
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Boudiaf à M'sila
Faculté de Technologie
Département d'Électronique



Mémoire de Master

Domaine : Microélectronique

Spécialité : Microélectronique

Thème

Etude sur le calcul fractionnaire et ses applications en
ingénierie

Présenté par :

- AZZI Ahmed

Sujet proposé et dirigé par :

- Dr. BENMAHMOUD Slimane

- Dr. GUICHI Omar

Devant le jury composé de :

.....

Dr. BENMAHMOUD Slimane

Dr. GUICHI Omar

.....

Président

Encadreur

Co-encadreur

Examineur

Projet N :/2021

Dédicaces

Je dédie ce travail à ma Mère.

Ahmed

Remerciements

Tout d'abord, je remercie ALLAH le tout puissant de m'avoir donné la patience, la volonté, l'énergie et la santé pour poursuivre ce travail.

Je tiens à remercier mes encadreurs visionnaires, Dr. BENMAHMOUD Slimane et Dr. GUICHI Omar de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé. Leurs critiques et leurs conseils m'ont été très précieux.

De même je remercie les membres du jury qui me font l'honneur de participer à l'examen de ce travail.

Je tiens à remercier aussi tous les enseignants qui m'ont aidé.

Je remercie également Mon frère Mr. BERBACHE Hamza pour rester toujours à mes côtés quoi qu'il arrive.

Enfin, je remercie toutes les personnes qui m'ont aidé de près ou de loin.

Ahmed.

Sommaire

Introduction générale	1
1 Préliminaires mathématiques	5
1.1 La fonction Gamma	6
1.2 La fonction Beta	6
1.3 La fonction Mittag-Leffler	7
1.4 Le changement d'ordre d'intégration	7
2 Les intégrales et les dérivées fractionnaires	8
2.1 L'approche de Grunwald-Letnikov	9
2.1.1 L'intégral de Riemann-Liouville	10
2.1.2 La dérivée de Riemann-Liouville	10
2.2 L'approche de Caputo	11
2.3 L'approche d'Hadamard	12
2.4 L'approche de Katugampola	12
3 Les propriétés des dérivées fractionnaires	14
3.1 La linéarité	15
3.2 La règle du zéro	15
3.3 La règle du produit et la règle de Leibniz	15
3.4 La composition	16
3.4.1 Intégration fractionnaire d'une intégrale fractionnaire	16
3.4.2 Différenciation fractionnaire d'une intégrale fractionnaire	17
3.4.3 Intégration fractionnaire et différenciation d'une dérivée fractionnaire	17
3.5 Des exemples	18
3.5.1 La fonction puissance	18
3.5.2 La fonction exponentielle	19
3.5.3 Les fonctions trigonométriques	20
4 Les équations différentielles fractionnaires linéaires	21

4.1	La transformation de Laplace des dérivés fractionnaires	22
4.1.1	Transformée de Laplace de l'opérateur de Riemann-Liouville	23
4.1.2	Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Grunwald-Letnikov	24
4.2	La méthode de transformation de Laplace	25
4.2.1	Exemples	26
5	Applications du calcul fractionnaire en ingénierie	28
5.1	Cinétique fractionnaire des porteurs de charge dans les supercondensateurs	29
5.1.1	Répartition des taux de relaxation	29
5.1.2	Transfert de charge à diffusion limitée	30
5.2	Réglage des contrôleurs PID à l'aide du calcul fractionnaire	30
5.3	Systèmes fractionnaires linéaires invariants dans le temps	31
5.4	Systèmes de commande de type fractionnaire	31
5.5	La transformée de Fourier fractionnaire	31
	Conclusion générale	32

Introduction générale

Le calcul fractionnaire, l'intégration et la différenciation d'un ordre arbitraire ou fractionnaire, fournit de nouveaux outils qui étendent le pouvoir descriptif de l'analyse mathématique au-delà des concepts familiers d'ordre entier des taux de changement et de l'aire sous une courbe. Les outils du calcul fractionnaire prennent en charge les modèles mathématiques qui, dans de nombreux cas, décrivent plus précisément la réponse dynamique des systèmes électriques, mécaniques et chimiques. Une utilisation plus large de ces méthodes peut améliorer les capacités de l'ingénieur à concevoir, caractériser et contrôler différents dispositifs et systèmes.

Les techniques du calcul fractionnaire, bien que bien comprises par les mathématiciens, ne sont pas largement enseignées dans les programmes d'ingénierie. Cela peut être dû, en partie, au point de vue qu'il s'agit d'un sujet avancé et que les équations aux dérivées ordinaires et partielles sont suffisantes pour modéliser les événements physiques et autres processus les plus intéressants. Cependant, les ingénieurs rencontrent rapidement des situations dans lesquelles les méthodes classiques (séparation de variables, opérateurs différentiels linéaires, solutions en série, etc.) et transformées (Laplace, Fourier) ne capturent pas toutes les caractéristiques essentielles du comportement du système. Le calcul fractionnaire peut être utile ici, et en fait, les méthodes de calcul fractionnaire trouvent maintenant une place dans la littérature technique et dans les nouveaux textbooks. Le calcul fractionnaire a plus à offrir à l'ingénieur que de simples outils mathématiques.

Le calcul fractionnaire connaît un regain d'intérêt. Des colloques récents, des publications dans la littérature scientifique et technique et plusieurs livres portent son approche alternative à l'attention d'un grand nombre de chercheurs. De nombreux domaines traditionnels des sciences physiques et de l'ingénierie (par exemple, l'électromagnétisme, l'électrochimie, la viscoélasticité, les phénomènes de transport) ont actuellement des défenseurs de l'approche fractionnaire.

Aperçu historique sur le calcul fractionnaire du point de vue de l'ingénierie :

Des questions fondamentales sur la signification des opérations non entières dans le calcul intégral et différentiel ont été soulevées au début de son histoire. En 1695, par exemple, L'Hospital dans une lettre à Leibniz [1], (inventeur de la notation $d^n y/dx^n$ pour la différenciation), demanda : « Et si n est $1/2$? ». Leibniz répondit : « Il s'ensuit que $d^{1/2}x$ sera égal à $x\sqrt{dx} : x$ (en notation moderne $d^{1/2}x/dx^{1/2} = 2\sqrt{x/\pi}$) un paradoxe apparent, dont on tirera un jour des conséquences utiles." Le calcul fractionnaire est né de ce dialogue avec les contributions d'Euler (1730), Lagrange (1772), Laplace (1812), Fourier (1822) et de nombreux autres mathématiciens du XVIIIe et du début du XIXe siècle. D'excellents résumés du développement historique du calcul fractionnaire sont disponibles dans les livres de Samko *et al* [2], Oldham et Spanier [3], Miller et Ross [4], et Davis [5].

Malgré cette riche histoire, jusqu'à relativement récemment [6], les opérations fractionnaires en analyse mathématique sont restées des sujets d'intérêt principalement pour les mathématiciens. Le premier problème d'ingénierie formulé à l'aide du calcul fractionnaire était celui de la tautochrone : trouver la forme d'une courbe dans un plan tel que le temps nécessaire à un cordon pour glisser, sous l'influence de la gravité, sans frottement jusqu'à l'origine soit indépendant de la position de départ. En 1823, Abel a trouvé une solution (une cycloïde lorsque le temps de descente est fixe) qui pourrait être écrite en termes d'équation intégrale de sorte qu'elle englobe la définition contemporaine de Riemann-Liouville de l'intégration fractionnaire [4]

Cependant, les applications d'ingénierie plus répandues du calcul fractionnaire ont été entravées par des définitions incomplètes et parfois contradictoires des opérations fractionnaires, une incertitude sur les fonctions complémentaires et des difficultés à établir des règles cohérentes pour les opérations inverses. Ce n'est qu'au milieu du XIXe siècle avec les travaux de Liouville (1834), Riemann (1847), Grunwald (1867) et Letnikov (1868) qu'une expression satisfaisante pour la généralisation de l'intégration et de la différenciation aux puissances fractionnaires a été développée [3]. Les définitions dites de Riemann-Liouville et Grunwald-Letnikov du calcul fractionnaire sont les plus largement utilisées aujourd'hui [7],[8]. L'acceptation de ces définitions et leur application dans les problèmes d'ingénierie, cependant, a pris beaucoup de temps, et beaucoup d'efforts ont été déployés au tournant du siècle dernier par les mathématiciens (Bromwich, 1919) [9] et les ingénieurs (Heaviside, 1892) [10] qui a lutté pour concilier le calcul fractionnaire avec les techniques émergentes des mathématiques opérationnelles. L'absence d'une définition unique pour l'intégration et la différenciation fractionnaires et la méfiance à l'égard de la manipulation algébrique des opérateurs différentiels et intégrales ont causé de nombreuses difficultés, qui ont ralenti l'acceptation et l'application du calcul fractionnaire en science et en ingénierie.

L'approche de Heaviside pour le calcul fractionnaire

Le principal défenseur de l'utilisation du calcul fractionnaire et des méthodes opérationnelles pour résoudre les problèmes d'ingénierie est, comme on pouvait s'y attendre, Oliver Heaviside (1850-1925). Il est aussi, à la fois par sa nature et la nature de son sujet, la source de nombreuses controverses et conflits. Le lecteur intéressé est dirigé vers la biographie récente de Heaviside par J. Nahin [11]. Une biographie concise écrite par E.T. Whittaker avec une revue des méthodes de Heaviside est disponible dans le livre *Heaviside Operational Calculus, An Elementary Foundation* [12].

Heaviside est connu aujourd'hui aux étudiants en ingénierie en grande partie pour son association avec la fonction échelon unitaire d'Heaviside, mais il faut également se souvenir de lui pour avoir écrit un bon nombre de livres et d'articles techniques [13] qui a porté les techniques des mathématiques opérationnelles et de l'analyse vectorielle à l'attention des ingénieurs. Heaviside a développé une approche d'opérateur fractionnaire pour résoudre les problèmes transitoires en génie électrique [13].

Incorporation du calcul fractionnaire dans la physique et l'ingénierie en tant que méthode opérationnelle

Il est très bon pour nous que de nombreuses techniques développées par Heaviside aient été vérifiées plus tard et aient ensuite été incorporées dans les techniques opérationnelles de la transformée de Laplace qui, avec l'analyse de Fourier, sont les pierres angulaires de la théorie contemporaine des systèmes linéaires. [9].

Ainsi, nous avons avancé chronologiquement et informatiquement des premiers travaux analytiques de Laplace et Fourier aux transformations contemporaines de Laplace et Fourier qui résolvent une large classe de problèmes d'ingénierie d'une manière complète et cohérente. Malheureusement, dans ce passage des méthodes opérationnelles aux techniques de transformation, les ingénieurs ont perdu le contact avec les opérations d'ordre fractionnaire et ont ainsi développé un sens restreint du champ d'application des méthodes opérationnelles. En étudiant le calcul fractionnaire, nous revenons aux fondements du calcul pour récupérer ces opérations. Ici, nous trouverons naturel d'étendre le concept d'intégration et de différenciation au-delà de l'ordre entier aux dérivées et intégrales d'un ordre complètement arbitraire. Ainsi, le calcul fractionnaire comblera les lacunes entre les opérateurs d'ordre entier tout en conservant toutes les fonctionnalités utiles des transformées de Laplace et de Fourier [14], [15], et [16].

