

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE
DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de
l'Informatique
Département des Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Équations Aux Dérivées Partielles

Thème

Équation de Riccati et commande optimale

Présentée par :

M^s YAHIAOUI Sarra

Soutenu publiquement le : 15/06/2025.

Devant le jury composé de :

Président : M^r SENGOUGA Abdelmohsen

Encadreur : M^r TOUAHRIA Messaoud

Examineur : M^r CHADI Khelifa

Examineur : M^r MIHOUBI Hamza

Professeur, Université de M'sila

M.C.B, Université de M'sila

M.C.B, Université de M'sila

M.C.B, Université de M'sila

Année universitaire 2024/2025.

Table des matières

1	Généralités sur la théorie de la commande	7
1.1	Introduction aux équations différentielles	7
1.1.1	Notions de bases	8
1.1.2	Équation différentielle du premier Ordre	9
1.2	Notions fondamentale en théorie de la commande	13
1.2.1	Systèmes dynamiques	13
1.3	Commandabilité	15
1.3.1	Application entrée-sortie	15
1.4	Stabilité	18
1.4.1	Stabilité au sens de Lyapunov	18
1.5	Observabilité	19
1.5.1	Système commandé-observé	19
1.5.2	Critère d'observabilité de Kalman	20
2	Étude Théorique sur la commande optimale	22
2.1	Définition de la Commande optimale	22
2.1.1	Position du problème	23
2.2	Quelques définitions	24
2.3	Position du problème de la commande optimale	26
2.3.1	Différents types du problème de commande optimale	26
2.4	Principe du maximum de Pontrygin	27
2.5	Système linéaire et commande optimale	28
2.6	L'équation de Riccati et son lien avec la commande optimale	30
2.6.1	Définition de l'équation de Riccati	30
2.6.2	Lien avec la commande optimale	30
3	Théorie Linéaire-Quadratique et Équation de Riccati	32
3.1	Commande linéaire quadratique (LQ)	32
3.2	Position du problème de la commande optimale linéaire quadratique . . .	32
3.2.1	Existence des trajectoires optimales	33
3.3	Condition nécessaire et suffisante d'optimalité : Principe du Maximum dans le cas LQ	36
3.4	Exemples	37
3.5	Fonction valeur et équation de Riccati	41
3.5.1	La fonction valeur	41
3.5.2	Équation de Riccati	41
3.5.3	Représentation linéaire de l'équation de Riccati	42
3.5.4	Exemple d'application	43

3.5.5	Comparaison entre le PMP et équation de Riccati	47
3.6	Conclusion	48

Table des figures

1.1	Problème de Commandabilité	15
2.1	La trajectoire d'un système dynamique à l'état initiale et à l'état final . .	23
2.2	Boucle ouverte	25
2.3	Boucle fermée	25
3.1	Les trajectoires du PMP	39
3.2	Les trajectoires d'équation de Riccati	45

Notations

$\max$	Le maximum.
$\min$	Le minimum.
$\mathbb{R}$	L'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^+$	Ensemble des nombres réels positifs .
$\mathbb{R}^n$	Espace vectoriel de dimension n construit sur le corps des réels.
$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$	L'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes,à coefficients dans $\mathbb{R}$.
A^T	Transposée de la matrice A .
e^A	Matrice exponentielle de la matrice A .
$\text{rg}(A)$	Le rang de la matrice A .
$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$	La dérivée de $x(t)$ par rapport à la variable t
$\langle ., . \rangle$	Le produit scalaire
$L^p(\Omega, \mathbb{K})$	L'ensemble des applications mesurables de Ω dans $\mathbb{K}$, de puissance p intégrables sur Ω , pour $1 \leq p < +\infty$. .
$\mathcal{O}$	Matrice d'observabilité .
x	Vecteur d'état.
y	Vecteur de sortie .
H	Fonction Hamiltonienne

$|\cdot|$ Valeur absolue d'un nombre réel ou module d'un nombre complexe .

$\|\cdot\|$ Norme sur $\mathbb{R}^n$.

x^T Transposée du Vecteur x .

$x \in \mathbb{R}^n$ Vecteur de composantes x_i

$C^1(\mathbb{R}^n)$ L'ensemble des fonctions Continument différentiables.

$A \succ 0$ La matrice A est définie positive.

Dédicace

*Avec l'aide de Allah,
J'ai pu achever ce modeste travail que je dédie :*
*À la personne qui a toujours été et restera mon exemple, qui m'a
poussé toujours vers le meilleur et la réussite, ma chère mère **Chérifa***
*À celui qui m'a soutenue et a facilité mon chemin vers la réussite,
mon mari : **Hicham***
*À mes deux fleurs, mes chères filles, qui m'ont offert de leur précieux
temps, sans même s'en rendre compte, une chance de réaliser mon
rêve tardif, **Khadidja** et **Nour**.*
À celle qui m'a accompagnée tout au long de ce chemin...
mon ange tant attendu.
*À celles qui ont toujours été présentes à mes côtés, et dont aucun mot
ne saurait exprimer toute la reconnaissance qu'elles méritent, à mes
chères soeurs **Amina** et **Reguia** et à leurs enfants.*
*À mes chers beaux frères **Hassen** et **Bachir**.*
*À mon amie précieuse **Samira** .*
À tous les enseignants qui m'ont enseigné .

Remerciement

*Au nom d'Allah, et avant tout, je remercie **ALLAH** de m'avoir accordé la force, le courage et la patience pour accomplir ce modeste travail.*

*Les remerciements vont aussi à **Mr. Touahria Messaoud**, Docteur à l'université Mohammed Boudiaf de M'sila, d'avoir proposé et accepté de dirigé ce travail, pour son aide précieuse, ses remarques constructives, ses conseils, son soutien, et pour son sérieux suivi dans la préparation de ce travail.*

*Je remercie également **les membres de jury** pour l'intérêt à mon travail et de l'avoir examiné. j'exprime vivement ma gratitude à l'ensemble de mes enseignants qui m'ont suivi inlassablement durant tout mon cursus universitaire. Enfin, mes meilleurs remerciements vont à tous ceux qui m'ont aidé de près où de loin, encouragé tout au long de mon parcours universitaire en particulier ma famille et mes amies.*

Merci à tous

Introduction

Les équations différentielles sont au cœur de nombreux modèles mathématiques en physique, en ingénierie et en économie. Elles permettent de décrire l'évolution d'un système en fonction d'une ou plusieurs variables indépendantes. Parmi elles, **l'équation de Riccati** qui remonte au XVIII^e siècle avec les travaux du mathématicien Jacopo Francesco Riccati, qui l'a introduite sous une forme particulière. Cependant, ce n'est qu'au XX^e siècle qu'elle a connu un développement significatif, notamment dans le cadre de la théorie du commande optimal et des systèmes dynamiques. Cette équation non linéaire intervient dans de nombreux problèmes d'optimisation, comme la commande linéaire quadratique (LQR), la commande robuste, ou encore dans les systèmes de filtrage, tels que le filtre de Kalman, utilisé en traitement du signal et en navigation. occupe une place particulière en raison de son rôle central dans la théorie de la commande optimale. Cette dernière vise à déterminer la meilleure stratégie permettant d'optimiser un processus dynamique sous certaines contraintes.

La théorie de la commande optimale est un domaine de recherche interdisciplinaire, où beaucoup de concepts mathématiques et des méthodes travaillent ensemble pour produire un corps impressionnant des mathématiques appliquées.

Les problèmes de commande occupent une place importante dans ce domaine, parce que la résolution de ces problèmes, garantissent le fonctionnement d'un corps, et pour étudier mathématiquement la propriété de commandabilité sur ces corps il faut connaître la modélisation (compréhension) et la commande (contrôle) de certaines composantes de l'environnement humain appelées systèmes. La modélisation est fondée sur l'analyse de la relation entre une cause l'entrée (commande, perturbation, incertitude du système) et un effet la sortie (les réponses du système). Cette relation entrée-sortie, traduit pour des besoins de la commande en une représentation mathématique appelée modèle, décrit le comportement du système. C'est une phase relativement difficile mais essentielle pour commander tout système réel.

La commande en boucle ouverte est une fonction $t \longrightarrow u(t)$ définie sur un intervalle de temps à valeurs dans l'espace des commandes. La commande en boucle fermée, appelée

aussi rétro-action, aussi connue sous sa dénomination anglo-saxonne : feedback, est une fonction $u \longrightarrow R(t)$.

L'objectif principal de la théorie du commande est de déterminer la commande à appliquer en entrée du système pour obtenir un comportement désiré de celui-ci.

L'intérêt de notre mémoire concentre sur l'équation de Riccati et la commande optimale. Elle se compose de trois chapitres :

► **Chapitre 01 :**

Donner des généralités sur les équations différentielles et quelques définitions liées à la théorie du commande (commandabilité, observabilité, stabilité ...).

► **Chapitre 02 :**

Nous présentons la formulation mathématique du problème général de la commande, de la commande optimale et du principe du maximum de Pontryagin. Nous terminons le chapitre par le lien de l'équation de Riccati et la commande optimale.

► **Chapitre 03 :**

Nous commençons le chapitre par une étude théorique du problème linéaire quadratique (LQ), puis nous utilisons le Principe du Maximum de Pontryagin et la stratégie de l'équation de Riccati pour caractériser la commande optimale et nous terminons par un exemple illustratif.

Chapitre 1

Généralités sur la théorie de la commande

Dans ce chapitre, on considère un système dynamique dont l'état est décrit par une fonction x dite fonction d'état. Cette fonction dépend de variables réelles notées pour l'instant abstraitement t et vérifie des relations (souvent différentielles) plus ou moins compliquées appelées lois de comportement. En théorie du contrôle (ou commande) on veut agir sur le système en agissant sur l'état, via des fonctions qu'on appelle contrôles (ou commandes).

1.1 Introduction aux équations différentielles

Les équations différentielles jouent un rôle fondamental dans la modélisation mathématique des phénomènes physiques, biologiques et économiques. Elles permettent de décrire l'évolution d'un système en fonction d'une ou plusieurs variables indépendantes et constituent un outil central en ingénierie et en sciences appliquées.

De manière générale, une équation différentielle est une relation entre une fonction inconnue et ses dérivées. On distingue principalement deux grandes catégories :

Les équations différentielles ordinaires (EDO), qui dépendent d'une seule variable indépendante, et les équations aux dérivées partielles (EDP), qui font intervenir plusieurs variables indépendantes. L'étude des équations différentielles est indissociable des méthodes de résolution analytiques et numériques, qui permettent de déterminer le comportement des systèmes dynamiques qu'elles modélisent.

Dans le cadre du contrôle optimal, les équations différentielles interviennent naturellement dans la modélisation des systèmes dynamiques contrôlés. En effet, de nombreux problèmes d'optimisation en ingénierie, en économie ou en physique nécessitent de déterminer une loi de contrôle optimale qui minimise un coût tout en satisfaisant une dynamique régie par une équation différentielle. Parmi ces équations, l'équation de Riccati

joue un rôle clé dans de nombreux problèmes de commande optimale, notamment dans les systèmes linéaires quadratiques.

Ce chapitre introduira les concepts fondamentaux des équations différentielles et présentera un aperçu des principales méthodes de résolution. Cette base théorique sera essentielle pour aborder les résultats liés à l'équation de Riccati et aux techniques de contrôle optimal développées dans les chapitres suivants.

