

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Equations aux dérivées partielles et applications

Thème

Principe variationnel d'Ekéland, théorie et applications dans un problème aux limites de second ordre perturbé.

Présentée par :

M^r Laouidji Ahmed

Membres de jury :

Mr. Abdelhak MOKHTARI

M.C.B,

Université de M'sila

Président.

Mr. Dahmane BOUAFIA

M.C.B,

Université de M'sila

Encadreur.

Mr. Nour eddine DACHOUCHA

M.A.A,

Université de M'sila

Examineur.

Année universitaire 2019/2020

Remerciements

*Tout d'abord je remercie « **ALLAH** » le tout puissant de m'avoir donné la santé, la volonté et le courage pour effectuer ce modeste travail.*

*Je remercie mon encadreur **Mr : Dahmane BOUAFIA**, pour le sujet proposé qui ma permit de découvrir un vaste domaine, pour son encouragement et soutien dans les moments difficiles.*

Je remercie les membres de jury, chacun à son nom, d'avoir accepté d'examiner mon travail. Sans oublier mes parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches, ma famille et mes amis, qui m'ont soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

Dédicace

Je dédie ce mémoire :

A Allah le tout puissant.

A mes chers parents.

A mes sœurs et mes frères.

A mes amies et mes camarades.

A tous les enseignants de mon cursus.

A toute ma promotion 2019 /2020 de L'EDP.

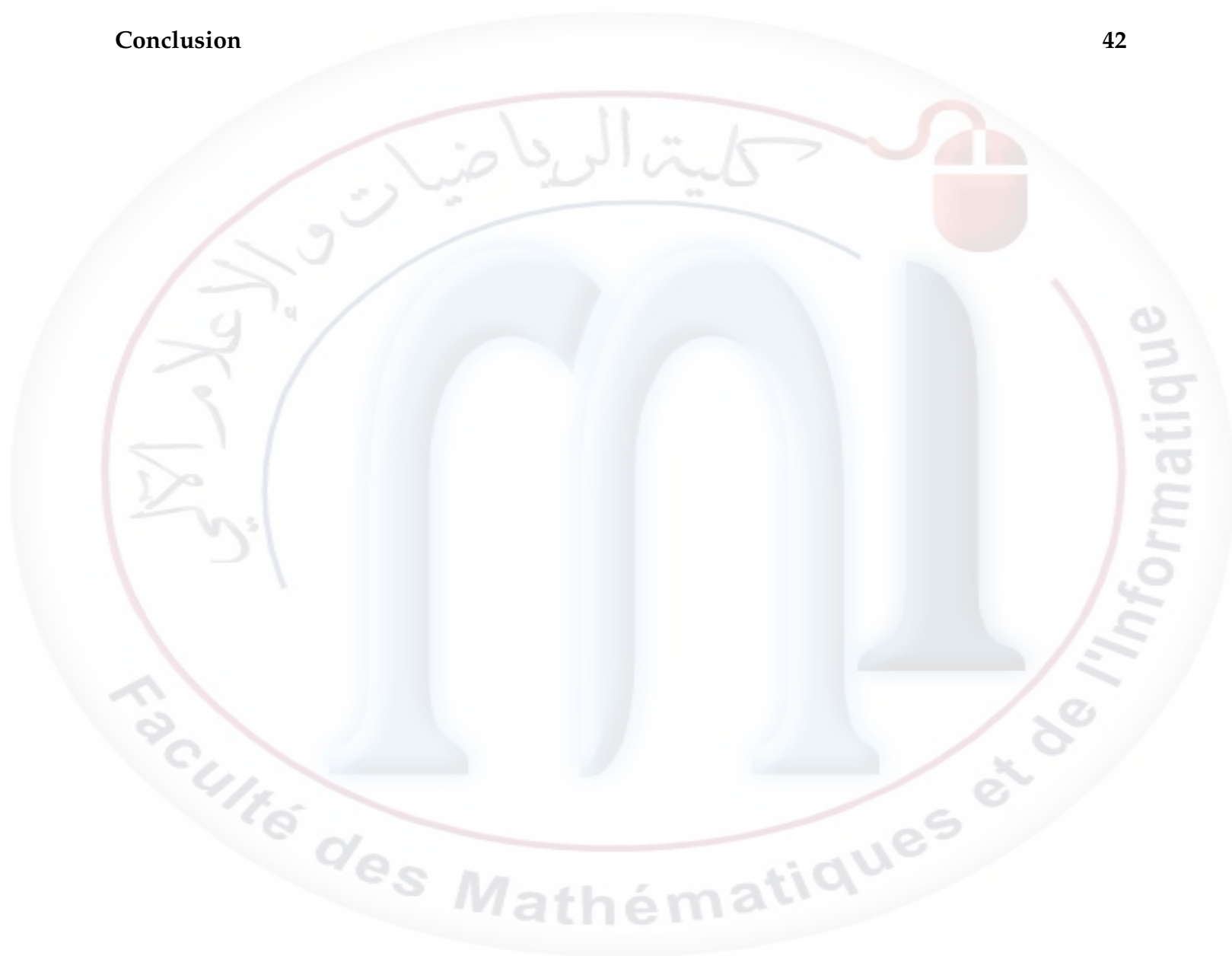
A toute ma famille de département de Mathématiques.

Laouidji Ahmed

Table des matières

Remerciements	i
Dédicace	ii
Notation	v
Introduction générale	1
1 Quelques outils d'analyse fonctionnelle	4
1.1 Espaces Normés, Banach et de Hilbert	4
1.2 Opérateurs linéaires bornés	5
1.2.1 Continuité et compacité des opérateurs	7
1.2.2 Cas particulier (l'injection continu et compact)	7
1.2.3 Semi-continuité	8
1.2.4 Opérateurs différentiables	9
1.3 Méthodes variationnelles et théorie des points critiques	13
1.3.1 Points et valeurs critiques	13
1.3.2 Suite minimisante et infimum	15
1.4 Espaces de Lebesgue L^p	15
1.4.1 Lemme de compacité	16
2 Principe variationnel d'Ekeland, quelques théories	17
2.1 Principe variationnel d'Ekeland	17
2.1.1 Autres formes	21
2.1.2 Principe variationnel d'Ekeland dans $\mathbb{R}^n$	23
2.1.3 Principe variationnel d'Ekeland et la complétude	24
2.2 Application aux quelques théorèmes de point fixe et minimizations	25
2.2.1 Le théorème du point fixe de Caristi	25
2.2.2 Théorème minimization de Takahashi	26

3 Existence de solutions pour un problème perturbé de second ordre sur la demi-ligne par le principe variationnel d'Ekeland	27
3.1 Introduction	27
3.2 Résultat principal	34
3.3 Exemple	40
Conclusion	42



Notation

Nous introduisons les notations et les définitions nécessaires qui sont utilisées par la suite.

$\mathcal{H}$	Espace de Hilbert.
X'	Dual topologique de X .
BVP	Problème aux limites de second ordre.
$L^p(\Omega)$	$= \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable} : u ^p \in L^1(\Omega) \right\}$ avec $1 \leq p < \infty$.
$\ u\ _{L^p}$	$= \left(\int_{\Omega} u(x) ^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$.
$L^\infty(\Omega)$	$= \{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable et } \exists C : u(x) \leq C \text{ p.p sur } \Omega \}$.
$\ u\ _{L^\infty}$	$= \inf \{ C : u(x) \leq C \text{ p.p sur } \Omega \}$.
$C(\Omega)$	Espace des fonctions continues sur Ω .
$D(A)$	: Domaine de définition d'un opérateur borné A .
$R(A)$	: Image de A qui est noté aussi par $Im A$.
(X, d)	: Espace métrique .
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	: Définit un produit scalaire.
$\mathcal{L}(X, Y)$	: Ensemble des applications linéaires continues.
$\hookrightarrow$	: On écrit $X \hookrightarrow Y$ pour signifier que X est inclus dans Y et que l'injection canonique de X dans Y est continue.
$\hookrightarrow\hookrightarrow$	: On écrit $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ pour signifier que X est inclus dans Y et que l'injection canonique de X dans Y est compacte.
p.p	Presque partout.
$\partial_v F$	Dérivée directionnelle de F dans la direction v .
dF	Dérivée au sens de Fréchet qui est noté aussi par F' .
$d_G F$	Dérivée au sens de Gâteaux.
EVP	Principe variationnel d'Ekeland .
CFPT	Théorème point fixe de Caristi.
s.c.i	Semi continue inférieur.
s.c.s	Semi continue supérieur.

f.s.c.i Faiblement semi continue inférieur.
f.s.c.s Faiblement semi continue supérieur .
 $\mathcal{D}(J)$ Domaine de définition de J .



Introduction générale

Les méthodes variationnelles et la théorie des points critiques se sont révélées être des techniques très utiles et populaires pour prouver l'existence de solutions aux problèmes aux limites dans une variété de paramètres, y compris les équations différentielles ordinaires, les équations différentielles partielles, les problèmes impulsifs, etc.

De nombreux chercheurs ont étudié de manière approfondie l'existence et la multiplicité des solutions aux problèmes aux limites. Beaucoup de résultats l'existence de solutions positives ont été obtenu en utilisant la théorie des points fixes et le degré topologique.

Le principe variationnel d'Ekeland s'est avéré équivalent à d'autres théorèmes tels que le théorème du point fixe de Caristi et théorème de minimisation de Takahashi. Ce théorème fondamental est parfaitement connecté à d'autres résultats sont utilisés dans une myriade de domaines mathématiques.

Dans cette mémoire on va donner quelques des applications du principe variationnel d'Ekeland au théorème de point fixe de Caristi et au théorème de minimisation de Takahashi, et on présente quelques-uns des travaux dans l'article [2] qui utilisent le principe variationnel d'Ekeland pour étudier des problèmes aux limites. Beaucoup de nouveaux résultats ont été obtenus récemment par des chercheurs en utilisant cette approche.

Cette mémoire était divisée en trois chapitres, comme suite :

Le premier chapitre est consacré à quelques outils d'analyse fonctionnelle à utiliser tout au long de ce travail, à savoir les espaces normés, Banach et de Hilbert, les opérateurs linéaires bornés (la continuité et la différentiability), Méthodes variationnelles et théorie des points critiques, et l'espaces de Lebesgue .

Dans le second chapitre, on s'intéresse à démontrer le théorème de principe variationnel d'Ekeland et quelques corollaires dérivés, nous avons utilisé l'application aux quelques théorèmes du point fixe et minimisations .

Au chapitre trois, nous présenterons un application de principe variationnel d'Ekeland pour étudier l'existence de solutions à un problème aux limites du second ordre perturbé suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + \eta u(x) = h(x)u^r(x) + \lambda q(x)f(x, u(x)), & x \in [0, +\infty), \\ u(0) = u(+\infty) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

où $f : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, η et λ sont des paramètres réels positifs, et $0 < r < 1$.

Pour obtenir les résultats, nous avons utilisé les conditions et les hypothèses suivantes :

(H_0) Il y a des constantes $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ telle que

$$|f(x, u)| \leq a|u|^r + b, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^+ \text{ et } u \in \mathbb{R};$$

(H_1) h et $q : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ appartenir à $L^1[0, +\infty) \cap L^\infty[0, +\infty)$;

(H_2) Il existe une fonction continuellement différentiable et bornée $p : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ de telle sorte que les fonctions $\frac{h}{p^r}, \frac{h}{p^{r+1}}, \frac{q}{h}, \frac{q}{p^r}, \frac{q}{p^2}$, et $\frac{h^{\frac{2}{1-r}}}{q^{\frac{1}{1-r}}}$ toutes appartiennent à $L^1[0, +\infty)$;

(H_3) $M = \max\{\|p\|_{L^2}, \|p'\|_{L^2}\} < +\infty$,

$$M_0 = \int_0^{+\infty} q(x) \left(\int_0^x \frac{ds}{p(s)} \right) dx < +\infty,$$

$$M^* = \left[\int_0^{+\infty} h(x) \left(\int_0^x \frac{ds}{p(s)} \right)^{\frac{r+1}{2}} dx \right]^{\frac{1}{r+1}} < +\infty,$$

et

$$M_1 = \left[\sup_{x \geq 0} p(x) \right]^{\frac{1}{2}} M^*;$$

(H_4) $f(x, 0) = 0$, $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(x, u)}{u^r} = +\infty$ uniformément pour $x \in [0, +\infty)$.

