REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA
FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUE

MEMOIRE de fin d'étude

Présenté pour l'obtention du diplôme de MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématique Fondamentale et Appliquée

Par: LAKHDARI Omar Djamel Eddine

SUJET

Sur le théorème de la représentation de Riesz

Soutenu publiquement le : 02 /06/2016 devant le jury composé de :

GASMI Abdlkader	**Université de M'sila**	**Président**
NADIR Mostefa	**Université de M'sila**	**Rapporteur**
GAGUI Bachir	**Université de M'sila**	**Examinateur**

Promotion : 2015 /2016

Remerciements

En premier lieu je remercie ALLAH pour m'avoir guidé et donner la force pour la finalisation de ce mémoire.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur **M.NADIR**, professeur à universite de M'sila, pour m'avoir proposé ce sujet, pour sa disponibilité et pour m'avoir suivi et guidé tout au long de ce travail.

Je remercie Monsieur **A.GASMI**, Maître de Conférences à universite de M'sila, pour l'honneur qu'il me fait de présidé le jury de ce Mémoire.

Je remercie également Monsieur **B.GAGUI** Maître de Conférences à universite de M'sila, pour avoir voulu faire partie du jury.

Je ne saurais oublier de remercier tous mes professeurs et toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Pour finir mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à ma famille et mes amis, en particulier mes parents pour leur soutient tout au long de mes études.

Table des matières

Introduction

Le présent travail est partagé en deux chapitres :

Dans le premier chapitre, on présente un rappel général sur la théorie des opérateurs compacts dans les espaces des fonctions continues tout en étudiant comme cas spécifique les opérateurs intégraux .

Dans le deuxième chapitre, on rappele la théorie de Riesz .

Chapitre 1

Théorie des opérateurs

1.1 Opérateur compact

1.1.1 Opérateurs linéaires compacts

Soit A un opératuer linéaire d'un espace normé E dans un espace normé F, on dit que A est un opérateurs compact s'il envoie tout ensemble borné G dans E à un ensemble relativement compact $A(G)$ dans F. Autrement dit, la fermeture $\overline{A(G)}$ est compacte.

1.1.2 Ensemble relativement compacts

Un ensemble $G \subset E$ est relativement compact si pour toute suite $\{u_n\}$ de G, il existe une sous suite $\left\{u_{n(k)}\right\}$ qui converge dans F.

Théorème 1.1.1 *(critère de compacité)*

Un opérateur linéaire$A : E \longrightarrow F$ est compact si et seulement si pour toute suite bornée φ_n de E, la suite$A\varphi_n$ contient une sous suite convergente de$F$.

Démonstration. ■

Il suffit d'appliquer les définitions appropriés d'nu ensemble borné et un ensemble relativement compact.

Théorème 1.1.2

Une combinaison linéaire $A = \alpha A_1 + \beta A_2$ des opératuers compacts est un opérateur compact.

Démonstration. ■

Soit $\{\varphi_n\}$ une suite borné de E et soit $\{A\varphi_n\}$ une suite de F, alors

$$A\varphi_n(x) = \alpha A_1 \varphi_n(x) + \beta A_2 \varphi_n(x), \text{ avec } \varphi_n \in E, n \in \mathbb{N}.$$

A_1 et A_2 étant compact, on peut extraire de $\{A_1\varphi_n\}$ et de $\{A_2\varphi_n\}$ deux sous suites convergentes qui donne par leur somme une sous suite convergente de $\{A\varphi_n\}$, donc A est compact.

Théorème 1.1.3

Le produit AB de deux opérateurs bornés A et B est compact si l'un des opérateurs A ou B est compact.

Démonstration. ■

Soit $\{\varphi_n\}$ un suite bornée de E, alors si B est un opérateur borné la suite $B\varphi_n(x)$ est aussi bornée, et de la compacité de l'opérateur A il existe une sous suite de $A(B\varphi_n(x))$ qui converge, ce qui implique que AB est compact.

D'autres part si B est compact, on peut extraire de la suite $B\varphi_n(x)$ une sous suite convergente $B\varphi_{n(k)}(x)$, et de la continuité de l'opérateur A car il est borné la suite $A\left(B\varphi_{n(k)}(x)\right)$ converge, ce qui implique que AB est compact.

Théorème 1.1.4

Soit E un espace normé et F un espace de banach, et soit $\{A_n\}$ une suite d'opérateurs compacts de E dans F, convergente en norme vers l'opérateur linéaire A de E dans F

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0.$$

Alors A et compact.

Démonstration. ■

Soit $\{\varphi_n\}$ une suite bornée de E, l'opérateur A étant compact, on peut extraire de la suite $\{A_1\varphi_n\}$ une sous suite convergente; soit $\{\varphi_n^1\}$ une sous suite de $\{\varphi_n\}$ telle que, $\{A_1\varphi_n^1\}$ soit convergente.

De la mème façon, on peut extraire de la suite $\{A_2\varphi_n^2\}$ une sous suite convergente, car A_2 est compact; soit$\{\varphi_n^2\}$ une sous suite de$\{\varphi_n^1\}$ telle que, la suite $\{A_2\varphi_n^2\}$ soit convergente.

Remarquons que, la suite $\{A_1\varphi_n^2\}$ est une sous suite de la suite convergente $\{A_1\varphi_n^1\}$ qui à son tour convergente.

En raisonnant de la même façon, pour les opératuers $A_1, A_2, ..., A_p, ...$, on détermine les suites $\{\varphi_n^1\}, \{\varphi_n^2\}, ... \{\varphi_n^p\}, ...$ Il est à remarquer que la suite $\{\varphi_n^p\}$ est une sous suite de toutes les suites qui lui précèdent et que les suites $\{A_k\varphi_n^p\}$ sont convergentes pour$(k = 1, 2, ...p)$.

Comme l'espace Y est complet, pour la compacité de l'opérateur A il suffit de montrer que la suite $\{A\varphi_n^p\}$ est une suite Cauchy, alors

$\|A\varphi_n^p - A\varphi_n^q\| \leq \|A\varphi_n^p - A_n\varphi_n^p\| + \|A_n\varphi_n^p - A_n\varphi_n^q\| + \|A_n\varphi_n^q - A\varphi_n^q\|$

Soit $\|\varphi_n\| \leq M$. choisissons n de sorte que l'on a $\|A - A_n\| < \frac{\varepsilon}{3M}$, ensuite choisissons N tel que, pour tous les $p > N$ et $q > N$, on a la relation $\|A_n\varphi_n^p - A_n\varphi_n^q\| < \frac{\varepsilon}{3}$ car la suite $\{A_n\varphi_n^p\}$ est convergente.

Dans ces conditions, on aura pour tout p et q suffisamment grands.

$$\|A\varphi_n^p - A\varphi_n^q\| < \varepsilon.$$

Théorème 1.1.5

Soit A un opérateur borné de E dans F, à image $A(E)$ de dimension finie. Alors A est compact.

Démonstration. ■

En effet, car l'opérateur A transforme tout ensemble borné G de E à un ensemble borné $A(G)$ dans un espace de dimension finie $A(E)$ ce qui implique que $A(G)$ est précompact.

Lemme 1.1.1

Soit G un sous espace fermé d'un espace normé E tel que, $G \neq E$, alors il existe un élément $\varphi \in E$, avec $\|\varphi\| = 1$ tel que, pour tout $\phi \in G$, on a

$$\|\varphi - \phi\| \geq \alpha, \text{ avec } \ 0 < \alpha < 1$$

Démonstration. ■

En effet, soit f un élément de E tel que $f \notin G$ alors, on a

$$\inf_{\phi \in E} \|f - \phi\| = \beta > 0.$$

choisissons un élément $\psi \in G$ tel que

$$\beta \leq \|f - \psi\| \leq \frac{\beta}{\alpha},$$

soit φ le vecteur donné par

$$\varphi = \frac{f - \psi}{\|f - \psi\|},$$

alors le vecteur φ est de norme égale à l'unité $(\|\varphi\| = 1)$.