Ce mémoire est organisé en cinq chapitres. On assemble dans **le premier chapitre** des définitions de base et des propriétés de quelques outils mathématiques fondamentaux et nécessaires pour la compréhension des chapitres suivants..

Dans **le deuxième chapitre**, nous avons traité quelques approches pour définir un différo-intégral tel que celles de Grunwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo, et Hadamard,...etc .

Dans **le troisième chapitre**, nous avons vérifié si certaines règles de base de différenciation et d'intégration sont toujours valables pour ces différo-intégrals. Nous avons prouvé les différo-intégrales de Grunwald-Letnikov et de Riemann-Liouville des opérateurs linéaires, et nous avons donné une expression pour la règle de Leibniz pour les dérivées fractionnaires. Nous avons éga-

lement exploré la composition des intégrales et des dérivées fractionnaires. Après avoir donné le cadre des différo-intégrals nous avons pu nous en servir. Nous avons exploré des exemples de certaines fonctions fréquemment utilisées, à savoir la fonction puissance, la fonction exponentielle et les fonctions trigonométriques.

Le quatrième chapitre explore l'utilisation de la transformée de Laplace pour résoudre certains types d'équations différentielles fractionnaires.

Dans **le dernier chapitre**, on a discuté quelques applications du calcul fractionnaire en ingénierie.

Enfin, la conclusion synthétise notre travail, présente des nouvelles perspectives de recherche dans le domaine et préconise que ces opérateurs différo-intégrals soient mises en œuvre dans le curriculum de l'analyse mathématique pour les filières d'ingénierie.

Préliminaires mathématiques

Il devrait être évident à partir des points traités dans l'introduction générale que la théorie de la transformée de Laplace et les fonctions spéciales (par exemple, gamma, bêta, ...) jouent un rôle important dans le développement du calcul fractionnaire. De plus, nous rencontrerons la fonction Mittag-Leffler lors de la résolution d'équations différentielles d'ordre fractionnaire. Par conséquent, avant de continuer, il convient d'assembler les définitions de base et les propriétés de ces outils mathématiques fondamentaux et ces fonctions spéciales. Nous reviendrons souvent sur ces informations dans les prochains chapitres. La transformée de Laplace ne sera pas traitée ici. Nous en parlerons en détail dans le chapitre 4 de ce mémoire.

1.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma joue un rôle important dans le calcul fractionnaire et est donc mentionnée dans les préliminaires.

Définition 1.1 (La fonction gamma) [2]

Soit $z \in \mathbb{C}$, alors on définit la fonction Gamma comme

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (1.1)$$

Cette intégrale converge pour $\operatorname{Re}(z) > 0$ (la moitié droite du plan complexe).

L'une des propriétés de base de la fonction Gamma est

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (1.2)$$

Pour le prouver, nous intégrons la formule de la fonction Gamma donnée dans la définition 1.1 par parties

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = [-e^{-t} t^z]_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (1.3)$$

où le premier terme disparaît et le second terme est égal à $z\Gamma(z)$, donc l'identité (1.2) suit.

On a aussi $\Gamma(1) = 1$ et si on utilise l'identité (1.2) on obtient

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1 \cdot \Gamma(1) = 1 = 1! \\ \Gamma(3) &= 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1! = 2! \\ \Gamma(4) &= 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2! = 3! \\ &\vdots \\ \Gamma(n+1) &= n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n! \end{aligned} \quad (1.4)$$

Donc, par récurrence, il s'ensuit que $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.2 La fonction Beta

Dans certains cas, la fonction Beta est plus favorable que la fonction Gamma. Puisqu'il est pratique de l'utiliser dans des dérivés fractionnaires de la fonction de puissance. Donc, nous mentionnons également la fonction Beta ici.

Définition 1.2 (La fonction Beta) [2]

Soient $z, w \in \mathbb{C}$, alors on définit la fonction Beta comme

$$B(z, w) = \int_0^1 \tau^{z-1} (1-\tau)^{w-1} d\tau \quad (1.5)$$

pour $\operatorname{Re}(z) > 0$ et $\operatorname{Re}(w) > 0$.

La fonction Beta peut être exprimée en termes de fonction Gamma par

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \quad (1.6)$$

et il s'ensuit de (1.6) que

$$B(z, w) = B(w, z) \quad (1.7)$$

Avec la fonction Beta, il est possible d'obtenir deux résultats utiles pour la fonction Gamma

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad (1.8)$$

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}2^{2z-1}\Gamma(2z) \quad (1.9)$$

1.3 La fonction Mittag-Leffler

Nous savons que dans les équations différentielles d'ordre entier (ordinaires), la fonction exponentielle e^z joue un rôle important. Cela peut également être écrit sous sa forme de série qui est donnée par [2]

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} \quad (1.10)$$

Plus généralement, on peut considérer l'expression

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (1.11)$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$. On voit que dans le cas particulier de $\alpha = 1$ et $\beta = 1$ on a $E_{1,1}(z) = e^z$. Cette généralisation s'appelle la fonction de Mittag-Leffler et la fonction à deux paramètres est très utile dans le calcul fractionnaire, en particulier dans les équations différentielles fractionnaires.

Puisque la forme série de la fonction de Mittag-Leffler dans (1.11) est uniformément convergente sur tous les sous-ensembles compacts de \mathbb{C} , nous pouvons la différencier terme par terme pour obtenir l'expression suivante qui sera également nécessaire plus tard.

Corollaire 1.1 [2]

Soient $z \in \mathbb{C}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ et $m \in \mathbb{N}$, alors la fonction de Mittag-Leffler différenciée m -fois (ou sa $m^{\text{ième}}$ dérivée) est donnée par

$$E_{\alpha,\beta}^{(m)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha m + \beta)}. \quad (1.12)$$

1.4 Le changement d'ordre d'intégration

Dans l'une des prochaines sections, nous profiterons du changement de l'ordre d'une intégrale. Si nous avons une fonction $f(t, \tau, \xi)$ intégrable par rapport à τ et ξ , le changement d'ordre est donné par la formule suivante

$$\int_a^t \int_a^\tau f(t, \tau, \xi) d\xi d\tau = \int_a^t \int_\xi^t f(t, \tau, \xi) d\tau d\xi \quad (1.13)$$

Les intégrales et les dérivées fractionnaires

En fait, le terme «calcul fractionnaire» n'est pas approprié car il ne signifie pas la fraction de tout calcul, ni le calcul des fractions. C'est en fait la branche des mathématiques qui généralise la différenciation et l'intégration d'ordre entier aux dérivées et intégrales d'ordre arbitraire.

Si nous regardons la séquence des intégrales et des dérivées d'ordre entier

$$\dots, \int_a^t \int_a^{\tau_2} f(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2, \int_a^t f(\tau_1) d\tau_1, f(t), \frac{df(t)}{dt}, \frac{d^2f(t)}{dt^2}, \dots$$

on peut voir la dérivée d'ordre arbitraire α comme l'insertion entre deux opérateurs dans cette séquence. Elle est appelée une dérivée fractionnaire et tout au long de ce mémoire, la notation suivante sera utilisée [7]

$${}_a D_t^\alpha f(t)$$

Pour une intégrale fractionnaire, la même notation est utilisée, mais avec $\alpha < 0$. Ainsi, une intégrale d'ordre β peut être désignée par [7]

$${}_a D_t^{-\beta} f(t)$$

La notation ${}_a I_t^\beta f(t)$ aussi utilisée dans la littérature pour décrire une intégrale fractionnaire d'ordre β . Dans ce mémoire, nous nous référons à cela avec le terme différo-intégral pour désigner les deux opérateurs d'intégration et de dérivation au même temps. Les indices a et t sont appelés les terminaux de l'opérateur différo-intégral et ce sont les limites de l'intégration.

Il y a eu différentes approches pour définir cet opérateur différo-intégral et cette section traite des définitions de Grunwald-Letnikov, de Riemann-Liouville, de Caputo, de Hadamard et de Katugampola.

2.1 L'approche de Grunwald-Letnikov

Dans cette section, nous dériverons une formule pour le différo-intégral dit de Grunwald-Letnikov. La preuve est basée sur la définition de la dérivée par un opérateur de différence finie « en avant »¹ (the forward difference derivative)

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h[f](t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}. \quad (2.1)$$

Si nous appliquons à nouveau cette formule, nous obtenons la dérivée de second ordre bien connue

$$f''(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^2[f](t)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(t+2h) - f(t+h)}{h} - \frac{f(t+h) - f(t)}{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+2h) - 2f(t+h) + f(t)}{h^2}. \quad (2.2)$$

On peut généraliser cette formule pour une dérivée et si on utilise le coefficient binomial $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$, on obtient pour la n^{ime} -dérivée

$$f^{(n)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} f(t + (n-r)h)}{h^n}. \quad (2.3)$$

Si on remplace l'entier n par $p \in \mathbb{R}$ on obtient la définition suivante.

Définition 2.1 (Le différo-intégral de Grunwald-Letnikov) [7], [2]

Soit m le plus petit nombre naturel tel que $|p| \leq m$, alors nous définissons le différo-intégral de Grunwald-Letnikov comme

$$D^p f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t + (p-r)h) \quad (2.4)$$

Puisque nous avons remplacé l'entier n par le nombre réel p , nous devons également généraliser la définition du coefficient binomial. Cela peut être fait en utilisant la formule multiplicative qui donne

$$\binom{p}{r} = \frac{p(p-1)(p-2) \cdots (p-r+1)}{r(r-1)(r-2) \cdots 1} \quad (2.5)$$

où $r \in \mathbb{N}$. Quand la substitution $h \rightarrow -h$ est fait dans la définition 2.1, nous obtenons le différo-intégral "direct" de Grunwald-Letnikov donné par

$$\begin{aligned} {}_a D_t^p f(t) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ mh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^m (-1)^r \binom{p}{r} f(t - rh) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{t-a}{m} \right)^{-p} \sum_{r=0}^m (-1)^r \binom{p}{r} f\left(t - r \frac{t-a}{m}\right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Quand $p = n$ cela peut être vu comme le dérivé d'ordre n et si $p = -n$ elle représente l'intégrale n -fold.

Les dérivées fractionnaires de Grunwald-Letnikov et de Riemann-Liouville peuvent être liées l'une à l'autre. Par conséquent, nous avons besoin d'une autre expression pour la dérivée de Grunwald-Letnikov d'ordre arbitraire. Ceci est donné par la formule suivante :

1. L'opérateur de différence avant, Δ_h , est défini par $\Delta_h[f](x) = f(x+h) - f(x)$, où h est le plus souvent une constante, qu'on appelle le pas.