Dans ce cas là, alors il existe un réel $\bar{\lambda} > 0$, où le problème (1) a au moins une solution u_λ pour chaque $\lambda \in (0, \bar{\lambda})$ qui vérifie :

$$\int_0^{+\infty} (u'(x)v'(x) + \eta u(x)v(x)) dx - \int_0^{+\infty} h(x)u^r(x)v(x) dx - \lambda \int_0^{+\infty} q(x)f(x, u)v(x) dx = 0,$$

pour tout $\varphi \in H_0^1(0, +\infty)$, c'est-à-dire, $\langle J'(u_\lambda), \varphi \rangle = 0$ pour tout $\varphi \in H_0^1(0, +\infty)$. Ainsi que u_λ est un point critique de la fonctionnelle J , qui est une solution faible (classique) de notre problème. Pour la démonstration, on a utilisé quelques lemmes et corollaire nécessaires ainsi que le principe variationnel d'Ekeland.



QUELQUES OUTILS D'ANALYSE FONCTIONNELLE

Dans ce chapitre, on donne quelques notions élémentaires qui sont nécessaire par la suite.

1.1 Espaces Normés, Banach et de Hilbert

Définition 1.1. (Espaces Normés) Un espace vectoriel X est dit être un espace normé si à chaque $x \in X$ il est associé un nombre réel non négatif $\|x\|$, appelé la norme de x , tels que nous avons

- (a) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, pour tous les x et y dans X ,
- (b) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ si $x \in X$ et α est un scalaire,
- (d) $\|x\| > 0$, si $x \neq 0$.

Remarque 1.1. Ici, le scalaire est un nombre qui peut appartenir à l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Chaque espace normé peut être considéré comme un espace métrique où la fonction de distance $dist(x; y) \equiv d(x; y)$ (la distance entre x et y) est donné par $\|x - y\|$ et satisfait :

- (a) $0 \leq d(x, y) < +\infty$ pour tous les x et y dans X ,
- (b) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- (c) $d(x, y) = d(y, x)$ pour tous les x et y dans X ,
- (d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ pour tous les x, y et z dans X .

Exemples 1.1. Voici quelques exemples de normes sur $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

- (a) $\|x\| = \left(x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$,
- (b) $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, pour tout $p \geq 1$
- (c) $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \dots |x_n|)$, si $p = \infty$.

Définition 1.2. (Suite de Cauchy) Une suite $\{u_n\}$ dans X est appelée une suite de Cauchy (dans la norme $\|\cdot\|$) si pour tout $\varepsilon > 0$ il y a un $N \in \mathbb{N}$ tels que, pour tous $m \geq n > N$, on a

$$\|u_m - u_n\| < \varepsilon.$$

Définition 1.3. (Espaces de Banach) Un espace vectoriel normé est dit complet si toutes les suites de Cauchy de l'espace vectoriel convergent. Espaces vectoriels normés complets sont appelés espaces de Banach.

Pour définir un espace de Hilbert, nous avons besoin de la notion d'espace de produit scalaire (voir [19]).

Définition 1.4. (Produit scalaire) Un produit scalaire sur un espace vectoriel X est une forme sesquilinéaire définie positive, à savoir une fonctionnelle $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, telle que pour tous $x, y, z \in X$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

- (a) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
- (b) $\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
- (c) $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$
- (d) $\langle x, x \rangle \geq 0$, et $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.

Proposition 1.1. [19] *Le produit scalaire est continu.*

Démonstration - Soit $x_n \rightarrow x$ et $y_n \rightarrow y$, alors comme y_n sont bornés, nous avons

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &\leq |\langle x_n - x, y_n \rangle| + |\langle x, y_n - y \rangle| \\ &\leq \|x_n - x\| \|y_n\| + \|x\| \|y_n - y\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que la prise de limites commute avec le produit scalaire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n, y_n \rangle = \langle \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n, \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n \rangle.$$

■

Définition 1.5. (Espaces de Hilbert) Un espace de Hilbert est un espace de produit scalaire qui est complet comme un espace métrique, et noté H .

1.2 Opérateurs linéaires bornés

Soit X et Y , deux espaces de Banach normés.

Définition 1.6. (Opérateur linéaire borné)[17] Soit A un opérateur linéaire, tel que $D(A) = X$ et $R(A) \subset Y$. On dit que A est borné, s'il est borné sur la boule unité $\bar{B}(0, 1)$. C'est-à-dire, si l'ensemble

$$\{\|Ax\|, \|x\| \leq 1\}$$

est borné.

Conformément à cette définition, si A est borné, il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout x avec $\|x\| \leq 1$, on a l'inégalité

$$\|Ax\| \leq c.$$

Théorème 1.1. [17] A est borné, si et seulement si, il existe une constante $c > 0$, telle que

$$\|Ax\| \leq c\|x\|,$$

pour tout $x \in X$.

Définition 1.7. (Convergence faible) On dit qu'une suite $(x_n) \in X$ converge faiblement vers x , si

$$\text{pour tout } f \in X', \langle f, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle,$$

et on écrit $x_n \rightharpoonup x$.

Proposition 1.2. [7] Soit (x_n) une suite de X . On a

1. Si $x_n \longrightarrow x$, alors $x_n \rightharpoonup x$.
2. Si $x_n \rightharpoonup x$, alors (x_n) est bornée et $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$.

Proposition 1.3. [7] Lorsque X est de dimension finie, une suite (x_n) converge faiblement, si et seulement si, elle converge fortement.

Définition 1.8. (Espace dual)[16] L'ensemble des fonctionnelles linéaires continues définies sur un espace vectoriel normé constitue un espace vectoriel. On l'appelle dual de l'espace X et on note X' .

On munit X' de la norme

$$\|f\|_{X'} = \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} |\langle f, x \rangle|, \quad \forall f \in X'.$$

X' muni de cette norme est un espace de Banach et on a l'inégalité

$$|\langle f, x \rangle| \leq \|f\|_{X'} \|x\|_X, \quad \forall f \in X', \quad \forall x \in X.$$

Définition 1.9. (Réflexivité) Soit X un espace de Banach et soit $\mathbf{i}$ l'injection canonique de X dans X'' . On dit que X est réflexif, si $\mathbf{i}(X) = X''$, où X'' est le bidual de X .

Définition 1.10. (Séparabilité) Soit (X, d) un espace métrique. On dit que X est séparable si X admet une partie dénombrable et dense.

Théorème 1.2. [7] Un espace de Banach X est réflexif, si et seulement si sa boule fermée est faiblement compacte.

Corollaire 1.1. [7] Si X est un espace de Banach réflexif, alors toute suite bornée $(x_n) \subset X$ avec $\|x_n\| \leq M$ contient une sous suite qui converge faiblement vers un élément $x \in X$ vérifiant $\|x\| \leq M$.

1.2.1 Continuité et compacité des opérateurs

On va considérer des opérateurs T de X dans Y et on va donner une définition concernant les propriétés de la continuité de T .

La notion plus simple est la suivante

Définition 1.11. L'opérateur $T : X \rightarrow Y$ est dit continu en x , si pour toute suite $(x_n) \subset X$ qui converge vers x , $T(x_n)$ converge vers $T(x)$.

T est dit continu sur $\Omega \subset X$ si T est continu en tout point $x \in \Omega$.

Définition 1.12. Un opérateur $T : X \rightarrow Y$ est dit compact s'il est continu et a la propriété. Pour toute suite (x_n) bornée dans X , la suite $(T(x_n))$ admet une sous suite convergente.

Définition 1.13. Soit $(X, \|\cdot\|_1)$ et $(Y, \|\cdot\|_2)$ deux espaces de Banach. Un opérateur $T : X \rightarrow Y$ est dit complètement continu s'il est continu et l'image de tout ensemble borné de X est relativement compact dans Y .

1.2.2 Cas particulier (l'injection continu et compact)

L'injection définissent les relations qui existent entre différents espaces fonctionnels. Ils sont très importants dans l'analyse moderne et les problèmes aux limites.

Définition 1.14. Soient X et Y deux espaces de Banach. On dit que X est injecté dans Y et on écrit $X \hookrightarrow Y$, si pour tout $x \in X$ on a $x \in Y$ et $\|x\|_Y \leq c\|x\|_X$, où la constante c ne dépend pas de $x \in X$. On définit l'opérateur d'injection $i : X \rightarrow Y$, qui nous permet de considérer le même élément $x \in X$ comme un élément de Y .

$X \hookrightarrow Y$ est équivalent à dire que l'opérateur d'injection $i : X \rightarrow Y$ est un opérateur linéaire continu.

Si $\|x\|_Y \leq c\|x\|_X$, pour tout $x \in X$ alors $\|i(x)\|_Y \leq c$ si $\|x\|_X \leq 1$.

Définition 1.15. Si $X \hookrightarrow Y$ et l'opérateur d'injection $i : X \rightarrow Y$ est un opérateur compact, alors on dit que X est injecté de manière compacte dans Y , et on écrit $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$. La compacité de l'opérateur $i : X \rightarrow Y$ est équivalent à dire que tout sous-ensemble borné de X est un sous-ensemble compact de Y .

1.2.3 Semi-continuité

Définition 1.16. 1. On dit qu'une fonctionnelle $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement (*s.c.i.*) au point x_0 , si pour chaque suite $(x_n) \subset \Omega$, telle que $x_n \rightarrow x_0$, on a

$$f(x_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

2. On dit que f est semi-continue supérieurement (*s.c.s.*) au point x_0 , si pour toute suite $(x_n) \subset \Omega$, telle que $x_n \rightarrow x_0$, on a

$$f(x_0) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

Exemple 1.1. 1. Soit la fonctionnelle $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Alors f est semi-continue inférieurement (*s.c.i.*) à $x_0 = 0$ mais n'est pas semi-continue supérieurement.

2. Soit la fonctionnelle $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Alors f est semi-continue supérieurement (*s.c.s.*) à $x_0 = 0$ mais n'est pas semi-continue inférieurement.

Définition 1.17. 1. Une fonctionnelle $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite faiblement semi-continue inférieurement (*f.s.c.i.*) au point x_0 , si pour chaque suite $(x_n) \subset \Omega$ telle que $x_n \rightharpoonup x_0$, on a

$$f(x_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

2. On dit que f est faiblement semi-continue supérieurement (*f.s.c.s.*) au point x_0 , si pour toute suite $(x_n) \subset \Omega$, telle que $x_n \rightharpoonup x_0$, on a

$$f(x_0) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

Exemple 1.2. Soit la fonctionnelle J définie sur un espace de Hilbert H comme suit

$$J : u \rightarrow \|u\|^2,$$

alors J est faiblement semi-continue inférieure (*f.s.c.i.*). En effet, soit (u_n) , telle que $u_n \rightharpoonup u$, on montre que

$$\|u\|^2 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|^2.$$

On a

$$\begin{aligned}\|u_n - u\|^2 &= (u_n - u, u_n - u) \\ &= \|u_n\|^2 - 2(u_n, u) + \|u\|^2 \geq 0,\end{aligned}$$

et comme $\mathcal{H}' = H$ et $u_n \rightharpoonup u$, donc

$$\forall u \in H : (u_n, u) \rightarrow (u, u) = \|u\|^2.$$

Alors

$$\|u_n\|^2 \geq \|u\|^2, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

il résulte que

$$\|u\|^2 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|^2.$$

- Remarque 1.2.** 1. Il est facile de voir que si f est continue en x_0 , alors f est $(s.c.s.)$ et $(s.c.i.)$ et inversement.
2. Si f est faiblement continue en x_0 , alors f est $(f.s.c.s.)$ et $(f.s.c.i.)$ et inversement.

1.2.4 Opérateurs différentiables

Dans la suite on donne quelques définitions et propriétés fondamentaux conciste l'opérateurs différentiables. Soient X et Y deux espaces de Banach, U un ouvert de X .

Définition 1.18. (La dérivée au sens de Fréchet) Soit $u \in U$ et $F : U \rightarrow Y$. On dit que F est différentiable au point u s'il existe une application linéaire continue $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, telle que si on considère

$$R(h) = F(u + h) - F(u) - A.h, \quad \text{pour } h \in X, \text{ petit.}$$

Alors

$$\frac{R(h)}{\|h\|} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \|h\| \rightarrow 0,$$

c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que si } \|h\|_X \leq \delta, \text{ alors } \|R(h)\|_Y \leq \varepsilon \|h\|_X.$$

Si une telle application $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ existe, elle est forcément unique. On note par

$$A = dF(u).$$

Elle est appelée différentielle (au sens de Fréchet) de F en u , ou encore application linéaire tangente à F en u . En l'absence de précision supplémentaire différentiable signifiera dans la suite différentiable au sens de Fréchet.

Exemples 1.2. 1. Si $F(u) = c$. Alors F Fréchet différentiable et

$$dF(u) = 0, \forall u.$$

2. Si $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ $A(u + h) - A(u) = A.h$ et donc $dA(u) = A, \forall u \in X$.

3. La fonctionnelle $F : H \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que

$$F(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 = \frac{1}{2}\langle u, u \rangle,$$

est Fréchet différentiable et

$$dF(u)h = \langle u, h \rangle.$$

4. La fonctionnelle $F : H \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$F(u) = \|u\|,$$

est Fréchet différentiable pour $u \neq 0$ et

$$dF(u)h = \frac{\langle u, h \rangle}{\|u\|}.$$

On a ensuite toutes les propriétés classiques.