De plus, on a

$$\begin{aligned} \|\varphi - \phi\| &= \frac{1}{\|f - \psi\|} \|f - \{\psi + (\|f - \psi\| \phi)\}\| \\ &\geq \frac{\beta}{\|f - \psi\|} \geq \alpha. \end{aligned}$$

Théorème 1.1.6

L'opérateur identique I de E dans E est compact si et seulement si E est de dimension finie.

Démonstration. ∎

Soit φ_1 un élément de E, tel que $\|\varphi_1\| = 1$, alors $G_1 = span\{\varphi_1\}$ est un sous espace fermé de E car G_1 est de dimension finie. D'après le lemme1, il existe un élément $\varphi_2 \in E$, tel que $\|\varphi_2\| = 1$ et $\|\varphi_1 - \varphi_2\| > \frac{1}{2}$.Prenons une deuxième fois le sous espace fermé $G_2 = span\{\varphi_1, \varphi_2\}$, il existe alors un élément $\varphi_3 \in E$ avec $\|\varphi_3\| = 1, \|\varphi_1 - \varphi_3\| > \frac{1}{2}$ et $\|\varphi_2 - \varphi_3\| > \frac{1}{2}$. On répète la même procédure jusqu'à l'obtention d'un suite $\{\varphi_n\}$ vérifiant $\|\varphi_n\| = 1$ et $\|\varphi_n - \varphi_m\| > \frac{1}{2}$, pour tout $m \neq n$.

Il est à remarquer que cette suite $\{\varphi_n\}$ est bornée mais elle ne contient aucune sous suite convergente. C.Q.F.D.

Corollaire 1.1.1

La boule unité $B(0,1)$ dans un espace de dimension infinie n'est pas compact.

En effet, il suffit d'appliquer le théorème précedant, car la boule unité $B(0,1)$ est sa propre image dans l'espace X de dimension infinie par l'opérateur identique

Théorème 1.1.7

Un opérateur compact est un opérateur borné. La réciproque est fausse.

Démonstration. ■

En effet, si on désigne par

$$B(0,1) = \{x \in X, \|x\| \leq 1\},$$

la boule fermé de rayon l'unité, alors l'ensemble$\overline{A(B(0,1))}$ est compact, donc borné, c'est à dire

$$\|Ax\| < \infty \text{ et par conséquent, } \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| < \infty,$$

ce qui signifie que l'opérateur A est borné.

Réciproquement, l'opérateur identique I de E dans E est borné mais il n'est pas compact.

Théorème 1.1.8

L'opérateur intégral A de $C(G)$ dans $C(G)$ à noyau continu est un opérateur compact.

Démonstration. ■

Soit E un ensemble borné de $C(G)$ alors, on a

$$\|\varphi\| \leq M \quad \text{pour tout } \varphi \in E.$$

De plus

$$|A\varphi(x)| \leq M\,|G| \max_{x,y \in G} |K(x,y)|\,, \forall x \in G \text{ et } \forall \varphi \in E,$$

cela veut dire que $A(E)$ est borné.

L'opérateur K est uniformément continu sur le compact $G \times G$, d'où

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y, z \in G, |x - y| < \delta \implies |K(x,z) - K(y,z)| < \frac{\varepsilon}{M|G|}$

d'où

$$|A\varphi(x) - A\varphi(y)| < \varepsilon \text{ pourtout } \varphi \in E \; et \; x, y \in G, avec \; |x - y| < \delta.$$

Ceci exprime que l'ensemble $A(E)$ est équicontinu, d'où $A(E)$ est relativement compact d'aprés le théorème d'Arzelà-Ascoli. Alors A est compact.

1.1.3 Noyau faiblement singulier

On appelle noyau faiblement singulier la fonction K continue sur $G \times G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sauf peut être aux points $x = y$ et telle que,

$$\forall x, y \in G, x \neq y, \exists M > 0, |K(x, y)| < \frac{M}{|x - y|^{n-\alpha}}, 0 < \alpha < n$$

Théorème 1.1.9

l'opérateur intégral A de $C(G)$ dans $C(G)$ à noyau faiblement singulier est un opérateur compact.

Démonstration. ■

Il est à remarquer que l'opérateur

$$A\varphi(x) = \int_G k(x, y)\,\varphi(y)\,dy, \;\; x, y \in G$$

existe comme une intégrale impropre, car

$$|K(x, y)\,\varphi(x)| \leq M\,\|\varphi\|\,|x - y|^{\alpha-n}.$$

De plus, on a

$$\int_G |x - y|^{\alpha-n}\,dy \leq \omega_n \int_0^d \rho^{\alpha-n}\rho^{n-1}d\rho = \frac{\omega_n}{\alpha}d^{\alpha},$$

où ω_n désigne la surface de la sphère unité dans $\mathbb{R}^n$, et d le diamètre l'ensemble G.

Construire maintenant une suite d'opérateurs compacts A_p, convergente vers l'opérateur A et telle que, on a

$$\lim_{p\to\infty}\|A-A_p\|=0.$$

Soit h une fonction continue par morceau, définie sur $[0,\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, par

$$h(t)=\begin{cases}0 \text{ si } 0\leq t\leq \frac{1}{2}\\ 2t-1 \text{ si } \frac{1}{2}\leq t\leq 1\\ 1 \text{ si } 1\leq t<\infty\end{cases}$$

le noyau K_p défini sur $G\times G$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, par

$$K_p(x,y)=\begin{cases}h(p|x-y|) \quad \text{si } x\neq y\\ 0 \text{ si } x=y\end{cases}$$

est un noyau cotinu pour tout $p\in\mathbb{N}$ et par conséquent, les opérateurs intégraux A_p sont compacts.De plus,

$$\begin{aligned}|A\varphi(x)-A_p\varphi(x)| &= \left|\int_{G\cap|x-y|<\frac{1}{p}}\{1-h(p|x-y|)\}K(x,y)\varphi(y)\,dy\right|\\ &\leq M\|\varphi\|\omega_n\int_0^{\frac{1}{p}}\rho^{\alpha-n}\rho^{n-1}d\rho\\ &\leq M\|\varphi\|\frac{\omega_n}{\alpha p^\alpha},\ x\in G.\end{aligned}$$

Il est aisé de remarquer que la suite des opérateurs $A_p\varphi$ converge uniformément vers $A\varphi$ quand $p\longrightarrow\infty$, d'où l'opérateur $A\varphi$ est un élément de $C(G)$, de plus

$$\|A-A_p\|\leq M\frac{\omega_n}{\alpha p^\alpha}\longrightarrow 0,\ \text{lorsque } p\longrightarrow\infty,$$

cela implique que l'opérateur A est compact.

Théorème 1.1.10

L'opérateur intégral A de $C(\partial G)$ dans $C(\partial G)$ à noyau continu ou à noyau faiblement singulier est un opérateur compact sur $C(\partial G)$ si ∂G est de classe C^1.

1.1.4 Compacité dans $C(K)$

Théorème 1.1.11 ***(Arzela-Ascoli)***

Un ensemble $G \subset C(K)$ est relativement compact si et seulement si elle est bornée et équicontinu. Dire s'il existe une constante M telle que

$$\varphi(x) \leq M \quad \text{pour tout } x \in K \text{ et } \varphi \in G.$$

Plus loin, pour chaque $\varepsilon > 0$, il exists $\delta > 0$ telle que , pour tout $\varphi \in G$, nous avons

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon \text{ pour tout } x, y \in K \text{ avec } |x - y| < \delta.$$

L'ensemble $C(K)$ désigne l'espace des fonctions de valeurs réel ou complexes définies dans un ensemble compact $K \subset \mathbb{R}^n$, muni de la norme maximale

$$\|\varphi\|_\infty = \max_{x \in K} |\varphi(x)| \, .$$

1.2 Opérateurs Intégraux

Les opérateurs intégraux constituent des objets fondamentaux en analyse fonctionnelle, où ils permettent notamment de transformer les équations fonctionnelles en une version plus simple afin de les résoudre facilement. Les opérateurs intégraux interviennent dans plusieurs domaines tels que les équations aux dérivées partielles, les phénomènes de diffusion et les équations intégrales.