1.1.1 Notions de bases

Supposons que la fonction $y = f(x)$ exprime un phénomène du point de vue quantitatif. Examinant ce phénomène, il est souvent impossible d'établir directement le caractère de y et x mais l'on peut établir une dépendance entre les quantités x, y et les dérivées de y par rapport à la dépendance entre y et x : $y', y'', \dots, y^{(n)}$, c'est-à-dire que l'on peut écrire une équation différentielle par exemple. On laisse tomber un corps de masse m d'une certaine hauteur. On demande d'établir la loi de variation de la vitesse de chute v si le corps éprouve une résistance de freinage de la part de l'air proportionnelle à la vitesse (le coefficient de proportionnalité étant k), c'est-à-dire de trouver $v = f(t)$. En vertu le second loi de Newton on trouve l'équation différentielle

$$m \frac{dv}{dt} = F,$$

où $\frac{dv}{dt}$ est l'accélération du corps en mouvement (la dérivée de la vitesse par rapport au temps) et F la force agissant sur le corps dans le sens de mouvement. (Cette fore est constituée de deux forces : de la force de pesanteur mg et de la force résistance de l'air $-kv$).

On demande de déduire une relation entre x, y et les dérivées, la relation directe entre y et x , c'est-à-dire de trouver $y = f(x)$ ce qu'on appelle intégrer une équation différentielle.

Définition 1.1 *On appelle équation différentielle une équation établissant une relation entre la variable indépendante x , la fonction inconnue $y = f(x)$ et ces dérivées $y', y'', \dots, y^{(n)}$, $y^{(n)}$, on peut écrire symboliquement une équation différentielle sous la forme*

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0,$$

où

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

où y est l'inconnu et de l'inconnu x .

Si $y = f(x)$ est une fonction d'une seule variable indépendante, l'équation différentielle est dite ordinaire.

Remarque 1.1 *On appelle ordre d'une équation différentielle l'ordre de la dérivée la plus élevée continue dans cette équation.*

Définition 1.2 *On appelle solution ou intégrale d'une équation différentielle toute fonction $y = f(x)$ vérifiant identiquement cette équation.*

1.1.2 Équation différentielle du premier Ordre

Une équation différentielle du premier ordre est de la forme :

$$F(x, y, y') = 0,$$

Lorsque cette équation est résoluble en y' , on peut la mettre sous la forme

$$y' = f(x, y).$$

On dit que l'équation différentielle est résoluble par rapport à la dérivée. Pour une telle équation, on a le théorème de l'existence et l'unicité de la solution suivant :

Théorème 1.1 *Si dans l'équation $y' = f(x, y)$ la fonction $f(x, y)$ et sa dérivée partielle $\frac{df}{dx}$ par rapport à y sont continues dans un certain domaine D du plan Oxy et si (x_0, y_0) est un point dans ce domaine, il existe une solution unique $y = f(x)$ satisfaisant à la condition $y = y_0$ lorsque $x = x_0$.*

La condition que la fonction y doit prendre la valeur donnée y_0 lorsque $x = x_0$. Le théorème signifie qu'il existe une fonction $y = f(x)$ est une seule dont la courbe représentative passe par le point (x_0, y_0) .

Il résulte de ce théorème que l'équation différentielle $y' = f(x, y)$ possède une infinité de solutions passant par le point (x_0, y_0) par exemple la solution passe par le point (x_0, y_0) , la solution passe par le point (x_0, y_1) , la solution passe par le point (x_0, y_2) , etc. Pourvu que ces points se trouvent dans le domaine D .

La condition que la fonction y doit prendre la valeur donnée y_0 lorsque $x = x_0$, s'appelle la condition initiale.

Définition 1.3 *On appelle solution générale d'une équation différentielle de première ordre une fonction $y = \varphi(x, c)$ dépendant d'une constante arbitraire c et satisfaisant aux conditions suivantes :*

1. elle satisfait à l'équation différentielle quelle que soit la valeur concrète de la constante c .
2. quelle que soit la condition initiale $y = y_0$ lorsque $x = x_0$, on peut trouver une valeur $c = c_0$ telle que la fonction $y = \varphi(x, c_0)$, vérifie la condition initiale donnée. On suppose alors que les valeurs x_0 et y_0 appartiennent au domaine de variation des variables x et y dans lequel sont observées les conditions du théorème d'existence et d'unicité de la solution.

1.1.2.1 Équations à variables séparées

Considérons une équation différentielle de la forme

$$y' = f_1(x)f_2(y) \quad (1.1)$$

Où le second membre est le produit d'une fonction dépendant seulement de x par une fonction dépendant seulement de y . Transformons la comme suit (en supposant $f_2(y) \neq 0$) :

$$\frac{1}{f_2(y)} dy = f_1(x) dx \quad (1.2)$$

Supposons que la fonction y de x soit connue, on peut considérer (1.2) comme l'égalité de deux différentielles, et leurs primitives se distingueront par une constante. Intégrant le premier membre par rapport à y et le second par rapport à x , on obtient :

$$\int \frac{1}{f_2(y)} dy = \int f_1(x) dx$$

Nous avons obtenu une relation entre la solution y et la variable indépendante x et la constante arbitraire C c-à-d. qu'on a l'intégrale générale de l'équation (1.2)

L'équation différentielle (1.3) s'écrit sous la forme :

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \quad (1.3)$$

est appelée équation à **variable séparée**. Comme on veut de le démontrer sont intégrale générale est

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

Équation de la forme

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$$

est appelée une équation à variables séparables. Elle peut être ramenée à une équation à **variables séparées** en divisant les deux membres par l'expression $N_1(y)M_2(x)$

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = 0,$$

qui une équation de la forme (1.3)

1.1.2.2 Équations homogènes

Définition 1.4 On dit que la fonction $f(x, y)$ est une fonction homogène de degré n par rapport aux variables x et y si l'on a pour tout λ

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y).$$

Par exemple la fonction $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ est homogène et de degré 1, car

$$f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt[3]{(\lambda x)^3 + (\lambda y)^3} = \lambda f(x, y).$$

Définition 1.5 L'équation

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

est dite homogène par rapport à x et y si la fonction $f(x, y)$ est une fonction homogène de degré zéro par rapport à x et y .

La résolution de l'équation homogène. On a par hypothèse $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x, y)$. Posant dans cette identité $\frac{1}{x} = \lambda$, on obtient

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right),$$

c-à-d. qu'une fonction de degré zéro dépend seulement du rapport $\frac{y}{x}$.

Pour résoudre cette équation, nous faisons la substitution

$$t = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = tx,$$

on a alors

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}x + t.$$

On trouve par intégration

$$\int \frac{dt}{f(1, t) - t} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Substituant après intégration $\frac{y}{x}$ à t on obtient l'intégration de l'équation on question.

1.1.2.3 Équations linéaires

Définition 1.6 On appelle équation linéaire, une équation linéaire par rapport à la fonction inconnue et à sa dérivée. Elle s'écrit

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \tag{1.4}$$

où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des fonctions continues de x données (où des constantes).

La résolution de l'équation linéaire. On associe à l'équation différentielle (1.4), l'équation sans second membre :

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0.$$

Cette dernière équation s'appelle aussi équation différentielle homogène associée à (1.4).

Les solutions de l'équation homogène sont données par :

$$y \mapsto k.exp\left(\int -P(x)dx\right)$$

Où C est une constante réelle quelconque.

On obtient les solutions de l'équation (1.4) en ajoutant une solution particulière de cette équation à la solution générale de l'équation homogène associée.

Théorème 1.2 *La solution générale d'une équation différentielle linéaire du premier ordre (1.4) est la somme de l'intégrale générale de l'équation homogène et d'une intégrale particulière de l'équation complète (1.4).*

Remarque 1.2 *Certaines équations non linéaires se ramènent à des équations linéaires par changement de variables, c'est le cas par exemple des équations de Bernoulli :*

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)y^\alpha, \quad (1.5)$$

où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des fonctions continues de x .

Lorsque α vaut 0 ou 1 l'équation est linéaire. Sinon en posant $z = y^{1-\alpha}$, on se ramène à l'équation linéaire suivante :

$$\frac{z'}{1-\alpha} = P(x)z + Q(x).$$

C'est aussi le cas de l'équation de Ricatti :

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x).$$

On sait résoudre cette équation dès que l'on connaît une solution particulière $y_1(x)$, cela conduit à une équation de Bernoulli pour $\alpha = 2$.

En effet, il suffit de poser $y = y_1 + z$ et de le remplacer dans l'équation de Ricatti, pour montrer que la variable z vérifie l'équation de Bernoulli suivante :

$$\frac{dz}{dx} = (2P(x)y_1(x) + Q(x))z + P(x)z^2(x).$$

Une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n et d'inconnue y est donc de la forme :

$$P_0y + P_1y' + P_2y'' + \dots + P_ny^{(n)} = P_{n+1},$$

où $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n, P_{n+1}$ sont des fonctions numériques.

Remarque 1.3 Les équations différentielles d'ordre n se ramènent à des systèmes d'équations d'ordre 1.

Soit $x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$ une équation différentielle d'ordre n , on pose

$$\begin{cases} x(t) = x_1(t) \\ x'(t) = x_2(t) \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ x^{(n-1)}(t) = x_n(t). \end{cases}$$

On aura alors

$$\begin{cases} x(t) = x_1(t) \\ x'_1(t) = x_2(t) \\ x'_2(t) = x_3(t) \\ \dots \\ \dots \\ x'_{(n-1)}(t) = x_n(t). \end{cases}$$

De plus $x'_n(t) = f(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$

On peut écrire cela sous la forme vectorielle :

$$\begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \dots \\ \dots \\ x'_{(n-1)}(t) \\ x'_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \\ \dots \\ \dots \\ x_n(t) \\ f(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{pmatrix} = F(t, x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Où $F : I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

D'où l'équation différentielle d'ordre n ; $x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$ est équivalente à l'équation différentielle vectorielle d'ordre 1 suivante : $x'(t) = F(t, x(t))$ avec

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T.$$

1.2 Notions fondamentale en théorie de la commande

1.2.1 Systèmes dynamiques

Lors de la conception d'un système de commande, la première étape, qui conditionne le succès d'une telle réalisation et la modélisation, l'obtention d'une description mathématique convenable, qui reproduit de manière aussi fidèle que possible le comportement du système à commander dans un contexte donné, est nécessaire. Les modèles des systèmes dynamiques peuvent être classé en plusieurs catégories :

- linéaires / non linéaires
- invariants dans le temps / variants dans le temps
- déterministes / stochastiques
- à paramètres localisés / à paramètres répartis
- mono variables / multi variables
- à temps continu / à temps discret

Bien que la plupart des systèmes physiques soient essentiellement non linéaires, variants dans le temps, de dimension infinie et que leur représentation mathématique se traduise donc par des équations aux dérivées partielles non linéaires ou par des équations ordinaires. En effet, il existe plusieurs techniques pour approcher le comportement des systèmes physiques par des modales linaires invariants de dimension finie. On peut par exemple linéariser un modèle non-linéaire autour de plusieurs points de fonctionnement et obtenir ainsi une famille de modèles linéaires. Dans notre étude, on considère des systèmes dynamiques modélisés par des Équations différentielles sous la forme :

$$\dot{x} = f(x, u, t)$$

telle que $x \in \mathbb{R}^n$ est l'état de système, et le vecteur $u \in \mathbb{R}^m$ est l'entrée (ou commande). Pour calculer l'évolution future d'un système, il faut connaître le vecteur $t \rightarrow u(t)$ aussi que la condition initiale de l'état. étant donné l'évolution du système on s'intéresse souvent à un certain nombre de vecteurs qu'on nomme sorties ou mesures.

