien les équations (1.16) et (1.17) possédent le même nombre fini $n \in \mathbb{N}$ des solutions linéairement indépendantes $\varphi_1, \varphi_2..., \varphi_{n,}et\psi_1, \psi_2..., \psi_n$ respectivement et les équations (1.14) et (1.15) sont solvables si et seulement si, on a

$$\langle f, \psi_k \rangle = \langle g, \varphi_k \rangle = 0 \text{ pour tout } k = 1, 2, ...n$$

dans ces conditions, la solution générale de l'équation (1.14) est donnée par

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \varphi_k, \tag{1.18}$$

celle de l'équation (1.15)

$$\psi = \psi_0 + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \psi \varphi_k,$$

où φ_0 et ψ_0 est une solution particuliére quelconque de l'équation (1.14) et (1.15) respectivement ,$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3.....\alpha_n$ sont des constantes arbitraires.

1.6 Valeur régulière et résolution d'équation

Soit $A : X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire compact dans un espace normé dans lui même.

Soit l'équation de Fredholm de deuxiéme espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda A\varphi(x) \tag{1.19}$$

Si l'équation (1.19) admet une solution unique, alors il existe l'inverse de l'opérateur $T = (I - \lambda A)$ et on écrit

$$\varphi = (I - \lambda A)^{-1} f = T^{-1} f \tag{1.20}$$

Définition

Si pour $\lambda = \lambda_0$ et T^{-1}existe dans L^2, alors λ_0 est une valeur régulière de l'opérateur A.

$*$ $\lambda = 0$ est une valeur régulière de chaque noyau avec $\quad T^{-1} = I$

Théorème 7:

Pour λ donnée , si T^{-1} existe alors est unique.

Preuve

On suppose $T_1^{-1}, T_2^{-1} \in L,^2$et soit $\Delta = T_1^{-1} - T_2^{-1}$ alors,

$$\begin{aligned} TT_1^{-1} &= T_1^{-1}T = I \\ TT_2^{-1} &= T_2^{-1}T = I \end{aligned}$$

La soustraction nous donne

$$\Delta T = T\Delta = 0 \tag{1.21}$$

On multiplie par l'opérateur T^{-1} nous trouvons

$$T^{-1}T\Delta = 0$$

mais

$$T^{-1}T\Delta = I\Delta = \Delta$$

et d'où

$$\Delta = 0$$

donc $T_1^{-1} = T_2^{-1}$.

Remarque

1$-$le nombre λ est dit valeur propre, s'il existe un élément $\varphi \in X$, $\varphi \neq 0$ tel que $A\varphi = \lambda\varphi$.

2$-$ Si λ est une valeur regulière de A, alors pour toute la fonction $f \in L^2$, l'équation (1.19) admet une solution unique φ satisfait

$$\varphi = T^{-1}f.$$

CHAPITRE 2

Méthodes d'approximations classiques

Dans cette partie, On donne les méthodes universelles, nous allons présenter une idée générale sur la résolution approximative de l'équation du deuxième espèce

$$\varphi - \lambda A\varphi = f \tag{2.1}$$

Cela revient à résoudre une équation de la forme

$$\varphi_n - \lambda A_n\varphi_n = f_n$$

avec la suite d'approximation $A_n \longrightarrow A$ et $f_n \longrightarrow f$ quand $n \longrightarrow \infty$, et cherchons φ_n par les méthodes suivantes.

2.1 Méthode des approximations successives

La méthode des approximations successives est l'une des méthodes les plus usuelles pour la résolution de l'équation(2.1),Dans le cas d'un opérateur à noyau A qui vérifie$\|A\| < 1$, on a donc une convergence uniforme de f_n vers la solution unique de $\varphi - A\varphi = f$.

Son principe est le suivant :

On donne un élément quelconque $\varphi_0 \in C[a,b]$ appelé approximation initiale et on construit à partir de cet élément

la suite φ_n des solutions approchées :

$$\varphi_n = f + \lambda A\varphi_{n-1} \tag{2.2}$$

Donc nous résumons la méthode par le schéma suivant:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \text{la fonction sélective} \\ \varphi_n &= f + \lambda A\varphi_{n-1} \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

Et la derniére solution $\varphi(x)$ écrite comme

$$\varphi(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \varphi_n \tag{2.3}$$

2.2 Séries de Neumann

Soit A un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach X dans le même espace , et soit I l'opérateur identique dans X,et Soit l'équation intégrale de Fredholm du second éspece:

$$\varphi = f + \lambda A\varphi \tag{2.4}$$

(A désigne toujours l'opérateur intégral défini par 1.1)

Pour trouver la solution $\varphi(x)$ de l'équation (2.4) nous avons besoin de définir la série de Neumann. l'existence de la solution pour cette équation dépend de l'existence de l'inverse de l'opérateur

On définit maintenant la série de Nuemann par les deux formes suivantes :

$i)$ Soit A un opérateur linéaire continue de X dans X.l'existence de la solution $\varphi(x)$ pour cette équation dépend de l'existence de l'inverse de l'opérateur $T = (I - \lambda A)$ qui est inversible si et seulement si $\|\lambda A\| < 1$,et son inverse

$$T^{-1} = (I - \lambda A)^{-1}$$

est donnée par la répresentation suivante

$$\begin{aligned} T^{^{-1}} &= (I - \lambda A)^{^{-1}} = I + \lambda A + \lambda^2 A^2 + ...\lambda^n A^n....... \\ &= I + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n A^n \end{aligned} \tag{2.5}$$

$ii)$ Nous pouvons essayer de trouver une représentation pour φ la solution de l'équation (2.4) par l'approximation successive.