Proposition 1.4. [14]

i) Soit F et G deux applications de U vers Y . Si F et G sont différentiables en $u \in U$. Alors $\forall \lambda, \mu$ réels $\lambda F + \mu G$ est différentiable en u , et

$$d(\lambda F + \mu G)(u) = \lambda dF(u) + \mu dG(u).$$

ii) Soit X, Y et Z trois espaces de Banach, U un ouvert de X , et V un ouvert de Y . Soit $F : U \rightarrow Y$ et $G : V \rightarrow Z$, tels que $F(U) \subset V$. Si F est différentiable en u et G est différentiable en $v = F(u)$, alors $G \circ F$ est différentiable en u et

$$d(G \circ F)(u) = dG(v) \circ dF(u), \quad v = F(u),$$

c'est-à-dire

$$d(G \circ F)(u)h = dG(v)[dF(u)h].$$

La différentielle de $G \circ F$ est donc la composition des applications linéaires continues $dF(u)$ et $dG(v)$, pour $v = F(u)$.

Définition 1.19. (Dérivée directionnelle) Soit $F : U \rightarrow Y, u \in U$. Soit $v \in X, v \neq 0$. On appelle dérivée directionnelle en u de F dans la direction v , notée $\partial_v F(u)$, la limite lorsqu'elle existe.

$$\partial_v F(u) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u + tv) - F(u)}{t}.$$

La notion de dérivée directionnelle est donc une extension de la notion de dérivée partielle. Si F est Fréchet différentiable, alors pour tout $v \in X$ la dérivée directionnelle dans la direction v est donnée par

$$\partial_v F(u) = dF(u)v.$$

En effet,

$$F(u + tv) = F(u) + dF(u)(tv) + R(tv).$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{F(u + tv) - F(u)}{t} &= dF(u)(v) + \frac{R(tv)}{t}, \\ \frac{R(tv)}{t} &\rightarrow 0, \text{ lorsque } t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Définition 1.20. (Différentiabilité au sens de Gâteaux) On dit que $F : U \rightarrow Y$ est Gâteaux différentiable en u (G-différentiable en u), s'il existe une application linéaire continue A de X vers Y , c'est-à-dire $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, telle que pour tout $v \in X$, la dérivée directionnelle de F en u dans la direction v existe et est égale à $A(v)$, c'est-à-dire

$$\partial_v F(u) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u + tv) - F(u)}{t} = A(v), \quad t \rightarrow 0, \quad \forall v \in X.$$

On vérifie alors que, si une telle application A existe, elle est unique. On note

$$A = d_G F(u).$$

Proposition 1.5. [14] Si F est Fréchet différentiable en u , elle est Gâteaux différentiable en u et

$$\partial_G F(u) = dF(u).$$

La réciproque est fausse en général, même en dimension finie.

Exemple 1.3. Soit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \right)^2, & \text{si } y \neq 0 \\ 0, & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

est G-différentiable à $(0, 0)$, mais pas différentiable au sens de Fréchet à $(0, 0)$.

Remarque 1.3. La G -différentiabilité n'implique pas la continuité de F .

Exemple 1.4. Soit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } y = x^2 \\ 0, & \text{si } y \neq x^2. \end{cases}$$

est G -différentiable à $(0, 0)$, mais n'est pas continue à $(0, 0)$, (alors que bien entendu la différentiabilité au sens de Fréchet l'implique).

Tandis que, si on sait que F est C^1 au sens de Gâteaux, alors F est Fréchet différentiable sur U et les deux notions coïncident et on a

Théorème 1.3. [14] Soit $F : U \rightarrow Y$ une application G -différentiable (U ouvert de X). On suppose que l'application $v \mapsto d_GF(v)$ est continue sur U . Alors F est Fréchet différentiable sur U et

$$dF(v) = d_GF(v), \quad \forall v \in U.$$

Démonstration - Soit $r \in (0, 1]$ tel que $B_r(u) \subset U$. Puisque $d_GF : U \rightarrow X'$ est continue à u , pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $\delta \in (0, 1]$ tel que

$$\|d_GF(u + tv) - d_GF(u)\| < \varepsilon \quad \text{pour } \|v\| < \delta, |t| < 1. \quad (1.1)$$

D'autre par, pour chaque $v \in B_r(0)$ la fonction

$$t \in [0, 1] \mapsto (d_GF(u + tv), v),$$

est la dérivée de la fonction

$$g(t) = F(u + tv) \quad t \in [0, 1].$$

Par conséquent

$$\int_0^1 (d_GF(u + tv), v) dt = g(1) - g(0) = F(u + v) - F(u).$$

Donc

$$F(u + v) - F(u) - (d_GF(u), v) = \int_0^1 (d_GF(u + tv) - d_GF(u), v) dt. \quad (1.2)$$

Soit

$$R(u, v) = \int_0^1 (d_GF(u + tv) - d_GF(u), v) dt.$$

D'après (1.1), pour tout $v \in B_\delta(0)$, nous avons que

$$\begin{aligned}\|R(u, v)\| &\leq \int_0^1 \|d_GF(u + tv) - d_GF(u)\| \|v\| dt \\ &\leq \varepsilon \|v\|.\end{aligned}$$

Pour cette raison $R(u, v) = o(\|v\|)$ quand $\|v\| \rightarrow 0$. Ensuite, (1.2) montre que $d_GF(u)$ est le dérivé de Fréchet de F à u . ■

Remarque 1.4. En pratique, il est plus facile de vérifier la différentiabilité au sens de Gâteaux. Si on veut prouver que F est C^1 , il suffit donc de prouver qu'elle est Gâteaux différentiable, puis de vérifier que la différentiable d_GF est continue.

1.3 Méthodes variationnelles et théorie des points critiques

Soit (E) une équation différentielle (ordinaire ou aux dérivées partielles), on veut l'étudier par une méthode variationnelle. Les solutions sont alors cherchées comme points critiques d'une fonctionnelle J définie sur un espace de Banach X bien précis telle que :

- i) J est au moins Gateaux-différentiable.
- ii) L'équation d'Euler correspondante : $d_G J(u) = 0$ est équivalente à (E) .

Dans le cas où J est minorée (respectivement majorée), il est raisonnable d'essayer de montrer que le minimum (respectivement le maximum) est atteint.

1.3.1 Points et valeurs critiques

Proposition 1.6. [14] Soit X un espace de Banach, et J une application de X vers $\mathbb{R}$, soit $u \in X$. On suppose que

$$J(u) = \inf_{v \in X} J(v),$$

c'est-à-dire

$$J(u) \leq J(v), \quad \forall v \in X.$$

Alors, si J est Gâteaux-différentiable en u , on a

$$d_G J(u) = 0.$$

Démonstration - Sous l'hypothèse de ce proposition, supposons sans perte de généralité que u_0 est un point minimum (sinon considérons la fonction $-J$ au lieu de J).

Comme $u_0 \in U$ et U est ouvert, il existe un nombre réel positif r tel que la boule ouverte $B_r(u_0)$ est contenu dans U .

Maintenant, soit $h \in X \setminus \{0\}$. Alors, pour chaque t tel que

$$|t| \leq \frac{r}{\|h\|}, \quad \text{on a,} \quad J(u_0 + th) \geq J(u_0),$$

et ainsi par le Gâteaux différentiabilité de J à u_0 , nous avons

$$d_G J(u_0)(h) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} [J(u_0 + th) - J(u_0)] \geq 0.$$

Il s'ensuit également que $d_G J(u_0)(-h) \geq 0$, i.e., $d_G J(u_0)(h) \leq 0$, par linéarité de $d_G J(u_0)$.

Par conséquent $d_G J(u_0)(h) = 0$, pour tout $h \in X$ en effet. Ainsi $d_G J(u_0) = 0$. ■

Définition 1.21. Soit $u_0 \in X$. On dit que u_0 est un minimum local pour J si il existe $\delta > 0$ tel que

$$J(u_0) \leq J(v), \quad \forall v \in B(u_0, \delta), \quad v \neq u_0.$$

On a alors

Proposition 1.7. [14] Soit $u_0 \in X$, un minimum local de J . Alors si J est Gâteaux différentiable en u_0 , alors

$$d_G J(u_0) = 0.$$

Définition 1.22. Soit J une fonctionnelle différentiable de X vers $\mathbb{R}$. Un point $u \in X$ est dit critique pour J ssi

$$dJ(u) = 0.$$

Définition 1.23. On appelle valeur critique, de la fonctionnelle J , de classe C^1 définie sur X , un nombre $c \in \mathbb{R}$, tel qu'il existe $u \in X$, tel que

$$J(u) = c, \quad dJ(u) = 0.$$

Pour les fonctionnelles convexes (ou espaces convexes), un résultat classique est donné par le théorème suivant

Théorème 1.4. [16] Soit C un ensemble convexe fermé de X , Banach réflexif.

Soit $J : C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On suppose

(i) J coercive et $J \neq +\infty$, c'est-à-dire

$$\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} J(u) = +\infty.$$

(ii) J (s.c.i) pour la convergence faible. Alors il existe $u \in C$, tel que

$$J(u) = \inf_{v \in C} J(v) \quad (< +\infty).$$

Si de plus J est Gâteaux-différentiable en u , alors $d_G J(u) = 0$.

1.3.2 Suite minimisante et infimum

Définition 1.24. (Suite minimisante) Une suite minimisante d'une fonctionnelle $J : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est une suite (x_n) telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J(x_n) = \inf_{x \in X} J(x)$$

Théorème 1.5. [14] Soit X un espace de Banach réflexif, et J une fonctionnelle définie sur X , telle que

1. J est (f.s.c.i),
2. la suite minimisante de J est bornée sur X ,

alors J atteint son infimum sur X .

1.4 Espaces de Lebesgue L^p

Dans la suite, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue dx .

Définition 1.25. Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, on définit

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty\}.$$

On note $\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$, et $\|\cdot\|_{L^p}$ est une norme.

Définition 1.26. On pose

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable et } \exists C : |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C : |f(x)| \leq C, \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

Théorème 1.6. (Théorème de convergence dominée de Lebesgue)[7] Soit (f_n) une suite de fonctions de L^1 . On suppose que

(a) $(f_n(x)) \rightarrow f(x)$ p.p. Sur Ω .

(b) Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$, telle que pour chaque n , $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. Sur Ω . Alors

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Théorème 1.7. [7] L'espace L^p est réflexif pour $1 < p < \infty$, et son dual est L^q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Théorème 1.8. (Inégalité de Cauchy-Schwarz)[7] Soit f et $g \in L^2(\Omega)$. Alors, nous avons que

$$\int_{\Omega} |fg| \leq \left(\int_{\Omega} |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |g|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 1.9. (Inégalité de Hölder)[7] Soit $1 \leq p \leq +\infty$, on note q l'exposant conjugué, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Suppose que $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$. Alors

(i) $fg \in L^1(\Omega)$ et

$$(ii) \int_{\Omega} |fg| \leq \left(\int_{\Omega} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |g|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \|g\|_q.$$

1.4.1 Lemme de compacité

Lemme 1.1. (C. Corduneanu)[1] Soit $D \subset C_l([0, +\infty), \mathbb{R})$ un ensemble borné. Alors D est relativement compact si les conditions suivantes sont vérifiées :

(a) D est équicontinu sur tout sous-intervalle compact de $\mathbb{R}^+$, i.e.

$$\forall J \subset [0, +\infty) \text{ compact}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_1, x_2 \in J :$$

$$|x_1 - x_2| < \delta \implies |u(x_1) - u(x_2)| \leq \varepsilon, \forall u \in D,$$

(b) D est équi-convergent à $+\infty$ i.e.,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists T = T(\varepsilon) > 0 \text{ tel que}$$

$$\forall x : x \geq T(\varepsilon) \implies |u(x) - u(+\infty)| \leq \varepsilon, \forall u \in D.$$

PRINCIPE VARIATIONNEL D'EKELAND, QUELQUES THÉORIES

Dans ce chapitre, on étudie le principe variationnel d'Ekeland et quelques résultats théoriques.

2.1 Principe variationnel d'Ekeland

Soit X un espace métrique complet et $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle semi-continu inférieur, bornée inférieurement. Si $(u_n)_n$ est une suite minimisante, alors pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe n_0 tel que pour $n > n_0$

$$J(u_n) \leq \inf_X J + \varepsilon.$$

On dit que $u = u_\varepsilon$ est un ε - minimiseur de J si

$$J(u) \leq \inf_X J + \varepsilon.$$

Le théorème d'Ekeland considère l'existence des points ε - minimiseur.

