



N° d'ordre : .....

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et**  
**de la Recherche Scientifique**

**Université de M'sila**  
**Faculté des Sciences**  
**Département de Physique**

## **MEMOIRE**

Présenté pour l'obtention du diplôme de :

## **MASTER**

Domaine : **Sciences de la matière**

Filière : **Physique**

Option : **Physique des Particules à haute Energie**

Par

**ELBAHI FATIMA**

## **THEME**

---

**L'atome d'hydrogène sous L'action d'un multi-potentiel dans  
l'espace – temps non commutatif à deux dimensions**

---

Soutenu le : **18/06/2014**

Devant le jury composé de :

<b>M. DEBABI</b>	<b>M.A.A Univ. de M'sila</b>	<b>Président</b>
<b>A. MAIRECHE</b>	<b>M.C.A Univ. de M'sila</b>	<b>Rapporteur</b>
<b>S. BISKRI</b>	<b>M.A.B Univ. de M'sila</b>	<b>Examineur</b>

Promotion Juin 2014

# Remerciements

*Je remercie Allah le tout puissant de m'avoir donné le courage, la santé, la patience jusqu'à l'achèvement de ce mémoire*

*Au terme de ce travail, j'adresse ma profonde gratitude à monsieur **Abdelmadjid Maireche**.*

*Je remercie pour la gentillesse et la spontanéité, j'ai eu le grand plaisir de travailler sous sa direction.*

*Mes remerciements s'dressent également à tous les membres du jury pour l'immense honneur qu'ils nous font en acceptant d'évaluer ce modeste travail.*

*Mes remerciements vont aussi à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la concrétisation de ce travail pour leur conseil, leurs encouragements et leurs soutiens.*

*Mes remerciements vont également à tous les enseignants du département de physique et mes collègues de promotion 2014.*

*En fin je voudrais remercier ma famille, mes amies et amis et mes parents pour leur soutien le sacrifice qu'ils ont fait pour nous voir réussir.*

# Dédicace

*Je dédie ce mémoire*

*A ma mère*

*A mon père*

*Je dédie à mes frères et sœurs, et je les*

*Remercie pour leurs encouragements*

*Et leurs aides*

*A toute ma grande Famille **Elbahi***

*A tous mes amis et mes professeurs*

*Sans exception*

*A tous ceux et celles qui m'ont aidé et*

*Encouragé de près comme de loin*

*A tous les enseignants de département de*

*Physique à l'université de M'sila.*

*fatima*

# Tables des Matières

Introduction générale .....	03
<b>Chapitre I :</b>	
<b>Formalismes mathématique de l'espace –temps non commutatif</b>	
I.1.Introduction.....	06
I.2. Notion générale sur les groupes.....	06
I.2.2. Groupe et algèbre de lie .....	07
I.2.2.1. Le groupe linéaire.....	07
I.2.2.2. Algèbre de lie.....	07
I. 3.1. L'espace –temps non commutatif.....	08
I.3.2. La quantification de Weyl.....	09
I.3.3. Le produit de Moyal.....	09
I.3.4. Le propriétés du produit star.....	11
I.3.5. Le méthode de Boopp's shift .....	12
Conclusion .....	15
<b>Chapitre II :</b>	
<b>L'atome d'Hydrogène sous l'action d'un multi-potentiel dans l'espace ordinaire a deux dimensions réales</b>	
II.1. Introduction.....	17
II.2. L'équation Schrödinger à deux dimensions .....	17
II.3. La formule principe de l'équation de Schrödinger .....	17
II.4. Le potentiel .....	18
II. 5. Résolution l'équation de Schrödinger.....	18
Conclusion .....	22

**Chapitre III :**  
**L'atome d'Hydrogène sous l'action d'un multi-potentiel**  
**dans l'espace –temps non commutatif a deux dimensions**  
**réales**

III.1. Introduction.....	24
III.2. l'équation de Schrödinger dans l'espace temps	
Non commutatif .....	24
III. 3. La correction de l'énergie correspond l'état fondamental.....	25
III. 4. Les niveaux d'énergie des premiers états excités .....	27
III.5. Construction l'opérateur d'Hamiltonien.....	30
Conclusion .....	30
<b>Conclusion générale.....</b>	<b>31</b>
<b>Bibliographie.....</b>	<b>32</b>

# *Introduction générale*

## *Introduction générale :*

La mécanique quantique est un outil indispensable pour décrire et étudier les phénomènes physiques qui se manifestent à l'échelle atomique et subatomique, elle est communément subdivisée en mécanique quantique non relativiste et mécanique quantique relativiste [1].

La théorie de la mécanique quantique dans son formalisme actuel s'est faite très rapidement entre 1925 et 1927 et apparait comme le fruit de la conjonction exceptionnelle des talents de physiciens et de mathématiciens comme Schrödinger, Heisenberg, Bohr, Dirac, Pauli, Hilbert,....etc.

C'est en 1925 qu'Erwin Schrödinger prend connaissance du travail de Louis De Broglie, il est à la fois séduit par les idées et reste sceptique quant au fond, pour des raisons tenant à l'invariance relativiste. Vivement encouragé par plusieurs collègues, dont Debye Einstein, Schrödinger met à profit sa compétence en matière d'équation aux dérivées partielles pour construire, ce qu'on appelle la mécanique ondulatoire, l'apport le plus marquant des travaux de Schrödinger réside dans la construction d'une équation d'onde régissant le comportement d'une Particule placée dans un potentiel(ou un champ de forces)..

L'équation de Schrödinger est une équation de base de la mécanique quantique décrivant l'évolution dans le temps de la fonction d'onde d'un système quantique arbitraire, elle remplace l'équation fondamentale de la dynamique classique.  $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ , donc l'équation Schrödinger découvre une équation aux dérivées partielles décrivant un système mécanique hamiltonien de premier ordre par rapport au temps et de deuxième ordre rapport à la position, elle prend la forme [2] :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = H\psi(\vec{r}, t)$$

En mécanique quantique l'espace de phase est défini en remplaçant les variables et les moments canoniques  $x_i, p_j$  par des opérateurs hermétiques qui obéissent aux règles

De commutation canonique  $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$ , La relation de commutations canonique entre variable  $x, p$  avec :  $i = 1, 2, 3$ , qui deviennent des observables dans l'espace d'Hilbert :  $(x_i \rightarrow \hat{x}_i, \text{ et } p_i \rightarrow \hat{p}_i)$ .

L'objectif de ce travail en mémoire de Master en physique théorique option physique particules à haute énergie promotion 2013-2014 est étude l'atome d'Hydrogène dans l'espace temps non commutatif sous l'action d'un multi-potentiel à deux dimensions.

La mémoire est subdivisé en trois chapitre :

- Le premier chapitre consacré aux formalismes mathématique de l'espace – temps non commutatif en général, en utilisant le produit de Moyal-Weyl (produit star).
- Le deuxième chapitre : On étudie l'atome d'hydrogène sous l'action d'un multi-potentiel dans l'espace –ordinaire à deux dimensions réales.
- Dans le dernier chapitre : On étudie l'atome d'hydrogène sous l'action d'un multi-potentiel dans l'espace – temps non commutatif à deux dimensions réales.