Corollaire 2.1 [2]

$${}_a D_t^p f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \quad (2.7)$$

Dans la dernière formule les dérivés $f^{(k)}(t)$ pour $k = 1, 2, \dots, m+1$ doivent être continus dans l'intervalle fermé $[a, t]$ et $m > p-1$. La démonstration du corollaire 2.1 est assez longue. Par conséquent, elle ne sera pas donnée ici, mais elle peut être trouvée dans [7], p. 52-55.

2.1.1 L'intégral de Riemann-Liouville

Soit $\Omega = [a, b]$ ($-\infty < a < b < \infty$) un intervalle fini sur l'axe réel \mathbb{R} . Les *intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville* $I_{a+}^\alpha f$ et $I_{b-}^\alpha f$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) > 0$) sont définis comme [2]

$$(I_{a+}^\alpha f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (x > a; \Re(\alpha) > 0) \quad (2.8)$$

et

$$(I_{b-}^\alpha f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t) dt}{(t-x)^{1-\alpha}} \quad (x < b; \Re(\alpha) > 0) \quad (2.9)$$

respectivement. Ici $\Gamma(\alpha)$ est la fonction Gamma (1.1). Ces intégrales sont appelées intégrales fractionnaires de gauche et de droite. Quand $\alpha = n \in \mathbb{N}$, les définitions (2.8) et (2.9) coïncident avec les n ème intégrales de la forme [2]

$$\begin{aligned} (I_{a+}^n f)(x) &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \cdots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned} \quad (2.10)$$

et

$$\begin{aligned} (I_{b-}^n f)(x) &= \int_x^b dt_1 \int_{t_1}^b dt_2 \cdots \int_{t_{n-1}}^b f(t_n) dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b (t-x)^{n-1} f(t) dt \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned} \quad (2.11)$$

2.1.2 La dérivée de Riemann-Liouville

Les *dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville* $D_{a+}^\alpha f$ et $D_{b-}^\alpha f$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) \geq 0$) sont définis comme [2]

$$\begin{aligned} (D_{a+}^\alpha y)(x) &:= \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{a+}^{n-\alpha} y)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{y(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \quad (n = [\Re(\alpha)] + 1; x > a) \end{aligned} \quad (2.12)$$

et

$$\begin{aligned} (D_{b-}^\alpha y)(x) &:= \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I_{b-}^{n-\alpha} y)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{y(t) dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} \quad (n = [\Re(\alpha)] + 1; x < b), \end{aligned} \quad (2.13)$$

respectivement, où $[\Re(\alpha)]$ désigne la partie entière de $\Re(\alpha)$. En particulier, lorsque $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$, donc

$$\begin{aligned} (D_{a+}^0 y)(x) &= (D_{b-}^0 y)(x) = y(x); (D_{a+}^n y)(x) = y^{(n)}(x), \\ \text{and } (D_{b-}^n y)(x) &= (-1)^n y^{(n)}(x) \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned} \quad (2.14)$$

où $y^{(n)}(x)$ est la dérivée usuelle de $y(x)$ d'ordre n .

2.2 L'approche de Caputo

Dans cette section, nous présentons les définitions et quelques propriétés des *dérivées fractionnaires de Caputo*. Soit $[a, b]$ un intervalle fini de la droite réelle \mathbb{R} , et soient $D_{a+}^{\alpha}[y(t)](x) \equiv (D_{a+}^{\alpha}y)(x)$ et $D_{b-}^{\alpha}[y(t)](x) \equiv (D_{b-}^{\alpha}y)(x)$ les dérivées fractionnaires d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}(\Re(\alpha) \geq 0)$ de Riemann-Liouville définies par (2.12) et (2.13), respectivement. Les dérivés fractionnaires $({}^C D_{a+}^{\alpha}y)(x)$ et $({}^C D_{b-}^{\alpha}y)(x)$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}(\Re(\alpha) \geq 0)$ sur $[a, b]$ sont définis via les dérivés fractionnaires de Riemann-Liouville ci-dessus par [2], [3]

$$({}^C D_{a+}^{\alpha}y)(x) := \left(D_{a+}^{\alpha} \left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] \right) (x) \quad (2.15)$$

et

$$({}^C D_{b-}^{\alpha}y)(x) := \left(D_{b-}^{\alpha} \left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(b)}{k!} (b-t)^k \right] \right) (x) \quad (2.16)$$

respectivement, où

$$n = [\Re(\alpha)] + 1 \text{ pour } \alpha \notin \mathbb{N}_0; \quad n = \alpha \text{ pour } \alpha \in \mathbb{N}_0 \quad (2.17)$$

Ces dérivées sont appelées *dérivées fractionnaires d'ordre α à gauche et à droite de Caputo*.

En particulier, lorsque $0 < \Re(\alpha) < 1$, les relations (2.16) et (2.17) prennent les formes suivantes :

$$({}^C D_{a+}^{\alpha}y)(x) = (D_{a+}^{\alpha}[y(t) - y(a)])(x) \quad (2.18)$$

$$({}^C D_{b-}^{\alpha}y)(x) = (D_{b-}^{\alpha}[y(t) - y(b)])(x) \quad (2.19)$$

Théorème 2.1 (Dérivés fractionnaires Caputo) [2], [7]

Soit $\Re(\alpha) \geq 0$ et soit n donné par (2.17). Si $y(x) \in AC^n[a, b]$, donc les dérivées fractionnaires de Caputo $({}^C D_{a+}^{\alpha}y)(x)$ et $({}^C D_{b-}^{\alpha}y)(x)$ existent presque partout sur $[a, b]$.

1. Si $\alpha \notin \mathbb{N}_0$, $({}^C D_{a+}^{\alpha}y)(x)$ et $({}^C D_{b-}^{\alpha}y)(x)$ sont représentés par

$$({}^C D_{a+}^{\alpha}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{y^{(n)}(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} =: (I_{a+}^{n-\alpha}D^n y)(x) \quad (2.20)$$

et

$$({}^C D_{b-}^{\alpha}y)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{y^{(n)}(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} =: (-1)^n (I_{b-}^{n-\alpha}D^n y)(x) \quad (2.21)$$

respectivement, où $D = d/dx$ et $n = [\Re(\alpha)] + 1$.

2. Si $\alpha \in \mathbb{N}_0$, donc $({}^C D_{a+}^{\alpha}y)(x)$ et $({}^C D_{b-}^{\alpha}y)(x)$ sont représentés par

$$({}^C D_{a+}^n y)(x) = y^{(n)}(x) \text{ and } ({}^C D_{b-}^n y)(x) = (-1)^n y^{(n)}(x) \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (2.22)$$

En particulier,

$$({}^C D_{a+}^0 y)(x) = ({}^C D_{b-}^0 y)(x) = y(x) \quad (2.23)$$

2.3 L'approche d'Hadamard

Dans cette sous-section, nous présentons les définitions et quelques propriétés des intégrales fractionnaires et des dérivées fractionnaires de type Hadamard.

Soit $[a, b]$ un intervalle fini du demi-axe \mathbb{R}_+ , et soient $\Re(\alpha) > 0$ et $\mu \in \mathbb{C}$. On considère les intégrales de gauche et de droite d'ordre fractionnaire $\alpha \in \mathbb{C}(\Re(\alpha) \geq 0)$ définis par [2]

$$(\mathcal{J}_{a+}^{\alpha} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{f(t)dt}{t} \quad (a < x < b) \quad (2.24)$$

et

$$(\mathcal{J}_{b-}^{\alpha} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \left(\log \frac{t}{x}\right)^{\alpha-1} \frac{f(t)dt}{t} \quad (a < x < b) \quad (2.25)$$

respectivement.

Les intégrales (2.24) et (2.25) sont souvent appelées *intégrales fractionnaires de Hadamard* d'ordre α .

Soit $\delta = xD$ ($D = d/dx$) la dérivé δ . Les *dérivées fractionnaires d'Hadamard* à gauche et à droite d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}(\Re(\alpha) \geq 0)$ sur (a, b) sont définies par [2]

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} y)(x) &:= \delta^n (\mathcal{J}_{a+}^{n-\alpha} y)(x) \\ &= \left(x \frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{n-\alpha+1} \frac{y(t)dt}{t} \quad (a < x < b) \end{aligned} \quad (2.26)$$

et

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} y)(x) &:= (-\delta)^n (\mathcal{J}_{b-}^{n-\alpha} y)(x) \\ &= \left(-x \frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \left(\log \frac{t}{x}\right)^{n-\alpha+1} \frac{y(t)dt}{t} \quad (a < x < b), \end{aligned} \quad (2.27)$$

où $n = [\Re(\alpha)] + 1$.

2.4 L'approche de Katugampola

Soit $\Omega = [a, b]$, $(-\infty < a < b < \infty)$ un intervalle fini sur l'axe réel \mathbb{R} . L'*intégrale fractionnaire de Katugampola* $({}^K I_{a+}^{\alpha, \rho} f)(x)$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}(\Re(\alpha) \geq 0)$ de $f \in X_c^{\rho}(a, b)$ est défini par [17]

$$({}^K I_{a+}^{\alpha, \rho} f)(x) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{t^{\rho-1} f(t)}{(x^{\rho} - t^{\rho})^{1-\alpha}} dt, \quad (2.28)$$

pour $x > a$, $\Re(\alpha) > 0$ et $\rho > 0$. Cette intégrale est appelée *intégrale fractionnaire gauche de Katugampola*.

De même, nous pouvons définir l'*intégrale fractionnaire à droite de Katugampola* $({}^K I_{b-}^{\alpha, \rho} f)(x)$ par [17]

$$({}^K I_{b-}^{\alpha, \rho} f)(x) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{t^{\rho-1} f(t)}{(t^{\rho} - x^{\rho})^{1-\alpha}} dt, \quad (2.29)$$

pour $x > a$, $\Re(\alpha) > 0$.

Soient $\alpha \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\alpha) \geq 0, n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1$ et $\rho > 0$. Les dérivés fractionnés de Katugampola $\left({}^K D_{a+}^{\alpha, \rho} f\right)(x)$ et $\left({}^K D_{b-}^{\alpha, \rho} f\right)(x)$, correspondant aux intégrales fractionnaires de Katugampola dans (2.28) et (2.29) sont définies, pour $0 \leq a < x < b \leq \infty$ par [18]

$$\begin{aligned} \left({}^K D_{a+}^{\alpha, \rho} f\right)(x) &= \left(x^{1-\rho} \frac{d}{dx}\right)^n \left({}^K I_{a+}^{n-\alpha, \rho} f\right)(x) \\ &= \frac{\rho^{\alpha-n+1}}{\Gamma(n-\alpha)} \left(x^{1-\rho} \frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{t^{\rho-1} f(t)}{(x^\rho - t^\rho)^{\alpha-n+1}} dt \end{aligned} \quad (2.30)$$

et

$$\begin{aligned} \left({}^K D_{b-}^{\alpha, \rho} f\right)(x) &= \left(x^{1-\rho} \frac{d}{dx}\right)^n \left({}^K I_{b-}^{n-\alpha, \rho} f\right)(x) \\ &= \frac{\rho^{\alpha-n+1}}{\Gamma(n-\alpha)} \left(x^{1-\rho} \frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{t^{\rho-1} f(t)}{(t^\rho - x^\rho)^{\alpha-n+1}} dt \end{aligned} \quad (2.31)$$

si les intégrales existent.