Théorème 2.1. (*principe variationnel d'Ekeland, forme forte 1974*)([11], [9])

Soit (X, d) un espace métrique complet et $J : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonctionnelle semi-continu inférieur, bornée inférieurement, et non identiquement égale à $+\infty$ ($J \not\equiv +\infty$).

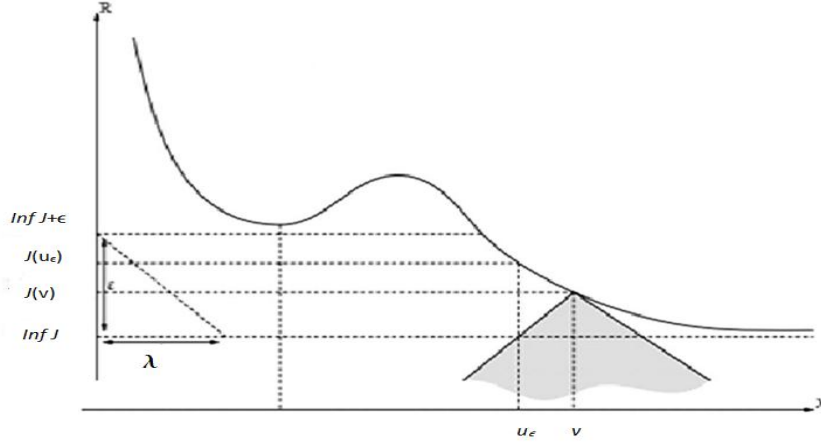
Soit $\varepsilon > 0$ et $u = u_\varepsilon \in X$ qui donne tel que

$$J(u) \leq \inf_X J + \varepsilon.$$

Alors, pour tout $\lambda > 0$ il existe $v = v_\varepsilon \in X$ tel que

- (a) $J(v) \leq J(u)$,
- (b) $d(u, v) \leq \lambda$, et
- (c) $J(v) < J(w) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(w, v)$, pour tout $w \in X \setminus \{v\}$.

FIGURE 2.1 – Principe variationnel Ekeland et ε –minimiseur



Pour preuve théorème 2.1, nous avons besoin à le théorème suivant

Théorème 2.2. (Intersection de Cantor)[4] Supposons que (X, d) soit un espace métrique complet, et $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de sous-ensembles imbriqués fermés non vides de X , tels que

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$$

dont les diamètres tendent à zéro ($\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam} A_n = 0$). Alors, l'ensemble $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est constitué d'un unique point.

Démonstration - Pour simplifié, on dénote $d_\lambda(u, v) := \frac{1}{\lambda}d(u, v)$ et définir une relation d'ordre partiel dans X

$$u \prec v \Leftrightarrow J(u) \leq J(v) - \varepsilon d_\lambda(u, v).$$

On a

$$u \prec u \quad \forall u \in X$$

$$u \prec v, v \prec u \Rightarrow u = v, \quad \forall u, v \in X$$

$$u \prec v, v \prec w \Rightarrow u \prec w, \quad \forall u, v, w \in X.$$

Prouvons la transitivité. Supposons que pour $u, v, w \in X$, $u \prec v$ et $v \prec w$, ce qui signifie

$$u \prec v \Leftrightarrow J(u) \leq J(v) - \varepsilon d_\lambda(u, v),$$

et

$$v \prec w \Leftrightarrow J(v) \leq J(w) - \varepsilon d_\lambda(v, w).$$

Nous prouvons que

$$u \prec w \Leftrightarrow J(u) \leq J(w) - \varepsilon d_\lambda(u, w).$$

En effet, nous avons

$$\begin{aligned} J(u) &\leq J(v) - \varepsilon d_\lambda(u, v) \\ &\leq J(w) - \varepsilon(d_\lambda(v, w) + d_\lambda(u, v)) \\ &\leq J(w) - \varepsilon d_\lambda(u, w). \end{aligned}$$

Maintenant définir une suite de sous-ensembles $(S_n)_n$. Soit $u_1 = u$ et

$$S_1 := \{w \in X : w \prec u_1\}.$$

On construit inductivement une suite $(u_n)_n$ comme suit :

$$\begin{aligned} u_2 &\in S_1 \quad J(u_2) \leq \inf_{S_1} J + \frac{\varepsilon}{2^2} \\ S_2 &= \{w \in X : w \prec u_2\}, \dots \\ S_n &= \{w \in X : w \prec u_n\} \\ u_{n+1} &\in S_n \quad J(u_{n+1}) \leq \inf_{S_n} J + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} S_1 \supset S_2 \supset \dots \supset S_n \supset S_{n+1} \supset \dots \\ u_1 \succ u_2 \succ \dots \succ u_n \succ u_{n+1} \succ \dots \end{aligned}$$

Chaque S_n est fermé. En effet, soit $v_i \in S_n$ et $\lim_{i \rightarrow \infty} v_i = v \in X$ ce qui signifie

$$J(v_i) \leq J(u_n) - \varepsilon d_\lambda(v_i, u_n).$$

Passant à la limite comme $i \rightarrow \infty$, par la semi-continuité inférieure de J et continuité de la distance d_λ , on a

$$J(v) \leq J(u_n) - \varepsilon d_\lambda(v, u_n).$$

Ce qui signifie que $v \in S_n$.

Ensuite, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam} S_n = 0. \quad (2.1)$$

En effet, soit $w \in S_n$

$$J(w) \leq J(u_n) - \varepsilon d_\lambda(w, u_n).$$

Par $w \in S_n \subset S_{n-1}$

$$J(u_n) \leq \inf_{S_{n-1}} J + \frac{\varepsilon}{2^n} \leq J(w) + \frac{\varepsilon}{2^n},$$

et

$$J(u_n) - \frac{\varepsilon}{2^n} \leq J(w) \leq J(u_n) - \varepsilon d_\lambda(w, u_n).$$

Alors, ça donne la suit

$$d_\lambda(w, u_n) \leq \frac{1}{2^n}, \quad \forall w \in S_n.$$

Puis pour w_1 et $w_2 \in S_n$

$$d_\lambda(w_1, w_2) \leq d_\lambda(w_1, u_n) + d_\lambda(u_n, w_2) \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \forall w \in S_n,$$

ce qui prove (2.1).

D'après théorème d'intersection de Cantor (théorème 2.2), il existe unique $v \in X$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \{v\}.$$

Nous prouvons que v satisfait (a) – (c).

Puisque $v \in S_1$ et $v \prec u_1 = u$. Ainsi, nous obtenons $J(v) \leq J(u) - \varepsilon d_\lambda(v, u) \leq J(u)$, lequel est (a).

Soit $w \neq v$. Si $w \prec v$ on a $w \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ et alors $w = v$. Donc

$$J(w) > J(v) - \varepsilon d_\lambda(w, v),$$

ce preuve que (c).

Enfin, par $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = v$ et

$$d_\lambda(u, u_n) \leq \sum_{i=1}^{n-1} d_\lambda(u_i, u_{i+1}) \leq \sum_{i=1}^{n-1} 2^{-i} \leq 1,$$

il en résulte que $d_\lambda(u, v) \leq 1$, qui complète la preuve. ■

La constante λ en théorème 2.1 le rend très flexible. Un choix fréquent est de prendre $\lambda = \sqrt{\varepsilon}$ et donc pour équilibrer les perturbations dans (b) et (c), nous obtenons la propriété suivante.

Théorème 2.3. ([6], [5])

Soit (X, d) un espace métrique complet et soit $J : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonctionnelle (s.c.i.), bornée inférieurement. Suppose que $\varepsilon > 0$ et $u_\varepsilon \in X$ satisfait

$$J(u_\varepsilon) \leq \inf_X J + \varepsilon.$$

Alors, il existe $v \in X$ tel que

- (a) $d(u_\varepsilon, v) \leq \sqrt{\varepsilon}$,
- (b) $J(v) + \sqrt{\varepsilon} d(u_\varepsilon, v) \leq J(u_\varepsilon)$, et
- (c) $J(x) + \sqrt{\varepsilon} d(x, v) > J(v)$, pour tout $x \in X$.

Démonstration - Posons $\lambda = \sqrt{\varepsilon}$ dans le théorème 2.1 ■

Théorème 2.4. (Principe variationnel d'Ekeland)[8] Soit $J : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ une fonction propre semi-continue inférieurement bornée inférieurement. Pour chaque $u \in \mathcal{D}(J)$ et chaque $\varepsilon > 0$ fixé. Alors, il existe $v \in X$ tel que

$$(a) \quad J(v) - J(u) + \varepsilon d(u, v) \leq 0,$$

$$(b) \quad J(v) < J(x) + \varepsilon d(x, v), \text{ pour tout } x \in X \setminus \{v\}.$$

Remarque 2.1. Principe variationnel d'Ekeland (2.1), équivalent au théorème 2.4, pour plus détail voir [8].

2.1.1 Autres formes

Nous présentons quelques corollaires dérivés de principe d'Ekeland.

Théorème 2.5. (Principe variationnel d'Ekeland, forme faible 1979)[9]

Soit (X, d) est un espace métrique complet et soit $J : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonctionnelle qui est semi-continu inférieur, bornée inférieurement. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u_\varepsilon \in X$ qui satisfait

$$J(u_\varepsilon) \leq \inf_X J + \varepsilon,$$

et chaque fois $w \in X$ avec $w \neq u_\varepsilon$, alors

$$J(u_\varepsilon) < J(w) + \varepsilon d(u_\varepsilon, w).$$

Démonstration - Nous montrons que il existe u_ε un ε - minimiseur. Soit $\varepsilon > 0$ et on mettet

$$\varepsilon_0 = \min\left\{\frac{1}{2}, \varepsilon^2\right\},$$

pour que $0 < \varepsilon < 1$ on a $\varepsilon_0 \leq \varepsilon$. Alors par la propriété de l'infimum

$$\exists u_0 \in X \text{ tel que } J(u_0) < \inf_X J + \varepsilon_0^2.$$

Alors u_0 est un ε_0^2 - minimiseur de J . Soit

$$\kappa_0 := \frac{1}{\varepsilon_0} > 1,$$

afin que on peut appliquer le théorème 2.1 pour obtenir l'existence de certains $u_\varepsilon \in X$ tel que

$$J(u_\varepsilon) < J(w) + \varepsilon_0^2 \kappa_0 d(w, u_\varepsilon), \quad \forall w \neq u_\varepsilon.$$

Puisque $\kappa_0 := \frac{1}{\varepsilon_0}$, on a $J(u_\varepsilon) < J(w) + \varepsilon_0 d(w, u_\varepsilon)$, $\forall w \neq u_\varepsilon$,
et comme, $\varepsilon_0 < \varepsilon$, donc on obtient

$$J(u_\varepsilon) < J(w) + \varepsilon d(w, u_\varepsilon), \quad \forall w \neq u_\varepsilon.$$

Aussi, de théorème 2.1, on a que

$$J(u_\varepsilon) \leq J(u_0) < \inf_X J + \varepsilon_0^2 < \inf_X J + \varepsilon,$$

ce qui implique que u_ε est un ε - minimiseur de J . ■

Corollaire 2.1. ([6], [18])

Soit X est un espace de Banach $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle (s.c.i.), bornée inférieurement et Gâteaux différentiable. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ et toute $u_\varepsilon \in X$ tel que

$$J(u_\varepsilon) \leq \inf_X J + \varepsilon,$$

il existe un point v dans X satisfaisant

- (1) $J(v) \leq J(u_\varepsilon)$,
- (2) $\|v - u_\varepsilon\| \leq \sqrt{\varepsilon}$, et
- (3) $\|J'(v)\| \leq \sqrt{\varepsilon}$.

Démonstration - Les relations (1) et (2) sont évidemment les (a) et (b) dans principe variationnel d'Ekeland pour $\lambda = \sqrt{\varepsilon}$, tandis que pour (3), de la relation (c) on a, pour tout $w \in X$ et tout $t > 0$,

$$\frac{1}{t}[J(v) - J(v + tw)] \leq \sqrt{\varepsilon}\|w\|.$$

Passant à la limite comme t tend vers 0, nous obtenons cela pour chaque w dans X

$$-\langle J'(v), w \rangle \leq \sqrt{\varepsilon}\|w\|.$$

Cela vaut aussi pour $-w$, alors

$$|\langle J'(v), w \rangle| \leq \sqrt{\varepsilon}\|w\|,$$

et alors

$$\|J'(v)\| \leq \sup_{\|w\|=1} |\langle J'(v), w \rangle| \leq \sqrt{\varepsilon}. \quad \blacksquare$$

Remarque 2.2. Les relations (1) et (3) signifie que nous avons obtenu un (presque minimiseur) de J , qui est aussi un (presque point critique).

