UNIVERSITÉ DE M'SILA

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES

Département de Mathématiques

Mémoire de Fin D'etude

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Domaine :Mathématiques et Informatique

Filière :Mathématiques

Spécialité :Equation aux dérivées partielles

Par

BOUHADI AHLAM

sujet

Les Méthodes de réduction pour

Les équations aux dérivées partielles non-linéaires

Dirigé par

Pr.*N.Benhamidouche*

Promotion:2014/2015

Remerciements

E*n tout premier lieu, je remercie le mon Dieu, tout puissant, de m'avoir donné la force pour survivre, ainsi qui l'audace pour dépasser toutes les difficultés.*

J*e voudrais commencer par remercier à Monsieur le professeur* ***N.Benhamidouche*** *pour son encadrement au quotidien et avoir sourient ce travail et me guider ses conseils ont toujours été précieux et nos discussion importantes pour faire évoluer ce projet. Ses remarques sur le manuscrit ont été fondamentales pour le rendre plus clair et compréhensible.*

U*n merci incommensurable à mes amis, leur amitié, leur gentillesse et leur soutien moral.*

P*our terminer en beauté, enfin, je remercie ma famille. Ils me soutiendront toujours.*

Ils sont très fiers de moi et ils me poussent à faire toujours mieux. Je peux vous dire que je n'ai pas l'intention de m'arrêter. J'essaierai d'évoluer toujours, j'exprime tout ma gratitude à ma famille pour m'avoir supporté tout au long de ma scolarité.

Si tu veux courir, cours un Kilomètre
Si tu veux changer ta vie, cours un marathon.

Table des matières

Introduction

Pour comprendre les phénomènes physiques, il est préférable de modéliser ces équations aux dérivées partielles, ces dernières sont généralement notée en abrégé par E.D.P.

Dans la vie quotidienne la majorité des ingénieurs en mécanique aussi bien en physique rencontrent des problèmes y afférent au phénomène de la dynamique des fluides et le transport de masse… etc. Pour solutionner ce genre de problèmes, la formulation en EDP est la meilleur moyen et plus particulièrement celle qu'on appelle l'EDP non-linéaire.

Le problème après sera de trouver une solution aux EDPs, ils existent plusieurs méthodes pour chercher des solutions particulières, car la recherche de solution générale pour les EDPs (non-linéaires) est impossible. Une classe des méthodes consistent à réduire les EDPs en EDOs. Ces méthodes de transformation sont appelés « METHODES DE REDUCTION » [1], [10] et [16], qui sont notre étude.

Ce mémoire est organisé en quatre chapitres :

Dans le premier chapitre, on présente quelques notions sur les équations aux dérivées partielles, et en particulier celle de l'équation de Burgers aussi bien le théorème de forme bilinéaire, définition de la solution similaire et l'auto-similaire, quelques notions sur les équations différentielles et les méthodes de réduction pour les EDPs non-linéaire. Nous nous basons sur la méthode de Clarkson et Kruskal.

Dans le deuxième chapitre on trouve la réduction de similarité et la solution similaire de l'équation de Burgers de forme :

$$u_t + uu_x = 0$$

Dans le troisième chapitre on s'intéresse à l'équation de Burgers de forme plus générale:

$$u_t + uu_x = u_{xx}$$

En cherchant les solutions par la méthode de Clarkson et Kruskal.

Enfin dans le dernier chapitre on s'intéresse la réduction de similarité ainsi que la solution similaire pour l'équation de Burgers sous forme plus générale :

$$u_t + uu_x + \sigma u = u_{xx}$$

Appelée « équation de Burgers avec amortissement linéaire ».

Notre contribution personnelle consistait :

- *A développer les calculs de travaux établis par [10] avec de proposition de nouvelle solution.*
- *L'application du théorème de forme bilinéaire (séparation des variables) à ce type d'équation.*

Chapitre 1

Introduction aux équations aux dérivées partielles

1.1 Les définitions générales

On donne tout d'abord quelques définitions sur les équations aux dérivées partielles.

Définition 1.1.1 *soit une variable u (l'inconnue) dépendant de n variables indépendantes $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Toute relation entre u, x_i $(i = 1, \dots, n)$ et des dérivées partielles de u par rapport aux x_i*

$$F\left(u, x_1, \dots x_n, u_{x_1}, u_{x_2} \dots, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, \dots, u_{\underbrace{x_1 \dots x_1}_{n\ fois}}, \dots\right) = 0.$$

Constitue une équation aux dérivées partielles (en abrégé : EDP).

Définition 1.1.2 *On appelle ordre d'une EDP l'ordre le plus élevé des dérivées partielles intervenant dans l'EDP. Une EDP est dite d'ordre n quand la dérivée partielle d'ordre le plus élevé qu'elle contient est d'ordre n.*

Définition 1.1.3 *Une EDP est dite* ***linéaire*** *quand elle l'est par rapport à u et à toutes ses dérivées partielles. Si u et ses dérivées partielles apparaissent séparément et "à la puissance 1" dans l'EDP, celle-ci est linéaire.*

Définition 1.1.4 *Des EDPs* ***non linéaire,*** *c'est-à-dire que la relation entre les dérivées partielles est non linéaire .Par exemple elle fait intervenir le carré d'une dérivée ou bien on multiplie par une fonction qui dépend elle-même de la solution.*

1.2 Equation de Burgers

1.2.1 formulation de l'équation

l'équation de Burgers est un modèle d'équation aux dérivées partielles non-linéaire, elle s'écrit comme suite :

$$u_t + uu_x = 0 \qquad\qquad x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

L'intérêt de l'équation est qu'elle peut s'écrire sous forme conservation :

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0 \qquad\qquad x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Et la forme générale de l'équation de Burgers est :

$$u_t + uu_x = \mu u_{xx} \qquad\qquad x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Si $\mu = 1$, en ajoutant le terme σu dans la forme générale de l'équation de Burgers, on obtient la forme plus générale :

$$u_t + uu_x + \sigma u = u_{xx} \qquad\qquad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

avec σ est un constant et $u(x,t)$ le champ de déplacement, cette équation est l'équation de" Burgers avec amortissement linéaire ".

1.2.2 Les utilisations de l'équation

l'équation de Burgers est utilisée dans l'enseignement de la dynamique des fluides comme un modèle simplifié de la turbulence et le comportement de la couche limite, la formation d'onde de choc, et le transport de masse.

Elle possède des solutions analytiques généralement obtenues par plusieurs méthodes. Ces solutions permettent de valider les méthodes numériques de résolutions de cette équation.

Cette équation a été étudiée par de plusieurs auteur on peut citer Sachdev et Nair (1987), Clarkson et Kruskal (1989).

1.3 Les méthodes de réduction

Pour réduire une équation aux dérivées partielles à une équation différentielle ordinaire ($EDP \curvearrowright EDO$), il existe pour cela plusieurs méthodes et qui sont :

- La méthode classique "Groupe de Lie de transformation infinitésimale".

- La méthode directe de Clarkson et Kruskal.

Aussi on peut utiliser le théorème de forme bilinéaire (séparation des variables).

Dans ce mémoire, on va utiliser une seule méthode, qui est la méthode directe de Clarkson et Kruskal pour trouver la réduction de similarité, et ceci à travers des cas particuliers on peut trouver la solution de similarité des équations aux dérivées partielles non-linéaire.

1.3.1 La méthode de Clarkson et Kruskal

En 1989 Clarkson et kruskal ont développé la méthode directe pour obtenir des réductions précédemment inconnues de l'équation de Burgers, et aussi ils ont trouvé la réduction de similarité de plusieurs équations aux dérivées partielles non-linéaires.