Les propriétés des dérivées fractionnaires

Dans ce chapitre, nous découvrirons si certaines propriétés de base, telles que la linéarité, la règle de Leibniz et la composition, s'appliquent toujours aux intégrales et dérivées fractionnaires.

3.1 La linéarité

La linéarité découle du simple fait de satisfaire les définitions des dérivées et des intégrales fractionnaires. Si nous utilisons l'expression de la dérivée fractionnaire de Grunwald-Letnikov (2.6), on a [2]

$$\begin{aligned}
 {}_a D_t^p (\lambda f(t) + \mu g(t)) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ mh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^m (-1)^r \binom{p}{r} (\lambda f(t-rh) + \mu g(t-rh)) \\
 &= \lambda \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ mh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^m (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh) \\
 &\quad + \mu \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ mh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^m (-1)^r \binom{p}{r} g(t-rh) \\
 &= \lambda {}_a D_t^p f(t) + \mu {}_a D_t^p g(t)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Dans cette preuve $f(t)$ et $g(t)$ sont des fonctions pour lesquelles les opérateurs donnés sont définis et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sont des constantes réelles.

Une démonstration de la linéarité du différo-intégral de Riemann-Liouville sera également donnée. En utilisant l'intégrale fractionnaire donné dans (2.8) on a

$$\begin{aligned}
 (I_{a+}^\alpha f) (\lambda f(t) + \mu g(t)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\lambda f(\tau) + \mu g(\tau)) d\tau \\
 &= \lambda \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \\
 &\quad + \mu \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} g(\tau) d\tau \\
 &= \lambda (I_{a+}^\alpha f)(t) + \mu (I_{a+}^\alpha g)(t)
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Une démonstration similaire peut être donnée pour la dérivée de Riemann-Liouville.

3.2 La règle du zéro

On peut prouver que si $f(t)$ est continue pour $t \geq a$ ensuite nous avons [7]

$$\lim_{p \rightarrow 0} {}_a D_t^{-p} f(t) = f(t) \tag{3.3}$$

La démonstration se trouve dans p. 65-67/[7]. Par conséquent, nous définissons

$${}_a D_t^0 f(t) = f(t) \tag{3.4}$$

3.3 La règle du produit et la règle de Leibniz

Si f et g sont des fonctions dont nous savons que la dérivée de leur produit est donnée par la règle du produit [7]

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \tag{3.5}$$

Ceci peut être généralisé à

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \quad (3.6)$$

qui est également connue sous le nom de règle de Leibniz. Dans la dernière expression f et g sont des fonctions n -fois dérivables. Si $f(\tau)$ et $g(\tau)$ et leurs dérivées sont continues dans $[a, t]$, il peut être prouvé que la règle de Leibniz pour les dérivées fractionnaires est donnée par l'expression suivante

$${}_a D_t^p (f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^m \binom{p}{k} f^{(k)}(t) {}_a D_t^{p-k} g(t) \quad (3.7)$$

où encore le coefficient binomial est donné par (2.5) et $m \in \mathbb{N}$ satisfait ($m \leq p \leq m+1$). La démonstration est assez longue donc elle ne sera pas donnée ici, mais peut être trouvée dans p. 91-97/ [7]. Si nous connaissons la dérivée fractionnaire d'une fonction, disons $g(t)$ et que nous voulons déterminer la dérivée fractionnaire d'une fonction qui est un produit de $g(t)$ et d'une autre fonction, disons $f(t)$, la règle de Leibniz est très utile.

3.4 La composition

3.4.1 Intégration fractionnaire d'une intégrale fractionnaire

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété importante suivante [2]

$${}_a D_t^{-p} \left({}_a D_t^{-q} f(t) \right) = {}_a D_t^{-q} \left({}_a D_t^{-p} f(t) \right) = {}_a D_t^{-p-q} f(t) \quad (3.8)$$

qui est appelée la règle de composition pour les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville. En utilisant la définition, sa démonstration est assez simple.

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-p} \left({}_a D_t^{-q} f(t) \right) &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} \left({}_a D_t^{-q} f(\tau) \right) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} \left(\frac{1}{\Gamma(q)} \int_a^\tau (\tau-\xi)^{q-1} f(\xi) d\xi \right) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_a^t \int_a^\tau (t-\tau)^{p-1} (\tau-\xi)^{q-1} f(\xi) d\xi d\tau \end{aligned} \quad (3.9)$$

Changer l'ordre d'intégration à l'aide de la formule (1.13) donne

$${}_a D_t^{-p} \left({}_a D_t^{-q} f(t) \right) = \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_a^t f(\xi) \int_\xi^t (t-\tau)^{p-1} (\tau-\xi)^{q-1} d\tau d\xi \quad (3.10)$$

On fait la substitution $\frac{\tau-\xi}{t-\xi} = \zeta$ d'où il découle que $d\tau = (t-\xi)d\zeta$ et le nouvel intervalle d'intégration est $[0, 1]$. Nous pouvons maintenant réécrire la dernière expression sous la forme

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-p} \left({}_a D_t^{-q} f(t) \right) &= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_a^t f(\xi) \left((t-\xi)^{p+q-1} \int_0^1 (1-\zeta)^{p-1} \zeta^{q-1} d\zeta \right) d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_a^t f(\xi) \left((t-\xi)^{p+q-1} B(p, q) \right) d\xi \end{aligned} \quad (3.11)$$

où dans la dernière formule, nous avons utilisé la fonction bêta donnée dans la définition (1.2). Si nous utilisons maintenant l'identité (1.6) pour exprimer la fonction bêta en termes de fonction Gamma, nous obtenons

$$\begin{aligned} {}_aD_t^{-p} \left({}_aD_t^{-q} f(t) \right) &= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \int_a^t f(\xi)(t-\xi)^{p+q-1} d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_a^t (t-\xi)^{p+q-1} f(\xi) d\xi \\ &= {}_aD_t^{-p-q} f(t) \end{aligned} \quad (3.12)$$

3.4.2 Différenciation fractionnaire d'une intégrale fractionnaire

Une propriété importante de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville est [2]

$${}_aD_t^p \left({}_aD_t^{-q} f(t) \right) = {}_aD_t^{p-q} f(t) \quad (3.13)$$

où $f(t)$ doit être continu et si $p \geq q \geq 0$, la dérivée ${}_aD_t^{p-q} f(t)$ existe. Cette propriété est appelée la règle de composition pour les dérivés fractionnaires de Riemann-Liouville. Nous allons prouver cette propriété, mais nous avons d'abord besoin d'une autre propriété qui est en fait un cas particulier de la précédente avec $q = p$

$${}_aD_t^p \left({}_aD_t^{-p} f(t) \right) = f(t) \quad (3.14)$$

où $p > 0$ et $t > a$. Ceci implique que l'opérateur de différenciation fractionnaire de Riemann-Liouville est l'inverse à coté gauche de l'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville du même ordre p . Nous le démontrons de la manière suivante. On considère d'abord le cas $p = n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, puis on a

$$\begin{aligned} {}_aD_t^n \left({}_aD_t^{-n} f(t) \right) &= \frac{d^n}{dt^n} \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{d}{dt} \int_a^t f(\tau) d\tau = f(t). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Pour le cas non entier, nous prenons $k-1 \leq p < k$ et nous utilisons (3.8) pour écrire

$${}_aD_t^{-k} f(t) = {}_aD_t^{-(k-p)} \left({}_aD_t^{-p} f(t) \right) \quad (3.16)$$

En utilisant maintenant la définition du différo-intégrales de Riemann-Liouville, nous obtenons

$$\begin{aligned} {}_aD_t^p \left({}_aD_t^{-p} f(t) \right) &= \frac{d^k}{dt^k} \left[{}_aD_t^{-(k-p)} \left({}_aD_t^{-p} f(t) \right) \right] \\ &= \frac{d^k}{dt^k} \left[{}_aD_t^{-k} f(t) \right] = f(t) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Ceci termine la démonstration.

3.4.3 Intégration fractionnaire et différenciation d'une dérivée fractionnaire

Il existe deux autres possibilités lorsque nous traitons la composition des différo-intégrales, à savoir l'intégration fractionnaire d'une dérivée fractionnaire et la différenciation fractionnaire d'une dérivée fractionnaire. Les deux compositions ne sont pas nécessaires dans les prochaines sections de ce mémoire, nous ne les traiterons donc pas ici.

3.5 Des exemples

Cette section traite quelques exemples de dérivées et d'intégrales fractionnaires. Tout d'abord, nous examinerons la fonction puissance, puis explorerons la fonction exponentielle et les fonctions trigonométriques.

3.5.1 La fonction puissance

La fonction puissance est très importante en mathématiques, car de nombreuses fonctions peuvent être dérivées d'une série entière infinie. Tout d'abord, nous allons utiliser l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville pour calculer l'intégrale d'ordre $p \in \mathbb{R} > 0$ de la fonction puissance $(t - a)^\beta$. Le fait de substituer cela dans l'équation donne

$${}_a D_t^{-p} (t - a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t - \tau)^{p-1} (\tau - a)^\beta d\tau \quad (3.18)$$

Si on fait la substitution $\frac{\tau - a}{t - a} = \zeta$ d'où il résulte que $d\tau = (t - a)d\zeta$ et le nouvel intervalle d'intégration est $[0, 1]$, nous pouvons réécrire la dernière expression comme

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-p} (t - a)^\beta &= \frac{(t - a)^{\beta+p}}{\Gamma(p)} \int_0^1 (1 - \zeta)^{p-1} \zeta^\beta d\zeta \\ &= \frac{(t - a)^{\beta+p}}{\Gamma(p)} B(p, \beta + 1) \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + p + 1)} (t - a)^{\beta+p} \end{aligned} \quad (3.19)$$

où dans la dernière équation nous avons utilisé (1.6) pour écrire la fonction Beta en termes de fonction Gamma. Il s'ensuit que $\beta > -1$.

Ensuite, nous allons calculer la dérivée d'ordre $r \in \mathbb{R} > 0$ de la même fonction puissance $(t - a)^\beta$ en utilisant la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville. Encore une fois, en substituant $f(t) = (t - a)^\beta$, on trouve

$${}_a D_t^r (t - a)^\beta = \frac{d^k}{dt^k} \left({}_a D_t^{-(k-r)} (t - a)^\beta \right) \quad (3.20)$$

Nous pouvons maintenant utiliser l'intégrale de la fonction puissance que nous venons de calculer dans (3.19). Si nous remplaçons l'ordre p par $k - r > 0$ nous pouvons réécrire la dernière expression comme

$$\begin{aligned} {}_a D_t^r (t - a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + k - r + 1)} \frac{d^k}{dt^k} (t - a)^{\beta+k-r} \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - r + 1)} (t - a)^{\beta-r} \end{aligned} \quad (3.21)$$

où $\beta > -1$.