Corollaire 2.2. [18] Soit $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ est un C^1 -fonctionnel qui est semi-continu inférieur et (u_n) est une suite minimisante. Alors, il existe une autre suite minimisante (v_n) tel que

- (1) $J(v_n) \leq J(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - v_n\| = 0$, et
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|J'(v_n)\| = 0$.

Démonstration - J bornée inférieurement implique que $\inf_X J = c \in \mathbb{R}$. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n) = c$ implique par propriété d'infimum et définition de limites que, il existe n_0 tel que,

$$J(u_n) \leq \inf_X J + \frac{1}{n^2}, \text{ pour tout } n > n_0.$$

Alors par théorème 2.1, il existe une suite (v_n) tel que

- (3) $J(v_n) \leq J(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$
- (4) $\|u_n - v_n\| \leq \frac{1}{n}$, et
- (5) $\|J'(v_n)\| \leq \frac{1}{n}$.

En prenant la limite lorsque n tend vers $+\infty$ dans les deux cotés de (4) et (5), on obtient le résultat. ■

2.1.2 Principe variationnel d'Ekeland dans $\mathbb{R}^n$

Théorème 2.6. [5] Soit $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ semi-continue inférieurement et bornée inférieurement sur $\mathbb{R}^n$. Soit $\lambda > 0$, $p \geq 1$ et $\varepsilon > 0$ étant donnée. Soit u un minimiseur à $\varepsilon > 0$ près de J sur $\mathbb{R}^n$, i.e. vérifiant

$$J(u) \leq \inf_{\mathbb{R}^n} J + \varepsilon,$$

Alors il existe $v \in \mathbb{R}^n$ tel que :

- (i) $J(v) \leq J(u)$ [et même $J(v) + \frac{\varepsilon}{\lambda} \|v - u\|^p \leq J(u)$],
- (ii) $\|v - u\| \leq \lambda$,
- (iii) $\forall x \in \mathbb{R}^n : J(v) + \frac{\varepsilon}{\lambda^p} \|v - u\|^p \leq J(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda^p} \|x - u\|^p$.

Démonstration - Considerons la fonctionnelle $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par

$$\varphi(x) = J(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda^p} \|x - u\|^p$$

J est s.c.i. et bornée inférieurement sur $\mathbb{R}^n$ et $\|x - u\|^p \rightarrow +\infty$ quand $\|x\| \rightarrow +\infty$. Ces deux raisons font que φ est s.c.i. et coercive sur $\mathbb{R}^n$ (i.e. $\varphi(x) \rightarrow +\infty$ quand $\|x\| \rightarrow +\infty$).

Par conséquent "et c'est là que la dimension finie de $X = \mathbb{R}^n$ joue un rôle", alors d'après théorème 1.4 (voir le premier chapitre), il existe $v \in \mathbb{R}^n$ minimisant φ sur $\mathbb{R}^n$. Vérifions que ce v

fait notre affaire.

Point (i). $\varphi(v) \leq \varphi(u)$, soit $J(v) + \frac{\varepsilon}{\lambda} \|v - u\|^p \leq J(u)$.

Point (ii). On a

$$\begin{aligned} \inf_{\mathbb{R}^n} J + \frac{\varepsilon}{\lambda^p} \|v - u\|^p &\leq J(v) + \frac{\varepsilon}{\lambda} \|v - u\|^p \\ &\leq J(u) \leq \inf_{\mathbb{R}^n} J + \varepsilon \end{aligned}$$

d'où $\frac{\varepsilon}{\lambda} \|v - u\|^p$ et donc $\|v - u\| \leq \lambda$.

Point (iii). $\varphi(v) \leq \varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ se traduit par :

$$J(v) + \frac{\varepsilon}{\lambda^p} \|v - u\|^p \leq J(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda^p} \|x - u\|^p, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n,$$

c'est-à-dire l'inégalité de (iii) annoncée. ■

Remarque 2.3. Dans le cas particulier où $p = 1$, l'inégalité (iii) du théorème ci-dessus dit :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : J(v) + \frac{\varepsilon}{\lambda} \|v - u\| \leq J(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} \|x - u\|.$$

Il s'ensuit :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : J(v) \leq J(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} [\|x - u\| - \|v - u\|] \leq J(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} \|x - v\|,$$

ce qui est (l'essentiel de) l'inégalité (iii) du théorème d'Ekeland-forme forte .

2.1.3 Principe variationnel d'Ekeland et la complétude

Théorème 2.7. [6], [15] Soit (X, d) un espace métrique. Alors X est complet si et seulement pour toute fonctionnelle $J : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ semi-continue inférieurement bornée inférieurement et pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un point $\bar{x}$ satisfait

$$J(\bar{x}) \leq \liminf_X J(x) + \varepsilon, \quad (2.2)$$

et

$$J(x) + \varepsilon d(x, \bar{x}) \geq J(\bar{x}), \quad \forall x \in X. \quad (2.3)$$

Démonstration -

" $\Rightarrow$ " Si l'espace métrique (X, d) est complet et la fonctionnelle J semi-continue inférieurement bornée inférieurement, alors (2.2) et (2.3) sont découle du théorème 2.5

" $\Leftarrow$ " Dans le cas inverse. Soit (x_n) une suite de Cauchy. Alors, la fonctionnelle

$$J(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x)$$

est bien définie et positive. Puisque la fonctionnelle de distance est Lipschitz par rapport à x , nous voyons que J est continue. De plus, comme (x_n) est une suite de Cauchy, nous avons $J(x_n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, de sorte que $\inf_X J = 0$.

Pour $\varepsilon \in (0, 1)$. On choisit $\bar{x}$ tel que $J(\bar{x}) \leq \varepsilon$ et

$$J(\bar{x}) \leq J(x) + \varepsilon d(x, \bar{x}), \quad \forall x \in X. \quad (2.4)$$

En pose $x = x_n$ dans (2.4) et en passe à la limite quand $n \rightarrow \infty$, on obtient

$$J(\bar{x}) \leq \varepsilon J(\bar{x}) \text{ de sorte que } J(\bar{x}) = 0. \text{ C'est-à-dire } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}.$$

■

2.2 Application aux quelques théorèmes de point fixe et minimizations

En 1972, Ekeland a obtenu son fameux principe variationnel qui a conduit à de nombreuses applications notamment dans la théorie des points fixe (comme Banach, Caristi et Clarke) et aussi dans la théorie de points critiques comme (théorème minimization de Takahashi et lemme du Col,...).

Mais on restreindre dans ce paragraphe à certaines de ces théorèmes.

2.2.1 Le théorème du point fixe de Caristi

Théorème 2.8. (Caristi)[4] Soit $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle semi-continue inférieurement bornée inférieurement. Soit $f : X \rightarrow X$ une fonction quelconque telle que

$$d(x, f(x)) \leq J(x) - J(f(x)) \text{ pour tout } x \in X.$$

Alors f a un point fixe.

Maintenant, voici une démonstration du théorème de Caristi grâce à principe variationnel d'Ekeland

Démonstration - D'après Théorème 2.8, supposons au contraire que $v \neq f(v)$, $\forall v$, on choisissons $u \in X$ tel que

$$J(u) \leq \inf_{x \in X} J(x) + 1.$$

Par le Théorème 2.4 il existe $v \in X$, pour tout $x \in X$ et par l'hypothèse de Théorème de Caristi on a

$$\begin{cases} d(x, v) > J(v) - J(x), & x \neq v, \\ d(v, f(v)) \leq J(v) - J(f(v)). \end{cases}$$

Comme $x \neq v$, on pose $x = f(v)$ on obtient

$$\begin{cases} d(f(v), v) > J(v) - J(f(v)), \\ d(v, f(v)) \leq J(v) - J(f(v)). \end{cases}$$

Contradiction, on en déduit que $f(v) = v$ est un point fixe . ■

2.2.2 Théorème minimization de Takahashi

Le théorème de Takahashi découle du théorème de principe variationnel d'Ekeland (EVP).

Théorème 2.9. (Théorème minimization de Takahashi)[8] Soit (X, d) un espace métrique complet et $J : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonctionnelle propre, semi-continue inférieure, et bornée inférieurement. Supposons que, pour chaque $x_0 \in X$ avec $\inf_{x \in X} J(x) < J(x_0)$, il existe $z \in X$ tel que $z \neq x_0$ et

$$J(z) + d(x_0, z) \leq J(x_0).$$

Alors, il existe $\bar{x} \in X$ tel que $J(\bar{x}) = \inf_{x \in X} J(x)$, c'est-à-dire que $\bar{x}$ est une solution de problème d'optimisation.

Démonstration - Maintenant, nous prouvons théorème 2.9 en utilisant théorème 2.4. Par théorème 2.4, pour tous $\varepsilon > 0$ et $\lambda = 1$, il existe $\bar{x} \in X$ tel que

$$J(\bar{x}) < J(x) + \varepsilon d(x, \bar{x}), \quad \forall x \in X \text{ avec } x \neq \bar{x}. \quad (2.5)$$

On montre que $J(\bar{x}) = \inf_{x \in X} J(x)$.

Supposons au contraire qu'il existe $\bar{x} \in X$ tel que $J(\bar{x}) > \inf_{x \in X} J(x)$.

Par hypothèse de théorème minimization de Takahashi, il existe $v \in X$ tel que $v \neq \bar{x}$ et

$$J(v) + d(\bar{x}, v) \leq J(\bar{x}). \quad (2.6)$$

Posons : $x = v$ dans (2.5), alors on a

$$J(\bar{x}) < J(v) + \varepsilon d(v, \bar{x}), \quad \forall v \in X \text{ avec } v \neq \bar{x}.$$

et

$$J(v) + d(\bar{x}, v) \leq J(\bar{x}), \text{ pour } \varepsilon = 1$$

on obtient une contradiction. Par conséquent, nous devons avoir $J(\bar{x}) = \inf_{x \in X} J(x)$. ■

Remarque 2.4. Le théorème de Caristi 2.8 et le théorème de minimization de Takahashi 2.9 sont équivalents à le principe variationnel d'Ekeland 2.1, pour plus détail voir ([8], [15]).

EXISTENCE DE SOLUTIONS POUR UN PROBLÈME PERTURBÉ DE SECOND ORDRE SUR LA DEMI-LIGNE PAR LE PRINCIPE VARIATIONNEL D'EKELAND

Dans ce chapitre, nous présenterons une application du principe variationnel d'Ekeland pour la résolution d'équations différentielles et nous choisirons comme exemple l'article qui a été publié par les auteurs D. Bouafia, John R. Graef et T. Moussaoui en 2018 (voir [2]). C'est un bon exemple pour étudier l'existence de solutions à un problème aux limites du second ordre

3.1 Introduction

Nous étudierons l'existence de solutions au problème de Dirichlet perturbé

$$\begin{cases} -u''(x) + \eta u(x) = h(x)u^r(x) + \lambda q(x)f(x, u(x)), & x \in [0, +\infty), \\ u(0) = u(+\infty) = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

où $f : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, η et λ sont des paramètres réels positifs, et $0 < r < 1$.

nous supposons que durant ce chapitre, les hypothèses suivantes sont satisfaites :

(H_0) Il y a des constantes $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ telle que

$$|f(x, u)| \leq a|u|^r + b, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^+ \text{ et } u \in \mathbb{R};$$

(H_1) h et $q : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ appartenir à $L^1[0, +\infty) \cap L^\infty[0, +\infty)$;

(H_2) Il existe une fonction continuellement différentiable et bornée $p : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ de telle sorte que les fonctions $\frac{h}{p^r}, \frac{h}{p^{r+1}}, \frac{q}{h}, \frac{q}{p^r}, \frac{q}{p^2}$, et $\frac{h^{\frac{2}{1-r}}}{q^{\frac{1}{1-r}}}$ toutes appartiennent à $L^1[0, +\infty)$;

(H_3) $M = \max\{\|p\|_{L^2}, \|p'\|_{L^2}\} < +\infty$,

$$M_0 = \int_0^{+\infty} q(x) \left(\int_0^x \frac{ds}{p(s)} \right) dx < +\infty,$$

$$M^* = \left[\int_0^{+\infty} h(x) \left(\int_0^x \frac{ds}{p(s)} \right)^{\frac{r+1}{2}} dx \right]^{\frac{1}{r+1}} < +\infty,$$

et

$$M_1 = \left[\sup_{x \geq 0} p(x) \right]^{\frac{1}{2}} M^*;$$

$$(H_4) \quad f(x, 0) = 0, \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(x, u)}{u^r} = +\infty \text{ uniformément pour } x \in [0, +\infty).$$

Nous introduisons maintenant un espace de Hilbert qui sera un cadre approprié pour notre problème. Soit

$$H_0^1(0, +\infty) = \{u \text{ mesurable} : u, u' \in L^2(0, +\infty), u(0) = u(+\infty) = 0\}$$

muni de la norme usuelle

$$\|u\| = \left(\int_0^{+\infty} |u'(x)|^2 dx + \eta \int_0^{+\infty} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

associé au produit scalaire

$$(u, v) = \int_0^{+\infty} u'(x) \cdot v'(x) dx + \eta \int_0^{+\infty} u(x) \cdot v(x) dx.$$

Soit l'espace $C_{l,p}[0, +\infty)$ défini par

$$C_{l,p}[0, +\infty) = \{u \in C([0, +\infty), \mathbb{R}) : \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x)u(x) \text{ existe} \}$$

avec la norme correspondante donnée par

$$\|u\|_{\infty,p} = \sup_{x \in [0, +\infty)} p(x)|u(x)|.$$

Nous considérons aussi les espaces $L_q^2(0, +\infty)$ et $L_h^{r+1}(0, +\infty)$ définis par

$$L_q^2(0, +\infty) = \{u : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable et } \sqrt{q}u \in L^2(0, +\infty)\}$$

et

$$L_h^{r+1}(0, +\infty) = \{u : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable et } \int_0^{+\infty} h(x)|u|^{r+1} dx < +\infty\},$$

équipés de leurs normes respectives

$$\|u\|_{L_q^2} = \left(\int_0^{+\infty} q(x)u^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \text{ et } \|u\|_{L_h^{r+1}} = \left(\int_0^{+\infty} h(x)|u|^{r+1} dx \right)^{\frac{1}{r+1}}. \quad (3.2)$$

Dans la suite, nous donnons quelques lemmes nécessaires.