On obtient la représentation suivante:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= f(x) \\ \varphi_1(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y) f(y) dy \\ \varphi_2(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y) f(y) dy + \lambda^2 \int_a^b K(x,y) [\int_a^b K(y,z) f(z) dz] dy \end{aligned}$$

Introduisons la notation

$$K_1(x,y) = K(x,y) \text{ et } K_2(x,y) = \int_a^b K(x,y) K(y,z) dz$$

Nous pouvons écrire $\varphi_2(x)$ sous forme

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K_1(x,y) f(y) dy + \lambda^2 \int_a^b K_2(x,y) f(y)$$

En répétant la même procédure on obtient

$$K_n(x,y) = \int K(x,z) K_{n-1}(z,y) dz \qquad (n = 2, 3.....)$$

On obtient $(n+1)$ solutions d'approximation de l'équation intégrale (2.4) écrite sous la forme suivante

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K_1(x,y)f(y)dy + \lambda^2 \int_a^b K_2(x,y)f(y) + ...\lambda^n \int_a^b K_n(x,y)f(y)dy$$

On obtient la série suivante

$$\varphi_n(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \int_a^b K_n(x,y)f\ (y)dy$$

On passe la limite $(n \longrightarrow \infty)$, nous obtenons la série de Neumann

$$\varphi(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i \int_a^b K_i(x,y)f\ (y)dy. \tag{2.6}$$

2.3 Méthode de Nyström

Cette méthode, aussi appelée méthode de quadrature, consiste à appliquer les méthodes numériques de calcul d'intégral pour aboutir à un système linéaire. En effet, ce n'est rien d'autre que l'approximation du noyau K par un opérateur de dimension fini . Cette méthode est totalement discrète, elle fournit donc un premier moyen efficace de résolution d'équation numérique.

Comme cette méthode est importante, et met en jeu les méthodes d'intégration numérique, nous allons la présenter en détail.

On souhaite approximer l'opérateur A au noyau dégénéré donné par :

$$\forall x \in D, (A\varphi)(x) = \int_D K(x,y)\varphi(y)dy$$

tel que $K(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{m} u_k(x)v_k(y)$

Pour cela , on donne des régles de quadrature (Q_n) pour calculer l'intégral du noyau dans les points de noeud $(x_j^{(n)})_{1\leq j\leq n}$ ainsi que des poids $(\alpha_j^{(n)})$ d'où l'introduction d'un nouvel opérateur $A_n$défini par :

$$\begin{aligned}\forall x \in D, \quad (A_n\varphi)(x) &= \quad \alpha_j^{(n)} \textstyle\sum_{j=1}^{n} K(x, x_j^{(n)})\varphi(x_j^{(n)})dy \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{m} u_k(x) \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(n)} v(x_j^{(n)})\varphi(x_j^{(n)})\end{aligned} \tag{2.7}$$

Remarque

On peut voir ces règles de quadratures comme une suite d'opérateurs Q_n tel que

Q_n: $C(D) \longrightarrow C(D)$.On dira que ces règles seront convergentes si elles convergent point à point, ie si :

$$\forall f \in C(D), Q_n(f) \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \int_D f.$$

Alors, on va approcher la solution φ de l'équation $\varphi - \lambda A\varphi = f$ par la solution φ_n du problème

$$\varphi_n - \lambda A_n \varphi_n = f$$

c'est à dire :on trouve φ_n^* telle que :

$$\varphi_n^* = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{m} u_k(x) \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(n)} v(x_j^{(n)})\varphi(x_j^{(n)}) \tag{2.8}$$

Ceci nous amène à une seconde discrétisation, mais cette fois-ci sur les x, donc pour $x = (x_i^n)_{1\leq i\leq n}$ et avec les notations

suivantes :

$\varphi(x_i^n) = \varphi_i \quad i = 1.....n$

$\varphi(x_j^{(n)}) = \varphi_j \quad j = 1.....n$

$f(x_i^n) = f_i \quad i = 1.....n$

$v_k(x_j^{(n)}) = v_{jk} \quad j = 1.....n, k = 1.....m$

$u_k(x_i) = u_{ik} \quad i = 1.....n, k = 1.....m$

On obtient, le système algébrique de n équations linéaires :

$$\varphi_i - \lambda \sum_{k=1}^{m} u_{ik} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_{jk} \varphi_j = f_i \tag{2.9}$$

Ou, sous forme développée,

$$\left.\begin{array}{c}
\left(1-\lambda \sum_{k=1}^{m} \alpha_1 u_{1k} v_{1k}\right) \varphi_1 - \lambda \sum_{k=1}^{m} \alpha_2 u_{1k} v_{2k} \varphi_2 ..... - \lambda \sum_{k=1}^{m} \alpha_n u_{1k} v_{nk} \varphi_n = f_1 \\
-\lambda \sum_{k=1}^{m} \alpha_n u_{2k} v_{1k} \varphi_1 + \left(1-\lambda \sum_{k=1}^{m} \alpha_2 u_{2k} v_{2k}\right) \varphi_2 .... - \lambda \sum_{k=1}^{m} \alpha_n u_{2k} v_{nk} \varphi_n = f_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
-\lambda \sum_{k=1}^{m} \alpha_1 u_{nk} v_{1k} \varphi_1 - \lambda \sum_{k=1}^{m} \alpha_2 u_{nk} v_{2k} \varphi_2 .... 1 - \lambda \sum_{k=1}^{m} \alpha_n u_{nk} v_{nk} \varphi_n = f_n
\end{array}\right\} \tag{2.10}$$