Le principe de la méthode

Il suffit de chercher une solution de forme générale :

$$u(x,t) = \alpha(x,t) + \beta(x,t)w(z), \; x \in \mathbb{R}, \; t > 0,$$

avec α, β et $z = z(x,t)$ sont des fonctions à déterminer, par la suite, il suffit de remplacer la solution de cette forme dans l'équation à résoudre.

Pour transformer l'équation différentielle obtenue en une équation différentielle ordinaire (EDO), on prend des coefficients de sorte que chaque coefficient soit le produit de $\Gamma_i(z)$, $\{i = 1, \ldots, n\}$ avec le coefficient de la fonction dérivée (de la fonction de similarité $w(z)$) et qui possède le plus haut degré.

Le résultat obtenu (le produit) sera comparé avec le reste des coefficients de l'équation différentielle précédant. La comparaison fait générer un système d'équations aux dérivées partielles qu'il faut résoudre.

Pour résoudre ce système on utilise des cas particuliers ce qui donne enfin **la solution similaire.**

La solution similaire

Une solution similaire d'une équation aux dérivées partielles reste inchangé d'échelle. Pour une équation aux dérivées partielles à deux variables x et t, les solutions de similitudes peuvent être trouvées en résolvant une équation différentielle. La forme générale de la solution similaire est :

$$u(x,t) = \alpha(x,t) + \beta(x,t)w(z),$$

avec

$$z = z(x,t), \beta(x,t) \neq 0. x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

La solution auto-similaire

La solution auto-similaire joue un grand rôle dans les équations aux dérivées partielles. Si en prend $\alpha(x,t)$ comme une fonction nulle et $\beta(x,t) = c(t)$, et aussi $z(x,t) = \dfrac{x}{a(t)}$, donc on obtient une nouvelle forme

$$u(x,t) = c(t)w\left(\frac{x}{a(t)}\right), \quad a(t) \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

où $c(t)$ et $a(t)$ sont des fonctions qu'on pourra déterminer, et w est une fonction d'une variables, et qui est solution d'une équation différentielle ordinaire non-linéaire. S'appelle"**la solution auto-similaire**".

Remarque 1.3.1 *La solution auto-similaire est un cas particulier de la solution similaire.*

Dans la suite on a besoin du théorème suivant :

1.4 Théorème (Forme bilinéaire)

Théorème 1.4.1 *soit la forme bilinéaire*

$$B(f,g) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)g_i(t), \;\; x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Si $B(f,g) = 0$ *alors, il existe des constants* A_i*,* $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ *tel que*

$$\begin{cases} f_1(x) = \sum\limits_{i=2}^{n} A_i f_i(x), \\ g_k(t) = -A_k g_1(t), \;\; (k = 2, 3, \ldots, n). \end{cases}$$

Preuve. (Par récurrence)

Pour $n = 2$

$$f_1(x)g_1(t) + f_2(x)g_2(t) = 0.$$

ce qui implique

$$\frac{f_1}{f_2} = -\frac{g_2}{g_1} = A_2,$$

donc

$$f_1 = A_2 f_2, \quad g_2 = -A_2 g_1.$$

Alors, la relation est vraie pour $n = 2$.

Supposons vrai pour $n - 1$ et on démontre pour n

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x)g_i(t) = 0.$$

Si on divise par $f_n g_n$, on obtient:

$$\frac{f_1 g_1}{f_n g_n} + \frac{f_2 g_2}{f_n g_n} + \ldots + \frac{f_{n-1} g_{n-1}}{f_n g_n} + 1 = 0.$$

On dérive par rapport à x

$$\left(\frac{f_1}{f_n}(x)\right)' \frac{g_1}{g_n}(t) + \left(\frac{f_2}{f_n}(x)\right)' \frac{g_2}{g_n}(t) + \ldots + \left(\frac{f_{n-1}}{f_n}(x)\right)' \frac{g_{n-1}}{g_n}(t) = 0.$$

On a une forme bilinéaire de $n-1$ terme (est vrai pour $n-1$), donc on peut appliquer le théorème

$$\begin{cases} \left(\frac{f_1}{f_n}(x)\right)' = \sum_{i=2}^{n-1} A_i \left(\frac{f_i}{f_n}(x)\right), & (*) \\ \dfrac{g_k}{g_n} = -A_k \dfrac{g_1}{g_n} \quad k = 2, \ldots, n-1. & (**) \end{cases}$$

On intègre $(*)$ par rapport à x

$$\begin{aligned} \frac{f_1}{f_n} &= \sum_{i=2}^{n-1} A_i \frac{f_i}{f_n} + A_n, \\ &\Longrightarrow f_1 = \sum_{i=2}^{n-1} A_i f_i + A_n f_n, \\ &\Longrightarrow f_1 = \sum_{i=2}^{n} A_i f_i. \end{aligned}$$

$(**)$ devient

$$g_k = -A_k g_1 \quad \text{pour } k = 2, \ldots n-1.$$

Donc le problème reste sur

$$g_k(t) = -A_k g_1(t), k = n,$$

$$g_n(t) = -A_n g_1(t)?$$

On a la forme bilinéaire

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} f_i(x) g(t) &= f_1 g_1 + f_2 g_2 + \ldots + f_{n-1} g_{n-1} + f_n g_n = 0 \;\; et \;\; f_1 = \sum_{i=2}^{n} A_i f_i, \\ &\Longrightarrow \left[\sum_{i=1}^{n} A_i f_i(x)\right] g_1 + f_2 g_2 + \ldots + f_{n-1} g_{n-1} + f_n g_n = 0, \\ &\Longrightarrow [A_2 f_2 g_1 + \ldots + A_{n-1} f_{n-1} g_1 + A_n f_n g_1] - A_2 f_2 g_1 - \ldots - A_{n-1} f_{n-1} g_1 + f_n g_n = 0. \end{aligned}$$

Alors, on obtient

$$A_n f_n g_1 = -f_n g_n,$$

ce qui implique

$$g_n = -A_n g_1.$$

D'où le théorème est démontré. ■

1.5 Quelques rappels sur les équations différentielles

Dans la suite on a besoin des équations suivantes:

1.5.1 Equation de Bernoulli

Ce sont des équations de la forme

$$y' = p(t)y + q(t)y^{\alpha}, \ t \in \mathbb{R},$$

où α est un réel différent de 1.

On peut faire le changement de la fonction inconnue

$$z = y^{1-\alpha}.$$

Qui ramène à une équation linéaire.

1.5.2 Equation de Riccati

Ce sont des équations de la forme

$$y' = a(t)y^2 + b(t)y + c(t), t \in \mathbb{R},$$

où $a(t) \neq 0$, $b(t) \neq 0$ et $c(t) \neq 0$.

On sait résoudre cette équation dés que l'on connait une solution particulière u.

Alors, on pose

$$y = u + z.$$

Cela conduit à une équation de Bernoulli pour z avec $\alpha = 2$. Comme indiqué ci-dessus on peut alors faire le changement d'inconnue

$$w = \frac{1}{z},$$

qui conduit à une équation linéaire pour w.

Chapitre 2

Réduction de similarité pour l'équation de Burgers

2.1 Introduction

Dans ce chapitre on va développé la méthode de Clarkson et Kruskal sur l'équation de Burgers. En se basant sur plusieurs travaux en particulier ceux décrits dans le livre de SACHDEV [10].