- un système dynamique est décrit par une équation qui modélise l'évolution d'une grandeur physique par rapport au temps , qui est munie d'une donnée initiale
- un système dynamique est dit continue s'il écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), t \in \mathbb{R} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.6)$$

On suppose qu'on peut agir sur le système par une fonction u ,alors le système dynamique continue devient

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), t \in [0, T] \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.7)$$

et cet système discrète devient :

$$\begin{cases} x(k) = f(k, x(k), u(k)) \\ x(k_0) = x_{k_0} \end{cases} \quad (1.8)$$

la fonction u s'appelle la commande et l'espace vectoriel auquel appartient $u(t)$ noté U s'appelle l'espace des commandes

Généralement la fonction de commande $u(\cdot)$ est non continue, et peuvent être choisie certaines contraintes objectifs

- Amener le système d'un certain état à un autre état c'est la **commandabilité**
- Maintenir l'état d'un système dynamique très proche d'une position donnée c'est la **stabilité**.
- Minimiser une certaine fonction coût c'est **l'optimisation**.

1.3 Commandabilité

1.3.1 Application entrée-sortie

Considérons pour le système (1.7) le problème de contrôle suivant : étant donné un point $x_1 \in \mathbb{R}^n$, trouver un temps T et un contrôle u sur $[0, T]$ tel que la trajectoire x_u associée à u , solution de (1.7), vérifie

$$x_u(0) = x_0, x_u(T) = x_1$$

. Ceci conduit à la définition suivante.

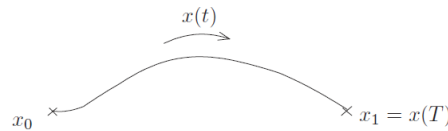


FIGURE 1.1: Problème de Commandabilité

Définition 1.7 Soit $T > 0$. L'application entrée-sortie en temps T du système contrôlé (1.7) initialisé à x_0 est l'application

$$\mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$u \longmapsto x_u(T)$$

où $\mathcal{U}$ est l'ensemble des commandes admissibles, i.e. l'ensemble de commandes u tels que la trajectoire associée est bien définie sur $[0, T]$.

Autrement dit, l'application entrée-sortie en temps T associe à une commande u le point final de la trajectoire associée à u .

Une question importante en théorie du commande est d'étudier cette application en décrivant son image, ses singularités,...

Pour donner une forme de f dans l'équation (1.7), on définit deux fonctions à valeurs matricielles.

$$A : [0, T] \rightarrow M_{n,n}(\mathbb{R}); \quad A(t) = (a(t)_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$$

et

$$B : [0, T] \rightarrow M_{n,m}(\mathbb{R}); \quad B(t) = (b(t)_{i,j})_{i=1,\dots,n,j=1,\dots,m}$$

Alors f sera sous la forme $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ avec

$$f(t, x, u) \mapsto A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad \forall (t, x, u) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

Donc le système de commande (1.7) s'écrit sous la forme matricielle :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.9)$$

On supposera que A et B sont des fonctions continues, ce que veut dire que chacune des composantes de A et B sont des fonctions continues de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}$

D'après les théorèmes d'existence de solution des équations différentielles pour tout commande u le système (1.7) admet une solution unique $x(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que

$$x(t) = M(t)x_0 + \int_0^t M(t)M(s)^{-1}B(s)u(s)ds,$$

où $M(t) \in M_n(\mathbb{R})$ est résolvante du système linéaire homogène

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Exemple 1.1 Soit le système différentielle

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + u(t), \\ x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20} \end{cases}$$

Posons

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}.$$

D'où on obtient un système de commande sous la forme matricielle

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

Définition 1.8 Le système autonome $\dot{x} = Ax + Bu$ où l'état $x \in \mathbb{R}^n$, la commande $u \in \mathbb{R}^m$ et les matrices A et B sont constantes et de taille $n \times n$ et $m \times n$ respectivement est commandable si pour tous les états $x_0, x_1 \in \mathbb{R}_*^n$, il existe une commande mesurable borné $u(t)$ telle que la trajectoire associé relie x_0 et x_1 en un temps fini T .

Théorème 1.3 (condition de Kalman)

Le système commande (1.9) est commandable en temps T si et seulement si la matrice de commandabilité de Kalman :

$$C = (B, AB, \dots, A^{n-1}B) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$$

est de plein rang .

On dit que la paire de matrices (A, B) est commandable et la matrice C est appelée matrice de Kalman.

Exemple 1.2 Soit le système d'écrit par l'équation :

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t)$$

Où

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous sommes dans la situation où $n = 2$ états et $m = 2$ entrées .

Et la matrice de commandabilité associée :

$$C(A, B) = [B \quad AB] \in \mathcal{M}_{2 \times 4}(\mathbb{R})$$

$$AB = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Alors :

$$C(A, B) = [B \quad AB] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Nous avons $\text{rang } C(A, B) = 2$ donc le système est commandable .

1.3.1.1 Ensemble accessible

Définition 1.9 L'ensemble accessible en temps T pour le système (1.7), noté $\text{Acc}(x_0, T)$, est l'ensemble des extrémités au temps T des solutions du système partant de x_0 au temps $t = 0$. Autrement dit, c'est l'image de l'application entrée-sortie en temps T .

Théorème 1.4 Considérons le système de commande (1.7) où la fonction f est C^1 sur $\mathbb{R}^{1+n+m}$, et les commandes u appartiennent à l'ensemble $\mathcal{U}$ des fonctions mesurables à valeurs dans un compact $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. On suppose que

- il existe un réel positif b tel que toute trajectoire associée est uniformément bornée par b sur $[0, T]$, i.e.

$$\exists b > 0 \mid \forall u \in \mathcal{U}, \forall t \in [0, T] : \|x_u\| \leq b \quad (1.10)$$

– pour tout (t, x) , l'ensemble des vecteurs vitesses

$$V(t, x) = \{f(t, x, u) \mid u \in \Omega\} \quad (1.11)$$

est convexe.

Alors l'ensemble $\text{Acc}(x_0, t)$ est compact et varie continûment en t sur $[0, T]$.

1.4 Stabilité

La stabilité d'un système consiste à concevoir un contrôle $u(t)$ garantissant que l'état $x(t)$ converge vers une valeur cible.

1.4.1 Stabilité au sens de Lyapunov

Le principe de stabilité au sens de Lyapunov est attribué à Lagrange qui a démontré qu'un système mécanique, en l'absence des forces extérieures, est stable si, déplacé de sa position d'équilibre, l'énergie de système décroît d'une façon continue jusqu'à atteindre son minimum à l'état d'équilibre. En 1892, A.M. Lyapunov a réussi à extraire, à partir de ce raisonnement qualitatif sur le comportement et la stabilité des systèmes mécaniques, une théorie mathématique générale applicable à toute équation différentielle.

Soit le système autonome suivant :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad x(t_0) = x_0.$$

La stabilité au sens de Lyapunov est fondée sur une analyse de la convergence de la solution de l'équation d'état $x(t, x_0, t_0)$ vers l'équilibre.

- On appelle état d'équilibre $x = x_e$, si $f(x_e) = 0$.
- L'état d'équilibre x_e est stable si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon, t_0)$ telle que

$$\|x_0 - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x_0, t_0) - x_e\| < \epsilon, \quad \forall t > t_0.$$

Sa signifie que si la condition initiale est suffisamment proche de x_e , la trajectoire d'état peut être maintenue arbitrairement près de x_e .

- L'état d'équilibre x_e est dit convergent si $\forall t_0$, il existe $\delta_1 = \delta_1(t_0)$ tel que :

$$\|x_0 - x_e\| < \delta_1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0, t_0) = 0.$$

- Si l'état d'équilibre x_e , est convergent et stable, on dit que x_e , est asymptotiquement stable. Cette propriété signifie que l'on est capable de déterminer un voisinage de x_e telle que pour n'importe quelle trajectoire issue d'un état initial x_0 proche de x_e , tend vers x_e quand $t \rightarrow +\infty$: Si cette propriété est vérifiée quelle que soit x_0 , alors la stabilité asymptotique est dite globale.

Théorème 1.5 *L'origine est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable s'il existe une fonction $V(x)$ telle que :*

1. $V(x) > 0, \quad \forall x \neq 0, \text{ et } V(0) = 0.$
2. $\dot{V}(x) < 0, \quad \forall x \neq 0,$
3. $V(x) \rightarrow \infty \text{ lorsque } \|x\| \rightarrow \infty.$

Autrement dit, s'il existe une fonction de Lyapunov $V(x)$ définie positive telle que sa dérivée est définie négative.

On note que cette fonction n'est pas unique, de plus, ne pas trouver une telle fonction ne signifie pas que le système est instable. Une classe de fonctions de Lyapunov qui jouent un rôle important pour l'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques à travers la méthode directe de Lyapunov est la classe des fonctions de lyapunov quadratique du type :

$$V(x) = x^T P x,$$

elle est définie positive si P est définie positive.

Pour le cas d'un système linéaire de la forme

$$\dot{x} = A.x,$$

une condition nécessaire et suffisante pour que la dérivée

$$\dot{V}(x) = x^T (A^T P + P A) x,$$

soit définie négative à trouver une matrice $P = P^T > 0$, telle que :

$$A^T P + P A < 0.$$

Donc il y a une autre condition qui n'exige pas de solution analytique de l'équation différentielle pour se prononcer quant à la stabilité asymptotique du système linéaire.

L'inégalité précédente, est la première inégalité matricielle linéaire (IML) utilisée pour analyser la stabilité d'un système dynamique.

1.5 Observabilité

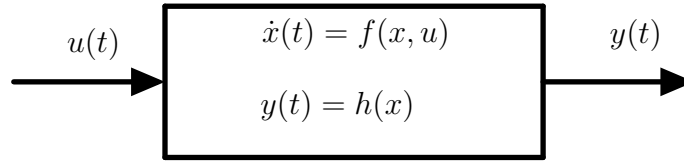
1.5.1 Système commandé-observé

Dans beaucoup de situations pratiques , une partie seulement de l'état du système, appelée la sortie ou la variable observée, est mesurée. Un système commandé-observé

est un système différentiel de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (1.12)$$

Où le vecteur x est le vecteur des états du système, le vecteur u celui des commandes (entrées) et le vecteur y celui des variables observées (sorties). Ce système est dit en boucle ouverte et est représenté par le diagramme suivant Le système non linéaire sera



dit observable si la sortie $y(t)$ permet de retrouver l'état $x(t)$. On ne donnera pas de définition précise ici renvoyant à la littérature [3] pour les détails. Un observateur pour le système (1.12) est un système .

$$\dot{\hat{x}} = g(\hat{x}, y(t), u(t)) \quad (1.13)$$

ayant comme entrées $u(t)$ et $y(t)$ (la sortie du système (1.12)) et tel que l'erreur :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

tende vers 0 quand $t \rightarrow \infty$. L'équation de l'erreur est

$$\dot{e} = f(x, u) - g(x - e, h(x), u)$$

Selon que $e = 0$ est un équilibre, globalement asymptotiquement stable, ou exponentiellement stable, on dira que l'observateur est global, local ou exponentiel.