La matrice associée à ce système est de la forme :

$$\begin{pmatrix}
1-\lambda \sum_{k=1}^{m} \alpha_1 u_{1k} v_{1k} & -\lambda \sum_{k=1}^{m} \alpha_2 u_{1k} v_{2k} & \cdots & -\lambda \sum_{k=1}^{m} \alpha_n u_{1k} v_{nk} \\
-\lambda \sum_{k=1}^{m} \alpha_n u_{2k} v_{1k} & 1-\lambda \sum_{k=1}^{m} \alpha_2 u_{2k} v_{2k} & \cdots & -\lambda \sum_{k=1}^{m} \alpha_n u_{2k} v_{nk} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-\lambda \sum_{k=1}^{m} \alpha_1 u_{nk} v_{1k} & -\lambda \sum_{k=1}^{m} \alpha_2 u_{nk} v_{2k} & \cdots & 1-\lambda \sum_{k=1}^{m} \alpha_n u_{nk} v_{nk}
\end{pmatrix}$$

On définit maintenant la matrice $N = N_{ij}$ telle que

$$N_{ij} = \alpha_j \sum_{k=1}^{m} u_{ik} v_{jk}$$

On obtient le systeme suivant

$$(I - \lambda N)\Phi = F \tag{2.11}$$

Où les vecteurs Φ et F sont définies respectivement par leurs composantes φ_i et $f_i = f(x_i)$ et la matrice N sont donnés par $N_{ij} = N_i(x_j)$.

Pour résoudre le système (2.11) on utilise la méthode itérative de Jacobi, i.e

$$\varphi_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ij}}(f_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}\varphi_j^{(k)}), \quad i = 1, ..., n$$

où $a_{ij} = (I - \lambda N)$ et l'approximation initiale $\Phi^{(0)} = F$.

Réciproquement, si on se donne une solution $\left(\varphi_i^{(n)}\right)_{1\leq i\leq n}$ du système (2.11), alors la fonction φ_n est définie par:

$$\varphi_n = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{m} u_k(x) \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(n)} v(x_j^{(n)})\varphi_j^{(n)}.$$

2.4 Méthode de trapèze

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, et dérivable sur $]a, b[$ avec $a = x_1 < x_1 < x_2.... < x_{n-1} < x_n = b$ une subdivision régulière de l'intervalle $[a, b]$. On note h le pas de cette subdivision. De cette méthode, la fonction f est remplacée sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ par la droite joignant les points $(x_i, f(x_i))$et $(x_{i+1}, f(x_{i+1})$.

En introduisant les noeuds de quadrature $x_k = a + (k-1)h$, pour $k = 1, ..., n$ et $h = (b-a)/(n-1)$

On obtient :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(x_{j+1}),$$

On utilise la méthode de Trapèz dans les cas suivants

2.4.1 équation intégrale de Fredholm de seconde espèce à noyau dégénéré

Soit l'équation intégrale de Fredholm de seconde espéce à noyau dégénéré:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy$$

Avec $K(x,y) = \sum_{k=1}^{m} u_k(x)v_k(y)$

En écrit l'équation intégral à noyau dégénéré comme suit:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{k=1}^{m} u_j(x)v_j(y)\right]\varphi(y)dy = f(x) \tag{2.12}$$

Si on remplace l'intégrale de l'équation (2.12) par la formule composée de trapèz dans les points $y_j = a + (j-1)h, (j = 1, 2, , , n)$ avec $h = \dfrac{b-a}{n-1}$,

Ce qui donne :

$$f(x) = \varphi(x) - \frac{\lambda h}{2}\sum_{k=1}^{m} u_k(x)\sum_{j=1}^{n-1}[v_k(y_j)\varphi(y_j) + v_k(y_{j+1})\varphi(y_{j+1})]$$

On note $v_{nk} = v_k(y_n) = v_k(b), \varphi_n = \varphi(y_n) = \varphi(b)$

Récrivons l'équation précédente

$$f(x) = \varphi(x) - \frac{\lambda h}{2}\sum_{k=1}^{m} u_k(x)\sum_{j=1}^{n-1}\left[v_{jk}\varphi_j + v_{j+1k}\varphi_{j+1}\right] \tag{2.13}$$

L'évaluation de (2.13) sur les $x = x_i$ donne un système d'équations algébriques de la forme

$$f_i = \varphi_i - \frac{\lambda h}{2}\sum_{k=1}^{m} u_{ik}\sum_{j=1}^{n-1}\left[v_{jk}\varphi_j + v_{j+1k}\varphi_{j+1}\right] \tag{2.14}$$

Avec la notations $f_i = f(x_i), u_{ik} = u_k(x_i), \varphi_i = \varphi(x_i)$.