1.3 Opérateur Intégral

On appelle opérateur intégral tout opérateur linéaire A défini sur un espace normé E à valeurs dans un espace normé F donné sous la forme

$$A\varphi(x) = \int_{G_2} k(x, \; y)\varphi(y)dy, \; x \in G_1, \tag{1}$$

où $k(x,\ y)$ une fonction mesurable définie sur un ensemble mesuré $G_1 \times G_2$ et $\varphi(y)$ est une fonction mesurable définie sur G_2.

1.3.1 Noyau d'un opérateur

La fonction mesurable $k(x,\ y)$ est dite noyau de l'opérateur intégral A.

1.3.2 Normes des opérateurs intégraux

Soit A un opérateur intégral défini sur $L_p(G_1)$, alors pour tout p et q

conjugués $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$, avec $(1 \leq p,\ q \leq \infty)$, la norme de l'opérateur A est donnée par

$$\|A\|_p = \begin{cases} (\int_{G_1}(\int_{G_2} |k(x,\ y)|^q dy)^{\frac{p}{q}} dx)^{\frac{1}{p}} \text{ pour } 1 < p < \infty \\ \int_{G_1} ess\sup_y |k(x,\ y)|dx, \text{ pour } p = 1 \\ ess\sup_x \int_{G_2} |k(x,\ y)|dy, \text{ pour } p = \infty \end{cases}$$

où $k(x,\ y)$ une fonction mesurable définie sur un ensemble mesuré $G_1 \times G_2$.

Théorème 1.3.1

Soit A un opérateur intégral de norme finie

$$\|A\|_p < \infty \tag{2}$$

Alors l'opérateur intégral A est un opérateur linéaire continu de $L_p(G_2)$ dans $L_p(G_1)$. De plus, on a

$$\|A\varphi\|_p \leq \|A\|_p \|\varphi\|_p \tag{3}$$

Démonstration. ■

- *Premier cas* $1 < p < \infty$

Par utilisation de l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{G_1} |A\varphi(x)|^p dx &= \int_{G_1} (\int_{G_2} |k(x,\ y)||\varphi(y)|dy)^p dx \\
&\leq \int_{G_1} ((\int_{G_2} |k(x,\ y)|^q dy)^{\frac{1}{q}} (\int_{G_2} |\varphi(y)|^P dy)^{\frac{1}{p}})^p dx \\
&= \|\varphi\|_p^p \int_{G_2} (\int_{G_2} |k(x,\ y)|^q dy)^{\frac{p}{q}} dx \\
&= \|A\|_{\mathrm{P}}^p \|\varphi\|_p^p
\end{aligned}$$

D'où la continuité de l'opérateur intégral $A\varphi(x) = \int_{G_2} k(x,\ y)\varphi(y)dy$ de $L_p(G_2)$ dans $L_p(G_1)$. De plus, on a

$$(\int_{G_1} |A\varphi(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} \leq (\|A\|_p^p \|\varphi\|_p^p)^{\frac{1}{p}}$$

ou encore

$$\|A\varphi\|_p \leq \|A\|_p \|\varphi\|_p.$$

- *Deuxième cas* $p = 1$

$$\begin{aligned}
\int_{G_1} |A\varphi(x)|dx &= \int_{G_1} (\int_{G_2} |k(x,\ y)||\varphi(y)|dy)dx \\
&\leq \int_{G_1} ess\sup_y |k(x,\ y)|dx \int_{G_2} |\varphi(y)|dy \\
&= \|\varphi\|_1 \int_{G_1} ess\sup_y |k(x,\ y)|dx \\
&= \|A\|_1 \|\varphi\|_1.
\end{aligned}$$

D'où la continuité de l'opérateur intégral $A\varphi(x) = \int_{G_2} k(x,\ y)\varphi(y)dy$ de $L_1(G_2)$ dans $L_1(G_1)$. De plus, on a

$$\|A\varphi\|_1 \leq \|A\|_1 \|\varphi\|_1.$$

- *Troisième cas* $p = \infty$

$$\begin{aligned}
ess\sup_x |T\varphi(x)| &= ess\sup_x |\int_{G_2} k(x,\ y)\varphi(y)dy| \\
&\leq ess\sup_y |\varphi(y)| ess\sup_x \int_{G_2} |k(x,\ y)|dy \\
&= \|A\|_\infty \|\varphi\|_\infty.
\end{aligned}$$

D'où la continuité de l'opérateur intégral $A\varphi(x) = \int_{G_2} k(x,\ y)\varphi(y)dy$ de $L_\infty(G_2)$ dans $L_\infty(G_1)$. De plus, on a

$$\|A\varphi\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|\varphi\|_\infty.$$

Remarque 1.3.1

La norme de l'opérateur intégral A pour $p = q = 2$ est donnée par

$$\|A\|_2 = (\int_{G_1}\int_{G_2} |k(x,\ y)|^2 dxdy)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Proposition 1.3.1

La condition $\|A\|_p <$ oo *donnée sur la norme de l'opérateur intégral* A *est uniquement suffisante et non nécessaire pour la continuité de cet l'opérateur.*

En effet, il suffit de prendre A comme opérateur de convolution dans $L_p(\mathbb{R})$

$$A\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} k(x-y)\varphi(y)dy$$

où $k(x,\ y)$ est un noyau de convolution $k(x,\ y) = k(x-y)$ avec la condition

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |k(t)|dt < \infty.$$

Comme il est connu que la norme dans l'espace $L_p(G)$ est aussi donnée par

$$\|f\|_p = \sup \int_G |f(x)g(x)|dx,\ g \in L_q(G)\ ,\ \|g\|_q = 1.$$

Le théorème de Fubini, nous donne

$$\begin{aligned}
\|A\varphi\|_p &= \sup_{\|g\|_q=1} \int_{\mathbb{R}} |g(x)A\varphi(x)|dx \\
&\leq \sup_{\|g\|_q=1} \int_{\mathbb{R}} |g(x)|(\int_{\mathbb{R}} |k(x-y)\varphi(y)|dy)dx \\
&= \|\sup_{g\|_q=1} \int_{\mathbb{R}} |g(x)|(\int_{\mathbb{R}} |k(y)\varphi(x-y)|dy)dx \\
&= |\sup_{g\|_q=1} \int_{\mathbb{R}} |k(y)|dy(\int_{\mathbb{R}} |g(x)\varphi(x-y)|dy)dx \\
&\leq \|g\|_q \|\varphi\|_p \sup_{\|g\|_q=1} \int_{\mathbb{R}} |k(y)|dy \\
&= \|\varphi\|_p \int_{\mathbb{R}} |k(y)|dy.
\end{aligned}$$

D'où la continuité de l'opérateur intégral $A\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} k(x-y)\varphi(y)dy$ de $L_p(\mathbb{R})$ dans $L_p(\mathbb{R})$. De plus, on a

$$\|A\varphi\|_p \leq \|A\|_1 \|\varphi\|_p.$$

Bien entendu, la condition (2) n'est pas remplie car, on a

$$\begin{aligned}\|A\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} |k(x-y)|^q dy)^{\frac{p}{q}} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \|A\|_q^p dx = \infty.\end{aligned}$$

Théorème 1.3.2

Soit A un opérateur intégral vérifiant les conditions suivantes

- *Il existe deux constantes positives $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que*

$$(\int_{G_2} |k(x,\ y)|^r dy)^{\frac{1}{r}} \leq C_1,\ r > 0, \text{pourtout } x \in G_1. \tag{4}$$

De plus,

$$(\int_{G_1} |k(x,\ y)|^s dx)^{\frac{1}{s}} \leq C_2, \quad s > 0, \text{pourtout } y \in G_2. \tag{5}$$