1.5.2 Critère d'observabilité de Kalman

Soit le système linéaire commandé-observé :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & , \quad x \in \mathbb{R}^n \quad ; \quad u \in \mathbb{R}^m. \\ y(t) = Cx(t) & , \quad y \in \mathbb{R}^k. \end{cases} \quad (1.14)$$

Définition 1.10 On dit que le système linéaire (1.14) est observable si pour tout état $x_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe un temps fini T et un contrôle admissible $u(\cdot) : [0; T] \rightarrow U$ tel que la connaissance de $y(t)$ pour $t \in [0; T]$ permet de déterminer x_0 .

Il existe une caractérisation algébrique de l'observabilité d'un système linéaire due à Kalman.

Théorème 1.6 Le système linéaire (1.14) est observable si et seulement si la matrice d'observabilité de Kalman :

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

est de plein rang. On dit que la paire $(A; C)$ est observable. Noter que la paire $(A; C)$ est observable si et seulement s'il existe $T > 0$ tel que la matrice

$$\mathcal{O}_T = \int_0^T e^{sA'} C' C e^{sA} ds$$

soit inversible.

Ici A' et C' désignent les matrices transposées des matrices A et C .

Exemple 1.3 Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Où

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$n = 3$ états

$p = 2$ sorties

$$\mathcal{O}(A, C) = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{O}(A, C) \in \mathcal{M}_{6 \times 3}(\mathbb{R})$$

$$\mathcal{O}(A, C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & -7 \\ 22 & -6 & -1 \\ 8 & -2 & 19 \end{pmatrix}$$

Matrice de rang 3 $\Rightarrow$ le système est observable.

Chapitre 2

Étude Théorique sur la commande optimale

La commande optimale est une branche fondamentale de la théorie de la commande, visant à déterminer une loi de commande qui optimise un critère de performance tout en respectant la dynamique du système. Ce chapitre présente des notions essentielles liées à la commande optimale, en mettant un accent particulier sur le principe du maximum de Pontryagin et l'équation de Riccati.

2.1 Définition de la Commande optimale

La commande optimale consiste à chercher une commande admissible u^* qui permet de transférer le système d'un état initial à l'état final tout en respectant des contraintes physiques et en minimisant des fonctions objectifs (critères ou indices de performances).

Le problème de la commande optimale d'un système dynamique est formulé en précisant les éléments suivants :

- Modèle du système à commander.
- Condition terminal (états initiales et états finales).
- Contraintes.
- Critère de performance à optimiser (minimiser ou maximiser).

Les conditions initial et finale s'appellent les conditions terminales.

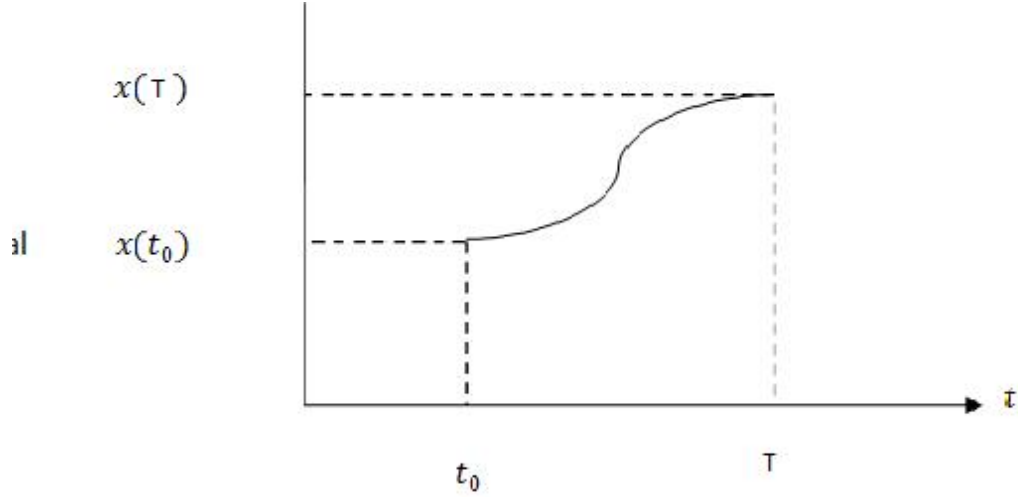


FIGURE 2.1: La trajectoire d'un système dynamique à l'état initiale et à l'état final

2.1.1 Position du problème

Le système à étudier est décrit dans l'espace d'états sous la forme :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x, u, t) \quad (2.1)$$

On définit ainsi des ensembles admissibles $X_{ad}, \mathcal{U}, T_{ad}$ non vides pour toutes ces variables :

$$x(t) \in X_{ad} \subset \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathcal{U}, \quad t \in T_{ad}.$$

La formulation d'un problème de commande optimale exige une description mathématique du processus à contrôler, des contraintes physiques à respecter et la précision du critère de performance. Après la modélisation, on obtient un système comportant beaucoup de variable et de paramètres.

Les variables nommées variables d'états seront notées : $x_i, i = 1, \dots, n$. Le système évolue dans le temps, donc les $x_i(t), i = 1, \dots, n$ sont des fonctions de t où t désigne le temps défini dans un intervalle $[0, T]$. Les n variable d'états vont être gouvernées par n équations différentielles du premier ordre ; elles sont sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t), \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p. \end{cases} \quad (2.2)$$

Les variables de commandes seront notées $u_j(t), j = 1, \dots, m$. Elle doit être intégrables par rapport à t .

Notons que n est le nombre d'état, m le nombre de commande et p est le nombre de sortie.

Dans le cas linéaire le système (2.2) devient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \quad (2.3)$$

où A est la matrice d'état, B est la matrice de commande, C matrice de sortie et D matrice de transition.

Remarque 2.1 – *L'état final peut-être imposé (spécifie) ou libre .*

- *L'intervalle du temps $[t_0, T]$ est appelé horizon commande et le temps final peut être imposé ou libre.*
- *Lorsque T est fixe (imposé), on parle d'un horizon de commande fini.*
- *Lorsque T est tend vers ∞ , on parle d'un horizon de commande infini.*

2.2 Quelques définitions

Définition 2.1 (Commande bang-bang) *Une commande $u \in U \subseteq \mathbb{R}^m$ est appelé commande bang-bang, si pour chaque instant t et chaque indice $j = 1, \dots, m$, on a $|u_j(t)| = 1$*

Définition 2.2 (Commande bornée) *La commande $u_j(t)$ est dite commande bornée si elle peut être minorer et majorer par des constantes a et b , par la forme suivante :*

$$a \leq u_j(t) \leq b, \quad j = 1, \dots, m, \quad t \in [0, T]$$

Définition 2.3 *L'ensemble $U = \{u(t), t \in [0, T]\}$ est l'ensemble des commandes admissibles qui peut être non bornées ou du type bang-bang.*

Définition 2.4 *On parle d'un problème en cout optimal lorsque le temps final T est fixé dans l'expression :*

$$\min_u (g(T, x(T)) + \int_0^T f^0(t, x, u) dt)$$

Définition 2.5 *On parle d'un problème en temps optimal lorsque $f^0(t, x, u) = 1$, $g(T, x(T)) = 0$ et le temps final T est libre dans l'expression de*

$$\min_u \int_0^T 1 dt$$

Remarque 2.2 – *Une commande en boucle ouverte est une application $t \mapsto u(t)$ d'une intervalle de temps dans l'espace des commandes.*

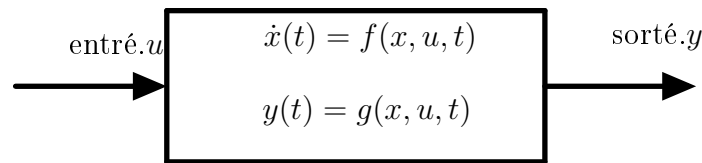


FIGURE 2.2: Boucle ouverte

- Une commande en boucle fermée, appelé aussi une *rétroaction*, est une application $u \mapsto g(t)$ définie sur les variables d'état du système. Un des objectifs de la théorie du contrôle est de déterminer des *rétroactions* qui stabilisent le système en un état particulier .

Définition 2.6 (*Bouclage statique*)

On dit que u est un *bouclage statique* du système (2.1) si sa valeur $u(t)$ à l'instant t ne dépend que de $x(t)$, c'est à dire $u = R(x)$ où R est une fonction .

Ce système s'écrit tout simplement :

$$\dot{x} = f(x, R(x)) \quad (2.4)$$

Il est représenté par la figure :

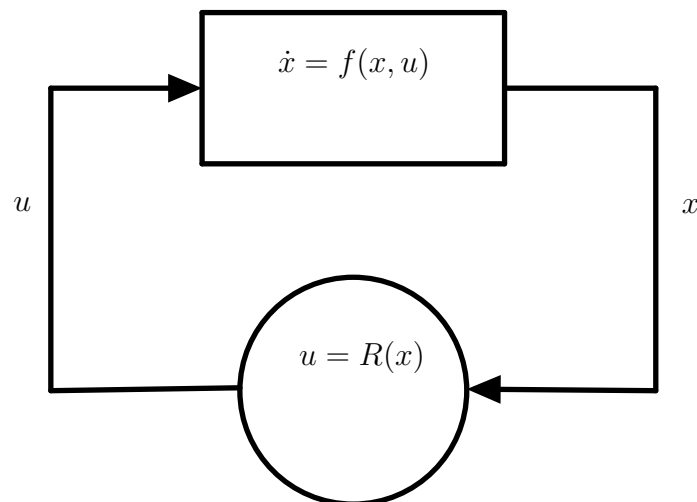


FIGURE 2.3: Boucle fermée

2.3 Position du problème de la commande optimale

Les problèmes de la commande optimale sont de la forme générale suivante :

$$\begin{cases} \min_u C(u) = (g(T, x(T)) + \int_0^T f^0(t, x, u)dt) & (1) \\ \dot{x} = f(t, x(t), u(t)) & (2) \\ x(0) = x_0 \in M_0 & (3) \\ x(T) = x_1 \in M_1 & (4) \\ u \in U, t \in [0, T] \end{cases} \quad (2.5)$$

Où M_0 (ensemble de départ) et M_1 (ensemble d'arrivée) sont des sous ensembles de $\mathbb{R}^n$, $[0, T]$ intervalle de $\mathbb{R}$, $x(0) = x_0$ est la position initiale du système (2), $x(T)$ est la position terminale. En pratique, la position du système peut représenter la vitesse, la position, la température, ...etc. $u(\cdot)$ est la commande du système (??). U est l'ensemble des applications mesurables, localement bornées sur $[0, T]$ à valeurs dans $U \subseteq \mathbb{R}^m$

- L'équation (1) est La fonction cout ou objectif, cette fonction. cout a deux parties : l'une $g(T, x(T))$ est le cout terminal, il a du poids quand le temps final est libre sinon il est constant et l'autre $\int_0^T f^0(t, x, u)dt$ est le cout intégral.
- L'équation (2) modélise le système dynamique de la commande optimale.

L'objectif est de minimiser le cout : $g(T, x(T)) + \int_0^T f^0(t, x, u)dt$

2.3.1 Différents types du problème de commande optimale

Il existe trois types des problèmes de commande optimale :

2.3.1.1 Problème de Lagrange

C'est le problème dont le critère à minimiser est égale à :

$$C(u) = \int_0^T f^0(t, x(t), u(t))dt$$

C'est à dire $g \equiv 0$, et les contrôles $u(t)$ sont des fonctions définies de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}$.