On écrit le systéme (2.14) sous la forme matricielle

$$(I - DH)\Phi = F \tag{2.15}$$

où les vecteurs Φ et F sont définies respectivement par leurs composantes φ_i et $f_i = f(x_i)$ et les composants de la matrice $H = H_{ij}$, tels que

$$H_{ij} = \sum_{k=1}^{m} u_{ik} v_{jk}$$

et la matrice D définie par :

$$D = D_{ij} = \begin{cases} \lambda h & \text{si } i = j,\ i \neq 1, j \neq 1 \\ \lambda h & \text{si } i \neq j \\ \dfrac{\lambda h}{2} & \text{si } j = 1, 1 \leq i \leq n \\ \dfrac{\lambda h}{2} & \text{si } j = n, 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

La matrice associée à ce système est de la forme

$$\begin{pmatrix} (1 - \lambda\frac{h}{2}\sum_{k=1}^{m} u_{1k}v_{1k}) & -\lambda h\sum_{k=1}^{m} u_{1k}v_{2k} & .... & -\lambda\frac{h}{2}\sum_{k=1}^{m} u_{1k}v_{nk} \\ -\lambda\frac{h}{2}\sum_{k=1}^{m} u_{2k}v_{1k} & (1 - \lambda\frac{h}{2}\sum_{k=1}^{n} u_{2k}v_{2k}) & .... & -\lambda\frac{h}{2}\sum_{k=1}^{m} u_{2k}v_{nk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda\frac{h}{2}\sum_{k=1}^{m} u_{nk}v_{1k} & -\lambda\frac{h}{2}\sum_{k=1}^{m} u_{nk}v_{2k} & .... & (1 - \lambda\frac{h}{2}\sum_{k=1}^{m} u_{nk}v_{nk}) \end{pmatrix}$$

Pour résoudre le système (2.15) on utilise la méthode itérative de Jacobi, i.e

$$\varphi_i^{(k+1)} = \frac{1}{q_{ii}}(f_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} q_{ij}\varphi_j^{(k)}), \quad i = 1, ..., n$$

où $q_{ij} = (I - \lambda DH)$ et l'approximation initiale $\Phi^{(0)} = F$.

Donc la solution est

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\lambda h}{2}\sum_{k=1}^{m} u_k(x)\sum_{j=1}^{n-1}\left[v_k(y_j)\varphi(y_j) + v_k(y_{j+1})\varphi(y_{j+1})\right] \tag{2.16}$$

2.4.2 équation intégrale de Fredholm de seconde espèce

Soit l'équation intégrale de Fredholm de second espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy \tag{2.17}$$

Si on remplace l'intégrale de l'équation (2.17) par la formule composée de trapèzes

$$(A_n\varphi)(x) = \int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy = \frac{h}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\left[K(x,x_j)\varphi_j + K(x,x_{j+1})\varphi_{j+1}\right]$$

On note $K_n(x) = K(x,x_n) = K(x,b), \varphi_n(x) = \varphi(x_n) = \varphi(b)$

Donc

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{n-1} K_j(x)\varphi_j + K_{j+1}(x)\varphi_{j+1} \tag{2.18}$$

L'évaluation de (2.18) sur les $x = x_i$ donne un système d'équations algébriques de la forme:

$$\varphi_i = f_i + \lambda\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{n-1}[K_{ij}\varphi_j + K_{ij+1}\varphi_{j+1}]$$

Ce qui donne

$$\varphi_i - \lambda\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{n-1} K_{ij}\varphi_j + K_{ij+1}\varphi_{j+1} = f_i \tag{2.19}$$

Avec $\varphi_i = \varphi(x_i), K_{ij} = K(x_i,x_j), K_{ij+1} = K(x_i,x_{j+1})$

On écrit le systéme (2.19) par la forme matricielle

$$(I - \lambda DK)\Phi = F \tag{2.20}$$

Où les vecteurs Φ et F sont définies respectivement par leurs composantes φ_i et

$f_i = f(x_i)$ et les composantes de la matrice $K = K_{ij}$,et la matrice D définie par :

$$D = D_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \\ \frac{1}{2} & \text{si } j = 1, i > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } j = n, 1 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

La matrice associée à ce système est de la forme:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda\frac{h}{2}K_{11} & -\lambda hK_{12} & -\lambda hK_{13} & \cdots & -\lambda\frac{h}{2}K_{1n} \\ -\lambda\frac{h}{2}K_{21} & 1-\lambda\frac{h}{2}K_{22} & -\lambda hK_{23} & \cdots & -\lambda\frac{h}{2}K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & ..... & \ddots & \vdots \\ -\lambda\frac{h}{2}K_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & \left(1-\lambda\frac{h}{2}\right)K_{nn} \end{pmatrix}$$

Pour résoudre le système (2.20) on utilise la méthode itérative de Jacobi, i.e

$$\varphi_i^{(k+1)} = \frac{1}{q_{ii}}(f_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} q_{ij}\varphi_j^{(k)}), \quad i = 1, ..., n \tag{2.21}$$

où $q_{ij} = (I - \lambda DK)$ et l'approximation initiale $\Phi^{(0)} = F$.

Donc la solution est :

$$\varphi_n(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{n-1} K(x, x_j^{(n)})\varphi(x_j^{(n)})$$

Remarques :

Une condition suffisante de convergence du processus itératif (2.21), est que la matrice q soit à diagonale dominante. Ce qui équivalent à dire $\|q\| < 1$.

2.5 Méthode de noyau dégénéré

Dans cette partie, il s'agit de présenter une méthode d'approximation d'un opérateur continu par une suite d'opérateurs de rang fini.

Soit A l'opérateur intégral défini par la formule (1.1) sur l'espace $C[a,b]$ muni du même produit scalaire qui a été définie dans le Chapitre 1.