- *Pour tout p et q conjugués $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$, avec $(1 \leq p,\ q \leq \infty)$, on a*

$$p_1 \geq p,\ p_1 \geq s,\ \frac{p_1 - s}{p_1} \leq \frac{r}{q}. \tag{6}$$

Alors l'opérateur A est un opérateur linéaire continu de $L_p(G_2)$ dans $L_{p_1}(G_1)$. De plus, on a

$$\|A\| \leq C_1^{\frac{p_1-s}{p_1}} C_2^{\frac{s}{p_1}} \tag{7}$$

Démonstration. ■

Utilisons l'inégalité de Hölder généralisée pour les valeurs p_1, q et $\frac{pp_1}{p_1-p}$ vérifient la relation $(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q} + \frac{p_1-p}{pp_1} = 1)$ alors, on a

$$\begin{aligned}
|A\varphi(x)| &= |\int_{G_2} k(x,\ y)\varphi(y)dy| \\
&\leq \int_{G_2} |k(x,\ y)||\varphi(y)|dy \\
&= \int_{G_2} (|k(x,\ y)|^s|\varphi(y)|^p)^{\frac{1}{p_1}}|\varphi(y)|^{1-\frac{p}{p_1}}|k(x,\ y)|^{1-\frac{s}{p_1}}dy \\
&= \int_{G_2} (|k(x,\ y)|^s|\varphi(y)|^p)^{\frac{1}{p_1}}|\varphi(y)|^{p(\frac{p_1-p}{pp_1})}|k(x,\ y)|^{\frac{p_1-s}{p_1}}dy \\
&= \int_{G_2} (|k(x,\ y)|^s|\varphi(y)|^p)^{\frac{1}{p_1}}(|\varphi(y)|^p)^{\frac{p_1-p}{pp_1}}(|k(x,\ y)|^{q(\frac{p_1-s}{p_1})})^{\frac{1}{q}}dy
\end{aligned}$$

D'où la relation

$$A\varphi(x)| \leq (\int_{G_2} (|k(x,\ y)|^s|\varphi(y)|^p)dy)^{\frac{1}{p_1}}(\int_{G_2} |\varphi(y)|^p dy)^{\frac{p_1-p}{pp_1}}(\int_{G_2} |k(x,\ y)|^{q(\frac{p_1-s}{p_1})}dy)^{\frac{1}{q}}$$

En vertu de (4), avec $q(\frac{p_1-s}{p_1}) \geq 0$, on obtient

$$(\int_{G_2} |k(x,\ y)|^{q(\frac{p_1-s}{p_1})}dy)^{\frac{1}{q}} = ((\int_{G_2} |k(x,\ y)|^{q(\frac{p_1-s}{p_1})}dy)^{\frac{1}{q}(\frac{p_1}{p_1-s})})^{\frac{p_1-s}{p_1}} \leq C^{\frac{p_1-s}{1^{p_1}}}$$

De plus, on a

$$(\int_{G_2} |\varphi(y)|^p dy)^{\frac{p_1-p}{pp_1}} = ((\int_{G_2} |\varphi(y)|^p dy)^{\frac{1}{p}})^{\frac{p_1-p}{p_1}} = \|\varphi\|^{\frac{p_1-p}{p_1}}$$

D'où, la relation

$$|A\varphi(x)| \leq (\int_{G_2} (|k(x,\ y)|^s|\varphi(y)|^p)dy)^{\frac{1}{p_1}}\|\varphi\|^{\frac{p_1-p}{p_1}}C_1^{\frac{p_1-s}{p_1}}$$

Par intégration des deux cotés, il vient

$$\begin{aligned}
\int_{G_1} |A\varphi(x)|^{p_1} dx &\leq \int_{G_1} ((\int_{G_2} (|k(x,\ y)|^s |\varphi(y)|^p) dy)^{\frac{1}{p_1}} ||\varphi||^{\frac{p_1-p}{p_1}} C_1^{\frac{p_1-s}{p_1}})^{p_1} dx \\
&= \int_{G_1} \int_{G_2} |k(x,\ y)|^s |\varphi(y)|^p \, dydx \|\varphi\|^{p_1-p} C_1^{p_1-s} \\
&= \|\varphi\|^{p_1-p} C_1^{p_1-s} \int_{G_1} |k(x,\ y)|^s dx \int_{G_2} |\varphi(y)|^p dy \\
&= \|\varphi\|^{p_1-p} C_1^{p_1-s} \|\varphi\|^p \int_{G_1} |k(x,\ y)|^s d \\
&= \|\varphi\|^{p_1} C_1^{p_1-s} ((\int_{G_1} |k(x,\ y)|^s dx)^{\frac{1}{s}}) \\
&\leq C_1^{p_1-s} C_2^s \|\varphi\|^{p_1}
\end{aligned}$$

D'où la continuité de l'opérateur A de l'espace $L_p(G_2)$ dans $L_{p_1}(G_1)$

$$(\int_{G_1} |A\varphi(x)|^{p_1} dx)^{\frac{1}{p_1}} \leq (C_1^{p_1-s} C_2^S \|\varphi\|^{p_1})^{\frac{1}{p_1}} = C_1^{\frac{p_1-s}{p_1}} C_2^{\frac{s}{p_1}} \|\varphi\|.$$

Autrement dit, on a

$$\|A\varphi\|_{p_1} \leq C_1^{\frac{p_1-s}{p_1}} C_2^{\frac{s}{p_1}} \|\varphi\|_p,$$

ou encore

$\|A\varphi\|_{p_1} \leq \|A\| \|\varphi\|_p$, avec $\|A\| \leq C_1^{\frac{p_1-s}{p_1}} C_2^{\frac{s}{p_1}}$.

Remarque 1.3.2

Le cas où $p = 1$, l'opérateur A devient un opérateur continu de $L_1(G_2)$ dans $L_{p_1}(G_1)$ sous la condition suivante

$$(\int_{G_1} |k(x,\ y)|^{p_1} dx)^{\frac{1}{p_1}} \leq C_2, \quad \text{pourtout } y \in G_2.$$

De plus, on a

$$\|A\| \leq C_2.$$

Bien entendu, si $p = 1$ implique que $q = \infty$ et la relation (6) donne $p_1 = s$, ce qui entraîne le résultat voulu.

Remarque 1.3.3

Le cas où $p_1 = \infty$, l'opérateur A devient un opérateur continu de $L_p(G_2)$ dans $L_\infty(G_1)$ sous la condition suivante

$$q \leq r.$$

De plus, on a

$$\|A\| \leq C_1.$$

Bien entendu, si $p_1 = \infty$ implique que $\frac{r}{q} \geq 1$ et la relation (6) donne $\frac{s}{p_1} = 0$, ce qui entraîne le résultat voulu.

Proposition 1.3.2 *(Opérateurs produits)*

Soient A_1 et A_2 deux opérateurs intégraux de $L_p(E)$ dans $L_p(E)$, alors l'opérateur produit $(A_1A_2)\varphi = A_1(A_2\varphi)$ est un opérateur intégral de $L_p(E)$ dans $L_p(E)$.

En effet, on a

$$\begin{aligned}
(A_1A_2)\varphi(x) &= A_1(A_2\varphi) \\
&= \int_E k_1(x,\ z)A_2\varphi(z)dz \\
&= \int_E k_1(x,\ z)(\int_E k_2(z,\ y)\varphi(y)dy)dz \\
&= \int_E \varphi(y)dy(\int_E k_1(x,\ z)k_2(z,\ y)dz) \\
&= \int_E k_3(x,\ y)\varphi(y)dy,
\end{aligned}$$

où la fonction $k_3(x,\ y)$ désigne le noyau de l'opérateur produit A_1A_2 donné par la relation

$$k_3(x,\ y) = \int_E k_1(x,\ z)k_2(z,\ y)dz.$$

Remarque 1.3.4

L'opérateur intégral produit $A^2\varphi(x) = A(A\varphi(x))$ admet un noyau $k_2(x,\ y)$ donné par

$$k_2(x,\ y) = \int k(x,\ z)k(z,\ y)dz.$$

1.3.3 noyaux itérés

Le noyau $k_n(x,\ y)$ de l'opérateur intégral produit $A^n\varphi(x) = A(A^{n-1}\varphi(x))$ est dit noyau itéré du noyau $k(x,\ y)$, donné par

$$k_n(x,\ y) = \int k(x,\ z)k_{n-1}(z,\ y)dz.$$

Chapitre 2

Représentation de Riesz

2.1 Les équations du deuxième type

Soit A un opérateur compact définie sur l'espace normé E dans lui-même, l'opérateur $T = I - A$ où I désigne l'opérateur identité définit une équation d'opérateur appelé équation du second type, étant donné que

$$T\varphi = (I - A)\varphi = \varphi - A\varphi = f,$$

où f est une fonction donnée de E et φ est la fonction inconnue de E.