On termine notre mémoire de master par une conclusion générale.

# Chapitre I

## Formalisme mathématique de L'espace – temps Non Commutatif

## I.1. Introduction :

Dans ce chapitre on a étudié les groupes quantique en générale et les groupes de lie en particulier et les formules mathématique de l'espace non commutatif en la méthode de Boopp's shift.

## I.2. Notion général sur les groupes :

En théorie quantique des champs, les transformations forment des groupes.

Les groupes de lie est les plus utilisés dans cette représentation.

Soit  $G$  un ensemble,  $*$  est une application de  $G \times G$  [3] :

$$\begin{cases} * : G \times G \rightarrow G, \\ (g_1 * g_2) \rightarrow g_1 * g_2 \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

Le couple  $(G, *)$  est construit un groupe si les axiomes suivante sont satisfaits :

### 1-*Les propriétés de L'associativité :*

$$(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$$

### 2-*Les propriétés de L'élément neutre :*

$$\exists e \in G, e * g = g * e = g; \forall g \in G$$

### 3-*Les propriétés de L'élément inverse :*

$$\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G, g^{-1} * g = g * g^{-1} = e$$

Si la relation :  $g_1 * g_2 = g_2 * g_1$

Est satisfait, le groupe sera qualifiée abélien.

## I.2.2. Groupes et algèbre de lie :

### I.2.2.1 Le groupe linéaire $GL(n, \mathbf{R})$ :

Le groupe linéaire  $GL(n, \mathbf{R})$  est défini par [4] :

$$GL(n, \mathbf{R}) = \{M, \text{ matrice } n \times n \ M_{ij} \in \mathbf{R} \ \det M \neq 0\} \quad (I.2)$$

Les sous groupes  $O(n)$ ,  $SL(n)$  et  $SO(n)$  défini comme suivants :

$$O(n) = \{M \in GL(n, \mathbf{R}), \ MM^T = M^T M = I_n\} \quad (I.3)$$

$$SL(n, \mathbf{R}) = \{M \in GL(n, \mathbf{R}), \ \text{matrice } n \times n \ M_{ij} \in \mathbf{R} \ \det M = 1\} \quad (I.4)$$

$$SO(n) = O(n) \cap SL(n, \mathbf{R})$$

Où  $\mathbf{R}$  est l'ensemble des éléments réel  $I_n$  la matrice unitaire d'ordre  $(n \times n)$

Le groupe linéaire  $GL(n, \mathbf{C})$  est défini par :

Où  $\mathbf{C}$  est une l'ensemble des nombres complexe.

$$GL(n, \mathbf{C}) = \{M, \text{ matrice } n \times n \ M_{ij} \in \mathbf{C} \ \det M \neq 0\} \quad (I.5)$$

Les sous groupes  $U(n) = \{M \in GL(n, \mathbf{C}), \ MM^+ = M^+ M = I_n\}$

$$SL(n, \mathbf{C}) = \{M \in GL(n, \mathbf{C}), \ \text{matrice } n \times n \ M_{ij} \in \mathbf{C} \ \det M = 1\} \quad (I.6)$$

$$SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbf{C})$$

### I.2.2.2. Algèbre de lie :

Les deux propriétés sont satisfaisant, on dit que Espace vectoriel  $\mathfrak{g}$  muni d'une Application [4] :

$$\begin{cases} \mathfrak{g} * \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \\ (X, Y) \rightarrow [X, Y] \end{cases} \quad (I.7)$$

**1-La propriété d'antisymétrie :**

$$[X, Y] = -[Y, X] \quad (\text{I.8})$$

**2-L'identité de Jacobi :**

$$[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0 \quad (\text{I.9})$$

**I.3.1. L'espace - temps non commutatif :**

Dans cette section, nous exposons la mécanique quantique sur un espace temps non commutatif, la mécanique quantique ordinaire est formulée sur les espaces commutatifs satisfaisant les relations de commutation suivantes [5] :

$$\begin{aligned} [\hat{x}_i, \hat{p}_j] &= i\hbar\delta_{ij} \\ [\hat{x}_i, \hat{x}_j] &= 0 \\ [\hat{p}_i, \hat{p}_j] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I.10})$$

Dans l'espace non commutatif les coordonnées d'espace – temps ordinaire sont remplacées par les coordonnées non commutatives obéissant aux règles de commutation suivante [6] :

$$\begin{aligned} [\hat{x}_i, \hat{p}_j] &= i\hbar\delta_{ij} \\ [\hat{x}_i, \hat{x}_j] &= i\theta_{ij} \\ [\hat{p}_i, \hat{p}_j] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I.11})$$

**Remarque :**

Cette algèbre est écrite dans le système ( $c = \hbar = 1$ ) .

$$\theta^{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \theta_k \quad (\text{I.12})$$

Ici  $\theta_{ij} = -\theta_{ji}$  est une constante antisymétrique qui représente le non commutatif de l'espace –temps.

### I.3.2. La quantification de Weyl :

La quantification de Weyl est une technique utilisée pour décrire la Mécanique Quantique à partir de l'espace de phase de la mécanique classique

La transformée de Fourier de chaque fonction  $\tilde{f}(x)$  ou  $\tilde{g}(x)$  est notée par  $\tilde{f}(K)$  ou  $\tilde{g}(K)$  [7] :

$$\begin{cases} f(x) = \int d^4k e^{ikx} \tilde{f}(K) \\ g(x) = \int d^4k e^{ikx} \tilde{g}(K) \end{cases} \quad (\text{I.13})$$

Donc :

$$\begin{cases} \tilde{f}(k) = \int d^4x e^{-ikx} f(x) \\ \tilde{g}(k) = \int d^4x e^{-ikx} g(x) \end{cases} \quad (\text{I.14})$$

Peut être défini comme suit, non associés à  $f$  et  $g$  les opérateurs de Weyl  $\mathcal{W}(f)$  et  $\mathcal{W}(g)$

$$\begin{cases} \mathcal{W}(f) = (2\pi)^{-4} \int d^4x e^{ik\hat{x}} \tilde{f}(K) \\ \mathcal{W}(g) = (2\pi)^{-4} \int d^4x e^{ik\hat{x}} \tilde{g}(K) \end{cases} \quad (\text{I.15})$$

### I.3.3. Le produit de Moyal :

Le produit  $\mathcal{W}(f)\mathcal{W}(g)$  est défini par [7] :

$$\mathcal{W}(f)\mathcal{W}(g) = (2\pi)^{-4}(2\pi)^{-4} \int d^4k d^4p e^{ik\hat{x}} e^{ip\hat{x}} \tilde{f}(K) \tilde{g}(p) \quad (\text{I.16})$$

En utilisant la formule de Campbell-Baker-Hausdorff :

$$e^A e^B = e^{A+B + \frac{1}{2}h[A,B] + \frac{1}{12}h^2[[A,B],B] - \frac{1}{12}h^3[[A,B],A] + \dots} \quad (\text{I.17})$$