Lemme 3.1. [1] $H_0^1(0, +\infty)$ s'injecte de manière continu et compact dans $C_{l,p}[0, +\infty)$.

Démonstration - Etape-1 : On montre l'injection continu de l'espace $H_0^1(0, +\infty)$ dans $C_{l,p}[0, +\infty)$.

Pour $u \in H_0^1(0, +\infty)$, nous avons

$$\begin{aligned}
 |p(x)u(x)| &= |p(+\infty)u(+\infty) - p(x)u(x)| = \left| \int_x^{+\infty} (pu)'(s)ds \right| \\
 &\leq \left| \int_x^{+\infty} p'(s)u(s)ds \right| + \left| \int_x^{+\infty} p(s)u'(s)ds \right| \\
 &\leq \left(\int_0^{+\infty} p'^2(s)ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{+\infty} u^2(s)ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \left(\int_0^{+\infty} p^2(s)ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{+\infty} u'^2(s)ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq 2 \max(\|p'\|_{L^2}, \|p\|_{L^2}) \|u\|.
 \end{aligned}$$

Alors

$$\|u\|_{\infty,p} \leq 2M\|u\|.$$

Etape-2 : On montre l'injection compact de l'espace $H_0^1(0, +\infty)$ dans $C_{l,p}[0, +\infty)$.

Pour prouver que $H_0^1(0, +\infty)$ s'injecte de manière compacte dans $C_{l,p}[0, +\infty)$, nous avons besoin du critère compacité de Corduneanu (voir lemme 1.1, [1] dans chapitre I).

Soit $D \subset H_0^1(0, +\infty)$ est un ensemble bornée. Alors il est bornée dans $C_{l,p}[0, +\infty)$ par étape-1.

Soit $R > 0$ telle que pour tout $u \in D$, $\|u\| \leq R$.

(a) D est équicontinu pour tout sous-intervalle compact de $[0, +\infty)$. Soit $u \in D$ et $x_1, x_2 \in J \subset$

$[0, +\infty)$ où J est un sous intervalle compact. On utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$\begin{aligned}
|p(x_1)u(x_1) - p(x_2)u(x_2)| &= \left| \int_{x_2}^{x_1} (pu)'(s) ds \right| \\
&= \left| \int_{x_2}^{x_1} p'(s)u(s) + u'(s)p(s) ds \right| \\
&\leq \left(\int_{x_2}^{x_1} p'^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{x_2}^{x_1} u^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \left(\int_{x_2}^{x_1} p^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{x_2}^{x_1} u'^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2 \max \left[\left(\int_{x_2}^{x_1} p'^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}}, \left(\int_{x_2}^{x_1} p^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \right] \|u\| \\
&\leq 2R \max \left[\left(\int_{x_2}^{x_1} p'^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}}, \left(\int_{x_2}^{x_1} p^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \right] \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

comme $|x_1 - x_2| \rightarrow 0$.

(b) D est équiconvergent à $+\infty$. pour $x \in [0, +\infty)$ et $u \in D$, en utilisant le fait que $(pu)(+\infty) = 0$ (note $u(\infty) = 0$ et p est bornée) et utilisant l'inégalité Cauchy-Schwartz. On a

$$\begin{aligned}
|(pu)(x) - (pu)(+\infty)| &= \left| \int_x^{+\infty} (pu)'(s) ds \right| \\
&= \left| \int_x^{+\infty} p'(s)u(s) + u'(s)p(s) ds \right| \\
&\leq 2 \max \left[\left(\int_x^{+\infty} p'^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}}, \left(\int_x^{+\infty} p^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \right] \|u\| \\
&\leq 2R \max \left[\left(\int_x^{+\infty} p'^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}}, \left(\int_x^{+\infty} p^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \right] \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

quand $x \rightarrow +\infty$. ■

Lemme 3.2. [3] $C_{l,p}[0, +\infty)$ s'injecte de manière continu dans $L_q^2(0, +\infty)$.

Démonstration - Pour tous $u \in C_{l,p}[0, +\infty)$ on a

$$\begin{aligned}\|u\|_{L_q^2}^2 &= \int_0^{+\infty} q(x)u^2(x)dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{q(x)}{p^2(x)}p^2(x)u^2(x)dx \\ &\leq c\|u\|_{\infty,p}^2,\end{aligned}$$

où $c = \|\frac{q}{p^2}\|_{L^1}$. Alors $\|u\|_{L_q^2} \leq \sqrt{c}\|u\|_{\infty,p}$. ■

Une conséquence immédiate de ces deux lemmes est le résultat suivant.

Corollaire 3.1. [3] $H_0^1(0, +\infty)$ s'injecte de manière continu et compact dans $L_q^2(0, +\infty)$.

Nous avons également besoin des résultats suivants dans le reste de notre travail.

Lemme 3.3. $C_{l,p}[0, +\infty)$ s'injecte de manière continu dans $L_h^{r+1}(0, +\infty)$.

Démonstration - Pour tout $u \in C_{l,p}[0, +\infty)$, nous avons que

$$\begin{aligned}\|u\|_{L_h^{r+1}}^{r+1} &= \int_0^{+\infty} h(x)|u|^{r+1}(x)dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{h(x)}{p^{r+1}(x)}p^{r+1}(x)|u|^{r+1}(x)dx \\ &\leq \|u\|_{\infty,p}^{r+1} \int_0^{+\infty} \frac{h(x)}{p^{r+1}(x)}dx = \left\| \frac{h}{p^{r+1}} \right\|_{L^1} \|u\|_{\infty,p}^{r+1}.\end{aligned}$$

Donc, $\|u\|_{L_h^{r+1}} \leq C_1 \|u\|_{\infty,p}$, où $C_1 = \left(\left\| \frac{h}{p^{r+1}} \right\|_{L^1} \right)^{\frac{1}{r+1}}$, et cela prouve le lemme. ■

Lemme 3.4. $L_q^2(0, +\infty)$ s'injecte de manière continu dans $L_h^{r+1}(0, +\infty)$.

Démonstration - Pour tout $u \in L_q^2(0, +\infty)$, nous avons que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L_h^{r+1}}^{r+1} &= \int_0^{+\infty} h(x) |u|^{r+1}(x) dx \\
&\leq \int_0^{+\infty} \frac{h(x)}{q^{\frac{r+1}{2}}(x)} q^{\frac{r+1}{2}}(x) |u|^{r+1}(x) dx \\
&\leq \left(\int_0^{+\infty} q(x) u^2(x) dx \right)^{\frac{r+1}{2}} \left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{h(x)}{q^{\frac{r+1}{2}}(x)} \right)^{\frac{2}{1-r}} dx \right)^{\frac{1-r}{2}} \\
&= \left(\int_0^{+\infty} \frac{h^{\frac{2}{1-r}}(x)}{q^{\frac{r+1}{1-r}}(x)} dx \right)^{\frac{1-r}{2}} \|u\|_{L_q^2}^{r+1}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|u\|_{L_h^{r+1}} \leq C_2 \|u\|_{L_q^2}, \text{ où } C_2 = \left(\int_0^{+\infty} \frac{h^{\frac{2}{1-r}}(x)}{q^{\frac{r+1}{1-r}}(x)} dx \right)^{\frac{1-r}{2(1+r)}}.$$

Cela prouve le lemme. ■

Le corollaire suivant est immédiat.

Corollaire 3.2. $H_0^1(0, +\infty)$ s'injecte de manière compact dans $L_h^{r+1}(0, +\infty)$.

On note μ_1 la première valeur propre du problème linéaire

$$\begin{cases} -u''(x) + \eta u(x) = \mu h(x) u^r(x), & x \geq 0, \\ u(0) = u(+\infty) = 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

à savoir,

$$\mu_1 = \inf_{u \in H_0^1 \setminus \{0\}} \frac{\|u\|}{\|u\|_{L_h^{r+1}}}.$$

Lemme 3.5. La première valeur propre μ_1 est positive et correspond à une fonction propre positive $\psi_1 \in H_0^1(0, +\infty) \setminus \{0\}$.

Démonstration - En utilisant la même idée que dans [2], pour $u \in H_0^1(0, +\infty)$, Soit

$$N_1(u) = \|u\| \text{ et } N_2(u) = \|u\|_{L_h^{r+1}},$$

et on définit la fonctionnelle $P : H_0^1(0, +\infty) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$P(u) = \frac{N_1(u)}{N_2(u)}.$$

Alors,

$$\mu_1 = \inf_{u \in H_0^1 \setminus \{0\}} P(u).$$

Soit $u \in H_0^1(0, +\infty)$; Puis pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} |u(x)|^{r+1} &= \left| \int_0^x u'(s) ds \right|^{r+1} = \left| \int_0^x \sqrt{p(s)} u'(s) \frac{1}{\sqrt{p(s)}} ds \right|^{r+1} \\ &\leq \left(\int_0^x p(s) u'^2(s) ds \right)^{\frac{r+1}{2}} \left(\int_0^x \frac{ds}{p(s)} \right)^{\frac{r+1}{2}} \\ &\leq \left[\sup_{x \geq 0} p(x) \right]^{\frac{r+1}{2}} \left(\int_0^{+\infty} u'^2(s) ds \right)^{\frac{r+1}{2}} \left(\int_0^x \frac{ds}{p(s)} \right)^{\frac{r+1}{2}}. \end{aligned}$$

Donc, pour $x > 0$,

$$h(x)|u(x)|^{r+1} \leq \left[\sup_{x \geq 0} p(x) \right]^{\frac{r+1}{2}} h(x) \left(\int_0^x \frac{ds}{p(s)} \right)^{\frac{r+1}{2}} \left(\int_0^{+\infty} u'^2(s) ds \right)^{\frac{r+1}{2}},$$

Par conséquent, on a

$$\|u\|_{L_h^{r+1}} \leq M_1 \|u\|, \quad (3.4)$$

qui donne

$$\mu_1 = \inf_{u \in H_0^1 \setminus \{0\}} \frac{\|u\|}{\|u\|_{L_h^{r+1}}} \geq \frac{1}{M_1} > 0.$$

Soit (u_n) est une suite minimisante pour cette fonctionnelle. Alors, nous savons que $(|u_n|)$ est une suite minimisante pour P , nous pouvons donc supposer que $u_n(x) \geq 0$ pour $x \in [0, +\infty)$. La fonctionnelle P est homogène de degré zéro, i.e., $P(\alpha u) = P(u)$, pour chaque $\alpha \in \mathbb{R}$. Posons $\tilde{u}_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{L_h^{r+1}}}$, pour chaque n , nous pouvons supposer que $\|u_n\|_{L_h^{r+1}} = 1$. Notez que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(u_n) = \inf_{u \in H_0^1 \setminus \{0\}} P(u) = \mu_1$, donc la suite $(P(u_n))$ est bornée. De cela et du fait que $P(u_n) = \|u_n\|$, on voit que (u_n) est bornée dans H_0^1 . D'après le lemme 3.1 et la réflexivité et la séparabilité de H_0^1 , il existe une sous-suite (u_{n_k}) de (u_n) telle que, quand $k \rightarrow +\infty$,

$$\begin{cases} u_{n_k} \rightharpoonup \bar{u}, & \text{dans } H_0^1, \\ u_{n_k} \rightarrow \bar{u}, & \text{dans } C_{l,p}. \end{cases}$$

Par conséquent $u_{n_k}(x) \rightarrow \bar{u}(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty)$. Alors par le lemme 3.3, (u_{n_k}) converge en norme vers $\bar{u}$ in L_h^{r+1} . Donc, $\|\bar{u}\|_{L_h^{r+1}} = 1$ et $\bar{u}(x) \geq 0$, pour $x \in [0, +\infty)$. Enfin, par la faiblement semi-continuité inférieure de la norme, on obtient

$$P(\bar{u}) = N_1(\bar{u}) \leq \liminf_k N_1(u_{n_k}) = \liminf_k P(u_{n_k}) = \mu_1.$$

Donc, $\bar{u} \in H_0^1 \setminus \{0\}$ and $P(\bar{u}) = \mu_1$. ■

Pour montrer nos résultats, nous avons également besoin à la principe variationnel d'Ekeland forme faible (voir théorème 2.5 dans [9]).