2.3.1.2 Problème de Mayer

Ici c'est le problème dont le critère est le suivant :

$$C(u) = g(T, x(T))$$

où, $f^0 = 0$, $C(u)$ est le coût terminal. C'est-à-dire le critère à minimiser est différent de celui de l'équation précédente. Il dépend uniquement la valeur terminale de l'état de contrôle du système.

2.3.1.3 Problème de Bolza (Mayer-Lagrange)

C'est le problème dont le critère à minimiser est égale à :

$$C(u) = g(T, x(T)) + \int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dt$$

Notons que la formulation de Bolza est la plus générale pour la représentation d'un problème de commande optimale, il regroupe les deux précédentes formulations à savoir les formulations de Lagrange et de Mayer.

2.4 Principe du maximum de Pontrygin

Le principe du maximum de Pontryagin, également appelé principe de Pontryagin, est un concept fondamental en théorie du contrôle optimal introduit par le mathématicien russe Lev Pontryagin. Ce principe énonce des conditions nécessaires pour qu'une trajectoire soit optimale dans un problème de commande optimale avec des contraintes. Avant d'énoncer le principe du maximum, introduisons certaines définitions et propriétés essentielles

Définition 2.7 *Le Hamiltonien du système $\dot{x} = f(t, x(t), u(t))$ et $t \in [0, T]$ est la fonction :*

$$H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} / \{0\}) \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(t, x, p, p_0, u) \longmapsto H(t, x, p, p_0, u) = p_0 f_0(t, x, u) + \langle p, f(t, x, u) \rangle$$

Où $\langle, \rangle$ est le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ et p est le vecteur adjoint.

Définition 2.8 *La commande u est dit extrémal sur $[0, T]$ si la trajectoire du système $\dot{x} = f(t, x(t), u(t))$ du problème de commande associée à u vérifie :*
 $x(t) \in A_{cc}(x_0, t)$ et $t \in [0, T]$.

Définition 2.9 *Une commande $u^*(t)$, $t \in [0, T]$ est dit optimale si $u^*(.)$ est extrémal et $C(u^*(t)) < C(u(t))$ pour toute commande extrémal $u(t)$, $t \in [0, T]$.*

Théorème 2.1 *On considère le problème de commande optimale suivant : Déterminer une trajectoire reliant M_0 à M_1 de $\mathbb{R}^n$ en minimisant le coût C . Le temps final peut être fixe ou non.*

Si la commande $u \in U$ associée à la trajectoire $x(.)$ est optimale sur $[0, T]$, alors il existe une application : $p(t) : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue, appelée vecteur adjoint, et

un réel $p_0 \leq 0$ tel que le couple $(p(\cdot), p_0)$ est non trivial et tels que pour presque tout $t \in [0, T]$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p_0, u(t)) & , \quad x(0) = x_0 \\ \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p_0, u(t)) & , \quad p(T) = 0 \end{cases}$$

Où $H(t, x, p, p_0, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle + p_0 f_0(t, x, u)$ est le hamiltonien du système et on a la condition de maximisation presque partout sur $[0, T]$

$$H(t, x(t), p(t), p_0, u(t)) = \max_{u \in U} H((t, x(t), p(t), p_0, u) \quad (2.6)$$

Remarque 2.3 Si f et f_0 ne dépendent pas du temps t c'est à dire si le système considéré est autonome, alors l'Hamiltonien H ne dépend pas de t et on a :

$$\forall t \in [0, T], \max_{u \in U} H((t, x(t), p(t), p_0, u(t)) = cst$$

Remarque 2.4 La convention $p_0 \leq 0$ conduit au principe du maximum. La condition $p_0 \geq 0$ conduira au principe du minimum.

Remarque 2.5 La condition terminal sur p est appelée condition de transversalité.

2.5 Système linéaire et commande optimale

Considérons les systèmes linéaires de commande optimale sont de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t) \\ x(0) = x_0 \quad , t \in I = [0, T] . \end{cases} \quad (2.7)$$

Où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, A , B et r sont trois applications localement intégrables sur I à valeurs respectivement dans $M_n(\mathbb{R})$, $M_{n,m}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^m$.

Où $M_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices réelles de dimension n et $M_{n,m}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de n lignes et m colonnes.

l'ensemble des commandes u considérées est l'ensemble des applications mesurables localement bornées sur I à valeurs dans un sous-ensemble $U \subset \mathbb{R}^m$.

Les théorèmes d'existence de solutions d'équations différentielles nous assurent que, pour toute commande u , le système (2.7) admet une unique solution :

$$x(\cdot) : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

absolument continue.

On considère le système homogène associé au système (2.7)

$$(EH) \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

et on note x^i la solution de (EH) correspondant à une donnée initiale $x_0^i \in \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire la solution de

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad \forall t \in I, \quad x^i(0) = x_0^i.$$

Nous avons un résultat donnant la structure de l'ensemble des solution de (EH) :

Proposition 2.1 *L'ensemble des solutions de (EH) est un espace vectoriel de dimension n . De plus les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- $(x^1(0), \dots, x^n(0))$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^n$.
- Pour tout t dans I , $(x^1(t), \dots, x^n(t))$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^n$.

Dans ce cas, $(x^1(\cdot), \dots, x^n(\cdot))$ est un ensemble de solution fondamentale de (EH) (en fait une base de l'espace de solutions). La matrice

$$X(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)),$$

est une matrice fondamentale du système. Elle est régulière pour tout t .

Lemme 2.1 *Si $X(\cdot)$ et $Y(\cdot)$ sont deux matrices fondamentales du système, alors il existe C matrice $n \times n$, régulière et constante telle que*

$$X(t) = Y(t)C \quad \text{pour tout } t.$$

On peut maintenant donner la forme générale des solutions du système ??

Theorem 2.1 *Pour x_0 donné dans $\mathbb{R}^n$, l'unique solution de ?? est donné (grâce à la méthode de la variation de constante) par*

$$x_{[u, x_0]}(t) = X(t)X^{-1}(0)x_0 + \int_0^t X(t)X(s)^{-1}(B(s)u(s) + r(s))ds$$

- Si $r = 0$, la solution du système s'écrit :

$$x_{[u, x_0]}(t) = X(t)X^{-1}(0)x_0 + X(t) \int_0^t X(s)^{-1}B(s)u(s)ds$$

Ceci est une résultat général pour des données A et B dépendants de t . Dans le cas où A ne dépend pas du temps les résultat est plus précis.

Theorem 2.2 Si A est constante, une matrice fondamentale pour (EH) est

$$X(t) = e^{At} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!},$$

l'unique solution de système linéaire est donné par

$$x_{[u,x_0]}(t) = e^{At}x_0 + e^{At} \int_0^T e^{-As}B(s)u(s)ds$$

2.6 L'équation de Riccati et son lien avec la commande optimale

On introduit une classe particulière d'équations différentielles qui joue un rôle fondamental en commande optimal, c'est **l'équation de Riccati**. Cette équation est largement utilisée dans la théorie du contrôle optimal et permet notamment de caractériser la solution optimale dans de nombreux problèmes dynamiques.

2.6.1 Définition de l'équation de Riccati

L'équation de Riccati est une équation différentielle ordinaire (EDO) de la forme générale :

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) - XC(t)X + D(t), \quad (2.8)$$

où X est une fonction inconnue, et $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ et $D(t)$ sont des matrices dépendant du temps.

Une forme particulière de cette équation apparaît fréquemment dans les problèmes de contrôle optimal quadratique, notamment dans le cas des systèmes linéaires quadratiques (LQR). Plus précisément, dans le cadre d'un problème de contrôle optimal, l'équation de Riccati prend souvent la forme suivante :

$$\frac{dP}{dt} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0, \quad (2.9)$$

où P est une matrice symétrique inconnue, et les matrices A , B , R , et Q définissent la dynamique du système et les pondérations du critère de coût.

2.6.2 Lien avec la commande optimale

L'équation de Riccati joue un rôle clé dans la théorie du commande optimal, notamment dans la résolution des problèmes de régulation optimale. En effet, la solution de cette équation permet de déterminer le retour d'état optimal sous la forme :

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T P(t)x(t), \quad (2.10)$$

où $u^*(t)$ est la commande optimal appliqué au système.

Cette approche est largement utilisée dans divers domaines tels que la robotique, l'aérospatiale et la finance, où l'on cherche à optimiser le comportement d'un système dynamique sous certaines contraintes.

Chapitre 3

Théorie Linéaire-Quadratique et Équation de Riccati

Nous allons étudier dans ce chapitre un cas du problème de commande optimale. En effet, nous supposons que l'équation d'état est une équation différentielle ordinaire linéaire et que le coût est une fonctionnelle quadratique.

3.1 Commande linéaire quadratique (LQ)

La commande optimale linéaire-quadratique a fait l'objet de nombreuses investigations, depuis l'article publié par Kalman en 1960. Dans ce type de problème le système est linéaire et le coût quadratique. Les systèmes de la commande linéaire quadratique sont d'une grande importance dans la pratique, en effet un coût quadratique est souvent très naturel dans un problème.

3.2 Position du problème de la commande optimale linéaire quadratique

Considérons un système de commande linéaire dans $\mathbb{R}^n$ de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ x(0) = x_0 \\ t \in I = [0, T] \end{cases} \quad (3.1)$$

où $A(t)$, $B(t)$, sont des applications localement intégrables sur $I = [0, T]$ à valeurs respectivement dans $M_n(\mathbb{R})$. $M_{n,m}(\mathbb{R})$. Où $M_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices réelles de dimension n et $M_{n,m}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de n lignes et m colonnes.

On lui associé un cout quadratique de type

$$C(u) = \frac{1}{2}x(T)^T Q x(T) + \frac{1}{2} \int_0^T (x(t)^T W(t)x(t) + u(t)^T U(t)u(t))dt, \quad (3.2)$$

où $T > 0$ est fixé et où, pour tout $t \in [0, T]$, $U(t) \in M_m(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive, $Q(t) \in M_n(\mathbb{R})$ et $W(t) \in M_n(\mathbb{R})$ sont symétriques semi-définies positives.

On suppose que les dépendances en t de A , B , U , W sont L^∞ sur I . Par ailleurs le coût étant quadratique, l'espace naturel des commandes est de $L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$.

- $x(T)^T Q x(T)$ est le coût terminal.
- $\int_0^T (x(t)^T W(t) x(t) + u(t)^T U(t) u(t)) dt$, est le coût intégral.

Donc on aura le système linéaire-quadratique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min C(u) = \underbrace{x(T)^T Q x(T)}_{\text{est le coût terminal}} + \underbrace{\int_0^T (x(t)^T W(t) x(t) + u(t)^T U(t) u(t)) dt}_{\text{est le coût intégral}} & \text{fonction coût quadratique} \\ \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) & \text{système dynamique} \\ x(0) = x_0 & \text{condition initiale} \\ x(T) = x_T & \text{condition finale} \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un point initial fixé, l'objectif est de déterminer les trajectoires partant de x_0 qui minimisent le coût $C(u)$.