On a l'équation de Burgers sous forme suivante:

$$u_t + uu_x = 0, \; x \in \mathbb{R}, \; t > 0. \tag{2.1.1}$$

On suppose que (2.1.1) possède la solution sous forme:

$$u(x,t) = \alpha(x,t) + \beta(x,t)w(z), \quad z = z(x,t), \quad \beta(x,t) \neq 0, \quad x \in \mathbb{R} \text{ et } t > 0. \tag{2.1.2}$$

Cette forme de solution à été proposée par C.K en [10].

2.2 Principe de la méthode

On va dériver (2.1.2) par rapport à x et t, on obtient:

$$\begin{cases} u_t = \alpha_t + \beta_t w(z) + z_t \beta w'(z), \\ u_x = \alpha_x + \beta_x w(z) + z_x \beta w'(z). \end{cases}$$

On remplace u_t, u_x dans (2.1.1), on obtient:

$$\beta^2 z_x w w' + \beta\beta_x w^2 + \beta(z_t + \alpha z_x)w' + (\beta_t + \alpha\beta_x + \alpha_x\beta)w + \alpha_{tt} + \alpha\alpha_x = 0. \tag{2.2.1}$$

l'équation (2.2.1) devient une *EDO* pour détermination de la fonction de similarité $w(z)$ si:

$$\beta^2 z_x \Gamma_1(z) = \beta\beta_x. \tag{2.2.2}$$

$$\beta^2 z_x \Gamma_2(z) = \beta(z_t + \alpha z_x). \tag{2.2.3}$$

$$\beta^2 z_x \Gamma_3(z) = \beta_t + \alpha\beta_x + \alpha_x\beta. \tag{2.2.4}$$

$$\beta^2 z_x \Gamma_4(z) = \alpha_t + \alpha\alpha_x. \tag{2.2.5}$$

l'équation (2.2.1) devient alors

$$ww' + \Gamma_1(z)w^2 + \Gamma_2(z)w' + \Gamma_3(z)w + \Gamma_4(z) = 0. \tag{2.2.6}$$

On résolve (2.2.2) − (2.2.5) pour obtenir les fonctions inconnues α, β, z, Γ_1, Γ_2, Γ_3 et Γ_4.

En cours de solution les remarques suivantes sont trouvées utiles:

Remarque 2.2.1 *Si $\alpha(x,t)$ a la forme*

$$\alpha(x,t) = \hat{\alpha}(x,t) + \beta(x,t)\Omega(z).$$

Alors, on peut placer $\Omega \equiv 0$.

Remarque 2.2.2 *Si $\beta(x,t)$ est déterminé à partir d'une équation de la forme*

$$\beta = \hat{\beta}(x,t)\Omega(z).$$

Alors, on peut poser $\Omega \equiv 1$.

On pose $\Gamma_1(z) = \dfrac{\Omega_1'(z)}{\Omega_1(z)}$ dans (2.2.2)

$$\beta z_x \frac{\Omega_1'(z)}{\Omega_1(z)} = \beta_x,$$

ce qui implique

$$z_x \frac{\Omega_1'(z)}{\Omega_1(z)} = \frac{\beta_x}{\beta}.$$

En intégrant par rapport à x , on obtient:

$$\ln \beta = \ln \Omega_1(z) + c(t),$$

alors

$$\beta(x,t) = B(t)\Omega_1(z),\ B(t) = \exp(c(t)). \tag{2.2.7}$$

En utilisant la remarque 2.2.2 dans (2.2.7), on met $\Omega_1(z) \equiv 1$. Alors que

$$\Gamma_1(z) = 0. \tag{2.2.8}$$

Aussi,

$$\beta(x,t) = B(t). \tag{2.2.9}$$

En substituant (2.2.9) dans (2.2.4) , on obtient:

$$B^2(t) z_x \Gamma_3(z) = B'(t) + \alpha_x B(t),$$

ce qui implique

$$\alpha_x = B(t) z_x \Gamma_3(z) - \frac{B'(t)}{B(t)}. \tag{2.2.10}$$

En plaçant $\Gamma_3(z) = \Omega_3'(z)$ dans (2.2.10), et en intégrant par rapport à x, on obtient:

$$\alpha_x = B(t) z_x \Omega_3'(z) - \frac{B'(t)}{B(t)},$$

ce qui implique

$$\int \alpha_x dx = B(t) \int z_x \Omega_3'(z) dx - \frac{B'(t)}{B(t)} \int dx + A(t),$$

alors

$$\alpha = B(t)\Omega_3(z) - \frac{B'(t)}{B(t)} x + A(t). \tag{2.2.11}$$

Se servant de la remarque 2.2.1 dans (2.2.11), on aplacé

$$\Omega_3 = 0 \Longrightarrow \Gamma_3 = \Omega_3' = 0. \tag{2.2.12}$$

On remplace (2.2.12) dans (2.2.11),donc l'équation (2.2.11) réduit à

$$\alpha = A(t) - \frac{B'(t)}{B(t)} x. \tag{2.2.13}$$

En utilisant (2.2.9) ,l'équation (2.2.3) est écrit en tant que du première ordre EDP pour z :

$$B^2(t)z_x\Gamma_2(z) = B(t)(z_t + \alpha z_x),$$

ce qui implique

$$z_t + \alpha z_x = B(t)z_x\Gamma_2(z),$$

alors

$$z_t + (\alpha - B(t)\Gamma_2(z))z_x = 0.$$

avec les caractéristiques

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{\alpha - B(t)\Gamma_2(z)} = \frac{dz}{0}. \tag{2.2.14}$$

La troisième équation dans (2.2.14) donne

$$z = constant = s.$$

Il est la variable de similarité.

En plaçant $\Gamma_2(z) = l$, (où l est une constante dans $\mathbb{R}$) dans (2.2.14), le premier et le deuxième équation dans (2.2.14) devient :

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{\alpha - B(t)l},$$

ce qui implique

$$\frac{dx}{dt} = \alpha - B(t)l,$$

on a employé (2.2.13) pour α

$$\frac{dx}{dt} = A(t) - \frac{B'(t)}{B(t)}x - B(t)l,$$

donc

$$\frac{dx}{dt} + \frac{B'(t)}{B(t)}x = A(t) - lB(t). \tag{2.2.15}$$

La solution générale de (2.2.15) est

$$xB(t) - \int A(t)B(t)dt + l\int B^2(t)dt = c, \quad c \in \mathbb{R},$$

on pose $c = z$, donc

$$z = xB(t) - \int A(t)B(t)dt + l\int B^2(t)dt. \tag{2.2.16}$$

En utilisant (2.2.9) et (2.2.13) , la forme de solution (2.1.2) devient:

$$u(x,t) = \alpha(x,t) + \beta(x,t)w(z) \Longleftrightarrow u(x,t) = A(t) - x\frac{B'(t)}{B(t)} + B(t)w(z). \tag{2.2.17}$$

En utilisant (2.2.9) ,(2.2.13) et (2.2.16)

On trouve

$$\begin{cases} \alpha_t = A' - \dfrac{B''}{B}x + \dfrac{B'^2}{B^2}x, \\ \alpha_x = -\dfrac{B'(t)}{B(t)}, \\ z_x = B(t). \end{cases}$$