Valable pour les opérateurs A et B telque :

- A, B sont des Hermétiques

$$-[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$$

Donc l'opérateur produit  $\mathcal{W}(f) \mathcal{W}(g)$  prend la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(f) \mathcal{W}(g) &= (2\pi)^{-4} (2\pi)^{-4} \int d^4 k d^4 p e^{ik\hat{x} + ip\hat{x} - h\frac{i}{2}k_i p_j \theta^{ij}} \tilde{f}(K) \tilde{g}(p) \\ &= \mathcal{W}(f * g) \end{aligned} \quad (\text{I.18})$$

Où  $(f * g)$  est une nouvelle fonction (fonction de moyale Weyl)

$$(f * g) = e^{\frac{i}{2}h\theta^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j}} [f(x)g(y)]_{y \rightarrow x} \quad (\text{I.19})$$

Cette relation est développée comme suite :

$$(f * g)(x) = f(x)g(x) + \frac{i}{2}h\theta^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} f(x) \frac{\partial}{\partial x^j} g(x) + O(\theta^2) \quad (\text{I.20})$$

Donc :

$$f(x) * g(x) = f(x)g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \theta^{u_1 v_1} \dots \theta^{u_n v_n} \partial_{u_1} \partial_{u_n} f(x) \partial_{v_1} \partial_{v_n} g(x) \quad (\text{I.21})$$

### Exemple :

Soit  $V$  et  $\psi$  est une fonction est remplacer les produits star [8] :

$$V * \psi = V(\hat{x}) \left[ \exp \left( \frac{1}{2} i\hbar \frac{\bar{\partial}}{\partial \hat{x}_j} \theta_{jk} \frac{\bar{\partial}}{\partial \hat{x}_k} \right) \right] \psi(\hat{x}, t) \quad (\text{I.22})$$

On peut écrire la formule comme :

$$\begin{aligned} &V(\hat{x}) \left[ \exp \left( \frac{1}{2} i\hbar \frac{\bar{\partial}}{\partial \hat{x}_j} \theta_{jk} \frac{\bar{\partial}}{\partial \hat{x}_k} \right) \right] \psi(\hat{x}, t) \\ &= \sum_n^{\infty} = \frac{\left(\frac{1}{2}i\hbar\right)^n}{n!} \left[ \frac{\partial}{\partial \hat{x}_{j_1}} \dots \frac{\partial}{\partial \hat{x}_{j_n}} V(\hat{x}) \right] \theta_{j_1 k_1} \dots \theta_{j_n k_n} \left[ \frac{\partial}{\partial \hat{x}_{k_1}} \dots \frac{\partial}{\partial \hat{x}_{k_n}} \psi(\hat{x}, t) \right] \\ &= \sum_n^{\infty} = \frac{1}{n!} \left[ \frac{\partial}{\partial \hat{x}_{j_1}} \dots \frac{\partial}{\partial \hat{x}_{j_n}} V(\hat{x}) \right] \theta_{j_1 k_1} \dots \theta_{j_n k_n} [\hat{p}_{k_1} \dots \hat{p}_{k_n} \psi(\hat{x}, t)] \end{aligned} \quad (\text{I.23})$$

Les transformations de Fourier de  $V(\hat{x})$  pour écrire :

$$V(\hat{x}) \left[ \exp \left( \frac{1}{2} i\hbar \frac{\bar{\partial}}{\partial \hat{x}_j} \theta_{jk} \frac{\bar{\partial}}{\partial \hat{x}_k} \right) \right] \psi(\hat{x}, t)$$

$$= \left\{ \int \frac{d^n \hat{k}}{(2\hbar\pi)^2} e^{-\frac{1}{2\hbar} \hat{k}_j [\hat{x}_j + \theta_{jk} \hat{p}_k]} V(\hat{k}) \right\} \psi(\hat{x}, t) = V \left( \hat{x}_j + \frac{1}{2} i\hbar \theta_{jk} \frac{\partial}{\partial \hat{x}_k} \right) \psi(\hat{x}, t) \quad (\text{I.24})$$

Est représenté le produit de Moyal sur l'algèbre de  $[\hat{x}_j, \hat{x}_k] = i\hbar \theta_{jk}$

On obtient finalement

$$V(\hat{x}) * \psi(\hat{x}, t) = V \left( \hat{x}_j + \frac{1}{2} i\hbar \theta_{jk} \frac{\partial}{\partial \hat{x}_k} \right) \psi(\hat{x}, t) \quad (\text{I.25})$$

### I.3.4. Propriétés du produit star :

Le produit star satisfait les différentes propriétés [6] :

**a- Le produit star est non commutatif :**

$$f(x) * g(x) \neq g(x) * f(x)$$

**b- Le produit star est associatif :**

$$(f(x) * g(x)) * h(x) = f(x) * (g(x) * h(x))$$

**c- La relation de complexe conjugué :**

$$(f(x) * g(x))^* = g(x)^* * f(x)^*$$

**d- La relation d'intégrale :**

$$\int d^4 x (g * f)(x) = \int d^4 x f(x) g(x)$$

**e-permutation cyclique :**

$$\int d^D x (f * g * h)(x) = \int d^D x (h * f * g) = \int d^D x (g * h * f)(x)$$

**f-Satisfait la règle de Leibniz :**

$$\partial_u (f * g) = \partial_u f * g + f * \partial_u g$$

## I.4. Le méthode de Boopp's shift :

Dans cette partie on va utiliser la méthode de Boopp's shift pour résoudre l'équation de Schrödinger non commutatif au lieu d'utiliser le produit star, pour ce but on remplaçant le produit star avec le produit habituel à la fois par Boopp's shift [9] :

$$\begin{cases} \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} P_j \\ \hat{p}_i = P_i \end{cases} \quad (\text{I.25})$$

Nous étudions l'espace non commutatif à 2D, pour cela le commutateur  $[\hat{x}_i, \hat{x}_j]$  dans la relation (I.11) est remplacé par le commutateur  $[\hat{x}, \hat{y}]$  pour :

$$\begin{cases} i = 1 & \hat{x}_1 = \hat{x} & p_1 = p_x \\ i = 2 & \hat{x}_2 = \hat{y} & p_2 = p_y \end{cases} \quad \text{Et} \quad \begin{cases} \theta^{12} = \theta \\ \theta^{21} = -\theta \end{cases}$$

On obtient alors :

$$[\hat{x}, \hat{y}] = i\theta$$

Avec :

$$\begin{cases} \hat{x} = x - \frac{\theta}{2} p_y \\ \hat{y} = y + \frac{\theta}{2} p_x \end{cases} \quad (\text{I.26})$$