2.2 La théorie de Riesz et l'alternative de Fredholm

Théorème 2.2.1 *(Premier Théorème de Riesz)*

le noyau de l'opérateur T défini par

$$ker(T) = \{\varphi \in E;\ T\varphi = (I - A)\varphi = 0\},$$

est un sous-espace de dimension finie fermée.

Démonstration. ■

En effet, il est connu que le noyau $\ker(T)$d'un opérateur borné T est un sous-espace fermé de E, étant donné que, pour toute suite φ_n en $\ker(T)$ converge vers φ dans$E$, on obtient φ dans $\ker(T)$. En effet, en raison de la bornitude de$T$ nous avons

$$T\varphi_n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} T\varphi_n = 0,$$

ou encore

$$T(\lim \varphi_n) = 0 \Longrightarrow T(\varphi) = 0.$$

Par conséquent, $\ker(T)$ est fermé .

D'autre part, toutes les fonctions $\varphi \in \ker(T)$ doivent satisfaire à l'équation

$$T\varphi = \varphi - A\varphi = 0, \text{Par conséquent } A\varphi = \varphi.$$

En notant que la restriction de l'opérateur A au sous-espace $\ker(T)$ coïncide avec l'opérateur d'identité sur $\ker(T)$ .L'opérateur A est compact de E vers E , et donc aussi compact de $\ker(T)$ vers $\ker(T)$,puisque $\ker(T)$ est fermée. Evidemment , pour toute suite bornée φ_n dans E en particulier dans $\ker(T)$ la suite $A\varphi = \varphi$ contient une sous-suite convergente $A\varphi_{nk} = \varphi_{nk}$ dans le fermé $\ker(T)$.

Par conséquent, le sous-espace $\ker(T)$ est de dimension finie.

Remarque 2.2.1

$\ker(T^n)$ de l'opérateur T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, est un sous-espace de dimension finie fermée.

En effet, les opérateurs T^n peut être écrit sous la forme

$$T^n = (I - A)^n = I - A_n,$$

où A_n est un opérateur compact donné par

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} A^i$$

Théorème 2.2.2

La suite des noyaux ensembles

$$\ker(T), \ker\left(T^2\right), \dots \ker(T^n), \dots$$

est croissante et stationnaire.

En d'autres termes, la suite contient uniquement un nombre fini d'ensembles distincts , de sorte qu'il existe un entier positif $p \in \mathbb{N}$,tel que

$$\{0\} \subset \ker(T) \subset \ker\left(T^2\right) \subset ... \subset \ker(T^p) = \ker\left(T^{p+1}\right) = ...,$$

le nombre p est appelé le nombre de Riesz de l'opérateur compact A pour les ensembles noyaux $\ker(T^n)$.

Démonstration. ■

En effet, l'inclusion est évident, étant donné que

$$\varphi \in \ker(T^n) \Longrightarrow T^n\varphi = 0,$$

et donc

$$T(T^n\varphi) = T^{n+1}\varphi = 0 \Longrightarrow \varphi \in \ker\left(T^{n+1}\right).$$

Par conséquent, l'inclusion d'ensembles

$$\ker(T^n) \subset \ker\left(T^{n+1}\right). \tag{1}$$

Supposons qu'il n'y ait pas entier $p \in \mathbb{N}$, tel que la suite $\ker(T^n)$ est stationnaire, c'est-à-dire

$$\ker(T^m) \neq \ker(T^n), \text{ pour tout } m, n \in \mathbb{N}, \text{ avec } m < n.$$

En d'autres termes, nous avons

$$\{0\} \subset \ker(T) \subset ... \subset \ker(T^m) \subset \ker\left(T^{m+1}\right) \subset ... \subset \ker\left(T^{n-1}\right) \subset \ker(T^n) \subset ...$$

La relation $\ker(T^{n-1}) \subset \ker(T^n)$ entre deux sous-espaces fermés implique l'existence d'un élément φ_n dans $\ker(T^n)$, avec une norme d'unité $\|\varphi_n\| = 1$, tel que

$$\left\|\varphi_n - \varphi_{n-1}\right\| > \frac{1}{2}, \text{pour tout } \varphi_{n-1} \in \ker\left(T^{n-1}\right).$$

généralement, pour toute suite $\varphi_n \in \ker(T^n)$ et pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ tel que $m < n$, nous avons la relation suivante

$$\begin{aligned} \|A\varphi_n - A\varphi_m\| &= \|\varphi_n - T\varphi_n - \varphi_m + T\varphi_m\| \\ &= \|\varphi_n - (\varphi_m - T\varphi_m + T\varphi_n)\| > \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Notez que, l'élément de la suite $(\varphi_m - T\varphi_m + T\varphi_n)$ appartiennent au sous-espace $\ker(T^{n-1})$. Effectivement, en utilisant le produit par T ,on obtient

$$T^{n-1}(\varphi_m - T\varphi_m + T\varphi_n) = T^{n-1}\varphi_m - T^n\varphi_m + T^n\varphi_n.$$

En notant que

$$\varphi_m \in \ker(T^m) \subset \ker\left(T^{n-1}\right) \subset \ker(T^n) \text{ et } \varphi_n \in \ker(T^n).$$

Alors

$$T^{n-1}\varphi_m = 0, T^n\varphi_m = 0 \text{ et } T^n\varphi_n = 0,$$

ou encore

$$T^{n-1}(\varphi_m - T\varphi_m + T\varphi_n) = 0.$$

la suite φ_n est bornée, de sorte que grâce à la compacité de l'opérateur A, on peut extraire une sous-suite convergente de la suite $A\varphi_n$.

Contradiction avec la relation (2). Par conséquent

$$\ker\left(T^{n-1}\right) = \ker(T^n).$$

Il reste à démontrer maintenant la relation

$$\ker(T^n) = \ker\left(T^{n+1}\right).$$

en effet, nous obtenons

$$\varphi \in \ker\left(T^{n+1}\right) \implies T^{n+1}\varphi = T^{n}\left(T\varphi\right) = 0,$$

ou encore

$$T\varphi \in \ker\left(T^{n}\right) = \ker\left(T^{n-1}\right),$$

ce qui veut dire

$$T\varphi \in \ker(T^{n-1}) \implies T^{n-1}\left(T\varphi\right) = T^{n}\varphi = 0 \implies \varphi \in \ker\left(T^{n}\right),$$

et donc

$$\ker\left(T^{n+1}\right) \subset \ker\left(T^{n}\right).$$

Par conséquent, il existe un entier positif $p \in \mathbb{N}$,tel que

$\{0\} \subset \ker\left(T^{n}\right) \subset \ker\left(T^{2}\right) \subset ... \subset \ker\left(T^{p}\right) = \ker\left(T^{p+1}\right) = \ker\left(T^{p+2}\right) = ...,$

où p est donnée par

$$p = \min\left\{k \in \mathbb{N};\ \text{tel que } \ker\left(T^{k}\right) = \ker\left(T^{k+1}\right)\right\}.$$

Théorème 2.2.3 *(Deuxième Théorème de Riesz)*

L'image de l'opérateur T défini par

$$\operatorname{Im} T = T\left(E\right) = \left\{\psi; \exists\varphi \in E, T\varphi = \psi\right\},$$

est un sous-espace linéaire ferme et de co-dimension finie.