Pour remplacer dans (2.2.5)

$$B^3\Gamma_4(z) = A' - \frac{B''}{B}x + \frac{B'^2}{B^2}x - \frac{B'(t)}{B(t)}\left(A - \frac{B'(t)}{B(t)}x\right),$$

qu'on obtient:

$$\left(A' - \frac{B'}{B}A\right) + x\left(2\frac{B'^2}{B^2} - \frac{B''}{B}\right) = B^3\Gamma_4(z). \tag{2.2.18}$$

on prend $\Gamma_4(z)$ comme une fonction linéaire pour le variable z

$$\Gamma_4(z) = mz + k. \tag{2.2.19}$$

Où m et k sont des constantes dans $\mathbb{R}$,

En substituant (2.2.16) et (2.2.19) dans (2.2.18), on obtient

$$\left(A' - \frac{B'}{B}A\right) + x\left(2\frac{B'^2}{B^2} - \frac{B''}{B}\right) = B^3(mz + k),$$

ce qui implique

$$\left(A' - \frac{B'}{B}A\right) + x\left(2\frac{B'^2}{B^2} - \frac{B''}{B}\right) = B^3\left[m\left(xB(t) - \int A(t)B(t)dt + l\int B^2(t)dt\right) + k\right],$$

alors

$$\left(A' - \frac{B'}{B}A\right) + x\left(2\frac{B'^2}{B^2} - \frac{B''}{B}\right) = B^3\left[mxB - m\int ABdt + ml\int B^2dt + k\right].$$

En égalisant des coefficients de x et des termes libres de x sur deux côtés de cette équation, on obtient:

côté de x :

$$2\frac{B'^2}{B^2} - \frac{B''}{B} = mB^4 \Longrightarrow 2B'^2 - BB'' = mB^6,$$

ce qui implique

$$BB'' - 2B'^2 + mB^6 = 0. \tag{2.2.20}$$

côté de x^0 :

$$A' - \frac{B'}{B}A = B^3 \left[k - m \int ABdt + ml \int B^2 dt \right]. \tag{2.2.21}$$

Les équations (2.2.20) , (2.2.21) sont résolues pour un cas particulier et qui:

2.2.1 Le cas particulier $m = 0$

Dans ce cas, l'équation (2.2.20) devient :

$$BB'' - 2B'^2 = 0. \tag{2.2.22}$$

ce qui implique

$$\frac{B''}{B'} = 2\frac{B'}{B},$$

En intégrant par rapport à t :

$$\ln B' = 2 \ln B + c,$$

$$B' = c_1 B^2,$$

On intégre par rapport à t

$$\frac{1}{B(t)} = c_2 t + c_3.$$

On pose $c_3 = 0$, alors

$$B(t) = bt^{-1}, \quad b = \frac{1}{c_2} \in \mathbb{R}^*. \tag{2.2.23}$$

En utilisant (2.2.23) et $m = 0$ dans (2.2.21) , on obtient

$$\frac{dA}{dt} + \frac{bt^{-2}}{bt^{-1}} A = k(bt^{-1})^3,$$

ce qui implique

$$\frac{dA}{dt} + \frac{1}{t} A = k\frac{b^3}{t^3}.$$

C'est une équation différentielle linéaire.

On va trouver la solution de cette équation comme suivante

$$\frac{dA}{dt} + \frac{1}{t}A = 0,$$

ce qui implique

$$\frac{dA}{A} = -\frac{dt}{t},$$

en intégrant par rapport à t :

$$\ln A = \ln t + c.$$

la solution homogène est :

$$A = c_1 t^{-1}, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

par la méthode de variation constante. rendement d'une solution spéciale:

$$A(t) = c(t)t^{-1},$$

on remplace dans l'équation linéaire, on obtient:

$$c' t^{-1} - ct^{-2} + ct^{-2} = kb^3 t^{-3},$$

ce qui implique

$$c' = kb^3 t^{-2} \Longrightarrow c(t) = -kb^3 t^{-1},$$

alors

$$A(t) = -kb^3 t^{-2}. \tag{2.2.24}$$

En utilisant (2.2.23) et (2.2.24) dans (2.2.16) et (2.2.17) , on a la variable de similarité:

$$z = xbt^{-1} + kb^4 \int t^{-3} dt + lb^2 \int t^{-2} dt + q, \quad q \in \mathbb{R},$$

on prend $q = 0$, alors

$$\alpha(x,t) = xt^{-1} - kb^3 t^{-2}, \beta = B(t) = bt^{-1},$$

$$z(x,t) = bxt^{-1} - \frac{kb^4}{2} t^{-2} - lb^2 t^{-1}. \tag{2.2.25}$$

Et la réduction de similarité est:

$$u(x,t) = -kb^3 t^{-2} + xt^{-1} + bt^{-1} w(z). \tag{2.2.26}$$

En utilisant (2.2.8), (2.2.12), (2.2.19) respectivement, dans (2.2.6), on constate que $w(z)$ satisfait le premier ordre EDO

$$ww' + lw' + zm + k = 0,$$

et $m = 0$

$$(w + l)w' + k = 0. \tag{2.2.27}$$

En intégrant par rapport à z

$$\int ww'dz + l\int w'dz + k\int dz = p,$$

$$\frac{w^2}{2} + lw + kz = p,$$

où p est la constante d'intégration ($p \in \mathbb{R}$)

$$w^2 + 2lw + (2kz - 2p) = 0.$$

Cette équation c'est l'équation caractéristique, et son discriminant.est

$$\Delta = (2l)^2 - 4(2kz - 2p),$$

ce qui implique

$$\sqrt{\Delta} = \pm 2\sqrt{l^2 + 2p - 2kz}.$$

2.2.2 Le résultat

La fonction de similarité est :

$$w(z) = -l \pm \sqrt{l^2 + 2p - 2kz}. \tag{2.2.28}$$

La solution similaire est :

En substituant (2.2.28) et (2.2.25) dans (2.2.26) , on obtient la solution de similarité de l'équation (2.1.1) :

$$u(x,t) = xt^{-1} - kb^3t^{-2} + bt^{-1}\left[-l \pm \sqrt{l^2 + 2p - 2kxbt^{-1} + 2klb^2t^{-1} + k^2b^4t^{-2}}\right].$$

Chapitre 3

Réduction de similarité pour l'équation générale de Burgers

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on va développé la méthode de Clarkson et Kruskal sur l'équation générale de Burgers. En se basant sur plusieurs travaux en particulier ceux décrits dans le livre de SACHDEV [10].

On a l'équation de Burgers sous forme générale suivante :

$$u_t + uu_x = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \tag{3.1.1}$$

La forme de la solution à chercher s'ecrit comme suit:

$$u(x,t) = \alpha(x,t) + \beta(x,t)w(z), \quad \beta(x,t) \neq 0, \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0, \tag{3.1.2}$$

où $z = z(x,t)$ est la variable de similarité.

3.2 Principe de la méthode

on trouve u_t, u_x, u_{xx} :

$$\begin{cases} u_t = \alpha_t + \beta_t w(z) + z_t \beta w'(z), \\ u_x = \alpha_x + \beta_x w(z) + z_x \beta w'(z), \\ u_{xx} = \alpha_{xx} + \beta_{xx} w + \beta_x z_x w' + z_{xx} \beta w' + z_x^2 \beta w'' + z_x \beta_x w'. \end{cases}$$

Et on remplace u, u_x, u_t et u_{xx} dans (3.1.1) , on obtient:

$$\beta z_x^2 w'' + [2\beta_x z_x + \beta z_{xx} - \beta(z_t + \alpha z_{xx})]w' - \beta\beta_x w^2 - \beta^2 z_x w w' \tag{3.2.1}$$

$$+(\beta_{xx} - \beta_t - \alpha\beta_x - \alpha_x\beta)w + \alpha_{xx} - \alpha_t - \alpha\alpha_x = 0.$$

Pour L'ED (3.2.1) à déduire une EDO pour $w(z)$, et elle est une fonction d'une seule variable de similarité z.