Les deux exemples suivants peuvent clarifier cela en utilisant des nombres concrets. Tout d'abord, nous voulons calculer la demi-dérivée de la fonction $f(x) = x$, donc dans la dernière expression nous définissons $t = x$, $a = 0$, $\beta = 1$ et $r = \frac{1}{2}$. On obtient alors

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{\frac{1}{2}}(x-0)^1 &= \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}+1\right)}(x-0)^{1-\frac{1}{2}} \\ {}_a D_t^{\frac{1}{2}}x &= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Dans l'exemple suivant, nous voulons calculer la dérivée d'ordre $\frac{3}{4}$ de la fonction $f(x) = x^2$, donc encore une fois dans la formule (3.21) nous définissons $t = x$, $a = 0$, mais maintenant $\beta = 2$ et $r = \frac{3}{4}$. Cela nous donne

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{\frac{3}{4}}(x-0)^2 &= \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma\left(2-\frac{3}{4}+1\right)}(x-0)^{2-\frac{3}{4}} \\ {}_a D_t^{\frac{3}{4}}x^2 &= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{9}{4}\right)}x^{\frac{5}{4}} \end{aligned} \quad (3.23)$$

3.5.2 La fonction exponentielle

Une autre fonction fréquemment utilisée en mathématiques est la fonction exponentielle. Nous utiliserons le différo-intégral de Weyl, qui est formellement égale à l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville, pour calculer l'intégrale d'ordre $p \in \mathbb{R}_{>0}$ de la fonction $f(t) = e^{\lambda t}$, où $\lambda \in \mathbb{C}$. Ce différo-intégral de Weyl, que l'on peut trouver dans p.80/[19], s'applique aux fonctions périodiques où l'intégrale est égale à zéro sur une période. Si nous utilisons le différo-intégral de Weyl, nous n'avons pas à faire la restriction de définir $Re(\lambda) > 0$. Donc, en utilisant l'intégrale fractionnaire de Weyl et en mettant a égal à $-\infty$, on trouve

$$-\infty D_t^{-p} e^{\lambda t} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{p-1} e^{\lambda \tau} d\tau \quad (3.24)$$

Cette expression peut être réécrite comme

$$-\infty D_t^{-p} e^{\lambda t} = \lambda^{1-p} \frac{1}{\Gamma(p)} \int_{-\infty}^t (\lambda(t-\tau))^{p-1} e^{\lambda \tau} d\tau \quad (3.25)$$

Si on fait la substitution $\zeta = \lambda(t-\tau)$ il s'ensuit que ζ va de $\infty \rightarrow 0$ et $-\lambda d\tau = d\zeta$. Maintenant, nous pouvons réécrire la dernière expression sous la forme

$$\begin{aligned} -\infty D_t^{-p} e^{\lambda t} &= -\lambda^{1-p} \frac{1}{\Gamma(p)} \int_{\infty}^0 \zeta^{p-1} e^{\lambda t - \zeta} \lambda^{-1} d\zeta \\ &= \lambda^{1-p} \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} \zeta^{p-1} e^{\lambda t - \zeta} \lambda^{-1} d\zeta \\ &= \lambda^{-p} \frac{e^{\lambda t}}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} \zeta^{p-1} e^{-\zeta} d\zeta \end{aligned} \quad (3.26)$$

Maintenant, en utilisant la définition de la fonction Gamma, nous obtenons

$$-\infty D_t^{-p} e^{\lambda t} = \lambda^{-p} \frac{e^{\lambda t}}{\Gamma(p)} \Gamma(p) = \lambda^{-p} e^{\lambda t} \quad (3.27)$$

La dérivée fractionnaire d'ordre $p \in \mathbb{R}_{>0}$ est alors donnée par

$$-\infty D_t^p e^{\lambda t} = \lambda^p e^{\lambda t} \quad (3.28)$$

3.5.3 Les fonctions trigonométriques

Dans cet exemple, nous voulons explorer le différo-intégral des fonctions sinus et cosinus. Nous pouvons utiliser le dernier exemple car nous pouvons écrire les fonctions trigonométriques en fonction de la fonction exponentielle de la manière suivante

$$\sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \quad \text{and} \quad \cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \quad (3.29)$$

Nous allons d'abord explorer le différo-intégral de Weyl d'ordre $p \in \mathbb{R}$ de la fonction sinus

$$-\infty D_t^p \sin(t) = -\infty D_t^p \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right) \quad (3.30)$$

Si nous utilisons maintenant la linéarité du différo-intégral de Weyl, qui découle directement de la linéarité du différo-intégral de Rieman-Liouville puisqu'ils sont formellement égaux, la dernière expression peut être réécrite comme

$$-\infty D_t^p \sin(t) = \frac{1}{2i} \left(-\infty D_t^p e^{it} - -\infty D_t^p e^{-it} \right) \quad (3.31)$$

Si nous utilisons maintenant l'expression du différo-intégral de la fonction exponentielle (3.28) donnée dans le dernier exemple, nous obtenons

$$\begin{aligned} -\infty D_t^p \sin(t) &= \frac{1}{2i} \left(i^p e^{it} - (-i)^p e^{-it} \right) = \frac{1}{2i} \left(e^{i\frac{\pi}{2}p} e^{it} - e^{-i\frac{\pi}{2}p} e^{-it} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left(e^{i(t+\frac{\pi}{2}p)} - e^{-i(t+\frac{\pi}{2}p)} \right) = \sin \left(t + \frac{\pi}{2}p \right) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Le différo-intégral pour la fonction cosinus peut être obtenue de la même manière et est donnée par

$$-\infty D_t^p \cos(t) = \cos \left(t + \frac{\pi}{2}p \right) \quad (3.33)$$

Les équations différentielles fractionnaires linéaires

Les équations différentielles fractionnaire sont une généralisation des équations différentielles ordinaires. Ils peuvent être résolus par plusieurs méthodes, dont la transformée de Laplace est la plus utilisée. Nous allons explorer cette méthode, mais nous donnons d'abord quelques propriétés de base de la transformée de Laplace, qui sont nécessaires pour comprendre la suite de ce chapitre.

4.1 La transformation de Laplace des dérivés fractionnaires

Tout d'abord, on donne la définition de la transformée de Laplace elle-même.

Définition 4.1 (La transformation de Laplace) [20]

On définit la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ pour $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $s \in \mathbb{C}$ comme la fonction $F(s)$ donnée par

$$F(s) = L\{f(t); s\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (4.1)$$

Pour que cette intégrale existe, nous devons avoir

$$e^{-\alpha t} |f(t)| \leq M \text{ for all } t > T \quad (4.2)$$

où M et T sont des constantes positives. La fonction originale $f(t)$ peut être récupérée à partir de sa transformée de Laplace.

Définition 4.2 (La transformée de Laplace inverse) [20]

La transformée de Laplace inverse $f(t)$ où $t \in \mathbb{R}_{> 0}$, $s \in \mathbb{C}$ et $F(s)$ est la transformée de Laplace, est donnée par

$$f(t) = L^{-1}\{F(s); t\} = \int_{c-\infty}^{c+\infty} e^{st} F(s) ds \quad (4.3)$$

Une propriété importante de la transformée de Laplace est qu'il s'agit d'un opérateur linéaire, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} L\{f(t) + g(t); s\} &= L\{f(t); s\} + L\{g(t); s\} \\ L\{cf(t); s\} &= cL\{f(t); s\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

où $L\{f(t); s\}$ et $L\{g(t); s\}$ doit exister et c est une constante.

Pour une autre propriété utile de la transformée de Laplace, nous devons d'abord définir la convolution de deux fonctions

Définition 4.3 (L'intégrale de convolution) [20]

La convolution de deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ est définie comme

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau \quad (4.5)$$

Si les deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ sont égales à zéro pour $t < 0$ et $F(s)$ et $G(s)$ existent, la transformée de Laplace de leurs convolution est égale au produit de leurs transformées de Laplace. Cette propriété est donnée dans le théorème suivant.

Théorème 4.1 [20], [21]

La transformée de Laplace de la convolution de deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ est donnée par

$$L\{f(t) * g(t); s\} = F(s)G(s) \quad (4.6)$$

Une autre propriété intéressante de la transformée de Laplace est donnée dans le corollaire suivant.

Corollaire 4.1 [22], [23]

La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre entier n est donnée par

$$L\{f^n(t);s\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0) \quad (4.7)$$

4.1.1 Transformée de Laplace de l'opérateur de Riemann-Liouville

Nous explorerons d'abord la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville. En utilisant la définition et en mettant la borne inférieure a égal à zéro, nous obtenons [2]

$${}_0D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \quad (4.8)$$

Si nous utilisons la définition de la convolution et définissons la fonction $g(t) = t^{p-1}$, la dernière expression peut être réécrite comme [2]

$${}_0D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} t^{p-1} * f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} g(t) * f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} (g * f)(t) \quad (4.9)$$

Si nous regardons maintenant la transformée de Laplace de $g(t)$ et utilisons donc la définition de la transformée de Laplace, nous avons

$$G(s) = L\{g(t);s\} = L\{t^{p-1};s\} = \int_0^\infty t^{p-1} e^{-st} dt \quad (4.10)$$

Si nous faisons la substitution $st = r$ il s'ensuit que $dt = \frac{1}{s} dr$ et nous pouvons réécrire la dernière expression comme

$$G(s) = \frac{1}{s^p} \int_0^\infty r^{p-1} e^{-r} dr = s^{-p} \int_0^\infty r^{p-1} e^{-r} dr = \Gamma(p) s^{-p} \quad (4.11)$$

Où dans la dernière égalité nous avons utilisé la définition de la fonction Gamma.