Démonstration. ■

•Il est connu que l'image d'un opérateur linéaire$T$ est un sous-espace linéaire.

Soit f un élément de la fermeture $\overline{T\left(E\right)}$, alors il existe une sous-suite f_n de l'ensemble $T(E)$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f.$$

En d'autres termes, il existe une suiteφ_n de E tel que

$$T\varphi_n = f_n,$$

avec la relation de convergence

$$\lim_{n\to\infty} T\varphi_n = \lim_{n\to\infty} f = f.$$

•supposons que, la suiteφ_n est bornée, alors il existe une sous-suite $\varphi_{n(k)}$ telle que, la suite $A\varphi_{n(k)}$ converge. Par conséquent, la convergence de la sous-suite $\varphi_{n(k)}$ d'un élément φ dans E. Dire

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_{n(k)} = \lim_{k\to\infty} T\varphi_{n(k)} - \lim_{k\to\infty} A\varphi_{n(k)} = \varphi \in E.$$

En raison de la bornitude de l'opérateur T, on a

$$\lim_{k\to\infty} T\varphi_{n(k)} = T\left(\lim_{k\to\infty} \varphi_{n(k)}\right) = T\varphi = f \in T(E) = \overline{T(E)},$$

•supposons que, la suite φ_n n'est pas bornée, alors on a

si $\varphi_n \in \ker(T)$, nous avons

$$T\varphi_n = 0 \implies \lim_{k\to\infty} T\varphi_n = 0 = f \in T(E) = \overline{T(E)},$$

comme un sous-espace linéaire contient un élément null

Si $\varphi_n \notin \ker(T)$, en prenant le sous-espace G de E engendré par φ_n et $\ker(T)$ définie comme

$$G = span\{\varphi_n + \ker(T)\}.$$

Le sous-espace S est fermé dans G.Le sous-espace $\ker(T)$ est fermé dans G, par conséquent, il existe un élément $\psi_n \in G$ avec une norme unitaire $\|\psi_n\| = 1$ tel que

$$\|\psi_n - \chi_n\| \geq \frac{1}{2}, \forall \chi_n \in \ker(T),$$

avec la relation suivante

$$\psi_n = a_n\varphi_n + \chi_n, a_n \in \mathbb{R}, \chi_n \in \ker(T).$$

En notant que, il n'y a pas de sous-suite $a_{n(k)}$ de la suite a_n converge vers l'élément null. Car, si l'on suppose qu'il existe une telle sous-suite, dire

$$\lim_{k\to\infty} a_{n(k)} = 0, \text{ on obtient}$$

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} T\psi_{n(k)} &= \lim_{k\to\infty}\left(a_{n(k)}T\varphi_{n(k)}\right) + \lim_{k\to\infty} T\chi_{n(k)} \\ &= \lim_{k\to\infty} a_{n(k)}. \lim_{k\to\infty} T\varphi_{n(k)} = 0.f = 0.\end{aligned}$$

En d'autres termes, il existe une sous-suite $\psi_{n(j)}$ de la sous-suite $\psi_{n(k)}$ de la suite bornée ψ_n tel que $A\psi_{n(j)}$ converge vers un élément ψ de E.

Cela implique la convergence de la sous-suite $\psi_{n(j)}$ d'un même élément ψ de E, car nous avons

$$\lim_{j\to\infty} \psi_{n(j)} = \lim_{j\to\infty} T\psi_{n(j)} - \lim_{j\to\infty} A\psi_{n(j)} = \psi.$$

Il est clair que, $T\psi = 0$. Par conséquent $\psi \in \ker(T)$. Contradiction avec le fait que

$$\|\psi_n - \chi_n\| \geq \frac{1}{2}, \forall \chi_n \in \ker(T).$$

nous pouvons donc conclure que a_n^{-1} est bornée. Dire

$$a_n^{-1}\psi_n = \varphi_n + a_n^{-1}\chi_n,$$

Ensuite, vient le

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} T\left(a_n^{-1}\psi_n\right) &= \lim_{n\to\infty} T\varphi_n + \lim_{n\to\infty} T\left(a_n^{-1}\chi_n\right) \\ \lim_{n\to\infty} T\varphi_n + 0 &= f.\end{aligned}$$

La suite $a_n^{-1}\psi_n$ est borné comme produit de deux suite a_n^{-1} et ψ_n bornée. Par conséquent il existe une sous- suite $a_{n(k)}^{-1}\psi_{n(k)}$ tel que $A\left(a_{n(k)}^{-1}\psi_{n(k)}\right)$ converge vers un élément $a^{-1}\psi$ de E. Cela implique la convergence de la sous-suite $a_{n(k)}^{-1}$ au même élément $a^{-1}\psi$ de E, car nous avons

$$\lim_{k\to\infty} a_{n(k)}^{-1}\psi_{n(k)} = \lim_{k\to\infty} T\left(a_{n(k)}^{-1}\psi_{n(k)}\right) + \lim_{k\to\infty} A\left(a_{n(k)}^{-1}\psi_{n(k)}\right) = a^{-1}\psi \in E.$$

L'opérateur T est continue, alors nous écrivons

$$\lim_{k\to\infty} T\left(a_{n(k)}^{-1}\psi_{n(k)}\right) = T\left(\lim_{k\to\infty}\left(a_{n(k)}^{-1}\psi_{n(k)}\right)\right) = T\left(a^{-1}\psi\right) = f \in T(E) = \overline{T(E)}.$$

Par conséquent, le résultat

$$T(E) = \overline{T(E)}.$$

Théorème 2.2.4

La suite des images ensembles

$$\operatorname{Im}(T), \operatorname{Im}\left(T^2\right), ..., \operatorname{Im}(T^n), ...$$

est décroissante et stationnaire.

En d'autres termes, la suite contient uniquement un nombre fini d'ensembles distincts , de sorte qu'il existe un entier positif $p \in \mathbb{N}$,tel que

$$..., .. \operatorname{Im}\left(T^{q+1}\right) = \operatorname{Im}(T^q) \subset ..., .. \subset \operatorname{Im}\left(T^2\right) \subset \operatorname{Im}(T) \subset X$$

le nombre$q$ est appelé le nombre de Riesz de l'opérateur compact A pour les ensembles images $\operatorname{Im}(T^n)$.

Démonstration. ■

En effet, l'inclusion est évident, étant donné que

$$\psi \in \operatorname{Im}(T^n) \implies \psi = T^n(\varphi) = T^{n-1}(T\varphi) = T^{n-1}\varphi_1 \in \operatorname{Im}\left(T^{n-1}\right),$$

et donc

$$\psi = T^n\varphi \implies \psi = T^{n-1}\varphi_1.$$

Par conséquent, l'inclusion d'ensembles

$$\operatorname{Im}(T^n) \subset \operatorname{Im}\left(T^{n-1}\right). \tag{1'}$$

Supposons qu'il y ait aucun entier $q \in \mathbb{N}$, tel que la suite $\operatorname{Im}(T^n)$ est stationnaire, c'est-à-dire

$$\operatorname{Im}(T^m) \neq \operatorname{Im}(T^n) \text{ pour tout } m, n \in \mathbb{N} \text{ avec } m < n.$$

En d'autres termes, nous avons

$$... \subset \operatorname{Im}(T^n) ... \subset \operatorname{Im}\left(T^{m+1}\right) \subset \operatorname{Im}(T^m) \subset ... \subset \operatorname{Im}(T) \subset E$$

La relation $\operatorname{Im}(T^{m+1}) \subset \operatorname{Im}(T^m)$ entre un sous-espaces fermés implique l'existence d'un élément ψ_n de $\operatorname{Im}(T^m)$, avec norme unité $\|\psi_n\| = 1$, tel que

$$\left\|\psi_m - \psi_{m+1}\right\| > \frac{1}{2}, \text{ for all } \psi_{m+1} \in \operatorname{Im}\left(T^{m+1}\right).$$

En général, pour toutes suite $\psi_m \in \operatorname{Im}(T^m)$ et pour tout m, n tel que $m < n$,nous avons la relation suivante

$$\begin{aligned} \|A\psi_m - A\psi_n\| &= \|\psi_m - T\psi_m - \psi_n + T\psi_n\| \\ &= \|\psi_m - (\psi_n - T\psi_n + T\psi_m)\| > \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{2'}$$

On notera que, l'élément de la suite $(\psi_n - T\psi_n + T\psi_m)$ appartiennent au sous-espace $\operatorname{Im}(T^{m+1})$. En effet, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \psi_n - T\psi_m + T\psi_n &= T^n\varphi - T(T^m\varphi) + T(T^n\varphi) \\ &= T^n\varphi - T^{m+1}\varphi + T^{n+1}\varphi. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\psi_n, T\psi_n \in \operatorname{Im}(T^n) \subset \operatorname{Im}\left(T^{m+1}\right) \text{ et } T\psi_m \in \operatorname{Im}\left(T^{m+1}\right).$$

La suite ψ_m est bornée, si en raison de la compacité de l'opérateur A, on peut extraire une sous-suite convergente de la suite $A\psi_m$.