On présente les fonctions $\Gamma_i(z)$, $(i = 1, \ldots, 5)$, tels que l'équation (3.2.1) devient :

$$\Gamma_1(z) + \Gamma_2(z)w + \Gamma_3(z)w^2 + \Gamma_4 w w' + \Gamma_5(z)w' + w'' = 0. \tag{3.2.2}$$

On multiplie l'équation (3.2.2) par le coefficient de w'' dans l'équation (3.2.1) et en comparant (3.2.1) et (3.2.2), on obtient :

$$\beta z_x^2 \Gamma_1(z) = \alpha_{xx} - \alpha_t - \alpha\alpha_x. \tag{3.2.3}$$

$$\beta z_x^2 \Gamma_2(z) = \beta_{xx} - \beta_t - \alpha\beta_x - \alpha_x\beta. \tag{3.2.4}$$

$$\beta z_x^2 \Gamma_3(z) = -\beta\beta_x. \tag{3.2.5}$$

$$\beta z_x^2 \Gamma_4(z) = -z_x\beta^2. \tag{3.2.6}$$

$$\beta z_x^2 \Gamma_5(z) = 2\beta_x z_x + \beta z_{xx} - \beta z_t - \alpha\beta z_x. \tag{3.2.7}$$

La remarque suivante ainsi que les remarques 2.2.1 et 2.2.2 du chapitre 2 permettent de simplifier le système (3.2.3) – (3.2.7).

Remarque 3.2.1 *Si $z(x,t)$ est déterminé à partir de la solution implicite $f(z) = \hat{z}(x,t)$, où $f(z)$ est une fonction inversible, alors on peut simplement mettre*

$$f(z) = z.$$

On va étudier trois cas suivants:

3.2.1 Le cas particulier $z_{xx} = 0$

En premier lieu, on peut supposer que

$$z_{xx} = 0.$$

Il est claire que z est une fonction linéaire de x.

On pose

$$\Gamma_3(z) = \Lambda_3'(z).$$

on peut facilement intégrer (3.2.5) par rapport à x, on obtient

$$\beta(x,t) = -z_x \Lambda_3(z) + q(t).$$

En prend $q(t)$ comme est une fonction nulle. La remarque 2.2.2 permet d'écrire

$$\beta(x,t) = -z_x. \tag{3.2.8}$$

Depuis $z_{xx} = 0$, on a $\beta_x = 0$ de (3.2.8), alors

$$\beta(x,t) = B(t), \quad t > 0.$$

On a dans l'équation (3.2.6),

$$\beta = -z_x^2 \Gamma_4(z).$$

D'après la remarque 2.2.2,

$$\Gamma_4(z) = 1,$$

de sorte que

$$z_x = -\beta(x,t) = -B(t),$$

et en intégrant par rapport à x

$$z(x,t) = -xB(t) + D(t). \tag{3.2.9}$$

De l'équation (3.2.4)

$$Bz_x^2 \Gamma_2(z) = -B' - \alpha_x B,$$

on prend

$$\Gamma_2(z) = 0,$$

$$B'(t) + \alpha_x B(t) = 0.$$

ce qui implique

$$\alpha_x = -\left[\frac{B'(t)}{B(t)}\right], \quad B(t) \neq 0.$$

En intégrant par rapport à x

$$\alpha(x,t) = -\left[\frac{B'(t)}{B(t)}\right] x + k(t). \tag{3.2.10}$$

Où les fonctions $D(t)$ et $k(t)$ doivent être déterminés.

En employant (3.2.9) – (3.2.10) dans (3.2.3) et (3.2.7), on obtient

$$B^3\gamma = -Bz_t - \alpha B z_x,$$

on trouve z_t et z_x

$$\begin{cases} z_t = -B'x + D', \\ z_x = -B, \end{cases}$$

ce qui implique

$$B^2\gamma = B'x - D' + B(-B'B^{-1}x + k).$$

Si on choisi,

$$\Gamma_5(z) = \gamma.$$

Alors,

$$\gamma B^2 + D' - kB = 0. \tag{3.2.11}$$

On trouve:

$$\begin{cases} \alpha_x = -B'B^{-1}, \\ \alpha_{xx} = 0, \\ \alpha_t = -(B'B^{-1})'x + k' + (-B'B^{-1}x + k)B'B^{-1}. \end{cases}$$

On remplace α_x, α_{xx}, α_t et z_x dans (3.2.3)

$$B^3\Gamma_1(z) = (B'B^{-1})'x - k' + (-B'B^{-1}x + k)B'B^{-1},$$

ce qui implique

$$\left[\left(B^{-1}B'\right)' - \left(B^{-1}B'\right)^2\right] x - k' + B^{-1}B'k = B^3\Gamma_1(z). \tag{3.2.12}$$

Si on choisi

$$\Gamma_1(z) = \lambda z.$$

γ et λ sont des constantes dans $\mathbb{R}$.

Egalement des coefficients de x et de x^0 des deux côtés de (3.2.12) , on obtient de côté de x :

$$\left(B^{-1}B'\right)' - \left(B^{-1}B'\right)^2 = -\lambda B^4,$$

ce qui implique

$$-B'^2 B^{-2} + B'' B^{-1} - B^{-2} B'^2 = -\lambda B^4,$$

ce qui implique

$$B'' B^{-1} - 2B'^2 B^{-2} = -\lambda B^4,$$

donc

$$BB'' - 2B'^2 + \lambda B^6 = 0. \tag{3.2.13}$$

et de côté de x^0:

$$-k' + B^{-1}B'k = \lambda D B^3,$$

ce qui implique

$$Bk' - kB' + \lambda D B^4 = 0. \tag{3.2.14}$$

Il est difficile de résoudre l'équation (3.2.13) – (3.2.14), étant donnée qu'elles sont généralement fortement non-linéaire. Par ailleurs, une solution spéciale est facilement obtenue.

Comme dans l'équation (3.2.13), on pose

$$B(t) = \frac{1}{y(t)}, \quad y(t) \neq 0.$$

on trouve

$$\begin{cases} B' = -\dfrac{y'}{y^2}, \\ B'' = -\dfrac{y''}{y^2} + 2\dfrac{y'^2}{y^3}. \end{cases}$$

On remplace B, B' et B'', on obtient

$$\frac{1}{y}\left(-\frac{y''}{y^2} + 2\frac{y'^2}{y^3}\right) - 2\frac{y'}{y^4} + \lambda\frac{1}{y^6} = 0,$$

ce qui implique

$$\lambda y^{-3} - y'' = 0.$$

On pose

$$\begin{cases} y' = m(y), \\ y'' = y'\dfrac{dm}{dy} = m\dfrac{dm}{dy}. \end{cases}$$

$$m\frac{dm}{dy} = \lambda y^{-3} \Longrightarrow mdm = \lambda y^{-3}dy,$$

en intégrant par rapport à y

$$\frac{1}{2}m^2 = -\frac{\lambda}{2}y^{-2} + k.$$

On prend $k = 0$

$$\frac{1}{2}m^2 = -\frac{\lambda}{2}y^{-2}$$

ce qui implique

$$m^2 = -\frac{\lambda}{y^2}.$$

Si $\lambda < 0$, $\lambda = -p$, $p \in \mathbb{R}_+^*$

$$m(y) = \pm\sqrt{\frac{p}{y^2}} = \pm\frac{\sqrt{p}}{y}.$$

on va étudier le cas $m > 0$, alors

$$m(y) = y^{-1}\sqrt{p}$$

ce qui implique

$$y'y = \sqrt{p}.$$

D'après l'intégration, on obtient:

$$\frac{1}{2}y^2 = t\sqrt{p} + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}$$

on prend $p = \dfrac{b^2}{4a^4}$, donc

$$y(t) = \left(\frac{b}{a^2}t + c_2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad a \neq 0.$$

Alors,

$$B(t) = a\left(bt + b_0\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Dans l'équation (3.2.14) on pose $D(t)$ comme est une fonction nulle, alors l'équation devient:

$$Bk' - kB' = 0,$$

ce qui implique

$$\frac{k'}{k} = \frac{B'}{B}.$$

En intégrant par rapport à t

$$\ln k(t) = \ln B(t) + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R},$$

alors

$$k(t) = pB(t).$$

On prend $p = \gamma$ donc,

$$k(t) = \gamma B(t)$$

$$B(t) = a(bt + b_0)^{-\frac{1}{2}}, \quad D(t) = 0, \quad k(t) = a\gamma(bt + b_0)^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.2.15}$$

Où a $(a \neq 0), b, c$ et b_0 sont des constantes arbitraires.