Il est maintenant possible de définir la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville. En utilisant d'abord (4.9) nous obtenons

$$L\{{}_0D_t^{-p} f(t);s\} = L\left\{\frac{1}{\Gamma(p)} (g * f)(t);s\right\} \quad (4.12)$$

En utilisant la transformée de Laplace de la convolution donnée dans le théorème 4.1 et la linéarité de de la transformée de Laplace (4.4), la dernière expression peut être réécrite comme

$$L\{{}_0D_t^{-p} f(t);s\} = \frac{1}{\Gamma(p)} G(s) F(s) \quad (4.13)$$

Si on utilise maintenant (4.11) on obtient pour la transformée de Laplace de l'intégrale de Riemann-Liouville d'ordre $p > 0$

$$L\{{}_0D_t^{-p} f(t);s\} = \frac{1}{\Gamma(p)} \Gamma(p) s^{-p} F(s) = s^{-p} F(s) \quad (4.14)$$

Ensuite, nous explorerons la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville. Comme suggéré dans [7] nous écrirons cette dérivée fractionnaire sous la forme suivante

$${}_0D_t^p f(t) = g^{(n)}(t) \quad (4.15)$$

d'où il découle que

$$g(t) = {}_0D_t^{-(n-p)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_0^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau) d\tau \quad (4.16)$$

pour $n-1 \leq p < n$, si on utilise la transformée de Laplace d'une dérivée d'ordre entier donnée dans le corollaire 4.1 on peut écrire

$$L \left\{ {}_0D_t^p f(t); s \right\} = L \left\{ g^{(n)}(t); s \right\} = s^n G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0) \quad (4.17)$$

Pour réécrire cette dernière expression, nous évaluerons $G(s)$ et $g^{(n-k-1)}(t)$. Premièrement, nous utilisons la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville pour écrire

$$G(s) = L \{g(t); s\} = L \left\{ {}_0D_t^{-(n-p)} f(t); s \right\} = s^{-(n-p)} F(s) \quad (4.18)$$

Nous allons maintenant explorer $g^{(n-k-1)}(t)$ en prenant la dérivée d'ordre $(nk-1)$ de $g(t)$ donnée dans (4.16). L'utilisation de la formule de dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville permet également d'écrire

$$g^{(n-k-1)}(t) = \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} {}_0D_t^{-(n-p)} f(t) = {}_0D_t^{p-k-1} f(t) \quad (4.19)$$

Ainsi, la substitution des deux dernières équations dans (4.17) donne l'expression de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $p > 0$

$$\begin{aligned} L \left\{ {}_0D_t^p f(t); s \right\} &= s^n s^{-(n-p)} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[{}_0D_t^{p-k-1} f(t) \right]_{t=0} \\ &= s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[{}_0D_t^{p-k-1} f(t) \right]_{t=0} \end{aligned} \quad (4.20)$$

pour $n-1 \leq p < n$.

Donc en utilisant la dernière expression pour le cas $n=1$ nous obtenons

$$L \left\{ {}_0D_t^p f(t); s \right\} = s^p F(s) - {}_0D_t^{p-1} f(0) \quad (4.21)$$

où $0 \leq p < 1$. Pour $n=2$ on a $1 \leq p < 2$ et il résulte de (4.20) que

$$L \left\{ {}_0D_t^p f(t); s \right\} = s^p F(s) - {}_0D_t^{p-1} f(0) - s {}_0D_t^{p-2} f(0) \quad (4.22)$$

Nous verrons que ces cas particuliers sont utiles pour résoudre quelques équations différentielles fractionnaires simples, qui seront traitées dans les exemples à la fin de ce chapitre.

4.1.2 Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Grunwald-Letnikov

Dans cette sous-section, nous explorerons la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Grunwald-Letnikov. En fait, nous avons déjà fait la plupart du travail et il s'agit essentiellement d'utiliser des définitions. Encore une fois, comme dans le cas de Riemann-Liouville, nous fixons la borne inférieure a égale à zéro. Considérons d'abord le cas $0 \leq p < 1$. En utilisant la définition de la dérivée fractionnaire de Grunwald-Letnikov, nous avons [2]

$${}_0D_t^p f(t) = \frac{f(0)t^{-p}}{\Gamma(1-p)} + \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_0^t (t-\tau)^{-p} f'(\tau) d\tau \quad (4.23)$$

En utilisant la transformée de Laplace de la fonction donnée dans (4.11), la transformée de Laplace pour le produit de convolution donné dans le théorème 4.1 et la transformée de Laplace de la dérivée d'ordre entier donnée dans le corollaire 4.1 nous obtenons

$$L \left\{ {}_0D_t^p f(t); s \right\} = \frac{f(0)}{s^{1-p}} + \frac{1}{s^{1-p}} (sF(s) - f(0)) = s^p F(s) \quad (4.24)$$

Dans le cas de $p > 1$, les fonctions dans la somme du Corollaire 2.1 ne peuvent pas être intégrées au sens classique. Cependant, on peut prouver que sous l'hypothèse que $m \leq p < m + 1$, la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Grunwald-Letnikov donnée dans (4.24) tient toujours au sens des fonctions généralisées.

4.2 La méthode de transformation de Laplace

Avant de continuer, nous avons également besoin de la transformée de Laplace d'une fonction très importante pour les équations différentielles fractionnaires linéaires constituées de deux termes. Nous devons explorer la transformée de Laplace de la fonction suivante [2]

$$L \left\{ t^{\alpha m + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(m)}(at^\alpha); s \right\} \quad (4.25)$$

Si nous regardons de plus près, nous pouvons voir que cette fonction est une combinaison de la fonction puissance et de la fonction de Mittag-Leffler différenciée donnée dans le corollaire 1.3. L'évaluation de cette fonction de Mittag-Leffler à at^α donne

$$E_{\alpha, \beta}^{(m)}(at^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!} \frac{(at^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha m + \beta)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!} \frac{a^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \alpha m + \beta)} \quad (4.26)$$

La substitution de cette expression dans (4.25) donne

$$L \left\{ t^{\alpha m + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(m)}(at^\alpha); s \right\} = L \left\{ t^{\alpha m + \beta - 1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!} \frac{a^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \alpha m + \beta)}; s \right\} \quad (4.27)$$

En utilisant la linéarité de la transformée de Laplace, nous pouvons réécrire la dernière expression comme

$$L \left\{ t^{\alpha m + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(m)}(at^\alpha); s \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)! a^k}{k! \Gamma(\alpha k + \alpha m + \beta)} L \left\{ t^{\alpha k + \alpha m + \beta - 1}; s \right\} \quad (4.28)$$

Maintenant, nous voulons inspecter $L \left\{ t^{\alpha k + \alpha m + \beta - 1}; s \right\}$ de la dernière équation. Nous avons déjà déterminé la transformée de Laplace de la fonction puissance dans (4.11) qui nous a donné l'égalité suivante

$$L \left\{ t^{p-1}; s \right\} = \Gamma(p) s^{-p} \quad (4.29)$$

Donc dans ce cas on a

$$L \left\{ t^{\alpha k + \alpha m + \beta - 1}; s \right\} = \Gamma(\alpha k + \alpha m + \beta) s^{-(\alpha k + \alpha m + \beta)} = \frac{\Gamma(\alpha k + \alpha m + \beta)}{s^{\alpha k + \alpha m + \beta}} \quad (4.30)$$

Substituer ceci dans (4.28) nous donne

$$\begin{aligned} L \left\{ t^{\alpha m + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(m)}(at^\alpha); s \right\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)! a^k}{k! \Gamma(\alpha k + \alpha m + \beta)} \frac{\Gamma(\alpha k + \alpha m + \beta)}{s^{\alpha k + \alpha m + \beta}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)! a^k}{k! s^{\alpha k + \alpha m + \beta}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!} \frac{a^k}{s^{\alpha k + \alpha m + \beta}} \\ &= s^{-\alpha m - \beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!} \left(\frac{a}{s^\alpha} \right)^k \end{aligned} \quad (4.31)$$

Pour réécrire davantage la dernière expression, nous regardons la série

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!} \left(\frac{a}{s^\alpha}\right)^k &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+m)(k+m-1)\cdots(k+1) \left(\frac{a}{s^\alpha}\right)^k \\ &= \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-m+1) \left(\frac{a}{s^\alpha}\right)^{k-m} \\ &= \frac{d^m}{dt^m} \sum_{k=m}^{\infty} \left(\frac{a}{s^\alpha}\right)^k \end{aligned} \quad (4.32)$$

Puisque les premiers termes m disparaissent après la différentiation, nous pouvons réécrire la dernière expression sous la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!} \left(\frac{a}{s^\alpha}\right)^k = \frac{d^m}{dt^m} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{s^\alpha}\right)^k = \frac{d^m}{dt^m} \frac{1}{1 - \frac{a}{s^\alpha}} = \frac{m!}{\left(1 - \frac{a}{s^\alpha}\right)^{m+1}} \quad (4.33)$$

Donc, en substituant ceci dans (4.31), nous obtenons finalement [2]

$$L \left\{ t^{\alpha m + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(m)}(at^\alpha); s \right\} = s^{-\alpha m - \beta} \frac{m!}{\left(1 - \frac{a}{s^\alpha}\right)^{m+1}} = \frac{m! s^{\alpha - \beta}}{(s^\alpha - a)^{m+1}} \quad (4.34)$$

4.2.1 Exemples

Dans cette sous-section, nous allons explorer quelques exemples d'équations différentielles fractionnaires linéaires simples.

Exemple 1. Nous voudrions résoudre l'équation différentielle fractionnaire donnée par

$${}_0D_t^{\frac{1}{3}} f(t) = c_1 f(t) \quad (4.35)$$

où c_1 est une constante. Puisque $0 \leq p = \frac{1}{3} < 1$ nous allons utiliser la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville pour $n = 1$ et prendre la transformée de Laplace des deux côtés de la dernière équation. Si nous utilisons également la linéarité de la transformée de Laplace, cela donne

$$\begin{aligned} L \left\{ {}_0D_t^{\frac{1}{3}} f(t) \right\} &= L \{ c_1 f(t) \} = c_1 L \{ f(t) \} \\ s^{\frac{1}{3}} F(s) - {}_0D_t^{\frac{1}{3}-1} f(0) &= c_1 F(s) \\ s^{\frac{1}{3}} F(s) - {}_0D_t^{-\frac{2}{3}} f(0) &= c_1 F(s). \end{aligned} \quad (4.36)$$

On voit que ${}_0D_t^{-\frac{2}{3}} f(0)$ est la valeur de ${}_0D_t^{-\frac{2}{3}} f(t)$ évaluée à $t = 0$. Si nous supposons que cette valeur existe, nous pouvons définir ${}_0D_t^{-\frac{2}{3}} f(0)$ égal à c_2 pour obtenir

$$s^{\frac{1}{3}} F(s) - c_2 = c_1 F(s) \quad (4.37)$$

Si nous résolvons ceci pour $F(s)$ nous obtenons

$$F(s) = \frac{c_2}{s^{\frac{1}{3}} - c_1} \quad (4.38)$$

C'est un cas particulier de (4.37) avec $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$ et $a = c_1$, donc la solution est donnée par

$$f(t) = L^{-1} \left\{ \frac{c_2}{s^{\frac{1}{3}} - c_1} \right\} = c_2 t^{\frac{1}{3}-1} E_{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}} \left(c_1 t^{\frac{1}{3}} \right) = c_2 t^{-\frac{2}{3}} E_{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}} \left(c_1 t^{\frac{1}{3}} \right) \quad (4.39)$$

Exemple 2. Maintenant, nous voudrions résoudre l'équation différentielle fractionnaire donnée par

$${}_0D_t^{\frac{19}{12}} f(t) = 0 \quad (4.40)$$

Puisque $1 \leq p = \frac{19}{12} < 2$, nous allons utiliser la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville pour $n = 2$ et prendre la transformée de Laplace des deux côtés. Cela donne

$$\begin{aligned} L \left\{ {}_0D_t^{\frac{19}{12}} f(t) \right\} &= 0 \\ s^{\frac{19}{12}} F(s) - {}_0D_t^{\frac{19}{12}-1} f(0) - s_0 D_t^{\frac{19}{12}-2} f(0) &= 0 \\ s^{\frac{19}{12}} F(s) - {}_0D_t^{\frac{7}{12}} f(0) - s_0 D_t^{-\frac{5}{12}} f(0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.41)$$