Le potentiel utilisé dans notre équation de Schrödinger non commutatif est le multi-potentiel :

$$V(\hat{r}) = ar + br^2 + \frac{c}{r} \quad (\text{I.27})$$

Pour obtenir l'opérateur  $\hat{r}$  en espace non commutatif à deux dimensions comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \sqrt{\hat{x}^2 + \hat{y}^2} \\ &= \sqrt{\left(x - \frac{\theta}{2} p_y\right)^2 + \left(y + \frac{\theta}{2} p_x\right)^2} \end{aligned}$$

$$\hat{r} = \sqrt{r^2 + \theta(y p_x - x p_y) + O(\theta^2)}$$

On va négliger le dernier terme et utiliser la formule de  $\vec{L} = \vec{P} \wedge \vec{r}$ , on trouve après simplification :

$$\hat{r} = r(1 - \theta L_z)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{I.28})$$

Avec:

$$L_z = x p_y - y p_x$$

Donc :

$$\hat{r} = r(1 - \frac{1}{2}\theta L_z) \quad (\text{I.29})$$

Donc le multi-potentiel s'écrit comme :

$$V(\hat{r}) = V_1(\hat{r}) + V_2(\hat{r}) + V_3(\hat{r}) \quad (\text{I.30})$$

Avec :

$$\begin{cases} V_1(\hat{r}) = a\hat{r} \\ V_2(\hat{r}) = b\hat{r}^2 \\ V_3(\hat{r}) = \frac{c}{\hat{r}} \end{cases} \quad (\text{I.31})$$

Pour calculer le terme  $V_1(\hat{r})$ ,  $V_2(\hat{r})$  et  $V_3(\hat{r})$ , on basé la référence [9] :

$$\hat{r}^2 = r^2 - \theta L_z \quad (\text{I.32})$$

Qui permet de trouver le premier terme :

$$\hat{r} = r(1 - \theta L_z)^{\frac{1}{2}}$$

Donc :

$$\hat{r} = r(1 - \frac{1}{2}\theta L_z) \quad (\text{I.33})$$

L'expression finale du terme  $V_1(\hat{r})$  devient :

$$V_1(\hat{r}) = ar - \frac{a}{2}\theta L_z \quad (\text{I.34})$$

Alors :

$$V_1(\hat{r}) = V_1(r) + V_{1pert}(r) \quad (\text{I.35})$$

Avec :

$$\begin{cases} V_1(r) = ar \\ V_{1pert}(r) = -\frac{a}{2}\theta L_z \end{cases} \quad (\text{I.36})$$

Le deuxième terme ( $\hat{r}$ ), on multiplie l'équation (III.6) par le paramètre b, donc on trouve :

$$V_2(\hat{r}) = V_2(r) + V_{2pert}(r) \quad (\text{I.37})$$

Avec :

$$\begin{cases} V_2(r) = br^2 \\ V_{2pert}(r) = -b\theta L_z \end{cases} \quad (\text{I.38})$$

En fin, le dernier terme colombien est calculé de même méthode, comme suit :

$$\frac{1}{\hat{r}} = \frac{1}{r} + \frac{\theta L_z}{2r^3} \quad (\text{I.39})$$

Le terme  $V_3(\hat{r})$  est la somme de deux termes  $V_3(r)$  et  $V_{3pert}(r)$  suivant :

$$\begin{cases} V_3(r) = \frac{c}{r} \\ V_{3pert}(r) = \frac{\theta c L_z}{2r^3} \end{cases} \quad (\text{I.40})$$

D'après les équations (I.36), (I.38) et (I.40) on trouve l'expression finale le multi-potentiel dans l'espace non commutatif :

$$\begin{cases} V(r) = ar + br^2 + \frac{c}{r} \\ V_{pert}(r) = -\frac{a}{2}\theta L_z - b\theta L_z + \frac{\theta c L_z}{2r^3} \end{cases} \quad (\text{I.41})$$

**Conclusion :**

Si on veut travailler avec un espace –temps non commutatif ils existent deux manières différentes :

-utiliser un produit ordinaire avec des opérateurs de Weyl.

- Déformer le produit ordinaire en un produit star et utiliser des

Fonction Ordinaire définies sur un espace –temps commutatif.

## **Chapitre II**

# **L'atome d'hydrogène sous l'action d'un Multi-potentiel dans l'espace – ordinaire A deux dimensions réales**

## II.1. Introduction

L'équation de Schrödinger est l'équation fondamentale de la mécanique quantique non relativiste, elle joue en mécanique quantique le même rôle fondateur que l'équation de Newton en mécanique classique, car c'est elle qui régit l'évolution dans le temps du système physique [10].

## II.2. L'équation Schrödinger à deux dimensions :

### II.2.1. La formule principe de l'équation de Schrödinger :

L'équation de Schrödinger dans sa forme générale, est une équation aux dérivées partielles, du premier ordre par rapport au temps et du second ordre par rapport aux coordonnées de l'espace ordinaire, Si l'Hamiltonien du système physique ne dépend pas explicitement du temps, l'énergie total  $E$  est conservée, Donc l'équation de Schrödinger admit des solutions particulières sous forme :

$$H\psi(\vec{r}, t) = E\psi(\vec{r}, t) \quad (II. 1)$$

$$\text{Ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r, t) \\ \vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla} \\ E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \end{array} \right. \quad (II. 2)$$

$H$  = l'opérateur Hamiltonien

$E$  = l'énergie total du système

$\vec{p}$  = impulsion

$\vec{\nabla}$  = l'opérateur de nabra

$V(r)$  = le potentiel

### II.2.2. Le potentiel :

Le potentiel  $V(r)$  connue par multi-Potentiel, est donnée par :

$$V(r) = V_1(r) + V_2(r) + V_3(r) \quad (II.3)$$

Avec :  $V_1(r) = ar$

$$V_2(r) = br^2 \quad (II.4)$$

$$V_3(r) = \frac{c}{r}$$

Ou :

$V_1(r) = ar$  Est un terme linéaire de potentiel décrit l'action d'un champ extérieur sur l'atome d'hydrogène.

Et

$$V_2(r) = br^2 \quad \text{Décrire la vibration de l'électron.}$$

Et le terme

$V_3(r) = \frac{c}{r}$  Décrire l'interaction entre l'électron et le proton dans l'atome d'hydrogène

Avec :

$a$  : est un nombre réel.

Est  $b = \frac{1}{2}mw^2$  Et  $C = Ze^2$

### II.2.3. Résolution l'équation de Schrödinger :

La forme de l'équation de Schrödinger est donnée par la relation [11] :

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}, t) = E \psi(\vec{r}, t) \quad (II.5)$$

Si on pose :

$$\varphi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) \exp(-iEt) \quad (II.6)$$

Alors l'équation de Schrödinger se réduit :

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V(\vec{r}) \right] \psi(r) = E \psi(r)$$

Avec  $\vec{\nabla}^2 = \Delta$  l'opérateur en coordonnées polaires  $(r, \varphi)$  définie par :

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (II.7)$$

En remplaçant eq (II.7) avec eq (II.5) on obtient :

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] + V(r) \right\} \psi(r) = E \psi(r) \quad (II.8)$$

On pose :

$$\psi(\vec{r}) = \frac{R_m(r)}{\sqrt{r}} \phi(\varphi) \quad (II.9)$$

Qui permet de trouver l'équation :