Maintnant, toutes les fonctions $\alpha(x,t)$, $\beta(x,t)$ et $z(x,t)$ sont entièrement déterminées (en utilisant (3.2.9),(3.2.10) et (3.2.15)), alors

$$\alpha(x,t) = \frac{b}{2}x(bt + b_0)^{-1} + a\gamma(bt + b_0)^{-\frac{1}{2}}.$$

La forme de la solution similaire (3.1.2) est:

$$u(x,t) = \alpha(x,t) + \beta(x,t)w(z) \Longleftrightarrow u(x,t) = \frac{b}{2}x(bt+b_0)^{-1} + a\gamma(bt+b_0)^{-\frac{1}{2}} + a(bt+b_0)^{-\frac{1}{2}}w(z),$$

ce qui implique

$$u(x,t) = \frac{b}{2}x(bt + b_0)^{-1} + a(bt + b_0)^{-\frac{1}{2}}\left[\gamma + w(z)\right], \tag{3.2.16}$$

avec,

$$z(x,t) = -a(bt + b_0)^{-\frac{1}{2}}x. \tag{3.2.17}$$

On met Γ_i, $\{i = 1, \ldots, 5\}$. Ainsi obtenu, à savoir $\Gamma_1 = \lambda z$, $\Gamma_2 = \Gamma_3 = 0$, $\Gamma_4 = 1$, $\Gamma_5 = \gamma$ et $\lambda = -p = -\dfrac{b^2}{4a^4}$ dans (3.2.2) , on obtient

$$w'' + (\gamma + w)w' - \frac{b^2}{4a^4}z = 0. \tag{3.2.18}$$

Cette équation est une équation différentielle ordinaire non-linéaire difficile à résoudre, ainsi on peut récrire (3.2.16) comme suit

$$u(x,t) = (bt+b_0)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{b}{2} x (bt+b_0)^{-\frac{1}{2}} + a\left(\gamma + w(z)\right) \right]$$

ce qui implique

$$u(x,t) = (bt+b_0)^{-\frac{1}{2}} \left[a\left(\gamma + w(z)\right) - \frac{b}{2a} z \right],$$

alors

$$u(x,t) = (bt+b_0)^{-\frac{1}{2}} F(z), \tag{3.2.19}$$

où la fonction

$$F(z) = a\left(\gamma + w(z)\right) - \frac{b}{2a} z. \tag{3.2.20}$$

Maintenant, l'équation (3.2.18) devient

$$w(z) = \frac{1}{a} F(z) - \gamma + \frac{b}{2a^2} z,$$

on trouve

$$\begin{cases} w' = \dfrac{1}{a} F' + \dfrac{b}{2a^2}, \\ w'' = \dfrac{1}{a} F''. \end{cases}$$

On remplace dans (3.2.18)

$$\frac{1}{a} F'' + \left(\gamma + \frac{1}{a} F - \gamma + \frac{b}{2a^2} z \right) \left(\frac{1}{a} F' + \frac{b}{2a^2} \right) - \frac{b^2}{4a^4} z = 0,$$

ce qui implique

$$\frac{1}{a} F'' + \left(\frac{1}{a} F + \frac{b}{2a^2} z \right) \left(\frac{1}{a} F' + \frac{b}{2a^2} \right) - \frac{b^2}{4a^4} z = 0,$$

et ce qui implique

$$\frac{1}{a} F'' + \frac{1}{a^2} F F' + \frac{b}{2a^3} F + \frac{b}{2a^3} z F' + \frac{b^2}{4a^4} z - \frac{b^2}{4a^4} z = 0,$$

alors,

$$F'' + \left(\frac{1}{a} \right) F F' + \left(\frac{b}{2a^2} \right) (z F' + F) = 0,$$

donc,

$$F'' + \left(\frac{1}{a} \right) F F' + \left(\frac{b}{2a^2} \right) (z F)' = 0. \tag{3.2.21}$$

3.2.2 La nouvelle solution similaire

Vu que les travaux de **Sachdev** sont arrêtés à l'équation (3.2.21). Maintenant on va résoudre cette équation et de manière suivante:

Premièrement, on va intégrer par rapport à z on obtient:

$$F' + \left(\frac{1}{2a}\right) F^2 + \left(\frac{b}{2a^2}\right) zF = p,$$

où p est une constante d'intégration.

Pour le cas $p \neq 0$ Cette équation est une équation de **Riccati.**

La solution particulière de cette équation est:

$$F_{par} = pz, \text{ et } p = -\frac{b}{a}, \quad a \in \mathbb{R}^*.$$

On fait un changement de variable comme suivant:

$$F = l(z) - \frac{b}{a}z.$$

On remplace dans l'équation précédante

$$l' - \frac{b}{a} + \frac{1}{2a}\left(l - \frac{b}{a}z\right)^2 + \frac{b}{2a^2}z\left(l - \frac{b}{a}z\right) = -\frac{b}{a},$$

ce qui implique

$$l' + \frac{1}{2a}\left(l^2 - 2lz\frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}z\right)^2\right) + lz\frac{b}{2a^2} - \frac{b^2}{2a^3}z^2 = 0,$$

alors

$$l' - \frac{b}{a^2}zl + \frac{1}{2a}l^2 = 0.$$

Cette équation est une équation de **Bernoulli**

on pose

$$y = l^{-1} \Longrightarrow \begin{cases} l = y^{-1}, \\ y' = -l'l^{-2}. \end{cases}$$

Cette équation devient

$$y' + \frac{b}{a^2}zy - \frac{1}{2a} = 0.$$

Est une l'équation linéaire.