On se donne un opérateur linéaire continu $A : X \longrightarrow X$, et l'on cherche à l'approximer par une suite d'opérateur $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forme

$$A_n\varphi = \sum_{j=1}^{n} \langle \varphi, v_k \rangle \, u_k$$

La méthode correspond à approximer K par une suite de noyau dégénéré

K_n de la forme

$$K_n(x,y) = \sum_{j=1}^{n} u_j(x)v_j(y) \qquad\qquad j = 1, 2, , , , , , , n$$

Où $u_j(x)$ et $v_j(y)$ $(j = 1, 2....n)$ sont des familles d'éléments de X, avec de plus la famille $u_j(x)$ est linéairement indépendante.

2.5.1 Présentation de la méthode:

Soit l'équation intégrale de Fredholm à noyau dégénéré

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy$$

On se donne un opérateur linéaire continu $A : X \longrightarrow X$, et on écrit

$$A\varphi = \sum_{j=1}^{n} u_j(x) \int_D v_j(y)\varphi(y)dy$$

l'équation intégrale à noyau dégénéré s'écrit

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{j=1}^{n} u_j(x) v_j(y) \right] \varphi(y) dy = f(x) \tag{2.22}$$

Récrivons (2.22) :

$$\varphi(x) - \lambda \sum_{j=1}^{n} u_j(x) \int_a^b v_j(y) \varphi(y) dy = f(x) \tag{2.23}$$

Et introduisons les notations

$$c_j = \int_a^b v_j(y) \varphi(y) dy \qquad\qquad (j = 1{,}2.....n) \tag{2.24}$$

L'égalité (3.23) devient alors

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} u_j(x) c_j \tag{2.25}$$

Avec c_i des constantes inconnues (puisque la fonction $\varphi(y)$ est inconnue).

Ainsi, la résolution d'une équation intégrale à noyau dégénéré se ramène à la recherche des constants c_j $(j = 1{,}2.....n)$.

Après avoir porté (2.25) dans l'equation intégrale (2.22) et effectuer des calculs simples nous obtenons

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{ c_i - \int_a^b v_i(x) \left[f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} u_j(x) c_j \right] dx \right\} a_i(x) = 0.$$

Les fonctions $a_i(x)$ $(i = 1{,}2.....n)$ étant linéairement indépendantes, il en résulte que

$$c_i - \int_a^b v_i(x) \left[f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} u_j(x) c_j \right] dx = 0$$

ou

$$c_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} \int_a^b v_i(x) u_j(x) dx c_j = \int_a^b v_i(x) f(x) dx \quad (i = 1{,}2.....n)$$

Afin d'alléger l'écriture, introduisons les notations.

$$\begin{aligned} f_i &= \int_a^b v_i(x) f(x) dx \\ a_{ij} &= \int_a^b u_j(x) v_i(x) dx \end{aligned}$$

On estime les a_{ij} par la méthode de Trapéz

$$a_{ij} = \frac{h}{2} \sum_{k=1}^{m-1} (u_j(x_k) v_i(x_k) + u_j(x_{k+1}) v_i(x_{k+1}))$$

avec $x_j = a + (k-1)h, (k = 1, 2, , , m)$ et $h = \dfrac{b-a}{m-1}$,
Nous obtenons le systéme algébrique de n équations linéaires

$$c_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j = f_i$$

ou, sous forme développée,

$$\begin{aligned} i &= 1 \qquad (1 - \lambda a_{11}) c_1 - \lambda a_{12} c_2 - ... \lambda a_{1n} c_n = f_1 \\ i &= 2 \qquad - \lambda a_{21} c_1 + (1 - \lambda a_{22}) c_2 - ... \lambda a_{2n} = f_2 \\ &\vdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ i &= n \qquad - \lambda a_{n1} c_1 - \lambda a_{n2} c_2 - ... + (1 - \lambda a_{nn}) c_n = f_n \end{aligned} \tag{2.26}$$

Pour trouver les c_i, nous avons donc un systéme de n équations linéaires à n inconnues,

$$(I - \lambda A) C = F \tag{2.27}$$

Où les vecteurs C et F sont définis respectivement par leurs composantes c_i et $f_i = f(x_i)$ et les composants de $A = a_{ij}$

La matrice associée à ce système est de la forme :

$$\begin{pmatrix} (1-\lambda a_{11}) & -\lambda a_{12} & \cdots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & (1-\lambda a_{22}) & \cdots & -\lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \cdots & (1-\lambda a_{nn}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

donc le déterminant est

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} (1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & ... & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & (1-\lambda a_{22}) & ... & -\lambda a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & ... & (1-\lambda a_{nn}) \end{vmatrix} \tag{2.28}$$

Dans le but de résoudre le système (2.27), on utilise par exemple la méthode itérative de Jacobi

$$c_i^{(k+1)} = \frac{1}{q_{ii}}(f_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} q_{ij} c_j^{(k)}), \quad i = 1, ..., n$$

Où $q_{ij} = (I - \lambda A)$ et l'approximation initiale $C^{(0)} = F$.

Remarque

1)Si $\Delta(\lambda) \neq 0$ le systeme (2.26) admet une solution unique $c_1, c_2......c_n$.

Dans l'équation homogéne on obtient les remarques suivantes:

$i)$ si λ est valeur régulière de A alors il existe la solution triviale $\varphi = o$.

$ii)$ si λ est une valeur propre (i.e $A - \lambda I$) est singuliere alors il n'existe pas la solution triviale.