Contradiction avec la relation (2'). Par conséquent

$$\operatorname{Im}\left(T^{m+1}\right) = \operatorname{Im}\left(T^{m}\right).$$

Il reste à démontrer maintenant la relation

$$\ker\left(T^{m+2}\right) = \ker\left(T^{m+1}\right).$$

En effet, la première inclusion $\ker\left(T^{m+2}\right) \subset \ker\left(T^{m+1}\right)$ est toujours vrai Suivant (1') , pour le second, on a

$$\psi \in \operatorname{Im}\left(T^{m+1}\right) \implies \psi = T^{m+1}\varphi = T\left(T^{m}\varphi\right) = T\left(T^{m+1}\varphi_1\right) = T^{m+2}\varphi_1 \in \operatorname{Im}\left(T^{m+2}\right),$$

ou encore

$$\operatorname{Im}\left(T^{m+1}\right) \subset \operatorname{Im}\left(T^{m+2}\right).$$

Par conséquent, il existe un entier positif $q \in \mathbb{N}$, tel que

$$, ... = \operatorname{Im}\left(T^{q+2}\right) = \operatorname{Im}\left(T^{q+1}\right) = \operatorname{Im}\left(T^{q}\right) \subset ... \operatorname{Im}\left(T^{2}\right) \subset \operatorname{Im}\left(T\right) \subset X$$

où q est donné par

$$q = \min\left\{k \in \mathbb{N};\ \text{tel que } \operatorname{Im}\left(T^{k}\right) = \operatorname{Im}\left(T^{k+1}\right)\right\}.$$

Lemme 2.2.1

Le nombre Riesz p de l'espace $\ker\left(T^{n}\right)$ et Le nombre Riesz q de l'espace $\operatorname{Im}\left(T^{n}\right)$ sont égaux. dire

$$p = q$$

Démonstration. ∎

supposons que, les nombres de Riesz p et q sont différents, dire $p \neq q$.

• **Premier cas** $p < q$, on a

$$\{0\} \subset \ker(T) \subset ... \subset \ker(T^p) \subset \ker\left(T^{p+1}\right) = ... = \ker\left(T^{q-1}\right) = \ker(T^q) = ... \tag{3}$$

et aussi

$$... = \operatorname{Im}\left(T^{q+1}\right) = \operatorname{Im}(T^q) \subset \operatorname{Im}\left(T^{q-1}\right) \subset ... \subset \operatorname{Im}(T^p) \subset ... \subset \operatorname{Im}(T) \subset X. \tag{4}$$

Nous pouvons voir que, il existe une fonction $\psi \in \operatorname{Im}(T^{q-1})$ tel que $\psi \notin \operatorname{Im}(T^q)$, c'est-à-dire

$$\psi = T^{q-1}\varphi \in \operatorname{Im}\left(T^{q-1}\right),$$

la composition par l'opérateur T sur les deux côtés, ce qui nous donne

$$T\psi = T^q\varphi \in \operatorname{Im}(T^q) = \operatorname{Im} T^{q+1}$$

Cette équation montre que, il existe une fonction φ_1 tel que

$$T\psi = T^q\varphi = T^{q+1}\varphi_1,$$

ou encore

$$T^{q+1}\varphi_1 - T^q\varphi = 0.$$

Par conséquent, on obtient

$$T^q(T\varphi_1 - \varphi) = 0 \implies T(\varphi_1) - \varphi \in \ker(T^q) = \ker\left(T^{q-1}\right). \tag{5}$$

Il est à remarquer que la relation (5) nous a donné

$$T(\varphi_1) - \varphi \in \ker\left(T^{q-1}\right) \implies T^{q-1}(T\varphi_1 - \varphi) = 0 \Longleftrightarrow T^q\varphi_1 = T^{q-1}\varphi = \psi,$$

Cela implique que $\psi = T^q\varphi_1 \in \operatorname{Im}(T^q)$,contradiction avec le fait que $\psi \notin \operatorname{Im}(T^q)$.

• **second cas** $q < p$, on a

$$\{0\} \subset \ker(T) \subset ... \subset \ker(T^q) \subset ... \subset \ker\left(T^{p-1}\right) \subset \ker(T^p) = \ker\left(T^{p+1}\right) = ... \qquad (3')$$

et aussi

$$... = \mathrm{Im}(T^p) = \mathrm{Im}\left(T^{p-1}\right) = ... = \mathrm{Im}(T^q) \subset \mathrm{Im}\left(T^{q-1}\right) \subset ... \subset \mathrm{Im}(T) \subset X. \qquad (4')$$

Nous pouvons voir que, il existe une fonction $\varphi \in \ker(T^p)$ tel que $\varphi \notin \ker(T^{p-1})$, c'est-à-dire

$$T^{p-1}\varphi \in \mathrm{Im}\left(T^{p-1}\right) = \mathrm{Im}(T^p) = \mathrm{Im}(T^q),$$

Cette équation montre que, il existe des fonctions φ_1 et φ_2 tel que

$$T^{p-1}\varphi = T^p\varphi_1 = T^q\varphi_2, \qquad (5')$$

la composition par l'opérateur T sur les deux côtés et la relation $\varphi \in \ker(T^p)$ donner comme

$$T^p\varphi = T^{p+1}\varphi_1 = T^{q+1}\varphi_2 = 0,$$

Cela implique que

$$\varphi_1 \in \ker\left(T^{p+1}\right) = \ker(T^p).$$

Par conséquent, il arrive

$$T^{p+1}\varphi_1 = T^p\varphi_1 = 0.$$

Il est à remarquer que la relation (5') nous donne $T^p\varphi_1 = T^{p-1}\varphi = 0$, cela implique $\varphi \in \ker(T^{p-1})$, contradiction avec le fait que $\varphi \notin \ker(T^{p-1})$.

Théorème 2.2.5 *(Troixième Théorème de Riesz)*

Le sous-espace $\ker(T^r)$ et $\operatorname{Im}(T^r)$ sont complémentaires. C'est-à-dire

$$X = \ker(T^r) \oplus \operatorname{Im}(T^r)$$

où $r = p = q$ est le nombre de Riesz.

Démonstration. ■

• pour tout élément $\psi \in X$, on a

$$\psi \in X \implies T^r\psi \in \operatorname{Im}(T^r) = ... = \operatorname{Im}\left(T^{2r}\right).$$

Cette relation implique l'existence d'une fonction φ, tel que

$$T^r\psi = T^{2r}\varphi \implies T^r(\psi - T^r\varphi) = 0,$$

ou encore

$$(\psi - T^r\varphi) = \chi \in \ker(T^r).$$

Donc, nous avons

$$\psi = \chi + T^r\varphi, \text{ avec } \chi \in \ker(T^r) \text{ et } T^r\varphi \in \operatorname{Im}(T^r).$$

• Pour tout élément $\psi \in \ker(T^r) \cap \operatorname{Im}(T^r)$, on a

$$\psi \in \operatorname{Im}(T^r) \text{ et } \psi \in \ker(T^r),$$

Cette relation implique l'existence d'une fonction φ, tel que

$$\psi = T^r\varphi \text{ et } T^r\psi = T^{2r}\varphi = 0,$$

ou encore

$$\varphi \in \ker\left(T^{2r}\right) = ..., ... = \ker(T^r).$$

Donc, nous avons

$$\psi = T^r\varphi = 0.$$

Lemme 2.2.2

L'opérateur $T = I - A$ est injective si et seulement si, l'opérateur T^r est injective pour tout $r \in \mathbb{N}$.