La solution homogène est:

$$y(z) = c \exp\left(-\frac{b}{4a^2}z^2\right).$$

par la méthode de variation constante:

$$y(z) = c(z) \exp\left(-\frac{b}{4a^2}z^2\right),$$

on remplace y dans l'équation linéaire, on obtient

$$c'(z) = \frac{1}{2a} \exp\left(\frac{b}{4a^2}z^2\right),$$

on intégre par rapport à z

$$c(z) = \frac{1}{2a} \int \exp\left(\frac{b}{4a^2}\tau^2\right) d\tau + c_1, \;\; c_1 \in \mathbb{R},$$

donc,

$$y(z) = \left(\int \exp\left(\frac{b}{4a^2}\tau^2\right) d\tau + c_2\right) \exp\left(-\frac{b}{4a^2}z^2\right).$$

Et

$$l(z) = \frac{\exp\left(\frac{b}{4a^2}z^2\right)}{\int \exp\left(\frac{b}{4a^2}\tau^2\right) d\tau + c_2}.$$

Alors

$$F(z) = -\frac{b}{a}z + \frac{\exp\left(\frac{b}{4a^2}z^2\right)}{\int \exp\left(\frac{b}{4a^2}\tau^2\right) d\tau + c_2}, \qquad \int \exp\left(\frac{b}{4a^2}\tau^2\right) d\tau + c_2 \neq 0.$$

Le résultat La fonction de similarité est:

$$w(z) = \frac{\exp\left(\frac{b}{4a^2}z^2\right)}{a\left(\int \exp\left(\frac{b}{4a^2}\tau^2\right) d\tau + c_2\right)} + \left(\frac{b}{2a^2} - \frac{b}{a}\right) z - \gamma,$$

et la solution similaire de l'équation générale de Burgers est:

$$u(x,t) = -\frac{b}{a}z(bt+b_0)^{-\frac{1}{2}} + \frac{(bt+b_0)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{b}{4a^2}z^2\right)}{\int \exp\left(\frac{b}{4a^2}\tau^2\right) d\tau + c_2}.$$

Pour le cas $p = 0$
$$F' + \left(\frac{1}{2a}\right) F^2 + \left(\frac{b}{2a^2}\right) zF = 0.$$
Cette équation est une équation de Bernoulli.

En résolvant l'équation précédant.

On pose
$$y = F^{-1} \Longrightarrow \begin{cases} F = y^{-1}, \\ y' = -F'F^{-2}. \end{cases}$$
Elle devient:
$$y' - \frac{b}{2a^2} zy - \frac{1}{2a} = 0.$$
On trouve la solution homogène:
$$y(z) = c \exp\left(\frac{b}{4a^2} z^2\right), \quad c \in \mathbb{R}.$$
par la méthode de variation constante:
$$y(z) = c(z) \exp\left(\frac{b}{4a^2} z^2\right),$$
On remplace $y(z)$ dans l'équation différentielle linéaire pour y donnée.

On prend le cas z est une fonction positive $(a > 0, \;\; x \leqslant 0)$, on obtient:
$$c'(z) = \frac{1}{2a} \exp\left(-\frac{b}{2a^2} z^2\right),$$
en intégant par rapport à z
$$c(z) = \frac{1}{2a} \int_0^z \exp\left(-\frac{b}{2a^2} \tau^2\right) d\tau.$$
On pose
$$s = a^{-1} \sqrt{\frac{b}{2}} \tau,$$
donc
$$d\tau = a \sqrt{\frac{2}{b}} ds,$$
alors
$$c(z) = \frac{1}{2a} \int_0^z \exp\left(-\left(a^{-1}\sqrt{\frac{b}{2}} s\right)^2\right) ds.$$

La fonction d'erreur est définie comme suivant:

$$\operatorname{erf}\left(z\frac{\sqrt{b}}{a\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{za^{-1}\sqrt{\frac{b}{2}}} \exp\left(-s^2\right) ds.$$

donc

$$c(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{ab}} \operatorname{erf}\left(za^{-1}\sqrt{\frac{b}{2}}\right),$$

la solution générale est:

$$y(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{ab}} \operatorname{erf}\left(za^{-1}\sqrt{\frac{b}{2}}\right).\exp\left(\frac{b}{4a^2}z^2\right).$$

La solution de l'équation de Bernoulli est

$$F(z) = \frac{2\sqrt{2b}\exp\left(-\frac{b}{4a^2}z^2\right)}{\sqrt{\pi}\operatorname{erf}\left(za^{-1}\sqrt{\frac{b}{2}}\right)}$$

Le résultat la solution de similarité de l'équation de Burgers est de forme (3.1.1)

$$u(x,t) = 2\sqrt{\frac{2b}{\pi}}(bt+b_0)^{-\frac{1}{2}} \frac{\exp\left(-\frac{b}{4a^2}z^2\right)}{\operatorname{erf}\left(za^{-1}\sqrt{\frac{b}{2}}\right)}$$

3.2.3 Le cas particulier $\beta(x,t) \neq B(t)$

Ici on résolve (3.2.3) – (3.2.7) d'une façon différente, en se servant de la remarque 2.2.2, on peut poser:

$$\Gamma_4(z) = 1.$$

Dans (3.2.6), ce qui donne

$$\beta(x,t) = -z_x. \tag{3.2.22}$$

De plus, on peut poser

$$\Gamma_4(z) = \Lambda_3'(z).$$

Dans (3.2.5), en utilisant l'équation (3.2.22)

$$z_x^2 \Lambda_3'(z) = -\beta_x,$$

ce qui implique

$$z_x \Lambda_3'(z) = -\frac{\beta_x}{z_x},$$

et ce qui implique

$$z_x \Lambda_3'(z) = \frac{\beta_x}{\beta},$$

et en intégrant par rapport à x, on obtient:

$$\Lambda_3(z) = k(t) + \log \beta(x,t), \tag{3.2.23}$$

où $k(t)$ est la fonction d'intégration. Maintenant on se sert de la remarque 3.2.1 et on laisse:

$$\Lambda_3(z) = z.$$

alors (3.2.23) devient

$$z = k(t) + \log \beta(x,t). \tag{3.2.24}$$

On dérive (3.2.24) par rapport à x et on utilise (3.2.22) pour obtenir l'équation de β suivante:

$$z_x = \frac{\beta_x}{\beta},$$

ce qui implique

$$\beta = -\frac{\beta_x}{\beta},$$

alors

$$\beta_x + \beta^2 = 0. \tag{3.2.25}$$

On a

$$-\frac{\beta_x}{\beta^2} = 1,$$

On intégre par rapport à x,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta} &= x + p(t), \\ \frac{1}{\beta} &= \frac{1}{b_0}\left[b_0 x + D(t)\right], \end{aligned}$$

alors,

$$\beta(x,t) = b_0\left[b_0x + D(t)\right]^{-1}. \tag{3.2.26}$$

où b_0 est une constante arbitraire. La fonction $D(t)$ reste à déterminer.

Si on insere (3.2.24) et (3.2.26) dans (3.2.7) et l'utilisation remarque 2.2.1, on trouve z_x, z_t et β_x et on remplace dans (3.2.7) :

$$\begin{cases} z_x = -\beta = -b_0\left[b_0x + D(t)\right]^{-1}, \\ \beta_x = -b_0^2\left[b_0x + D(t)\right]^{-2}, \\ z_t = k'(t) - D'\left[b_0x + D(t)\right]^{-1}. \end{cases}$$

on remplace z_x, β_x et z_t

$$\left(b_0\left[b_0x + D(t)\right]^{-1}\right)^3 \Gamma_5(z) = 2b_0^2\left[b_0x + D(t)\right]^{-2} b_0\left[b_0x + D(t)\right]^{-1}$$
$$+b_0\left[b_0x + D(t)\right]^{-1}\left(b_0^2\left[b_0x + D(t)\right]^{-2}\right) - b_0\left[b_0x + D(t)\right]^{-1}\left(k' - D'\left[b_0x + D(t)\right]^{-1}\right)$$
$$+\alpha\left(b_0\left[b_0x + D(t)\right]^{-1}\right)^2,$$

alors,

$$b_0\left[b_0x + D(t)\right]^{-1}\Gamma_5(z) = \alpha + 2b_0\left[b_0x + D(t)\right]^{-1} + b_0\left[b_0x + D(t)\right]^{-1}$$
$$-b_0^{-1}\left[b_0x + D(t)\right]k' + b_0^{-1}D',$$

et la fonction α de (3.2.7) est comme suivante :

$$\alpha = b_0\left[b_0x + D(t)\right]^{-1}\Gamma_5(z) - 3b_0\left[b_0x + D(t)\right]^{-1} + b_0^{-1}\left[b_0x + D(t)\right]k' - b_0^{-1}D',$$

ce qui implique

$$\alpha = \beta(x,t)\Gamma_5(z) - 3\beta(x,t) + b_0^{-1}\left[b_0x + D(t)\right]k' - b_0^{-1}D'.$$