3.2 Résultat principal

On note F la primitive de f par rapport à sa deuxième variable u , c'est-à-dire $F(x, u) = \int_0^u f(x, s) ds$. Pour commencer, on définit la fonctionnelle d'Euler-Lagrange associée au problème (3.1). Soit $J : H_0^1(0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left(u'^2(x) + \eta u^2(x) \right) dx - \frac{1}{r+1} \int_0^{+\infty} h(x) |u|^{r+1}(x) dx \\ - \lambda \int_0^{+\infty} q(x) F(x, u(x)) dx.$$

Proposition 3.1. *Supposons que les conditions (H_0) – (H_2) soit satisfaites. Alors la fonctionnelle J est continuellement différentiable et sa dérivée de Fréchet est donnée par*

$$\langle J'(u), v \rangle = \int_0^{+\infty} \left(u'(x) v'(x) + \eta u(x) v(x) \right) dx - \int_0^{+\infty} h(x) u^r(x) v(x) dx \\ - \lambda \int_0^{+\infty} q(x) f(x, u) v(x) dx$$

pour toute $v \in H_0^1(0, +\infty)$.

Démonstration - Nous montrerons d'abord que J est Gâteaux différentiable. Pour tout $x \geq 0$,

pour toute $v \in H_0^1(0, +\infty)$ et pour chaque $t > 0$, nous avons

$$\begin{aligned}
J(u + tv) - J(u) &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left(|(u + tv)'(x)|^2 + \eta |(u + tv)(x)|^2 \right) dx \\
&- \frac{1}{r+1} \int_0^{+\infty} h(x) |(u + tv)(x)|^{r+1} dx - \lambda \int_0^{+\infty} q(x) F(x, (u + tv)(x)) dx \\
&- \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left(|u'(x)|^2 + \eta |u(x)|^2 \right) dx + \frac{1}{r+1} \int_0^{+\infty} h(x) |u(x)|^{r+1} dx \\
&+ \lambda \int_0^{+\infty} q(x) F(x, u(x)) dx \\
&= \frac{t^2}{2} \int_0^{+\infty} |v'(x)|^2 dx + \frac{t^2}{2} \eta \int_0^{+\infty} |v(x)|^2 dx + t \int_0^{+\infty} u'(x) v'(x) dx \\
&+ \eta t \int_0^{+\infty} u(x) v(x) dx - \frac{1}{r+1} \int_0^{+\infty} h(x) \left[|(u + tv)(x)|^{r+1} - |u(x)|^{r+1} \right] dx \\
&- \lambda \int_0^{+\infty} q(x) \left[F(x, (u + tv)(x)) - F(x, u(x)) \right] dx,
\end{aligned}$$

et puis

$$\begin{aligned}
J(u + tv) - J(u) &= \frac{t^2}{2} \int_0^{+\infty} |v'(x)|^2 dx + \frac{t^2}{2} \eta \int_0^{+\infty} |v(x)|^2 dx + t \int_0^{+\infty} u'(x) v'(x) dx \\
&+ \eta t \int_0^{+\infty} u(x) v(x) dx - t \int_0^{+\infty} h(x) (u(x) + t\theta v(x))^r v(x) dx \\
&- \lambda t \int_0^{+\infty} q(x) f(x, u(x) + t\theta v(x)) v(x) dx,
\end{aligned}$$

où $0 < \theta < 1$. Alors,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t} [J(u + tv) - J(u)] &= \frac{t}{2} \int_0^{+\infty} |v'(x)|^2 dx + \frac{t}{2} \eta \int_0^{+\infty} |v(x)|^2 dx + \int_0^{+\infty} u'(x) v'(x) dx \\
&+ \eta \int_0^{+\infty} u(x) v(x) dx - \int_0^{+\infty} h(x) (u(x) + t\theta v(x))^r v(x) dx \\
&- \lambda \int_0^{+\infty} q(x) f(x, u(x) + t\theta v(x)) v(x) dx.
\end{aligned}$$

On passe à la limite quand $t \rightarrow 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \langle J'(u), v \rangle &= \int_0^{+\infty} \left(u'(x)v'(x) + \eta u(x)v(x) \right) dx - \int_0^{+\infty} h(x)u^r(x)v(x) dx \\ &\quad - \lambda \int_0^{+\infty} q(x)f(x, u(x))v(x) dx \end{aligned}$$

pour toute $v \in H_0^1(0, +\infty)$.

Ensuite, nous montrons que J' est continue, alors soit $(u_n) \subset H_0^1(0, +\infty)$ avec $u_n \rightarrow u$ quand $n \rightarrow +\infty$. D'après (H_0) et (H_2) , nous avons que

$$\begin{aligned} q(x)|f(x, u_n(x))| &\leq aq(x)|u(x)|^r + bq(x) \\ &\leq a \sup_{x \in [0, +\infty)} |(pu)(x)|^r \frac{q(x)}{p^r(x)} + bq(x) \\ &= a\|u\|_{\infty, p}^r \frac{q(x)}{p^r(x)} + bq(x) \in L^1(0, +\infty). \end{aligned}$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} h(x)|u_n(x)|^r &= p^r(x)|u_n(x)|^r \frac{h(x)}{p^r(x)} \\ &\leq \sup_{x \in [0, +\infty)} |(pu)(x)|^r \frac{h(x)}{p^r(x)} \\ &= \|u\|_{\infty, p}^r \frac{h(x)}{p^r(x)} \in L^1(0, +\infty). \end{aligned}$$

Alors, par le théorème de convergence dominé de Lebesgue,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} q(x)f(x, u_n(x))dx = \int_0^{+\infty} q(x)f(x, u(x))dx,$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} h(x)u_n^r(x)dx = \int_0^{+\infty} h(x)u^r(x)dx.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\langle J'(u_n) - J'(u), v \rangle &= \int_0^{+\infty} \left(u'_n(x) v'(x) + \eta u_n(x) v(x) \right) dx - \int_0^{+\infty} h(x) u_n^r(x) v(x) dx \\
&\quad - \lambda \int_0^{+\infty} q(x) f(x, u_n(x)) v(x) dx \\
&= \int_0^{+\infty} \left(u'(x) v'(x) + \eta u(x) v(x) \right) dx + \int_0^{+\infty} h(x) u^r(x) v(x) dx \\
&\quad + \lambda \int_0^{+\infty} q(x) f(x, u(x)) v(x) dx \\
&= \int_0^{+\infty} \left((u'_n(x) - u'(x)) v'(x) + \eta (u_n(x) - u(x)) v(x) \right) dx \\
&\quad - \int_0^{+\infty} h(x) (u_n^r(x) - u^r(x)) v(x) dx \\
&\quad - \lambda \int_0^{+\infty} q(x) (f(x, u_n(x)) - f(x, u(x))) v(x) dx.
\end{aligned}$$

Lorsque l'on fait tendre $n \rightarrow +\infty$, en utilisant (H_0) et le théorème de convergence dominé de Lebesgue, nous obtenons $J'(u_n) \rightarrow J'(u)$ as $n \rightarrow +\infty$. Donc, J' est continue et ceci complète la preuve de la proposition. ■

Nous définissons maintenant ce que l'on veut dire que par une solution faible de notre problème.

Définition 3.1. Nous disons que $u \in H_0^1(0, +\infty)$ est une solution faible du problème (3.1) si pour toute $v \in H_0^1(0, +\infty)$ nous avons

$$\begin{aligned}
\langle J'(u), v \rangle &= \int_0^{+\infty} \left(u'(x) v'(x) + \eta u(x) v(x) \right) dx - \int_0^{+\infty} h(x) u^r(x) v(x) dx \\
&\quad - \lambda \int_0^{+\infty} q(x) f(x, u(x)) v(x) dx = 0.
\end{aligned}$$

Théorème 3.1. Supposons que $(H_0) - (H_4)$ sont satisfaites. Alors il existe $\bar{\lambda} > 0$ tel que le problème (3.1) a au moins une solution u_λ pour chaque $\lambda \in (0, \bar{\lambda})$.

Démonstration - En vue de (H_0) , il existe $\delta_1 > 0$ telle que

$$|F(x, u)| \leq a \frac{1}{r+1} |u|^{r+1} + b|r| \leq K|u|^{r+1} \quad \text{pour tout } |u| > \delta_1.$$

Aussi, à partir de (H_0) , il existe $K_1 > 0$ telle que

$$|F(x, u)| \leq K_1 \quad \text{pour tout } u \in [-\delta_1, \delta_1] \quad \text{et pour tout } x \in (0, +\infty).$$

Par conséquent,

$$|F(x, u)| \leq K_1 + K|u|^{r+1} \quad \text{pour tout } u \in \mathbb{R} \text{ et pour tout } x \in [0, +\infty). \quad (3.5)$$

De (3.2), (3.4), (3.5), (H_1) , et Corollaire 3.1, on obtient

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{r+1} \int_0^{+\infty} h(x) |u|^{r+1}(x) dx - \lambda \int_0^{+\infty} q(x) F(x, u(x)) dx \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{r+1} \int_0^{+\infty} h(x) |u|^{r+1}(x) dx - \lambda \int_0^{+\infty} q(x) (K_1 + K|u(x)|^{r+1}) dx \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{r+1} \int_0^{+\infty} h(x) |u|^{r+1}(x) dx - \lambda K \int_0^{+\infty} q(x) |u|^{r+1}(x) dx \\ &\quad - \lambda K_1 \int_0^{+\infty} q(x) dx \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{r+1} \|u\|_{L_h^{r+1}}^{r+1} - \lambda K \int_0^{+\infty} \frac{q(x) h(x)}{h(x)} |u|^{r+1}(x) dx - \lambda K_1 \|q\|_{L^1} \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{M_1^{r+1}}{r+1} \|u\|^{r+1} - \frac{\lambda K M_1^{r+1}}{r+1} \left\| \frac{q}{h} \right\|_{L^1} \|u\|^{r+1} - \lambda K_1 \|q\|_{L^1}. \end{aligned}$$

On choisit $R > \max \left\{ 1, \left(\frac{2}{r+1} M_1^{r+1} \right)^{\frac{1}{1-r}} \right\}$; alors pour $u \in H_0^1(0, +\infty)$ avec $\|u\| \leq R$, on a

$$J(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{M_1^{r+1}}{r+1} \|u\|^{r+1} - \frac{\lambda K M_1^{r+1}}{r+1} \left\| \frac{q}{h} \right\|_{L^1} \|u\|^{r+1} - \lambda K_1 \|q\|_{L^1}.$$

Maintenant, on choisit ρ pour que

$$\max \left\{ 1, \left(\frac{2}{r+1} M_1^{r+1} \right)^{\frac{1}{1-r}} \right\} < \rho < R. \quad (3.6)$$

Notez que si $\bar{\lambda} := \frac{\frac{1}{2}\rho^2 - \frac{M_1^{r+1}}{r+1}\rho^{r+1}}{\frac{KM_1^{r+1}}{r+1} \left\| \frac{q}{h} \right\|_{L^1} \rho^{r+1} + K_1 \|q\|_{L^1}} > 0$ par (3.6). Maintenant si $\lambda < \bar{\lambda}$, alors

$$J(u) > 0 \quad \text{si } \|u\| = \rho, \quad \inf_{u \in \partial B_\rho(0)} J(u) > 0, \quad (3.7)$$

et

$$J(u) \geq -C \text{ si } \|u\| \leq \rho, \text{ pour certains } C > 0.$$

Par conséquent, la fonctionnelle J est bornée inférieurement sur $\overline{B_\rho(0)}$.