Démonstration. ■

• En supposant que, l'opérateur T est injective alors, pour tout $r \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\begin{aligned} T^r\varphi_1 &= T^r\varphi_2 \Longrightarrow T\left(T^{r-1}\varphi_1\right) = T\left(T^{r-1}\varphi_2\right) \Longrightarrow T^{r-1}\varphi_1 = T^{r-1}\varphi_2 \\ &\Longrightarrow T\left(T^{r-2}\varphi_1\right) = T\left(T^{r-2}\varphi_2\right) \Longrightarrow T^{r-2}\varphi_1 = T^{r-2}\varphi_2 \\ &\Longrightarrow T\left(T\varphi_1\right) = T\left(T\varphi_2\right) \Longrightarrow T\varphi_1 = T\varphi_2 \\ &\Longrightarrow \varphi_1 = \varphi_2. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'opérateur T^r est injective.

• En supposant que, l'opérateur T^r est injective pour tout $r \in \mathbb{N}$, ensuite nous avons

$$\begin{aligned} T\varphi_1 &= T\varphi_2 \Longrightarrow T^{r-1}\left(T\varphi_1\right) = T^{r-1}\left(T\varphi_2\right) \Longrightarrow T^r\varphi_1 = T^r\varphi_2 \\ &\Longrightarrow \varphi_1 = \varphi_2 \end{aligned}$$

Par conséquent, l'opérateur T est injective. C'est-à-dire

$$\{0\} = \ker\left(T\right) = \ker\left(T^2\right) = ... = \ker\left(T^r\right) = ..., ...$$

Lemme 2.2.3

L'opérateur $T = I - A$ est surjective si et seulement si, l'opérateur T^r est surjective pour tout $r \in \mathbb{N}$.

Démonstration. ■

• Supposons que, l'opérateur T est surjective alors, pour tout $r \in \mathbb{N}$. nous avons

$$\begin{aligned} \forall\psi \in X, \exists\varphi_1 \in X; \psi = T\varphi_1 &\Longrightarrow \exists\varphi_2 \in X; \varphi_1 = T\varphi_2 \\ &\Longrightarrow \psi = T\varphi_1 = T\left(T\varphi_2\right) = T^2\varphi_2 \\ &\Longrightarrow ...\exists\varphi_r \in X; \varphi_{r-1} = T\varphi_r \end{aligned}$$

$$\psi = T\varphi_1 = T\left(T\varphi_2\right) = ... = T\left(T^{r-1}\varphi_r\right) = T^r\varphi_r$$
$$\Longrightarrow \forall\psi \in X, \exists\varphi_r \in X; \psi = T^r\varphi$$

Par conséquent, l'opérateur T^r est surjective.

• En supposant que, l'opérateur T^r est surjective pour tout $r \in \mathbb{N}$, ensuite nous avons
$\forall\psi \in X, \exists\varphi_1 \in X; \psi = T^r\varphi_1 \implies T^r\varphi_1 = T\left(T^{r-1}\varphi_1\right) = T\varphi$
$$\Longrightarrow \forall\psi \in X, \exists\varphi = T^{r-1}\varphi_1 \in X; \psi = T\varphi.$$

Par conséquent, l'opérateur T est surjective. C'est-à-dire

$$X = \operatorname{Im}(T) = \operatorname{Im}\left(T^2\right) = ... = \operatorname{Im}(T^r) = ..., ...$$

Théorème 2.2.6

Soit A un opérateur compact défini à partir de l'espace normé X dans lui-même alors, l'opérateur $T = I - A$ est un opérateur injectif si et seulement si, $T = I - A$ est surjective. Outre l'opérateur inverse $T^{-1} = (I - A)^{-1}$ défini de X dans X est bornée.

Démonstration. ■

Il est connu que, pour tout nombre de Riesz $r = p = q$, Le sous-espace $\ker(T^r)$ et $\operatorname{Im}(T^r)$ sont complémentaires. dire

$$X = \ker(T^r) \oplus \operatorname{Im}(T^r).$$

• L'injection de l'opérateur T implique l'un de T^r. D'où la surjection de l'opérateur T^r dont elle assure la surjection de l'opérateur T.

• La surjection de l'opérateur T implique l'un de T^r. D'où L'injection de l'opérateur T^r dont elle assure L'injection de l'opérateur T.

• L'injection de l'opérateur T ou La surjection de l'opérateur T implique la bijection de l'opérateur $T = (I - A)$. Cet opérateur est borné, alors il a une inverse bornée $T^{-1} = (I - A)^{-1}$.

Théorème 2.2.7

Soit A un opérateur compact d'un espace normé E dans lui-même, l'équation non homogène

$$T\varphi = \varphi - A\varphi = f \tag{6}$$

admet une solution unique $\varphi \in X$, pour tout $f \in X$, si et seulement si, l'équation homogène

$$T\varphi = \varphi - A\varphi = 0 \tag{6'}$$

admet de manière unique une solution triviale $\varphi = 0$.

Démonstration. ■

En effet, supposons que l'équation (6) admet une solution pour tout $f \in X$, il veut dire que l'opérateur T est surjective et le nombre de Riesz r est nul.

Ainsi l'opérateur T est injective. En d'autres termes, l'équation (6') admet la solution triviale $\varphi = 0$.

Réciproquement, supposons que l'équation (6') admet uniquement la solution triviale $\varphi = 0$, il veut dire que l'opérateur T est injective et le nombre de Riesz r est nul. Par conséquent, l'opérateur T est surjective et donc cet opérateur est bijective.En d'autres termes, l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (6).

Corollaire 2.2.1

i-Si l'équation homogène

$$\varphi - A\varphi = 0$$

admet seulement la solution triviale $\varphi = 0$, alors pour tout $f \in X$ l'équation

$$\varphi - A\varphi = f$$

admet une solution unique $\varphi \in X$ et cette solution et depend de la continuité de f.

ii- Si l'équation homogène $\varphi - A\varphi = 0$ n'admet pas la solution triviale $\varphi = 0$; alors elle a seulement un nombre fini $m \in \mathbb{N}$ de solutions $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ de indépendant de linéarités

et l'équation non homogène $\varphi - A\varphi = f$ est unsolvable ou sa solution est de la forme générale

$$\varphi = \widetilde{\varphi} + \sum_{k=1}^{m} a_k \varphi_k$$

où $a_1, a_2, ..., a_k$ sont des nombre arbitraire complex et $\widetilde{\varphi}$ une solution particulier de l'équation non homgène.

Conclusion

Dans ce mémoire on étude le théorème de la représentation de Riesz, et on essayer d'appliquer cette théorème sur les équations de deuxième type.

Bibliographie

[1] **-M.NADIR**. Cours d'analyse fonctionnelle, université de M'sila 2004.

[2] **-L.KANTOROVITCH, G.AKILOV**. Analyse fonctionnelle,édition Mir moscou 1981.

[3] **-H.WIDOM.** Lectures on integral equation, university of california 1969.

[4] **-B.GAGUI .** Résolution des Equations Intégrales par les Méthodes Adaptives, Mémoire de MAGISTERE université de M'sila 2006.

[5] **-KRESS, R.** Linear Integral Equations, Springer-Verlag, New York, 2d ed 1999.

[6] -**L.SEYMOUR.** Theory and problems of general topology, USA 1995.