Exemple

Soit l'équation de Fredholm définie par:

$$\varphi(x) = x + \lambda \int_0^1 (xy + x^2y^2)\varphi(y)dy \tag{1}$$

introduisons les notations

$$\begin{aligned} c_1 &= \int_0^1 y\varphi(y)dy \\ c_2 &= \int_0^1 y^2\varphi(y)dy \end{aligned} \tag{2}$$

Où $c_1$et $c_2$sont les constantes inconnues.

L'équation (1) à la forme

$$\varphi(x) = x + \lambda(c_1x + c_2x^2) \tag{3}$$

On multiplée (3) par x et x^2 avec l'integration dans l'intervalle $[0;1]$ on obtient le systéme d'équations linéaires suivantes:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{3} + \lambda(\frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{4}c_2) \\ c_2 &= \frac{1}{4} + \lambda(\frac{1}{4}c_1 + \frac{1}{5}c_2) \end{aligned} \tag{4}$$

où

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda}{3} & -\frac{\lambda}{4} \\ -\frac{\lambda}{4} & 1 - \frac{\lambda}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Le déterminant du système est

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \dfrac{\lambda}{3} & -\dfrac{\lambda}{4} \\ -\dfrac{\lambda}{4} & 1 - \dfrac{\lambda}{5} \end{vmatrix} = \frac{240 - 128\lambda + \lambda^2}{240} \neq 0.$$

alors le problème admet aux moins une solution unique pour $\Delta(\lambda) \neq 0$,c'est à dire $\lambda \neq 64 \pm\sqrt{241}$.

On donne

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{240 - 128\lambda + \lambda^2} \begin{pmatrix} -48(\lambda - 5) & 60\lambda \\ 60\lambda & -80(\lambda - 3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Le système (4) admet solution unique

$$c_1 = \frac{80 - \lambda}{240 - 128\lambda + \lambda^2}, \; c_2 = \frac{60}{240 - 128\lambda + \lambda^2}$$

En portant dans (3) les valeurs obtenues de c_1, c_2 nous aboutissons à la solution de l'équation intégrale donnée :

$$\varphi(x) = x + \frac{\lambda}{240 - 128\lambda + \lambda^2} \left[(80 - \lambda)x + 60x^2\right]$$

on résume la solution de cette équation par les étapes suivantes:

$*$ si $\lambda = 64 \pm\sqrt{241}$ alors l'équation homogéne n'admet pas une solution triviale

$*$ si $\lambda \neq 64 \pm \sqrt{241}$ alors l'équation homogéne admet une solution triviale .

CHAPITRE 3

Méthode Parallèle et Implémentations Numériques

3.1 Méthode Parallèle

3.1.1 Présentation

Soit l'équation intégral de Fredholm de seconde espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)\varphi(y)dy \tag{3.1}$$

On donne l'algorithme général pour la méthode de (Klein) en utilisant les notations de la section ci-dessus, cette algorithme contient trois parties parallélisées.

La partie (A) peut être parallélisée de manière facile car les itérations peut être effectuée de manière indépendante, les autres parties sont d'importance mineure, car elle n'ont qu'une faible part de la complexité globale de la méthode.

Les parties (A), (B) et (C) de la méthode Parallelé ont été parallélisée de la manière suivante

Partie A (écrire une nouvelle équation intégral a noyau dégénéré)

Pour accomplir cette partie devrait suivre les étapes suivantes

Etape: 01

On utilise le développement de Taylor pour rapprocher le noyau de l'équation (3.1) par rapport x ou y par un autre noyau comme suite

Soit $k(x,y)$ sont $(n+1)$ dérivable et continu

$$k(x,y)=\sum_{j=0}^{n}(x-a)^{j}\left(\frac{\partial^{j}k(x,y)}{\partial x^{j}}\right)_{x=a}+R(x,y) \qquad j=0,1,2,,,,,, \tag{3.2}$$

avec

$$R(x,y)=\frac{1}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\left(\frac{\partial^{n+1}k(x,y)}{\partial x^{n+1}}\right)_{x=\xi} \tag{3.4}$$

On note

$$\begin{aligned} u_j(x) &= (x-a)^j \\ v_j(y) &= \left(\frac{\partial^{j}k(x,y)}{\partial x^{j}}\right)_{x=a} \end{aligned}$$

Donc on donne une nouvelle équation intégrale représentée comme

$$k(x,y)=k_s(x,y)+k_R(x,y)$$

avec

$$\begin{aligned} k_s(x,y) &= \sum_{j=0}^{n} a_j(x)b_j(y) \quad \text{partie dégénéré} \\ k_R(x,y) &= R(x,y) \qquad\qquad \text{partie non dégénéré} \end{aligned}$$

Et les opérateurs associés K_s et K_R

Etape:02(Récrivant une nouvelle équation)

$$\varphi - \lambda(K_s + K_R)\varphi = f$$

En récrivant

$$\varphi - \lambda K_s\varphi = \lambda K_R\varphi + f$$

D'âpre le théorème (2)

$$\begin{aligned}\varphi &= f + \lambda K_R\varphi + q(f + \lambda K_R\varphi)\\ &= (f + qf) + \lambda\left(K_R\varphi + qK_R\varphi\right)\end{aligned}$$

Ainsi on obtient

$$\varphi(x) = \overbrace{f(x) + \int_a^b q(x,y)f(y)dy}^{:=g(x)} + \lambda\sum_{j=0}^{n}\underbrace{\left(u_j(x) + \int_a^b q(x,z)u_j(z)dz\right)}_{:=\alpha_j(x)}\int_a^b v_j(y)\varphi(y)dy \tag{3.5}$$