Soit $\psi_1 \in H_0^1(0, +\infty)$ la fonction propre correspondant à la première valeur propre du problème (3.3) comme décrit dans le lemme 3.5. Alors pour tout λ fixe dans $(0, \bar{\lambda})$. Par (H_4) , et pour chaque

$$D > \frac{\|\psi_1\|^2}{2\lambda\|\psi_1\|_{L_q^2}^2} \quad (3.8)$$

il existe $0 < \epsilon_D < 1$ tel que

$$f(x, u) \geq Du^r \text{ pour } 0 < u < \epsilon_D.$$

Notez que depuis $0 < u < 1$

$$f(x, u) \geq Du^r \text{ implique } F(x, u) \geq Du^{r+1} \geq Du^2. \quad (3.9)$$

Puisque la fonction ψ_1 est continue sur $[0, +\infty)$ et $\psi_1(0) = \psi_1(+\infty) = 0$, il existe $\hat{c} > 0$, tel que

$\sup_{x \in [0, +\infty)} \psi_1(x) \leq \hat{c}$. Donc, pour chaque $0 < t < \frac{1}{\hat{c}}$, par (3.9), le lemme 3.4 et 3.5 nous avons

$$\begin{aligned} J(t\psi_1) &= \frac{t^2}{2}\|\psi_1\|^2 - \frac{1}{r+1}\|t\psi_1\|_{L_h^{r+1}}^{r+1} - \lambda \int_0^{+\infty} q(x)F(x, t\psi_1(x))dx \\ &\leq \frac{t^2}{2}\|\psi_1\|^2 - \frac{t^{r+1}}{r+1}\|\psi_1\|_{L_h^{r+1}}^{r+1} - \lambda Dt^2 \int_0^{+\infty} q(x)\psi_1^2(x)dx \\ &= \frac{t^2}{2}\|\psi_1\|^2 - \frac{t^{r+1}}{(r+1)\mu_1^{r+1}}\|\psi_1\|^{r+1} - \lambda Dt^2\|\psi_1\|_{L_q^2}^2 < 0, \end{aligned}$$

selon (3.8). Alors, au vu de (3.7), on voit que

$$\inf_{u \in B_\rho(0)} J(u) < 0 < \inf_{u \in \partial B_\rho(0)} J(u).$$

En appliquant le principe variationnel d'Ekeland forme faible (Théorème 2.5 voir chapitre deux) dans la boule $\overline{B_\rho(0)}$, il y a une suite minimisante $(u_n)_{n \geq 1} \subset \overline{B_\rho(0)}$ telle que

$$J(u_n) \leq \inf_{u \in B_\rho(0)} J(u) + \frac{1}{n}$$

et

$$J(u_n) \leq J(w) + \frac{1}{n}\|w - u_n\| \text{ pour tout } w \in \overline{B_\rho(0)} \text{ avec } w \neq u_n. \quad (3.10)$$

Si nous définissons $w = u_n + tv$, pour tout $t > 0$ avec $v \in H_0^1(0, +\infty)$, et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, alors, nous avons

$$J(u_n) \leq J(u_n + tv) + \frac{1}{n}t\|v\|,$$

et donc,

$$\frac{1}{t}[J(u_n) - J(u_n + tv)] < \frac{1}{n}\|v\| \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Par conséquent,

$$-\langle J'(u_n), v \rangle \leq \frac{1}{n}\|v\| \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Si nous prenons $w = u_n - tv$, in (3.10), alors on obtient $\langle J'(u_n), v \rangle \leq \frac{1}{n}\|v\|$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Donc,

$$\sup_{\|v\| \leq 1} |\langle J'(u_n), v \rangle| \leq \frac{1}{n} \quad \text{for all } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Par conséquent, nous avons

$$\|J'(u_n)\| \rightarrow 0, \text{ et } J(u_n) \rightarrow c_\lambda \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty,$$

où c_λ représente l'infimum de $J(u)$ sur $\overline{B_\rho(0)}$. Comme $(u_n)_{n \geq 1}$ est bornée et $\overline{B_\rho(0)}$ est un ensemble convexe fermé, il existe $u_\lambda \in \overline{B_\rho(0)} \subset H_0^1(0, +\infty)$ et une sous-suite toujours notée par $(u_n)_{n \geq 1}$, tels que

$$\begin{cases} u_n \rightarrow u_\lambda, \text{ faiblement dans } H_0^1(0, +\infty); \\ u_n \rightarrow u_\lambda, \text{ fortement dans } L_h^{r+1}[0, +\infty); \\ u_n(x) \rightarrow u_\lambda(x), \text{ pour } x \text{ dans } (0, +\infty). \end{cases}$$

Par le théorème de convergence dominé par Lebesgue et passant à la limite dans $\langle J'(u_n), v \rangle$, lorsque $n \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} (u'_\lambda v' + \eta u_\lambda v) dx - \int_0^{+\infty} h(x) u_\lambda^r v dx - \lambda \int_0^{+\infty} q(x) f(x, u_\lambda) v dx = 0$$

pour toute $v \in H_0^1(0, +\infty)$. Cela veut dire que, $\langle J'(u_\lambda), v \rangle = 0$ pour toute $v \in H_0^1(0, +\infty)$. Par conséquent u_λ est un point critique de la fonctionnelle J , qui est une solution de notre problème. Cela prouve le théorème 3.1. ■

3.3 Exemple

Dans cette section, nous donnons un exemple pour illustrer nos résultats.

Donc on considère le problème suivant

$$\begin{cases} -u''(x) + \eta u(x) = e^{-\frac{4}{3}x} u^r(x) + \lambda e^{-\frac{3}{2}x} (|u|^{\frac{1}{4}} + |u|^{\frac{1}{5}}), & x \in [0, +\infty), \\ u(0) = u(+\infty) = 0, \end{cases} \quad (3.11)$$

Ici nous avons $f(x, u) = |u|^{\frac{1}{4}} + |u|^{\frac{1}{5}}$, $q(x) = e^{-\frac{3}{2}x}$, et $h(x) = e^{-\frac{4}{3}x}$. Alors,

$$|f(x, u)| = ||u|^{\frac{1}{4}} + |u|^{\frac{1}{5}}| \leq 2|u|^r + 1 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^+ \text{ et chaque } u \in \mathbb{R} \text{ où } r \in \left[\frac{1}{3}, \frac{7}{9}\right).$$

On choisit $p(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x}$, on voit les fonctions

$$\frac{q}{h}(x) = e^{-\frac{1}{6}x}, \quad \frac{h}{p^r}(x) = 2^{-r}e^{-\frac{8-3r}{6}x}, \quad \frac{h}{p^{r+1}}(x) = 2^{-(r+1)}e^{-\frac{5-3r}{6}x}, \quad \frac{q}{p^r}(x) = 2^{-r}e^{-\frac{3-r}{2}x},$$

$$\frac{q}{p^2}(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x}, \quad \frac{h^{\frac{2}{1-r}}}{q^{\frac{r+1}{1-r}}}(x) = e^{\frac{9r-7}{6(1-r)}x}$$

sont dans $L^1[0, +\infty)$. Il est facile de voir que les conditions (H_0) – (H_3) sont stisfaites. Donc par Théorème 3.1, le problème (3.11) a au moins une solution pour chaque $\lambda \in (0, \bar{\lambda})$.

Conclusion

Dans ce travail, on a étudié le principe variationnel d'Ekeland, ainsi que d'autres formes de celui-ci avec quelques théories, aussi que l'application de ce principe à le théorème du point fixe de Caristi et le théorème du minimisation de Takahashi. Enfin, on a utiliser principe variationnel d'Ekeland avec quelques outils d'analyse fonctionnelle pour étudié l'existence de solutions à un problème aux limites du second ordre perturbé suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + \eta u(x) = h(x)u^r(x) + \lambda q(x)f(x, u(x)), & x \in [0, +\infty), \\ u(0) = u(+\infty) = 0, \end{cases}$$

où $f : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, η et λ sont des paramètres réels positifs, et $0 < r < 1$.

Bibliographie

- [1] C. CORDUNEANU. *Integral Equations and Stability of Feedback Systems*. Academic Press, New York. **(1973)**.
- [2] D. BOUAFIA, JOHN R. GRAEF, AND T. MOUSSAOUI. *Existence of solutions for a perturbed second order problem on the half-line via Ekeland variational principle*. Communications in Applied Analysis, 22, No. 3 **(2018)**, 383-399.
- [3] D. BOUAFIA, T. MOUSSAOUI, AND D. O'REGAN. *Existence of Solutions for a Second Order Problem on The Half-Line Via Ekeland's Variational Principle*. Discuss. Math. Differ. Incl. Control Optim. **36 (2016)**, 131-140.
- [4] D. CAROLINE. *Théorèmes de Point Fixe et Principe Variationnel D'Ekeland*. Mémoire. Université de Montréal **(2010)**.
- [5] J. BAPTISTE AND H. URRUTY. *Bases, Outils et Principes pour L'Analyse Variationnelle*. Springer. **(1966)**.
- [6] J. M. BORWEIN AND Q. J. ZHU. *Techniques of Variational Analysis*. Springer. **(2005)**.
- [7] H. BREZIS. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*. Masson, Paris **(1983)**.
- [8] H. K. PATHAK. *An Introduction to Nonlinear Analysis and Fixed Point Theory*. Springer **(2018)**.
- [9] I. EKELAND. *On the variational principle*. J. Math. Anal. Appl. **47(1974)**, 324-353 .
- [10] M. BADIALE , E. SERRA. *Semilinear Elliptic Equations for Beginners Existence Results via the Variational Approach*. Springer-Verlag London Limited (2011).
- [11] M. D. R. GROSSINHO AND S. A. TERSIAN. *An Introduction to Minimax Theorems and Their Applications to Differential Equations*. Springer Science. **(2001)**.
- [12] O. FRITES, T. MOUSSAOUI, D. O'REGAN, *Existence of solutions via variational methods for a problem with nonlinear boundary conditions on the half-line*, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal. **22 (2015)**, pp. 395-407.

- [13] O. FRITTES, T. MOUSSAOUI, AND D. O'REGAN. *On The Structure of The Critical Set of Non-Differentiable Functions with a Weak Compactness Condition*. Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal. **22** (2015),395-407
- [14] P. H. RABINOWITZ. *Minimax methods in critical point theory with applications to differntial equations*. CBMS regional conferece series in mathematics, vol. 65, American mathematical society, providence, RI (1986).
- [15] P. V. SUBRAHMANYAM. *Elementary Fixed Point Theorems*. Springer (2018).
- [16] S. FORMINE ET A. KOLMOGOROV. *Elément de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*. Traduction français, Edition Mir. Moscou (1977).
- [17] V. TRENOGUINE. *Analyse fonctionnelle*. Traduction française, Edition, Mir. Moscou (1985).
- [18] Y. JABRI. *The Mountan Pass Theorem Variants, Generalizations and Some Applications*. Cambridge University Press, New York. (2003).
- [19] J. MUSCAT. *Functional Analysis, an Introduction to Metric Spaces, Hilbert Spaces, and Banach Algebras*. Springer, Cham Heidelberg, New York, Dordrecht, London **18**,(2014).

Résumé

Le but de cette mémoire est d'étudier principe variationnel d'Ekeland et de certaines autres formes de celui-ci, ainsi que d'appliquer ce principe à le théorème du point fixe de Caristi et à le théorème de la minimisation de Takahashi. Enfin, nous avons utilisé le principe variationnel d'Ekeland pour trouver les solutions à un problème aux limites de second ordre perturbé sous la forme :

$$\begin{cases} -u''(x) + \eta u(x) = h(x)u^r(x) + \lambda q(x)f(x, u(x)), & x \in [0, +\infty), \\ u(0) = u(+\infty) = 0, \end{cases}$$

Mots clés : Principe variationnel d'Ekeland. Point critique. Existence de solutions. Second ordre. Perturbé.

ملخص

إلهدف من هذه الدراسة هو دراسة مبدأ التغيرات لإكلاند و بعض الأشكال الأخرى له، وكذلك تطبيق هذا المبدأ على نظرية النقطة الثابتة لتكاشي. وفي النهاية إستعملنا مبدأ التغيرات لإكلاند من أجل إيجاد الحلول لمسألة حدية من الدرجة الثانية مضطربة من الشكل

$$\begin{cases} -u'' + u = \lambda h(x)|u|^{\beta-2}u + q(x)f(u), & x \in (0, +\infty), \\ u(0) = u(+\infty) = 0, \end{cases}$$

كلمات مفتاحية : طريقة التغيرات، نظرية النقطة الحرجة، مبدأ التغيرات لإكلاند، وجود الحلول، اضطراب.

Abstract

The aim of this memory is to study Ekeland's variational principle and some other forms of it, as well as to apply this principle to Caristi's fixed-point theorem and to Takahashi's minimization theorem. Finally, we used Ekeland's variational principle to find solutions to a perturbed

second order boundary problem in the form :

$$\begin{cases} -u''(x) + \eta u(x) = h(x)u^r(x) + \lambda q(x)f(x, u(x)), & x \in [0, +\infty), \\ u(0) = u(+\infty) = 0, \end{cases}$$

Keywords : Ekeland variational principle. Critical point. Existence of solutions. Second order. Perturbed.