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] + V(r) \right\} \frac{R_m(r)}{\sqrt{r}} \phi(\varphi) = E \frac{R_m(r)}{\sqrt{r}} \phi(\varphi) \quad (II.10)$$

Donc :

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + V(r) \right] \right\} \frac{R_m(r)}{\sqrt{r}} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \frac{R_m(r)}{\sqrt{r}} = E \frac{R_m(r)}{\sqrt{r}} \quad (II.11)$$

Et d'autre forme :

$$\frac{r^2 \sqrt{r}}{R_m(r)} \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + V(r) \right] - E \right\} \frac{R_m(r)}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\phi(\varphi)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \phi(\varphi) \quad (II.12)$$

Puisque les deux termes sont indépendants, on peut écrire :

$$\frac{1}{\phi(\varphi)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \phi(\varphi) = -m^2 \quad (II.13)$$

Donc :

$$\frac{1}{\phi(\varphi)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \phi(\varphi) + m^2 = 0$$

Et en d'autre forme :

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \phi(\varphi) + m^2 \phi(\varphi) = 0 \quad (II.14)$$

La solution proposé de la fonction angulaire  $\phi(\varphi)$  et la fonction radiale  $R_m(r)$  écrire [12] :

$$\begin{cases} \phi(\varphi) = \exp(\pm im\varphi) & m = 0,1,2 \\ R_m(r) = \exp(P_m(r)) \sum_{n=0} a_n r^{2n+\delta} \end{cases} \quad (II.15)$$

Et  $P_m(r)$  par la forme :

$$P_m(r) = ar + \frac{1}{2}Br^2 \quad (II.16)$$

La valeur propre de l'énergie peut être écrite comme :

$$E_p = 2\sqrt{b} (1 + m + p) \quad (II.17)$$

La valeur exacte pour  $P = 0$  et  $P = 1$  sont discutés ci dessous :

### 1- $P = 0$

La valeur propre de l'énergie :

$$E_0 = 2\sqrt{b}(1 + m) \quad (II.18)$$

La fonction propre correspondante peut s'écrire :

$$R_m^{(0)} = a_0 r^\delta \exp\left(-\frac{ar+br^2}{2\sqrt{b}}\right) \quad (II.19)$$

**2-  $P = 1$** 

La valeur propre de l'énergie :

$$E_1 = 2\sqrt{b}(2 + m) \quad (II.20)$$

La fonction propre correspondante peut s'écrire

$$R_m^{(1)} = (a_0 + a_1 r) r^\delta \exp\left(-\frac{ar+br^2}{2\sqrt{b}}\right) \quad (II.21)$$

Dans ce cas la fonction propres peut être écrite comme :

$$R_m^{(p)} = (a_0 + a_1 r + \dots a_p r^p) r^\delta \exp\left(-\frac{ar+br^2}{2\sqrt{b}}\right) \quad (II.22)$$

Et 
$$E_p = 2\sqrt{b}(1 + m + p) \quad (II.23)$$

Dans la fonction  $\psi(\vec{r})$  écrire comme [12] :

**1-dans état fondamental  $P = 0$** 

$$\psi^{(0)}(\vec{r}) = \frac{R_m^{(0)} \exp(\pm im\varphi)}{\sqrt{r}} = a_0 r^{\delta-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{ar+br^2}{2\sqrt{b}}\right) \exp(\pm im\varphi) \quad (II.24)$$

**2- dans le premier état excité  $P = 1$** 

$$\psi^{(1)}(\vec{r}) = \frac{R_m^{(1)} \exp(\pm im\varphi)}{\sqrt{r}} = (a_0 + a_1 r) r^{\delta-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{ar+br^2}{2\sqrt{b}}\right) \exp(\pm im\varphi) \quad (II.25)$$

**3- dans le cas général (le cas de l'état P excité)**

$$\psi(\vec{r}) = \frac{R_m^{(p)} \exp(\pm im\varphi)}{\sqrt{r}} = (a_0 + a_1 r + \dots a_p r^p) r^{\delta-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{ar+br^2}{2\sqrt{b}}\right) \exp(\pm im\varphi) \quad (II.26)$$

**Conclusion :**

Dans ce travail nous avons obtenu les solutions exactes de l'équation de Schrödinger à deux dimensions stationnaires pour les multi-potentiels dans l'espace ordinaire.

## Chapitre III

# L'atome d'Hydrogène sous l'action d'un Multi-potentiel dans l'espace – temps Non commutatif a deux dimensions réales

### III.1.Introduction :

Le but de ce chapitre est a étudié l'atome d'hydrogène sous l'action d'une multi-potentiels dans l'espace - temps non commutatif a deux dimensions réales, on déduit le terme de perturbation, on trouve les corrections des énergies  $E_{NC}$ , on construit l'opérateur d'Hamiltonien et l'opérateur modifié de Zeeman qui décrit l'interaction avec le champ magnétique.

### III.2.L'équation de Schrödinger dans l'espace temps non commutatif :

Dans cette partie on voit comme un exemple vivant dans la mécanique non relativiste d'application très importante. On formule l'atome d'hydrogène dans l'espace non commutatif et on déduit l'effet sur les niveaux d'énergie de cet atome.

L'équation de Schrödinger pour l'état stationnaires est donnée par :

$$H \psi = E \psi \quad (\text{III.1})$$

On remplace l'opérateur d'Hamiltonien par son expression, on trouve l'équation suivant:

$$\left[ \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(\hat{r}) \right] * \hat{\psi}(\hat{r}) = E_{NC} \hat{\psi}(\hat{r}) \quad (\text{III.2})$$

Avec  $\hat{\psi}(\hat{r})$ ,  $\hat{V}(\hat{r})$  et  $E_{NC}$  sont représentés la fonction d'onde, l'opérateur multi-potentiel et l'énergie dans l'espace non commutatif à deux dimensions. si on applique la méthode de Boopp's shift, l'équation de Schrödinger se réduit à la forme :

$$\left[ \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\hat{r}) \right] \psi(\vec{r}) = E_{NC} \psi(\vec{r}) \quad (\text{III.3})$$

La fonction d'onde  $\psi(\vec{r})$  est la même fonction dans l'espace ordinaire.

Le potentiel  $V(\hat{r})$  est représenté l'expression du multi-potentiel on fonction  $\hat{r}$  ou lieu

La position  $r$  :

$$V(r) = a\hat{r} + b\hat{r}^2 + \frac{c}{\hat{r}} \quad (\text{III.4})$$

Nous avons déjà vu dans le chapitre I, Donc le multi-potentiel dans l'espace non commutatif écrire :

$$\begin{cases} V(r) = ar + br^2 + \frac{c}{r} \\ V_{pert}(r) = -\frac{a}{2}\theta L_z - b\theta L_z + \frac{\theta c L_z}{2r^3} \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

L'opérateur potentiel  $V(\hat{r})$  prendre la forme :

$$V(\hat{r}) = V(r) + V_{pert}(r) \quad (\text{III.6})$$

Avec

$V(r)$  : le potentiel ordinaire

Ou  $V(r)$  est le potentiel ordinaire et l'additif nouveau terme comme écrit :

$$V_{pert}(r) = \theta \left( -\frac{a}{2r} - b + \frac{c}{2r^3} \right) L_z \quad (\text{III.7})$$

### III.3. La correction de l'énergie correspond l'état fondamental :

Nous avons observé que le potentiel modifié  $V_{pert}(r)$  est proportionnelle du paramètre infinitésimale, donc on peut applique le théorème de perturbation pour obtenir la modification à des niveaux d'énergie  $E$  au premier ordre en  $\theta$ .

$$E_{NC} = E_{or} + E_{per}$$

Ou :

$E_{NC}$  Et  $E_{or}$  : sont l'énergie dans l'espace non commutatif et l'espace ordinaire

Respectivement.