Donc une donne un nouvelle équation à noyau dégénéré

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda\sum_{j=0}^{n}\int_a^b \alpha_j(x)v_j(y)\varphi(y)dy \tag{3.6}$$

Partie B (Calcul des entrées d'un système linéaire)

D'âpre la théorème (3) La matrice du système linéaire peut être calculée élément par élément par les processus impliqués.

introduisons les notations

$$
\begin{aligned}
f_i &= \int_a^b v_i(x)g(x)dx \qquad i = 1, 2, , , n \\
a_{ij} &= \int_a^b \alpha_j(x)b_i(x)dx \quad i, j = 1, 2, , , n
\end{aligned}
$$

Nous obtenons le système algébrique de n équation linéaire

$$\xi_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_j = f_i$$

Pour trouver les ξ_i, nous avons donc un systéme de n équations linéaires à n inconnues,

$$(I - \lambda A)\xi = F \tag{3.11}$$

Où les vecteurs ξ et F définis respectivement par leurs composantes ξ_i et $f_i = f(x_i)$ et les composants de $A = a_{ij}$

Partie C (Solution du systéme linéaire paralléle)

Dans le but de résoudre le système

$$(I - \lambda A)\xi = F$$

On utilise par exemple la méthode itérative de Jacobi

$$\xi_i^{(k+1)} = \frac{1}{q_{ii}}(f_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} q_{ij}^{(k)}\xi_j), \quad i = 1, ..., n$$

Où $q_{ij} = (I - \lambda A)$ et l'approximation initiale $\xi^{(0)} = F$.

3.2 Implémentations Numérique

Cette partie est consacrée à l'application de la méthode du deuxième chapitre aux problèmes des équations intégrales de Fredholm de seconde espèce avec des noyaux dégénérés.

La méthode de cet exemple est utile pour trouver des solutions approchées de l'équation de Fredholm.

Exemple 01

$$\varphi(x) = e^{-x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-x-1} + \frac{1}{2}\int_0^1 (x+1)e^{-xy}\varphi(y)dy$$

avec la solution exact est $\varphi(x) = e^{-x}$.

En remplacant son noyau par la somme des trois premiers termes de la série de Taylor:

$$K(x,y) = (x+1)e^{-xy} \backsimeq x + 1 - x(x+1)y + x^2(x+1)y^2/2$$

Qui est, par un noyau dégénéré. Puis l'équation intégrale prend la forme

$$\tilde{\varphi}(x) = e^{-x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-x-1} + \frac{1}{2}\int_0^1 (x + 1 - x(x+1)y + x^2(x+1)y^2/2)\varphi(y)dy$$

On pose $u_1(x) = x+1, u_2(x) = x(x+1), u_3(x) = x^2(x+1)$,

et $\quad v_1(y) = 1, v_2(y) = -y, v_3(y) = -\frac{y^2}{2}$.

On obtient les valeurs de l'erreur $e_i = |\tilde{\varphi}_i - \varphi_i|$ dans le tableau suivant :

Pour $n = 15$

neoud	app soll	soll exact	erreur
0.00	1.0006	1.0000	6.424359e-004
0.07	0.9188	0.9311	1.223874e-002
0.14	0.8592	0.8669	7.703664e-003
0.21	0.8037	0.8071	3.457119e-003
0.29	0.7518	0.7515	3.603674e-004
0.36	0.7033	0.6997	3.616637e-003
0.43	0.6573	0.6514	6.186796e-003
0.50	0.6145	0.6065	7.951832e-003
0.57	0.5735	0.5647	8.796923e-003
0.64	0.5344	0.5258	8.609389e-003
0.71	0.4968	0.4895	7.276195e-003
0.79	0.4605	0.4558	4.680879e-003
0.86	0.4251	0.4244	6.997290e-004
0.93	0.3903	0.3951	4.803040e-003
1.00	0.3559	0.3679	1.198147e-002

Tableau 1

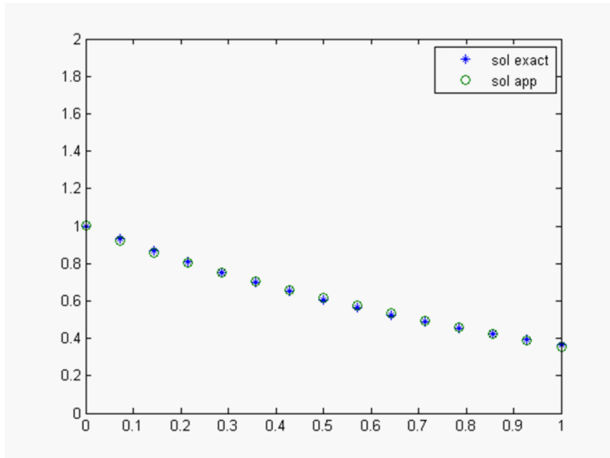
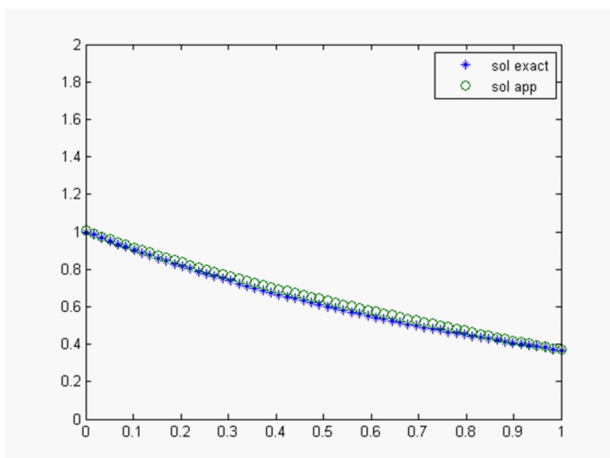


Figure 1

pour n=60



Fugire 2

Exemple 2

Soit l'équation

$$\varphi(x) = \sin x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos y \varphi(y) dy$$

avec la solution exact est $\varphi(x) = 2 \sin x$.