On n'impose aucune contrainte sur le point final $x(T)$. Maintenant, on pose :

$$\|x(t)\|_W^2 = x(t)^T W(t) x(t); \quad \|u(t)\|_U^2 = u(t)^T U(t) u(t) \quad \text{et } g(x) = x^T Q x.$$

On aura :

$$C(u) = g(x(T)) + \int_0^T (\|x(t)\|_W^2 + \|u(t)\|_U^2) dt$$

1. Par hypothèse les matrices Q et W sont symétriques positives, mais pas nécessairement définies. Par exemple si $Q = 0$ et $W = 0$ alors le coût est toujours minimal pour le contrôle $u = 0$.
2. Pour alléger les notations, on suppose que le temps initial est égale à 0. Cependant tous les résultats qui suivent sont toujours valables si on considère le problème LQ sur un intervalle $[0, T]$ et avec des contrôles dans l'espace $L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$.

Pour l'existence des trajectoires optimales on introduisons l'hypothèse suivante sur R

3.2.1 Existence des trajectoires optimales

Introduisons l'hypothèse suivante sur U :

Proposition 3.1 *Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $u \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$:*

$$\int_0^T \|u(t)\|_U^2 dt \geq \alpha \int_0^T u(t)^T u(t) dt. \quad (3.4)$$

Cette hypothèse est vérifiée si l'application $t \mapsto U(t)$ est continue sur $[0, T]$ et $t_f < +\infty$, ou encore s'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $t \in [0, T]$ et pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^m$ on ait $v^T U v \geq c v^T v$. On a le théorème d'existence suivant :

Théorème 3.1 *Sous l'hypothèse (3.1), il existe une unique trajectoire minimisante pour le problème LQ.*

Preuve :

Montrons tout d'abord l'existence d'une telle trajectoire. Considérons une suite minimisante $(u_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ de commandes sur I , c'est-à-dire une suite telle que $C(u_n)$ converge vers la borne inférieure des coûts. En particulier, cette suite est bornée.

Par hypothèse, il existe une constante $\alpha > 0$ telle que, pour tout $u \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$, on ait :

$$C(u) \geq \alpha \|u\|_{L^2}.$$

On en déduit que la suite $(u_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$. Par conséquent, comme L^2 est un espace de Hilbert (donc réflexif), toute suite bornée admet une sous-suite faiblement convergente. On peut donc supposer, quitte à extraire une sous-suite, que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans L^2 .

Notons x_n (respectivement x) la trajectoire associée à la commande u_n (respectivement u) sur I . D'après la formule de variation de la constante, on a, pour tout $t \in [0, T]$:

$$x_n(t) = M(t)x_0 + M(t) \int_0^t M(s)^{-1} B(s) u_n(s) ds, \quad (3.5)$$

et la formule analogue pour $x(t)$, où $M(t)$ est la matrice de passage (solution fondamentale du système homogène $\dot{x} = A(t)x$).

On montre alors aisément que, quitte à extraire une sous-suite, la suite $x_n(t)$ converge simplement vers l'application x sur $[0, T]$ (en fait, on peut même montrer que la convergence est uniforme). Pour cela, on utilise le fait que l'intégrale

$$\int_0^t M(s)^{-1} B(s) u_n(s) ds$$

converge vers

$$\int_0^t M(s)^{-1} B(s) u(s) ds$$

grâce à la compacité du noyau intégral. Ce résultat classique découle du fait que l'opérateur intégral à noyau continu est compact de L^2 dans $C([0, T])$.

Ainsi, malgré la convergence faible de u_n , on obtient une convergence forte (uniforme) des trajectoires $x_n(t)$ vers $x(t)$.

En passant maintenant à la limite dans l'équation (3.5), on obtient, pour tout $t \in [0, T]$:

$$x(t) = M(t)x_0 + M(t) \int_0^t M(s)^{-1} B(s) u(s) ds,$$

et donc x est une solution du système associée à la commande u .

Montrons qu'elle est minimisante. Pour cela, on utilise le fait que, puisque $u_n \rightharpoonup u$ dans L^2 , on a l'inégalité :

$$\int_0^T \|u(t)\|_R^2 dt \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \|u_n(t)\|_R^2 dt,$$

ceci étant une conséquence de la semi-continuité inférieure de la norme dans un espace de Hilbert.

Donc $C(u) \leq \liminf C(u_n)$. Mais comme (u_n) est une suite minimisante, $C(u)$ est égale à la borne inférieure des coûts. Autrement dit, u est un minimum pour le problème, et x la trajectoire optimale associée. Ce qui montre l'existence d'une trajectoire optimale.

Pour l'unicité, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 3.1 *La fonction C est strictement convexe.*

Preuve :

Tout d'abord nous remarquons que pour tout $t \in [0, T]$, la fonction $u^T U(t) u$ définie sur $\mathbb{R}^m$, est strictement convexe puisque par hypothèse la matrice $U(t)$ est symétrique définie positive.

Ensuite, notons $x_u(\cdot)$ la trajectoire associée à un contrôle u . On a pour tout $t \in [0, T]$:

$$x_u(t) = M(t)x_0 + M(t) \int_0^t M(s)^{-1} B(s) u(s) ds.$$

L'application qui à une commande u associe $x_u(t)$ est linéaire donc convexe, ceci pour tout $t \in [0, T]$. La matrice $W(t)$ étant symétrique positive, ceci implique la convexité de l'application qui à une commande u associe $x(t)^T W(t) w(t)$. Pour tout $t \in [0, T]$, la composition $x_u(t)^T W(t) x_u(t)$, c'est-à-dire la composition d'une fonction quadratique convexe avec une application linéaire, est convexe. Le même raisonnement s'applique au terme terminal $x_u(T)^T Q x_u(T)$, avec Q symétrique définie positive.

Enfin, l'intégration d'une fonction convexe sur un intervalle conserve la convexité. Or, la stricte convexité des termes $u(t)^T U(t) u(t)$ intégrés sur $[0, T]$ (grâce à $U(t) \succ 0$) assure la stricte convexité de l'intégrale totale, et donc de la fonctionnelle de coût $C(u)$. Il en résulte que la fonction de coût C est strictement convexe sur l'ensemble des commandes admissibles, ce qui implique l'unicité de la commande optimale (et donc de la trajectoire optimale).

Remarque 3.1 Si la fonction $g = x(T)^T Q x(T)$, apparaissant dans le coût est une fonction continue quelconque de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$, bornée inférieurement ou convexe, et/ou si le système de commande est perturbé par une fonction $r(t)$, alors le théorème précédent reste vrai.

3.3 Condition nécessaire et suffisante d'optimalité : Principe du Maximum dans le cas LQ

On cherche des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) = x_0 \\ x(T) = x_1 \end{cases} \quad (3.6)$$

Le problème est de minimiser le coût quadratique de la forme :

$$C(u) = x(T)^T Q x(T) + \int_0^T (x(t)^T W(t)x(t) + u(t)^T U(t)x(t))dt,$$

où T est fixé.

Maintenant introduisons l'Hamiltonien :

$$H(t, x, u, p) = -\frac{1}{2}(x(t)^T W(t)x(t) + u(t)^T U(t)x(t)) + p^T(Ax(t) + Bu(t))$$

Théorème 3.2 La trajectoire x , associée de la commande u , est optimale pour le problème LQ si et seulement s'il existe un vecteur adjoint $p(t)$ vérifiant pour presque tout $t \in [0, T]$:

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -p(t)A(t) + x(t)^T W(t) \quad (3.7)$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = Ax + Bu \quad (3.8)$$

et la condition finale

$$p(T) = -\frac{\partial g(T)}{\partial x(T)} = -x(T)^T Q \quad (3.9)$$

De plus la commande optimale u s'écrit, pour presque tout $t \in [0, T]$:

$$u(t) = U(t)^{-1} B(t)^T p(t)^T \quad (3.10)$$

Dans le cas d'un intervalle infini ($T = +\infty$) la condition finale sur le vecteur adjoint devient

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = 0$$

Remarque 3.2 le principe du maximum LQ est une condition nécessaire et suffisante de minimalité (alors que dans le cas général c'est une condition nécessaire seulement), d'autre part il est possible d'exprimer la commande sous forme de boucle fermée.

3.4 Exemples

Exemple 3.1 On considère le problème d'un véhicule se déplaçant en ligne droite modélisé par le système de commande suivant :

$$\begin{cases} \ddot{x} = u \\ x(0) = \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

On souhaite pendant un temps T fixé, maximiser la distance parcourue tout en minimisant l'énergie fournie. On choisit donc le critère suivant :

$$C(u) = -x(T)^2 + \int_0^T u(t)^2 dt$$

Application du Principe du Maximum

Soient $x = x_1$: La position du véhicule. $\dot{x} = x_2$: La vitesse du véhicule. En faisant un changement de variables on aura le système suivant qui est équivalent au système précédent :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = \dot{x}_1(0) = 0 \\ \dot{x}_2 = u, & x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \end{cases}$$

Introduisons l'Hamiltonien pour le nouveau système, qui est le suivant :

$$\begin{aligned} H(x, p, u, t) &= p^0 f^0 + \prec p, f \succ \\ &= -u^2 + (p_1, p_2) \begin{pmatrix} x_2 \\ u \end{pmatrix} = -u^2 + p_1 x_2 + p_2 u \end{aligned}$$

On obtient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \text{ donc } p_1(t) = \text{cste} = c_1 \\ \dot{p}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1, \text{ donc } p_2(t) = -c_1 t + c_2 \\ \frac{\partial H}{\partial u} &= 0, \text{ donc } -2u + p_2(t) = 0 \text{ donc } u(t) = \frac{1}{2} p_2(t) \end{aligned}$$

On trouve les conditions de transversalité suivantes :

$$p_1(T) = 2x_1, \quad p_2(T) = 0$$

En intégrant on trouve la commande :

$$u(t) = x(T)(T - t)$$

et la distance parcourue égale à : $x(T) = \frac{T^3}{3T^3 - 6}$

```

1      %% PARAMETRES DE SIMULATION
2      T = 1;                                % Temps final [s]
3      N = 100;                              % Nombre de points
4      t = linspace(0,T,N)';                % Vecteur temps colonne
5
6      %% SOLUTION THEORIQUE
7      xT = T^3/(3*T^3 - 6);                 % Position finale theorique
8
9      %% COMMANDE OPTIMALE
10     u = xT*(T - t);                       % Loi de commande PMP
11
12     %% INTEGRATION NUMERIQUE (EULER)
13     dt = t(2) - t(1);                     % Pas de temps
14     x1 = zeros(N,1);                      % Position initiale
15     x2 = zeros(N,1);                      % Vitesse initiale
16
17     for k = 2:N
18         x2(k) = x2(k-1) + u(k-1)*dt;
19         x1(k) = x1(k-1) + x2(k-1)*dt;
20     end
21
22     %% SAUVEGARDE DES RESULTATS
23     save('resultats.mat','t','x1','x2','u','xT');
24
25     %% VISUALISATION
26     figure('Name','Simulation PMP');
27
28     subplot(3,1,1);
29     plot(t,x1,'b-','LineWidth',1.5);
30     hold on;
31     plot(T,xT,'ro','MarkerFaceColor','r');
32     title('Position x_1(t)');
33     grid on;
34
35     subplot(3,1,2);
36     plot(t,x2,'g-','LineWidth',1.5);
37     title('Vitesse x_2(t)');
38     grid on;
39
40     subplot(3,1,3);
41     plot(t,u,'m-','LineWidth',1.5);
42     title('Commande u(t)');
43     grid on;
44
45     %% EXPORT FIGURE
46     print('trajectoires','-dpng');
47
48     %% AFFICHAGE CONSOLE
49     disp('=== RESULTATS ===');
50     fprintf('x(T) = %.4f m\n',x1(end));