$E_{per}$  : est le terme de perturbation en énergie, avec :

$$\begin{aligned}
E_{pert} &= \left\langle n \left| \left( \theta \left( -\frac{a}{2r} - b + \frac{c}{2r^3} \right) L_Z \right) \right| n \right\rangle \\
&= \theta m \int \psi^{(p)*}(\vec{r}) \left( -\frac{a}{2r} - b + \frac{c}{2r^3} \right) \psi^{(p)}(\vec{r}) ds
\end{aligned} \tag{III.8}$$

Ou :

ds : l'élément de surface est donnée par :

$$ds = r dr d\varphi \tag{III.9}$$

Et m représente les valeurs propres de  $L_Z$  :

$$m = 0, \pm 1, \pm 2$$

La modification non commutative des niveaux d'énergie dans le premier ordre de  $\theta$  correspondant à l'état stationnaire  $E_{10}$ .

Utilisant les eq (II.24), (III.7) et (III.8):

$$E_{10} = 2\pi m \theta \int_0^{+\infty} \left[ a_0 r^{\delta - \frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{ar+br^2}{2\sqrt{b}}\right) \right]^2 \left( -\frac{a}{2r} - b + \frac{c}{2r^3} \right) r dr \tag{III.10}$$

Qui peut être écrite se la forme :

$$E_{10} = 2\pi m \theta (A + B + C) \tag{III.11}$$

Ou les trois facteurs A, B et C écrire :

$$\begin{cases}
A = -\frac{a}{2} a_0^2 \int_0^{+\infty} r^{2\delta-1} \exp\left(-\frac{ar+br^2}{\sqrt{b}}\right) dr = -\frac{a}{2} a_0^2 \int_0^{+\infty} r^{2\delta-1} \exp\left(-\sqrt{b} r^2 - \frac{a}{\sqrt{b}} r\right) dr \\
B = -b a_0^2 \int_0^{+\infty} r^{2\delta} \exp\left(-\frac{ar+br^2}{\sqrt{b}}\right) dr = -b a_0^2 \int_0^{+\infty} r^{2\delta+1-1} \exp\left(-\sqrt{b} r^2 - \frac{a}{\sqrt{b}} r\right) dr \\
C = \frac{c}{2} a_0^2 \int_0^{+\infty} r^{2\delta-3} \exp\left(-\frac{ar+br^2}{\sqrt{b}}\right) dr = \frac{c}{2} a_0^2 \int_0^{+\infty} r^{2\delta-2-1} \exp\left(-\sqrt{b} r^2 - \frac{a}{\sqrt{b}} r\right) dr
\end{cases}$$

$$\tag{III.12}$$

En utilisant l'intégrale spéciale [13] :

$$\int_0^{+\infty} x^{\nu-1} \exp(-Bx^2 - \gamma x) dx = (2B)^{-\frac{\nu}{2}} \Gamma(\nu) \exp\left(\frac{\gamma^2}{8B}\right) D_{-\nu}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2B}}\right) \quad (\text{III.13})$$

Ou  $D_{-\nu}$  est la fonction de cylindre parabolique.

Avec :

$$B = \sqrt{b} \quad \gamma = \frac{a}{\sqrt{b}} \quad \nu = 2\delta$$

Qui permet d'obtenir A, B et C de la forme suivante :

$$\begin{cases} A = -\frac{a}{2} a_0^2 (2\sqrt{b})^{-\frac{2\delta}{2}} \Gamma(2\delta) D_{-2\delta}\left(\frac{a}{\sqrt{2} b^{\frac{3}{4}}}\right) \\ B = -b a_0^2 (2\sqrt{b})^{-\frac{2\delta+1}{2}} \Gamma(2\delta) D_{-(2\delta+1)}\left(\frac{a}{\sqrt{2} b^{\frac{3}{4}}}\right) \\ C = \frac{c}{2} a_0^2 (2\sqrt{b})^{-\frac{2\delta-2}{2}} \Gamma(2\delta) D_{-(2\delta-2)}\left(\frac{a}{\sqrt{2} b^{\frac{3}{4}}}\right) \end{cases} \quad (\text{III. 14})$$

Après un simple calcul de  $E_{10}$ :

$$E_{10} = 2\pi m\theta \left( \begin{aligned} & -\frac{a}{2} a_0^2 (2\sqrt{b})^{-\frac{2\delta}{2}} \Gamma(2\delta) D_{-2\delta}\left(\frac{a}{\sqrt{2} b^{\frac{3}{4}}}\right) + \\ & + -b a_0^2 (2\sqrt{b})^{-\frac{2\delta+1}{2}} \Gamma(2\delta) D_{-(2\delta+1)}\left(\frac{a}{\sqrt{2} b^{\frac{3}{4}}}\right) \\ & + \frac{c}{2} a_0^2 (2\sqrt{b})^{-\frac{2\delta-2}{2}} \Gamma(2\delta) D_{-(2\delta-2)}\left(\frac{a}{\sqrt{2} b^{\frac{3}{4}}}\right) \end{aligned} \right) \quad (\text{III. 15})$$

### III.4. Les niveaux d'énergie des premiers états excités :

La modification de l'énergie correspond le premier état excité, noté par  $E_{11}$  déterminés en utilisant eq (II.25), (III.7) et (III.8) :

$$E_{11} = 2\pi m\theta \int_0^{+\infty} \left[ (a_0 + a_1 r) r^{\delta-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{ar+br^2}{2\sqrt{b}}\right) \right]^2 \left(-\frac{a}{2r} - b + \frac{c}{2r^3}\right) r dr \quad (\text{III. 16})$$

Qui peut être écrit sous la forme :

$$E_{11} = 2\pi m\theta(A + B + C) \quad (\text{III. 17})$$

Où les trois facteurs A, B et C sont donnée par :

$$\begin{cases} A = -\frac{a}{2r}(a_0 + a_1 r)^2 r^{2\delta-1} \exp\left(-\frac{ar+br^2}{2\sqrt{b}}\right) r dr \\ B = -b(a_0 + a_1 r)^2 r^{2\delta-1} \exp\left(-\frac{ar+br^2}{2\sqrt{b}}\right) r dr \\ C = \frac{c}{2r^3}(a_0 + a_1 r)^2 r^{2\delta-1} \exp\left(-\frac{ar+br^2}{2\sqrt{b}}\right) r dr \end{cases} \quad (\text{III. 18})$$