En suivant les mêmes étapes que dans l'**exemple 1**, on obtient la solution suivante

$$\begin{aligned} f(t) &= L^{-1} \left\{ \frac{c_3}{s^{\frac{19}{12}}} \right\} + L^{-1} \left\{ \frac{c_4 s}{s^{\frac{19}{12}}} \right\} \\ &= L^{-1} \left\{ \frac{c_3}{s^{\frac{19}{12}}} \right\} + L^{-1} \left\{ \frac{c_4}{s^{\frac{7}{12}}} \right\} \\ &= \frac{c_3 t^{\frac{7}{12}}}{\Gamma\left(\frac{19}{12}\right)} + \frac{c_4 t^{-\frac{5}{12}}}{\Gamma\left(\frac{7}{12}\right)} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Applications du calcul fractionnaire en ingénierie

Le calcul fractionnaire est utilisé dans de nombreux domaines, par exemple en ingénierie, physique, économie, processus biologiques, etc. De nombreux modèles peuvent être représentés par des équations différentielles fractionnaires et sont donc de plus en plus utilisés dans ces branches. Il apporte de nouvelles possibilités, à savoir que les dérivées fractionnaires peuvent décrire des effets de mémoire, il est donc possible d'évaluer l'influence du passé sur le comportement du système à l'heure actuelle.

L'un des premiers scientifiques à utiliser le calcul fractionnaire pour résoudre un problème était le mathématicien norvégien Niels Henrik Abel. En 1823, il l'appliqua dans la formulation de sa solution au problème tautochrone. L'idée de ce problème est de trouver la courbe d'un fil sans frottement qui se trouve dans le plan (x, y) de telle sorte que le temps nécessaire pour qu'une particule glisse vers le point le plus bas de la courbe est indépendant de l'endroit où la particule est placée [24].

Depuis lors, le calcul fractionnaire a été appliqué à de nombreux autres problèmes tels que la conservation fractionnelle de la masse, le problème d'écoulement des eaux souterraines, l'équation de dispersion d'advection fractionnaire, les modèles d'équation de diffusion fractionnaire dans l'espace-temps, les modèles d'amortissement structurel, les équations d'ondes acoustiques pour les milieux complexes, l'équation fractionnaire de Schrödinger en théorie quantique et bien d'autres.

Quoiqu'il serait bien de discuter quelques un de ces problèmes, leurs solutions dépassent le niveau de difficulté de ce travail. Par conséquent, nous n'avons mentionné que quelques modèles et problèmes et laissons au lecteur d'explorer en plus de détails ces applications du calcul fractionnaire s'il le souhaite.

5.1 Cinétique fractionnaire des porteurs de charge dans les supercondensateurs

Les équations cinétiques d'ordre fractionnaire constituent un outil unificateur pour la description du comportement des porteurs de charge dans les milieux désordonnés [25].

5.1.1 Répartition des taux de relaxation

Un supercondensateur électrochimique (ES) typique se compose de deux électrodes poreuses séparées par un séparateur perméable aux ions et d'un électrolyte connectant ioniquement des électrodes (Figure 5.1(a)). Approximativement, l'électrode poreuse peut être modélisée par un réseau de pores individuels (Figure 5.1(b)) disposés en parallèle (Figure 5.1(c)) [25].

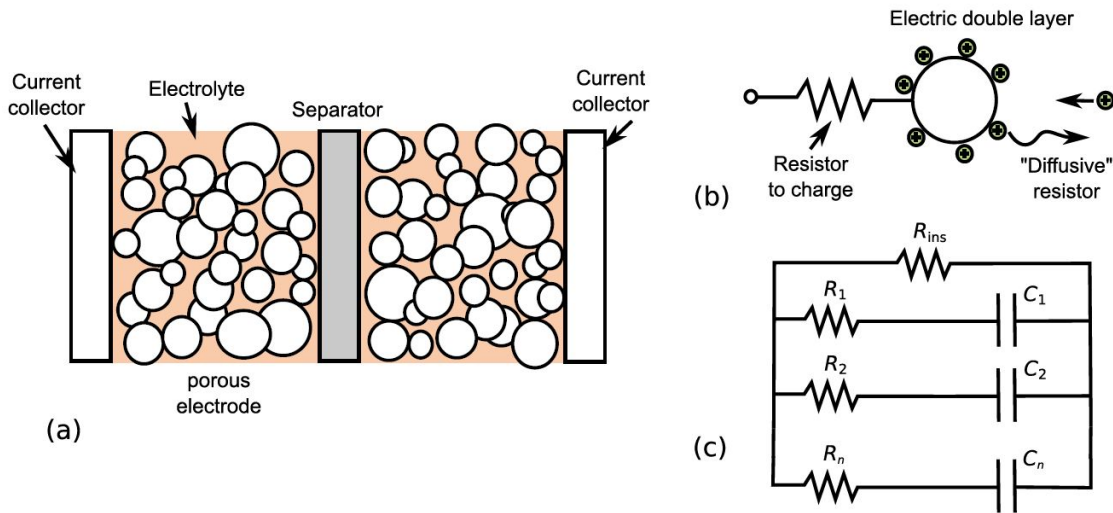


FIGURE 5.1 – Schéma d'un supercondensateur électrique à double couche (EDLC) (a), du composant élémentaire (b) et du circuit équivalent le plus simple d'EDLC (c) [25].

La disposition parallèle des pores individuels est responsable de la distribution des temps de relaxation associés aux "condensateurs élémentaires". Chaque composante élémentaire se décharge selon l'équation de relaxation la plus simple : $\dot{f}(t) = -\mu f(t)$ ($\mu > 0$), ayant une solution sous la forme d'une exponentielle une fonction. Considérant un processus stochastique dichotomique dans lequel la relaxation entre deux états n'est pas donnée par un seul taux μ , mais par une distribution $\rho(\mu)$, les auteurs de [26] ont représenté la fonction de relaxation par moyen de superposition

$$f(t) = \int_0^{\infty} \rho(\mu) \exp(-\mu t) d\mu \quad (5.1)$$

De plus, en considérant une forme d'échelle de cette distribution, ils arrivent à l'équation de relaxation différentielle fractionnaire

$$D_t^\alpha f(t) = -\mu_0 f(t) + \delta_\alpha(t) f_0, \quad \delta_\alpha(t) = t_+^{-\alpha} / \Gamma(1 - \alpha), \quad (5.2)$$

dont la solution est exprimée en termes de fonction de Mittag-Leffler $E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1-\alpha k)}$,

$$f(t) = f_0 E_\alpha(-\mu t^\alpha). \quad (5.3)$$

5.1.2 Transfert de charge à diffusion limitée

En raison du fait que les EDLC avec électrodes en carbone ont une faible pseudocapacité en raison de la réaction de Faraday des groupes fonctionnels de surface, le cas général du transfert de charge limité par la diffusion à la surface des électrodes est considéré dans [25]. Oldham note dans [27] que l'électrochimie "n'était pas la première discipline scientifique à bénéficier du calcul fractionnaire, mais elle a certainement été l'une des premières à récolter une moisson soutenue de concepts et de méthodologies utiles".

5.2 Réglage des contrôleurs PID à l'aide du calcul fractionnaire

Les contrôleurs proportionnels-intégraux-dérivés (PID)¹ sont les algorithmes de contrôle les plus couramment utilisés dans l'industrie. Parmi les différents schémas existants pour le réglage des contrôleurs PID, la méthode Ziegler-Nichols (Z-N) [28] est la plus populaire et est encore largement utilisée pour la détermination des paramètres PID. La fonction de transfert en boucle fermée

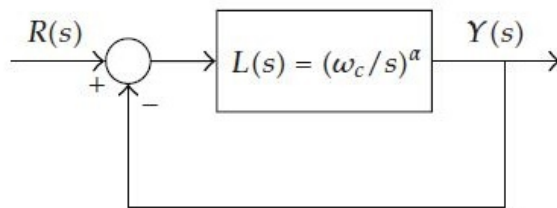


FIGURE 5.2 – Système de contrôle d'ordre fractionnaire avec fonction de transfert en boucle ouverte [29].

du système de contrôle à ordre fractionnaire de la figure 5.2 est donnée par [29]

$$G(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{1}{(s/\omega_c)^\alpha + 1}, \quad 1 < \alpha < 2 \quad (5.4)$$

La réponse indicielle de $G(s)$ est donnée par l'expression

$$y_d(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} G(s) \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{\omega_c^\alpha}{s(s^\alpha + \omega_c^\alpha)} \right\} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[-(\omega_c t)^\alpha]^n}{\Gamma(1 + \alpha n)} = 1 - E_\alpha[-(\omega_c t)^\alpha]. \quad (5.5)$$

Ainsi, pour le réglage des contrôleurs PID, on considère la fonction de transfert d'ordre fractionnaire dans (5.4).

1. https://en.wikipedia.org/wiki/PID_controller

5.3 Systèmes fractionnaires linéaires invariants dans le temps

Bien que les systèmes linéaires fractionnaires aient déjà une longue histoire, la première présentation formelle de la théorie des systèmes linéaires fractionnaires a été faite en 2000 [30]. Un système fractionnaire linéaire invariant dans le temps (FLTI) peut être décrit par une équation différentielle fractionnaire de la forme [31]

$$\sum_{n=0}^N a_n D^{\nu_n} y(t) = \sum_{m=0}^M b_m D^{\nu_m} x(t) \quad (5.6)$$

5.4 Systèmes de commande de type fractionnaire

Certaines des implications des systèmes d'ordres non entiers dans le domaine s de Laplace peuvent simplement être explorées en utilisant le calcul fractionnaire. Pour plus de détails, on peut vérifier [32].

5.5 La transformée de Fourier fractionnaire

La transformée de Fourier fractionnaire (FrFT) est une famille de transformations linéaires généralisant la transformée de Fourier ordinaire. Ses applications vont de la conception de filtres et de l'analyse de signaux à la récupération de phase et à la reconnaissance de formes. Le FrFT peut être utilisé pour définir la convolution et la corrélation fractionnaires, et d'autres opérations.

Une première définition de la FrFT a été introduite par Condon [33] en résolvant la fonction de Green pour les rotations dans l'espace des phases, et aussi par Namias [34] généralisant les travaux de Wiener [35] sur les polynômes d'Hermite.