```

```
51 fprintf('J = %.4f\n', -x1(end)^2 + trapz(t,u.^2));
```

Listing 3.1: Simulation du PMP

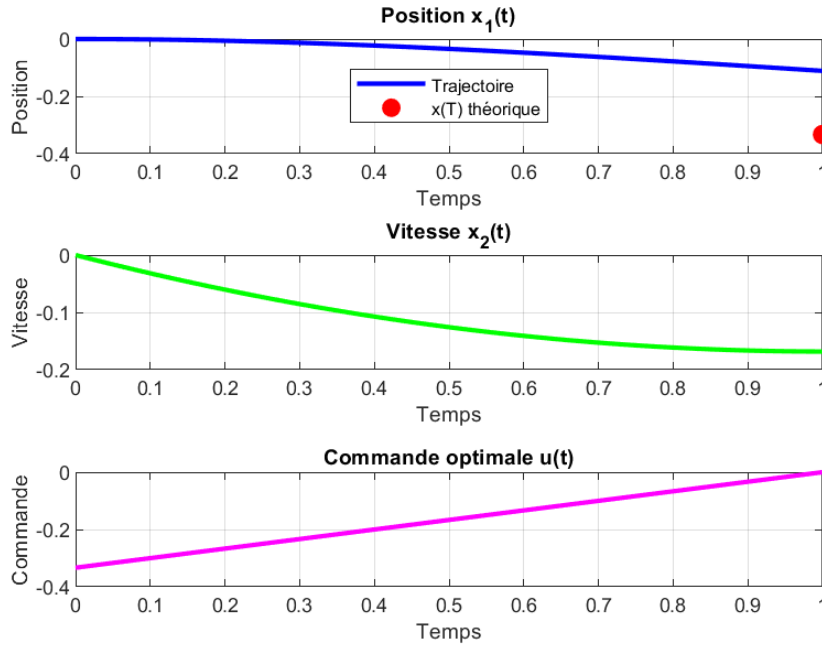


FIGURE 3.1: Les trajectoires du PMP

Exemple 3.2 On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = u \\ \dot{x}_3 = u \end{cases}$$

Donc :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a $n = 3$ états et $m = 1$ entrée

La matrice de contrôlabilité du système est :

$$C = (B, AB) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le rang $C = 1 \neq (3 = n)$, donc le système n'est pas contrôlable.

Exemple 3.3 Considérons le système dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t). \\ \dot{x}_2(t) = 2x_2(t) + u(t). \\ |u(t)| \leq 1. \end{cases} \quad (3.11)$$

Ce système est de type $\dot{X} = AX + Bu$

Donc :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La commandabilité de ce système est :

$$C = (B, AB) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

D'où le rang de la matrice C est : $\text{rang } C = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$

Alors : le système est commandable .

• **Application du Principe du Maximum :**

Le Hamiltonien du système s'écrit sous la forme :

$$H(x, p, u) = p_1 x_2 + p_2(2x_2 + u) + p_0$$

Par ailleurs le système adjoint s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -\frac{\partial H(x, p, u)}{\partial x_1} = 0. \\ \dot{p}_2 = -\frac{\partial H(x, p, u)}{\partial x_2} = -p_1 - 2p_2. \end{cases}$$

Notons que puisque le vecteur adjoint (p_1, p_2) doit être non trivial , $2p_2$ ne peut s'annuler sur un intervalle (sinon on aurait également $p_1 = p_2 = 0$) .

D'autre part , la condition de maximisation nous donne :

$$p_2 u = \max_{|v| \leq 1} p_2(v)$$

Comme p_2 ne s'annule sur aucun intervalle , on en déduit que , presque partout , le contrôle extrémal est $u = \text{signe}(p_2)$ On a :

$$p_1 = \text{cste} \quad , \quad p_2(t) = -\frac{1}{2}p_1 + Ce^{-2t} \quad , \quad C \in \mathbb{R}.$$

En particulier $p_2(t)$ est strictement monotone , alors le contrôle a au plus une commutation .

En posant $u = \varepsilon =_{-}^{+} 1$, puis en intégrant , il vient :

$$x_1(t) = -\frac{\varepsilon}{2}(t - t_0) + \frac{1}{2} \left(x_2(t_0) + \frac{\varepsilon}{2} \right) (e^{2(t-t_0)} - 1) + x_1(t_0).$$

$$x_2(t) = -\frac{\varepsilon}{2} + \left(x_2(t_0) + \frac{\varepsilon}{2} \right) e^{2(t-t_0)}.$$

3.5 Fonction valeur et équation de Riccati

3.5.1 La fonction valeur

Soit $T > 0$ fixé, et soit $x \in \mathbb{R}^n$. Considérons le problème LQ de trouver une trajectoire solution de

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = x \quad (3.12)$$

minimisant le coût quadratique

$$C_T(u) = x(T)^T Q x(T) + \int_0^T (\|x(t)\|_W^2 + \|u(t)\|^2) dt. \quad (3.13)$$

Définition 3.1 *La fonction valeur S_T au point x est la borne inférieure des coûts pour le problème LQ. Autrement dit*

$$S_T(x) = \inf\{C_T(u) \mid x_u(0) = x\}.$$

3.5.2 Équation de Riccati

Théorème 3.3 *Sous l'hypothèse (3.1), pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ il existe une unique trajectoire optimale x associée à la commande u pour le problème (3.7), (3.8). La commande optimale se met sous forme de boucle fermé :*

$$u(t) = U^{-1}B(t)^T E(t)x(t), \quad (3.14)$$

où $E(t) \in \mathcal{M}_n([0, T])$ est solution sur $[0, T]$ de l'équation matricielle de Riccati

$$\begin{cases} \dot{E}(t) = W(t) - A(t)^T E(t) - E(t)A(t) - E(t)B(t)U^{-1}B(t)^T E(t), \\ E(T) = -Q. \end{cases} \quad (3.14)$$

De plus, pour tout $t \in [0, T]$, la matrice $E(t)$ est symétrique, et

$$S_T(x) = -x^T E(0)x. \quad (3.15)$$

Preuve :

voir [2]

Remarque 3.3 *En particulier le théorème affirme que la commande optimale se met sous forme de boucle fermée*

$$u(t) = K(t)x(t),$$

avec $K(t) = U(t)^{-1}B(t)^T E(t)$. Cette forme se prête bien aux problèmes de stabilisation, comme nous le verrons plus loin.

Remarque 3.4 *Il est clair d'après l'expression (3.15) du coût minimal que la matrice $E(0)$ est symétrique négative. On peut améliorer ce résultat si la matrice Q est de plus définie (voir lemme suivant).*

Lemme 3.2 *Si la matrice Q est symétrique définie positive, ou bien si pour tout $t \in [0, T]$ la matrice $W(t)$ est symétrique définie positive, alors la matrice $E(0)$ est symétrique définie négative.*

Preuve du lemme 3.2 Soit x_0 tel que $x_0^T E(0)x_0 = 0$, et montrons que $x_0 = 0$. Pour cela, on considère le problème LQ suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x(0) = x_0, \\ \min_u \left[x(T)^T Q x(T) + \int_0^T (\|x(t)\|_W^2 + \|u(t)\|_U^2) dt \right]. \end{cases}$$

D'après le théorème (3.5), le coût minimal vaut $-x_0^T E(0)x_0 = 0$. Par conséquent, puisque pour tout t la matrice $U(t)$ est définie positive, on a nécessairement $u(t) = 0$ sur $[0, T]$.

Si, par ailleurs, Q est définie positive, on a aussi $x(T) = 0$. Donc la trajectoire $x(\cdot)$ est solution du problème de Cauchy $\dot{x} = Ax$, avec $x(T) = 0$, et par unicité, $x(\cdot)$ est identiquement nulle. En particulier, $x(0) = x_0 = 0$, ce qui achève la preuve.

Dans le deuxième cas où $W(t)$ est définie positive, la conclusion est immédiate.

3.5.3 Représentation linéaire de l'équation de Riccati

On a la propriété suivante :

Proposition 3.2 *Plaçons-nous dans le cadre du théorème (3.2). Soit :*

$$R(t) = \begin{pmatrix} R_1(t) & R_2(t) \\ R_3(t) & R_4(t) \end{pmatrix}$$

la résolvante du système linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BU^{-1}B^T p^T, \\ \dot{p}^T = -A^T p^T + Wx, \end{cases}$$

telle que $R(T) = \text{Id}$. Alors, pour tout $t \in [0, T]$, on a :

$$E(t) = (R_3(t) - R_4(t)Q)(R_1(t) - R_2(t)Q)^{-1}.$$

Démonstration : Par définition de la résolvante, on a :

$$\begin{cases} x(t) = R_1(t)x(T) + R_2(t)p^T(T), \\ p^T(t) = R_3(t)x(T) + R_4(t)p^T(T), \end{cases}$$

or on sait que $p^T(T) = -Qx(T)$, donc :

$$x(t) = (R_1(t) - R_2(t)Q)x(T), \quad p^T(t) = (R_3(t) - R_4(t)Q)x(T).$$

On conclut en remarquant que $p^T(t) = E(t)x(t)$.

Notons que la matrice $R_1(t) - R_2(t)Q$ est inversible sur $[0, T]$ car le problème LQ est bien posé, comme nous l'avons vu précédemment.

Par conséquent, pour résoudre l'équation de Riccati (3.14), il suffit d'intégrer un système linéaire (il faut calculer une résolvante), ce qui est très facile à programmer.

Cette méthode, due à Kalman-Englar, est notamment préférable à la méthode directe dans le cas stationnaire.

3.5.4 Exemple d'application

Exemple 3.4 dans notre exemple,, la fonction du coût est donnée par :

$$C(u) = -x^2(T) + \int_0^T u^2(t) dt$$

La fonction valeur associée est définie, en général, par :

$$S_T(x) = \inf \{ C_T(u) \mid x_u(0) = x \}$$

d'où, dans notre cas :

$$S_T(x) = \inf \left\{ -x^2(T) + \int_0^T u^2(t) dt \mid x_u(0) = x \right\}$$

La forme générale d'un coût quadratique est donnée par :

$$C(u) = x^\top(T)Qx(T) + \int_0^T [x^\top(t)W(t)x(t) + u^\top(t)U(t)u(t)] dt$$

Dans notre système, on identifie :

– Le terme terminal : $x^\top(T)Qx(T) = -x^2(T)$, donc :

$$Q = -I = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

– Le coût intégral : $\int_0^T u^2(t)dt$, ce qui signifie :

$$W(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad U(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Les matrices du système sont :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

L'équation de Riccati s'écrit :

$$\dot{E}(t) = W(t) - A^\top(t)E(t) - E(t)A(t) - E(t)B(t)U^{-1}(t)B^\top(t)E(t)$$

avec la condition terminale :

$$E(T) = -Q = I$$

En développant les produits, on obtient (en posant $E(t) = \begin{bmatrix} E_1(t) & E_2(t) \\ E_3(t) & E_4(t) \end{bmatrix}$) :

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) &= -A^\top E(t) - E(t)A - E(t)BU^{-1}B^\top E(t) \\ &= -\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & E_2 \\ E_3 & E_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E_1 & E_2 \\ E_3 & E_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} E_1 & E_2 \\ E_3 & E_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} I^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & E_2 \\ E_3 & E_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$\dot{E}(t) = -\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ E_1(t) & E_2(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & E_1(t) \\ 0 & E_3(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E_2(t)E_3(t) & E_2(t)E_4(t) \\ E_4(t)E_3(t) & E_4(t)^2 \end{bmatrix}$$

Finalement :

$$\dot{E}(t) = \begin{bmatrix} -E_2(t)E_3(t) & -E_1(t) - E_2(t)E_4(t) \\ -E_1(t) - E_4(t)E_3(t) & -E_2(t) - E_3(t) - E_4(t)^2 \end{bmatrix}$$

et ses éléments :

$$\begin{aligned} \dot{E}_1(t) &= -E_2(t)E_3(t) \\ \dot{E}_2(t) &= -E_1(t) - E_2(t)E_4(t) \\ \dot{E}_3(t) &= -E_1(t) - E_4(t)E_3(t) \\ \dot{E}_4(t) &= -E_2(t) - E_3(t) - E_4(t)^2 \end{aligned}$$

Pour trouver $E(t)$, on utilise la méthode d'Euler pour résoudre ce système d'équations différentielles.