Donc la modification de l'énergie correspond le premier état excité [14] :

$$E_{11} = 2\pi m\theta \int_0^{+\infty} \left[ \left( A_1 r^{2\delta} + A_2 r^{2\delta-1} + A_3 r^{2\delta-3} + A_4 r^{1+2\delta} + \right) \right. \\ \left. + A_5 r^{2\delta-2} + A_6 r^{2+2\delta} \right] \exp\left(-\frac{ar+br^2}{2\sqrt{b}}\right) dr \quad (\text{III. 19})$$

Avec :

$$\begin{aligned} A_1 &= aa_1 a_0 - ba_0^2, & A_2 &= \frac{aa_0^2 + ca_1^2}{2}, & A_3 &= \frac{ca_0^2}{2}, \\ A_4 &= \frac{ca_0^2}{2}, & A_5 &= \frac{aa_1^2}{2} - 2ba_1 a_0, & A_6 &= -ba_1^2 \end{aligned} \quad (\text{III. 20})$$

On écrit la modification de l'énergie correspond le premier état excité sous le forme :

$$E_{11} = -2\pi m\theta(A^1 + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + A^6) \quad (\text{III. 21})$$

Où  $A^1, A^2, A^3, A^4, A^5$  et  $A^6$  sont données par :

$$\begin{aligned} A^1 &= A_1 \int_0^{+\infty} r^{(2\delta+1)-1} \exp\left(-\sqrt{b} r^2 - \frac{a}{\sqrt{b}} r\right) dr \\ A^2 &= A_2 \int_0^{+\infty} r^{(2\delta-1)} \exp\left(-\sqrt{b} r^2 - \frac{a}{\sqrt{b}} r\right) dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A^3 &= A_3 \int_0^{+\infty} r^{(2\delta-2)-1} \exp\left(-\sqrt{b} r^2 - \frac{a}{\sqrt{b}} r\right) dr \\
A^4 &= A_4 \int_0^{+\infty} r^{(2\delta+2)-1} \exp\left(-\sqrt{b} r^2 - \frac{a}{\sqrt{b}} r\right) dr \\
A^5 &= A_5 \int_0^{+\infty} r^{(2\delta-1)-1} \exp\left(-\sqrt{b} r^2 - \frac{a}{\sqrt{b}} r\right) dr \\
A^6 &= A_6 \int_0^{+\infty} r^{(2\delta+3)-1} \exp\left(-\sqrt{b} r^2 - \frac{a}{\sqrt{b}} r\right) dr
\end{aligned} \tag{III. 22}$$

En utilisant l'intégrale (III. 13), on obtient [14] :

$$\begin{aligned}
A^1 &= A_1 (2\sqrt{b})^{-\frac{2\delta+1}{2}} \Gamma(2\delta+1) D_{-(2\delta+1)}\left(\frac{a}{\sqrt{2} b^{\frac{3}{2}}}\right) \\
A^2 &= A_2 (2\sqrt{b})^{-\frac{2\delta}{2}} \Gamma(2\delta) D_{-(2\delta)}\left(\frac{a}{\sqrt{2} b^{\frac{3}{2}}}\right) \\
A^3 &= A_3 (2\sqrt{b})^{-\frac{2\delta-2}{2}} \Gamma(2\delta-2) D_{-(2\delta-2)}\left(\frac{a}{\sqrt{2} b^{\frac{3}{2}}}\right) \\
A^4 &= A_4 (2\sqrt{b})^{-(\delta+1)} \Gamma(2\delta+2) D_{-(\delta+1)}\left(\frac{a}{\sqrt{2} b^{\frac{3}{2}}}\right) \\
A^5 &= A_5 (2\sqrt{b})^{-\frac{(2\delta-1)}{2}} \Gamma(2\delta-1) D_{-(2\delta-1)}\left(\frac{a}{\sqrt{2} b^{\frac{3}{2}}}\right) \\
A^6 &= A_6 (2\sqrt{b})^{-\frac{(2\delta+3)}{2}} \Gamma(2\delta+3) D_{-(2\delta-1)}\left(\frac{a}{\sqrt{2} b^{\frac{3}{2}}}\right)
\end{aligned} \tag{III. 23}$$

La modification non commutative des niveaux d'énergie, des premiers états excités  $E_{11}$  :

$$E_{11} = 2\pi m\theta(A^1 + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + A^6) \tag{III. 24}$$

La modification non commutative de l niveau d'énergie E, dans le premier ordre de  $\theta$

Les l'état excités P de l'ordre, déterminer en utilisant eq (II.25), (III.7) et (III.8) correspondant :

$$E_{p1} = 2\pi m\theta A \quad (\text{III. 25})$$

Avec :

$$A = \int_0^{+\infty} [(a_0 + a_1 r^2 + \dots a_p r^{2p})]^2 r^{2\delta} \exp\left(-\frac{a}{2r} - b + \frac{c}{2r^3}\right) dr \quad (\text{III. 26})$$

Nous résumons les résultats obtenus des niveaux d'énergies, premier ordre de  $\theta$  correspondant à l'état stationnaire, les premiers états existe et les états p excites ( $E_{NCO}, E_{NC1}, E_{NCP}$ ) :

$$E_{NOCO} = E_0 + E_{10}$$

$$E_{NC1} = E_1 + E_{11} \quad (\text{III. 27})$$

$$E_{NCP} = E_p + E_{p1}$$

Alors obtenu les résultats :

$$E_{NCO} = 2\sqrt{b}(1+m) - 2\pi\theta \left( \frac{b}{2\sqrt{c}} (2\sqrt{b})^{-\frac{2\delta+3}{2}} \Gamma(2\delta+3) D_{-(2\delta+3)} \left( \frac{a}{\sqrt{2} b^{\frac{3}{2}}} \right) + \frac{\sqrt{c}}{2} (2\sqrt{b})^{-\frac{2\delta+5}{2}} \Gamma(2\delta+5) D_{-(2\delta+5)} \left( \frac{a}{\sqrt{2} b^{\frac{3}{2}}} \right) \right) m \quad (\text{III. 28})$$

$$E_{NC1} = 2\sqrt{b}(2+m) + 2\pi\theta(A^1 + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + A^6)m \quad (\text{III. 29})$$

$$E_{NCP} = 2\sqrt{b}(1+m+p) + 2\pi\theta mA \quad (\text{III. 30})$$

### III.5. Construction l'operateur d'Hamiltonien :

On peut écrire l'operateur d'Hamiltonien  $\hat{H}_{NC}$  dans l'espace non commutative à deux dimensions de la façon suivant:

$$\hat{H}_{NC} = -\frac{1}{2m_0}\Delta + V(\hat{r}) \quad (\text{III. 31})$$

On utilise l'équation (III.7) qui définit l'opérateur  $V(\hat{r})$  dans l'espace non commutatif à deux dimensions :

$$\hat{H}_{NC} = -\frac{1}{2m_0}\Delta + V(r) + \theta \left( -\frac{a}{2r} - b + \frac{c}{2r^3} \right) L_z \quad (\text{III. 32})$$