La transformée de Fourier fractionnaire $\hat{f}_\alpha(\omega)$ d'ordre α d'une fonction f en un point $\omega \in \mathbb{R}$ est définie comme suit [36]

$$\hat{f}_\alpha(\omega) = (\mathcal{F}_\alpha f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e_\alpha(\omega, x) dx \quad (5.7)$$

où

$$e_\alpha(\omega, x) = e^{i \operatorname{sign}(\omega) |\omega|^{\frac{1}{\alpha}} x} = \begin{cases} e^{-i |\omega|^{1/\alpha} x}, & \omega \leq 0 \\ e^{i |\omega|^{1/\alpha} x}, & \omega \geq 0 \end{cases} \quad (5.8)$$

Conclusion et perspectives

Le travail fait dans ce mémoire a introduit le concept de calcul fractionnaire ; la branche des mathématiques qui explore les intégrales et les dérivées fractionnaires. Nous avons d'abord donné quelques techniques et fonctions de base, telles que la fonction Gamma, la fonction Beta et la fonction Mittag-Leffler, qui étaient nécessaires pour comprendre la suite de ce mémoire.

Par la suite, nous avons traité quelques approches pour définir un différo-intégral tel que celles de Grunwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo, et Hadamard,...etc . Par conséquent, nous avons utilisé respectivement la dérivée au sens de différences finies directe et la formule de Cauchy pour l'intégration répétée. Bien que ces différo-intégrals ne se ressemblent pas, nous avons vu que le différo-intégral de Grunwald-Letnikov était un cas particulier de celui de Riemann-Liouville et donne donc les mêmes résultats dans certaines conditions particulières. Ensuite, nous avons vérifié si certaines règles de base de différenciation et d'intégration sont toujours valables pour ces différo-intégrals. Nous avons prouvé que les différo-intégrals de Grunwald-Letnikov et Riemann-Liouville sont tous les deux linéaires et nous avons donné une expression pour la règle de Leibniz pour les dérivées fractionnaires. Nous avons également exploré la composition des intégrales et des dérivées fractionnaires. Après avoir donné le cadre des différo-intégrals nous avons exploré des exemples de certaines fonctions fréquemment utilisées, à savoir la fonction puissance, la fonction exponentielle et les fonctions trigonométriques.

Ensuite, nous avons étudié les équations différentielles linéaires fractionnaires. Tout d'abord, nous devons donner quelques notions de base sur la transformée de Laplace, puisque nous étions sur le point d'utiliser cette transformée intégrale pour résoudre ces équations différentielles. Ensuite, nous avons appliqué la transformée de Laplace aux différo-intégrals de Riemann-Liouville et Grunwald-Letnikov. Après avoir évalué la transformée de Laplace d'une fonction très utile, à savoir une combinaison de la fonction puissance et de la fonction Mittag-Leffler, nous avons pu explorer quelques exemples simples et les fonctions trigonométriques.

Enfin, nous avons brièvement discuté quelques applications du calcul fractionnaire.

Ce mémoire n'a pas couvert tout ce qui touche au calcul fractionnaire. Par exemple, il y a eu beaucoup plus d'approches pour définir un differo-integral. Cependant, les differo-integrals dont nous avons parlé sont les plus courantes.

De plus, il existe de nombreuses autres méthodes pour résoudre les équations différentielles linéaires fractionnaires. Outre la transformée de Laplace, nous aurions également pu utiliser la transformée de Fourier, la méthode de réduction à une équation intégrale de Volterra, la méthode des séries entières ou la transformation à une équation différentielle ordinaire. En raison des limitations dans l'espace et le temps et puisque le but était de donner une brève introduction aux équations différentielles fractionnaires et à leurs solutions, nous avons décidé d'explorer une seule méthode.

Enfin, nous pouvons préconiser que ces differo-integrals soient mises en œuvre dans le curriculum standard de l'analyse mathématique pour les filières d'ingénierie et remplacent les dérivées et intégrales d'ordre entier où plus de possibilités sont données puisque ces differo-integrals couvrent les dérivées et les intégrales d'ordre arbitraire, et donc aussi les dérivées et intégrales d'ordre entier.

Bibliographie

- [1] G. W. Leibniz and C. I. Gerhardt. Briefwechsel zwischen leibniz, hugens van zulichem und dem marquis de l'hospital (correspondance de leibniz avec hugens, van zulichem et le marquis de l'hospital. in deuvres mathematiques de leibniz. p.1.vol 2. paris : Libr. de a. franck).
- [2] S. Samko, A. Kilbas, and O. I. Marichev. Fractional integrals and derivatives : Theory and applications. 1993.
- [3] K. B. Oldham and J. Spanier. The fractional calculus : Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order. 1974.
- [4] K. Miller and B. Ross. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. 1993.
- [5] H. Davis. The theory of linear operators from the standpoint of differential equations of infinite order. 1936.
- [6] B. Ross. Fractional calculus and its applications : Proceedings of the international conference held at the university of new haven, june, 1974. 1974.
- [7] I. Podlubny. Fractional differential equations. 1998.
- [8] J. L. Lovoie, T. Osler, and R. Tremblay. Fractional derivatives and special functions. *Siam Review*, 18 :240–268, 1976.
- [9] T. A. Bromwich. Xxxv. examples of operational methods in mathematical physics. *Philosophical Magazine Series 1*, 37 :407–419.
- [10] L. H. Electrical papers. *Nature*, 47 :505–506.
- [11] P. Nahin. Oliver heaviside : Sage in solitude : The life, work, and times of an electrical genius of the victorian age. 1988.
- [12] D. Moore and Edmund Taylor Whittaker. Heaviside operational calculus ; : An elementary foundation. 1971.
- [13] O. Heaviside. Electromagnetic theory : Errata. 2011.

- [14] I. Sokolov. Physics of fractal operators. 2003.
- [15] A. Saichev and W. Woyczynski. Distributions in the physical and engineering sciences. 1997.
- [16] A. Zayed. Handbook of function and generalized function transformations. 1996.
- [17] Udit N. Katugampola. New approach to a generalized fractional integral. *Appl. Math. Comput.*, 218 :860–865, 2011.
- [18] Don Udit Nalin Katugampola. On generalized fractional integrals and derivatives. 2011.
- [19] B. Ross. Fractional calculus and its applications. 1975.
- [20] L. Debnath. Introduction to the theory and application of the laplace transformation. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 7, 1977.
- [21] G. Doetsch. Guide to the applications of the laplace and z-transforms. 1971.
- [22] J. C. Jaeger. An introduction to the laplace transformation. 1946.
- [23] N. Mclachlan. Laplace transforms and their applications to differential equations. 2014.
- [24] I. Podlubny, R. Magin, and I. Trymorus. Niels henrik abel and the birth of fractional calculus. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 20 :1068 – 1075, 2017.
- [25]
- [26] W. Gloeckle and T. Nonnenmacher. Fractional integral operators and fox functions in the theory of viscoelasticity. *Macromolecules*, 24 :6426–6434, 1991.
- [27] K. B. Oldham. Fractional differential equations in electrochemistry. *Adv. Eng. Softw.*, 41 :9–12, 2010.
- [28] U. Dreher. Control system design guide using your computer to develop and diagnose feedback controllers. 2016.
- [29] J. Machado, Manuel F. Silva, R. Barbosa, I. S. Jesus, C. Reis, Maria da Graça Marcos, and Alexandra M. S. F. Galhano. Some applications of fractional calculus in engineering. *Mathematical Problems in Engineering*, 2010 :1–34, 2010.
- [30] M.D. Ortigueira. Introduction to fractional linear systems. part 1 : Continuous-time case. *IEE Proceedings - Vision, Image and Signal Processing*, 147 :62–70(8), February 2000.
- [31] M. Ortigueira. Fractional calculus for scientists and engineers. In *Lecture Notes in Electrical Engineering*, 2011.
- [32] M. Axtell and M. E. Bise. Fractional calculus application in control systems. *IEEE Conference on Aerospace and Electronics*, pages 563–566 vol.2, 1990.
- [33] E. Condon. Immersion of the fourier transform in a continuous group of functional transformations. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 23 3 :158–64, 1937.
- [34] V. Namias. The fractional order fourier transform and its application to quantum mechanics. *Ima Journal of Applied Mathematics*, 25 :241–265, 1980.

[35] N. Wiener. Hermitian polynomials and fourier analysis. *Journal of Mathematics and Physics*, 8 :70–73.

[36]

Remarque : en raison d'un problème de **BibTeX** (pour lequel nous n'avons pas encore trouvé de solution) où le `\cite` apparaissent comme des points d'interrogation (?) pour deux références, je les ai inclus ici.

Réf. [25] Băleanu, Dumitru and Lopes, António Mendes. Applications in Engineering, Life and Social Sciences, Part B, Berlin, Boston : De Gruyter, 2019. <https://doi.org/10.1515/9783110571929>

Réf. [36] Kochubei, Anatoly and Luchko, Yuri. Basic Theory, Berlin, Boston : De Gruyter, 2019. <https://doi.org/10.1515/9783110571622>

Abstract

In this thesis, we have dealt with fractional derivatives and fractional integrals, shortly differ-integrals. After a short introduction and some preliminaries, different approaches for defining a differ-integral have been explored. Then some basic properties of differ-integrals, such as linearity, the Leibniz rule and composition, have been presented. Thereafter the definitions of the differ-integrals have been applied to a few examples. Also, linear fractional-order differential equations and one method for solving them have been discussed. The thesis ends with some applications of fractional calculus in engineering.

Keywords : fractional derivatives and fractional integrals, fractional calculus, fractional differential equations. Riemann-Liouville differ-integral. Caputo derivative.

ملخص:

في هذه المذكرة ، تعاملنا مع المشتقات والتكاملات الكسرية، والتي يمكن أن تسمى اختصاراً بـ "المشتكاملات" . بعد مقدمة قصيرة وبعض التمهيدات ، تم استكشاف مختلف المقاربات المعتمدة لتعريف هذا النوع من المشتقات و التكاملات. ثم تم تقديم بعض الخصائص الأساسية للمشتكاملات مثل خاصية الخطية، قاعدة لينز و خاصية التركيب. بعد ذلك تم تطبيق هذه المشتكاملات على بعض الأمثلة، كما تمت مناقشة المعادلات التفاضلية الخطية ذات الرتب الكسرية و تم مناقشة احدى طرق حلها. تنتهي الرسالة بأمثلة عن بعض تطبيقات حساب التفاضل والتكامل الكسري في ميدان العلوم

الهندسية.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons traité les dérivées et les intégrales d'ordre fractionnaire, en bref les différo-intégrales. Après une brève introduction et quelques préliminaires, différentes approches pour définir une différo-intégrale ont été explorées. Ensuite, certaines propriétés de base des différo-intégrales, telles que la linéarité, la règle de Leibniz et la composition, ont été présentées. Par la suite, les définitions des différo-intégrales ont été appliquées à quelques exemples. En outre, des équations différentielles d'ordre fractionnaire linéaires et l'une méthode pour les résoudre ont été discutées. Le mémoire se termine par quelques applications du calcul fractionnaire en ingénierie.

Mots clés : Dérivées et intégrales fractionnaires, calcul fractionnaire, équations différentielles fractionnaires. intégrale et dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville. dérivée fractionnaire de Caputo.