En remplacant son noyau par la somme des trois premiers termes de la série de Taylor:

$$K(x, y) = \sin x \cos y \backsimeq \sin x - \sin x \frac{y^2}{2} + \sin x \frac{y^4}{24}$$

Reécrivons l'équation comme

$$\tilde{\varphi}(x) = \sin x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \sin x \frac{y^2}{2} + \sin x \frac{y^4}{24}) \varphi(y) dy$$

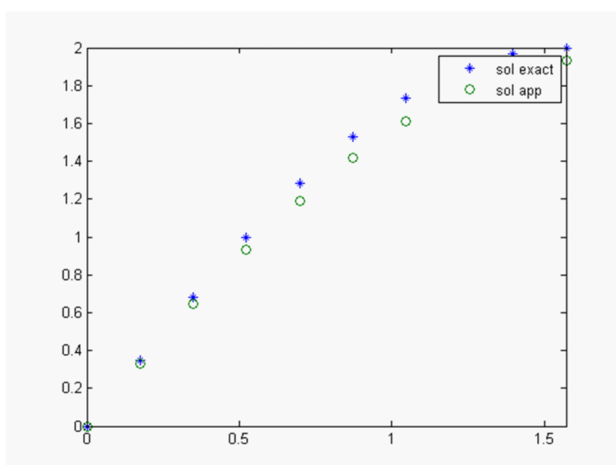
on pose $u_1(x) = \sin x$, $u_2(x) = \sin x, u_3(x) = \sin x,$
et $\quad v_1(y) = 1, v_2(y) = -\frac{y^2}{2}, v_3(y) = -\frac{y^4}{24}.$

On obtient les valeurs de l'erreur $e_i = |\tilde{\varphi}_i - \varphi_i|$ dans le tableau suivant :

Pour $n = 10$

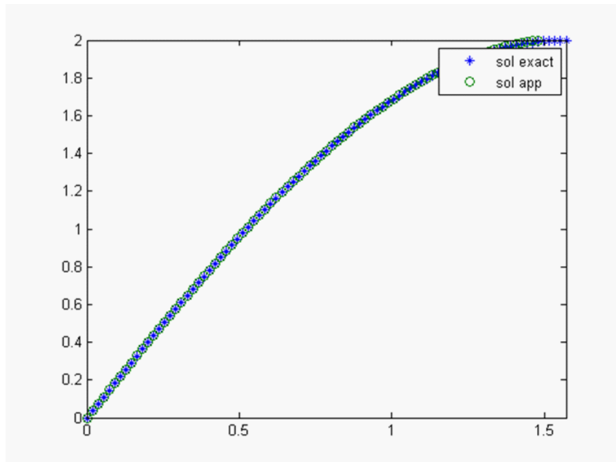
neoud	soll app	soll exact	erreur
0.00	0.0000	0.0000	0.000000e+000
0.17	0.3308	0.3473	1.646597e-002
0.35	0.6433	0.6840	4.074974e-002
0.52	0.9316	1.0000	6.839996e-002
0.70	1.1917	1.2856	9.389356e-002
0.87	1.4201	1.5321	1.119409e-001
1.05	1.6134	1.7321	1.186813e-001
1.22	1.7668	1.8794	1.125927e-001
1.40	1.8747	1.9696	9.496116e-002
1.57	1.9336	2.0000	6.639198e-002

Tableau 2



Fugire 3

Pour $n = 87$



Fugire 4

BIBLIOGRAPHIE:

[1] M.Krasnov, A. Kisselev, G. Makarenko.: Equations intégrales problèmes et exercices, Edition MIR, Moscou, 1977.

[2] Rahmoun.A, Nadir.M.: Résolution numérique des équations integrales,Thèse Magister, Départementde Mathématiques, Université de M'SILA, 2002.

[3] Kindall E. Atkinson .: The Numerical Solution of integral Equation of the Second Kind, university of Iowa.

[4] Gabriel Peyré.: Résolution numérique d'équations intégrales, Exemple de radiosité, article. 2001.

[5] Grimmer, M.: Selbstverifizierende mathematische Softwarewerkzeuge im High Performance Computing. PhD thesis, University of Wuppertal (2007).

[6] L.M.Delves, J. L. Mohamed .: Computational Methods for Integral Equations, University of Livepopl.

[7] Grimmer, M .: A Parallel Solver for (Systems of) Linear Fredholm Integral Equations of the second kind in C-XSC, article. 2007.

[8] Klein, W.: Zur Einschließung der L¨osung von linearen und nichtlinearen Fredholmschen Integralgleichungssystemen zweiter Art, Dissertation, Universit¨at Karlsruhe, 1990.

[9] M. Rahman .: Integral Equations and their Applications, Dalhousie University, Canada, 2007.

[10] M.Nadir.: Integral Equations Courses, Université de M'SILA, 2010.