L'opérateur  $\hat{H}_{NC}$  décomposé en deux opérateurs  $\hat{H}_{or}$  et  $\hat{H}_{mag}$  comme suit :

$$\hat{H}_{NC} = \hat{H}_{or} + \hat{H}_{mag} \quad (\text{III. 33})$$

Le premier opérateur est déterminé à partir la relation :

$$\hat{H}_{or} = -\frac{1}{2m_0}\Delta + V(r) \quad (\text{III. 34})$$

Le second opérateur  $\hat{H}_{mag}$  est donnée par :

$$\hat{H}_{mag} = \theta \left( -\frac{a}{2r} - b + \frac{c}{2r^3} \right) L_z \quad (\text{III. 35})$$

On choisit le paramètre  $\theta$  et le vecteur d'un champ magnétique qui oriente avec l'axes ( $OZ$ ) comme :

$$\theta = \alpha B \quad \text{Et} \quad \vec{B} = B\vec{K} \quad (\text{III. 36})$$

Où  $\alpha$  : est une proportionnelle constante, et le moment magnétique  $\vec{u} = \vec{S}$ , après un calcul simple, on trouve:

$$\theta L_z = \alpha \vec{J} \vec{B} - \alpha \vec{S} \vec{B} \quad (\text{III. 37})$$

Où ( $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ ) le moment total, en utilisant par exemple deux eq (III. 35) et

(III. 37), on peut écrire l'opérateur :

$$\hat{H}_{mag} = \alpha \left( -\frac{a}{2r} - b + \frac{c}{2r^3} \right) \vec{J} \vec{B} - \alpha \left( -\frac{a}{2r} - b + \frac{c}{2r^3} \right) H_{zeeman} \quad (\text{III. 38})$$

Ou  $H_{zeeman}$  est déterminé à partir [15]:

$$H_{zeeman} = -\vec{S}\vec{B} = -\vec{u}\vec{B} \quad (\text{III. 39})$$

L'opérateur (III. 34) représenté une particule fermionique (électron) en interaction avec le multi-potentiel ordinaire. Le terme additive (III. 38), qui vu sous l'action de la non commutativité de l'espace est équivalent physiquement, l'effet Zeeman, qui traduit l'effet d'un champ magnétique extérieure sur l'atome étudié.

# Conclusions générale

A travers ce mémoire en physique théorique spécialité physique des particules à haute énergie.

*L'atome d'Hydrogène dans l'espace temps non commutatif sous l'action d'un multi-potentiel à deux dimensions.*

Le but de ce mémoire est de formulation les cadres physiques et mathématiques de l'atome d'Hydrogène sous l'action d'un multi-potentiel en géométrie non commutatif à deux dimensions.

En deuxième chapitre nous avons représenté formalisme mathématique et physique de l'atome d'Hydrogène sous l'action d'un multi-potentiel dans l'espace ordinaire.

En troisième chapitre nous avons étudié l'effet du non commutativité, dans l'espace à deux dimensions, en appliquant la méthode de Boopp shift de premier ordre dans le paramètre de non commutativité  $\theta$ , la modification des niveaux d'énergie à l'état fondamental et états premier excités sont établis, nous avons construit Hamiltonien non commutative  $\hat{H}_{NC}$ , on peut conclure de ce travail que la non commutativité application sur le multi-potentiel, produit deux automatiquement l'effet Zeeman non commutatif, inclue l'effet Zeeman ordinaire.

# Bibliographie

# Bibliographie

- [1] C.C.Tannoudji, B.Diu, F.Laloe, **Mécanique quantique**, Hermann, Paris, 1977.
- [2] Jean-Louis BASDEVANT, **Mécanique quantique**, école polytechnique And Edition Marketing, ellipses, 1986.
- [3] F.Delduc, **Introduction aux groupes de lie destinée aux physiciens**, Laboratoire de Physique da L'ENS Lyon septembre 2008.
- [4] Mikhaïl shaposhnikou, **Champs Quantiques Relativistes**, 2005.
- [5] Nawel rezaiki, **L'atome d'hydrogène dans le formalisme de la Géométrie Non Commutative**, mémoire de magister, Université Mentouri Constantine.
- [6] H .Menigher, **Au –dela du modèle standard et application**, mémoire de Magister, Université d'aricona, 2007.
- [7] K.Farid .**Aspects mathématiques et physique de la géométrie**, Mémoire de magister, Université d'aricona, 2007.
- [8] **Etude des systèmes quantiques relativistes dans l'espace – temps non Commutative**, mémoire de magister université de M'sila, 2013.
- [9] L. Mezincescu, UMTG-233, **Star product in Quantum Mechanics**, [Arxiv: Hep-th /0007046v2 21Jul. 2000].

- [10] M.Messiah, **Mécanique quantique. T1**, Dunod, Paris, 1995.
- [11] D.G.W. **the two dimensional hydrogen atoms revisited**,  
[Arxiv: math-ph: 0205031v1, 21may 2002].M. Hag-Hassan, the two-  
Dimensional hydrogen atom in the momentum representation,  
Hal- 00333701, version 23 Oct. 2008.
- [12] Shi-Hai Dong, **Exact solution of the two-dimensional Schrödinger Equation with certain Central potentials**,  
[Arixv: ph/0003100v1 22 mars 2000].
- [13] Gradshteyn Is and Ryzhik I M seventh edition table of Integrals, Series And Products, New York: Academics Press.
- [14] M.Abdelmadjid, **Quantum spectrum of Schrödinger Equation with The B-QS potential in Non Commutative Two- Dimensional space, en Scours de Publication.**
- [15] J.L.Basdevant, **Mécanique Quantique**, Ecole Polytechnique, ellipses, ISBN 2-7298-8614-1 1986.

## ملخص

تطرقنا في هذه الدراسة الفيزيائية الخاصة بمذكرة الماستر في فيزياء الجسيمات عالية الطاقة إلى حل معادلة شرودينغر في الفضاء اللاتبادلي ثنائي البعد لذرة الهيدروجين المتأثرة بكمون متعدد.

طبقتنا نظرية الاضطرابات لإيجاد تصحيحات مستويات الطاقة و شكلنا مؤثر الهاميلتونيان الذي وجدنا فيه حد إضافي يكافئ تأثير المجال المغناطيسي و يشمل مفعول زيمان العادي

### الكلمات المفتاحية:

ذرة الهيدروجين ، فضاء اللاتبادلي ، معادلة شرودينغر، كمون ، هاميلتون ، المجال المغناطيسي، مفعول زيمان.

## Abstract

In this work of search we have studied, in master theoretical physics, option: of particles physics at high energy, the effect of the non commutativity to the Schrödinger equation with multi-potential in two dimensional spaces with Boopp's shift method.

We applied perturbation theory to find modification of energy levels; we formed the deformed Hamiltonian which described automatically the new Zeeman Effect, including usual Zeeman.

**Keys Words:** Hydrogen atom, non commutative space, Schrödinger equation, Hamiltonian, magnetic field, Zeeman Effect, multi-potential.