Voici le programme de résolution par la méthode d'Euler sur MATLAB :

```

1      clear all; close all; clc;
2      N = 100; T = 2;
3      E(N+1, :) = [-1; 0; 0; -1];
4
5      for i = N : -1 : 1
6          E(i, 1) = E(i+1, 1) - T/N * (-E(i+1, 2) * E(i+1,
7              3));
8          E(i, 2) = E(i+1, 2) - T/N * (-E(i+1, 1) - E(i+1,
9              2) * E(i+1, 4));
10         E(i, 3) = E(i+1, 3) - T/N * (-E(i+1, 1) - E(i+1,
11             4) * E(i+1, 3));
12         E(i, 4) = E(i+1, 4) - T/N * (-E(i+1, 2) - E(i+1,
13             3) - E(i+1, 4) * E(i+1, 4));
14     end
15
16     subplot(221); plot(linspace(0, tf, N), E(1:N, 1));
17     title('Trajectoire E1');
18     subplot(222); plot(linspace(0, tf, N), E(1:N, 2));
19     title('Trajectoire E2');
20     subplot(223); plot(linspace(0, tf, N), E(1:N, 3));
21     title('Trajectoire E3');
22     subplot(224); plot(linspace(0, tf, N), E(1:N, 4));
23     title('Trajectoire E4');

```

Listing 3.2: Simulation de la trajectoire $E(t)$

et le résultat de ce programme est donné dans le schéma suivant :

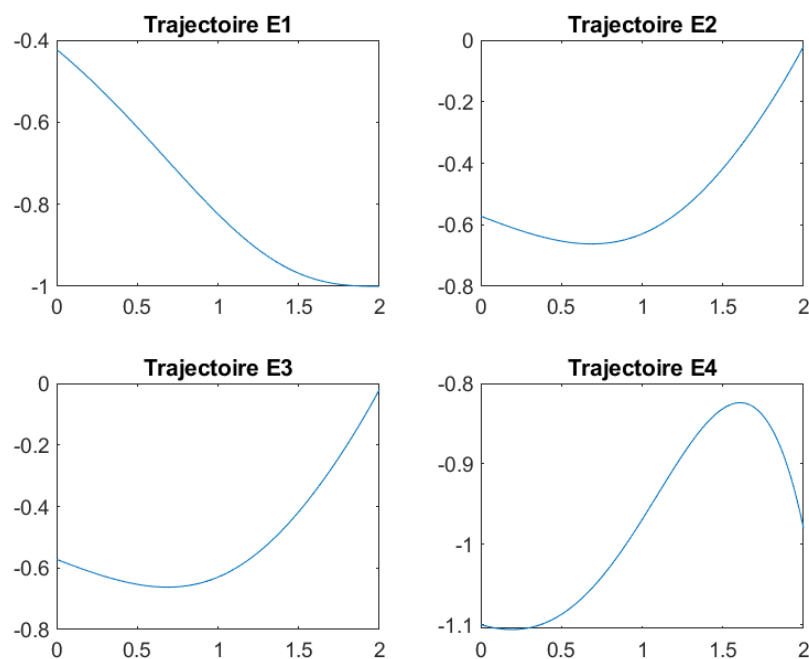


FIGURE 3.2: Les trajectoires d'équation de Riccati

Donc $u(t) = k(t)x(t)$, où $k(t) = U(t)^{-1}B(t)^T E(t)$.

La matrice $E(t)$ est donnée par MATLAB : en insérant le programme dans MATLAB et en l'exécutant, on obtient plusieurs matrices $E(t)$. Parmi celles-ci, on en choisit une et on la remplace dans l'expression de $k(t)$.

Par exemple, si :

$$E(t) = \begin{bmatrix} -0.4226 & -0.5720 \\ -0.5720 & -1.0995 \end{bmatrix}$$

alors :

$$k(t) = U(t)^{-1}B(t)^T E(t)$$

En posant :

$$U(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B(t)^T = [0 \quad 1]$$

on a :

$$k(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} [0 \quad 1] \begin{bmatrix} -0.4226 & -0.5720 \\ -0.5720 & -1.0995 \end{bmatrix} = [-0.5720 \quad -1.0995]$$

Donc :

$$k(t) = [-0.5720 \quad -1.0995] \Rightarrow u(t) = k(t)x(t)$$

$$u(t) = [-0.5720 \quad -1.0995] x(t)$$

Ainsi, $u(t)$ est exprimé en boucle fermée à l'aide de l'équation de Riccati.

Alors, dans notre application, on a appliqué sur un véhicule modélisé par un système dynamique la théorie LQ où on a résolu ce système par application du principe du maximum et l'équation de Riccati.

Par application du principe du maximum, on a trouvé $u(t) = \frac{1}{2}P_2(t)$, c'est-à-dire en **boucle ouverte**.

Par la résolution de l'équation de Riccati, on a trouvé :

$$u(t) = k(t)x(t) = [-0,5720 \quad -1,0995] x(t),$$

c'est-à-dire en **boucle fermée**.

3.5.5 Comparaison entre le PMP et équation de Riccati

présentons une comparaison entre les deux méthodes :

Critère	Principe du maximum de Pontryagin (PMP)	Équation de Riccati (cas LQ)
Domaine d'application	Très général, applicable à de nombreux types de systèmes (linéaires et non linéaires)	Spécifique aux systèmes linéaires avec fonction de coût quadratique
Méthode	Fournit des conditions nécessaires sous forme d'un système Hamiltonien	Fournit une condition suffisante via une équation différentielle matricielle
Résultat	Solution implicite : nécessite la résolution d'un système deux fois plus grand (état + adjoint)	Solution explicite : loi de commande en boucle fermée directement calculable
Facilité de mise en œuvre	Complexe, surtout pour les systèmes de grande dimension	Plus simple, surtout pour les applications numériques
Utilisation pratique	Moins utilisée dans les implémentations directes	Méthode privilégiée dans les applications d'ingénierie (robotique, régulation, finance)
Synthèse de la commande	Difficile : pas de forme fermée en général	Automatique : $u(t) = -R^{-1}B^T P(t)x(t)$

TABLE 3.1: Comparaison entre le PMP et l'équation de Riccati dans le cas linéaire quadratique

3.6 Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons abordé les notions essentielles liées à la théorie de la commande optimale, en mettant en évidence deux approches importantes : le principe du maximum de Pontryagin et l'équation de Riccati. Après avoir présenté les bases théoriques, nous nous sommes concentrés sur le problème linéaire quadratique (LQ), qui représente un cas particulier mais très significatif dans le domaine de la commande.

L'étude de ce problème nous a permis de mieux comprendre le rôle de l'équation de Riccati, qui s'est révélée être un outil central dans la recherche de la commande optimale. Contrairement à l'approche plus générale de Pontryagin, l'équation de Riccati permet, dans le cas linéaire quadratique, d'obtenir une solution explicite et directement exploitable. Elle simplifie considérablement la résolution du problème en donnant une loi de commande en boucle fermée, ce qui est particulièrement utile dans les applications pratiques.

Bibliographie

- [1] M. Bergounioux, *Optimisation dans $\mathbb{R}^n$ et Introduction au Contrôle Optimal des Systèmes Linéaires*, Cours et exercices, Université d'Orléans, 2001.
- [2] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, 1996.
- [3] K. Khaldi, *Contrôle optimal des systèmes dynamiques*, Université Dahlab-Blida 1, 2019–2020.
- [4] C. Lobry, T. Sari, *Introduction à la théorie du contrôle*, Mai 2003.
- [5] K. Nachi, *Contrôle optimal des EDO linéaires*, Département de Mathématiques, Université Oran 1, Ahmed Ben Bella, mai 2020.
- [6] N. Piskounov, *Calcul différentiel et intégral*, tome II, Éditions Mir, Moscou, URSS, 1980.
- [7] E. Tréla, *Contrôle optimal : Théorie et Application*, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), 2005.
- [8] E. Tréla, *Contrôle optimal*, Université d'Orléans, 2007.

• ملخص

بعد معالجة مسألة إمكانية التحكم، قد يُطرح هدف إضافي يتمثل في الانتقال من حالة ابتدائية إلى حالة نهائية، مع السعي إلى تقليل دالة كلفة معينة. يطلق على هذا النوع من المسائل اسم مسألة التحكم الأمثل.

يركز هذا العمل على دراسة مسألة التحكم الأمثل الخطي-التربيعي، التي حظيت باهتمام واسع منذ نشر المقال المرجعي لكالمان سنة ١٩٦٠. في هذا الإطار، يكون النظام ديناميكياً خطياً، وتُعبّر دالة الكلفة بصيغة تربيعية. ويتمثل الهدف في تحديد قانون تحكم قائم على تغذية راجعة للحالة، يسمح بتحقيق استقرار النظام باستخدام معادلة ريكاتي. الكلمات المفتاحية: نظرية التحكم، التحكم الأمثل، معادلة ريكاتي.

• Résumé

Une fois le problème de contrôlabilité résolu, on peut également chercher à passer d'un état initial à un état final tout en minimisant un certain critère. On parle alors d'un problème de commande optimale.

L'objectif de ce travail est d'étudier le problème de la commande optimale linéaire quadratique, qui a fait l'objet de nombreuses investigations depuis l'article publié par Kalman en 1960. Dans ce type de problème, le système est linéaire et le coût est quadratique. Le but est de déterminer une commande par retour d'état qui stabilise le système, en utilisant l'équation de Riccati.

Mots clés : Théorie de la commande ; Commande optimale ; Équation de Riccati.

• Abstract

Once the issue of controllability has been addressed, a further objective may arise: driving the system from a given initial state to a desired final state while minimizing a specified cost functional. This constitutes what is known as an optimal control problem.

This work is devoted to the study of the linear-quadratic optimal control problem, which has attracted considerable attention since the seminal paper by Kalman in 1960. In such problems, the system dynamics are linear, and the cost functional is quadratic. The goal is to determine a state-feedback control law that ensures system stability, through the use of the Riccati equation.

Keys Words : Control theory ; Optimal control ; Riccati equation.