D'après la remarque 2.2.1, on constate qu'on peut poser :

$$\Gamma_5 = 0,$$

donc,

$$\alpha(x,t) = -3b_0\left[b_0x + D(t)\right]^{-1} - b_0^{-1}\left[b_0x + D(t)\right]k' - b_0^{-1}D'. \tag{3.2.27}$$

En substituant $\beta(x,t)$ et $\alpha(x,t)$ de (3.2.26) et (3.2.27) dans (3.2.4), on a

$$\begin{cases} \alpha_x = 3b_0^2 \left[b_0 x + D(t)\right]^{-2} - k', \\ \beta_t = -b_0 D' \left[b_0 x + D(t)\right]^{-2}, \\ \beta_{xx} = 2b_0^3 \left[b_0 x + D(t)\right]^{-3}. \end{cases}$$

On remplace dans l'équation (3.2.4)

$$b_0^3 \left[b_0 x + D(t)\right]^{-3} \Gamma_2(z) = 2b_0^3 \left[b_0 x + D(t)\right]^{-3} + b_0 D' \left[b_0 x + D(t)\right]^{-2}$$

$$\left(-3b_0 \left[b_0 x + D(t)\right]^{-1} + b_0^{-1} \left[b_0 x + D(t)\right] k' + b_0^{-1} D'\right) b_0^2 \left[b_0 x + D(t)\right]^{-2}$$

$$- \left(3b_0^2 \left[b_0 x + D(t)\right]^{-2} - k'\right) b_0 \left[b_0 x + D(t)\right]^{-1},$$

ce qui implique

$$b_0^3 \left[b_0 x + D(t)\right]^{-3} \Gamma_2(z) = -4b_0^3 \left[b_0 x + D(t)\right]^{-3},$$

donc,

$$\Gamma_2(z) = -4.$$

on trouve α_{xx} et α_t

$$\begin{cases} \alpha_{xx} = -6b_0 \left[b_0 x + D(t)\right]^{-3}, \\ \alpha_t = 3b_0 D' \left[b_0 x + D(t)\right]^{-2} - b_0^{-1} D' k' - b_0^{-1} \left[b_0 x + D(t)\right] k'' - b_0^{-1} D''. \end{cases}$$

l'équation (3.2.3) devient:

$$b_0^3 \left[b_0 x + D(t)\right]^{-3} \Gamma_1(z) = -6b_0^3 \left[b_0 x + D(t)\right]^{-3} - 3b_0 D' \left[b_0 x + D(t)\right]^{-2} + b_0^{-1} D' k'$$

$$+ \left(3b_0 \left[b_0 x + D(t)\right]^{-1} + b_0^{-1} \left[b_0 x + D(t)\right] k' + b_0^{-1} D'\right) \left(3b_0^2 \left[b_0 x + D(t)\right]^{-2} - k'\right)$$

$$+ b_0^{-1} \left[b_0 x + D(t)\right] k' + b_0^{-1} D'',$$

ce qui implique

$$b_0^3 \left[b_0 x + D(t)\right]^{-3} \Gamma_1(z) = 3b_0^3 \left[b_0 x + D(t)\right]^{-3} + b_0^{-1} \left[b_0 x + D(t)\right] k'' + b_0^{-1} D''$$

$$- b_0^{-1} \left[b_0 x + D(t)\right] k'^2.$$

Donc

$$\Gamma_1(z) = 3 - \frac{k'' - k'^2}{b_0^4 \left[b_0 x + D(t)\right]^{-4}} + \frac{D''}{b_0^4 \left[b_0 x + D(t)\right]^{-3}}. \tag{3.2.28}$$

compte tenu de l'expression (3.2.24) de z , l'équation (3.2.27) peut être satisfaite à condition que

$$\Gamma_1(z) = 3. \tag{3.2.29}$$

et

$$k'' + k'^2 = 0. \tag{3.2.30}$$

et aussi

$$D'' = 0. \tag{3.2.31}$$

l'équation (3.2.30) et (3.2.31) en intégrant par rapport à t pour avoir:

$$k'' = -k'^2.$$

$$\frac{k''}{k'} = -k' \Longrightarrow \log(k'(t)) = -k + c_1$$

ce qui implique

$$k'(t) = b_1 \exp(-k)$$

ce qui implique

$$k' \exp(k) = b_1,$$

donc,

$$k(t) = \log(b_1 t + a). \tag{3.2.32}$$

et pour $D(t)$

$$D'' = 0,$$

alors

$$D(t) = ct + d. \tag{3.2.33}$$

Aussi

$$\alpha(x,t) = -3b_0 \left[b_0 x + ct + d\right]^{-1} - \frac{b_0^{-1} b_1}{b_1 t + a} \left[b_0 x + ct + d\right] \text{ et } \beta(x,t) = b_0 \left[-b_0 x + ct + d\right]^{-1},$$

où a, b, c, d et b_1 sont des constantes arbitraires.

Les équations (3.2.24), (3.2.26) , (3.2.27), (3.2.32) et (3.2.33) donnent la réduction de similarité de l'équation générale de Burgers sous forme (3.1.1)

$$u(x,t) = -3b_0 \left[b_0 x + ct + d\right]^{-1} + b_0^{-1} \left[b_0 x + ct + d\right] \frac{b_1}{(b_1 t + a)} - \frac{c}{b_0} + b_0 \left[b_0 x + ct + d\right]^{-1} w(z),$$

alors

$$u(x,t) = -\frac{c}{b_0} + \left(\frac{b_1}{b_0}\right)\frac{b_0x+ct+d}{b_1t+a} + b_0\left[b_0x+ct+d\right]^{-1}(w(z)-3)\,, \qquad (3.2.34)$$

avec

$$z(x,t) = b + \log(b_1t+a) + \log b_0(b_0x+ct+d)^{-1}. \qquad (3.2.35)$$

En susbtituant pour $\Gamma_i(z)$, $\{i = 1,\ldots,5\}$, ainsi trouvé à savoir 3, -4, 1, 1 et 0 respectivement dans (3.2.2), on obtient l'équation suivante pour la fonction de similarité $w(z)$:

$$3 - 4w + w^2 + ww' + w'' = 0. \qquad (3.2.36)$$

Cette équation est une équation différentielle ordinaire non-linéaire et il est impossible de trouver $w(z)$ expliciteme.

3.2.4 Le cas particulier $\Gamma_5 = 0$ et $z_{xx} = 0$

Comme, il a été fait dans le premier cas, on pose $z_{xx} = 0$ dans (3.1.2), il est clair que z est une fonction linéaire dans x.

on pose

$$\Gamma_3(z) = \Lambda_3'(z).$$

Donc (3.2.5) on va intégrer par rapport à x pour obtenir

$$\beta(x,t) = -z_x\Lambda_3(z) + K(t),$$

où $k(t)$ est la fonction d'intégration à été choisi pour être zéro. c-à-d $k(t) = 0$, donc

$$\beta = -z_x\Lambda_3(z).$$

En utilisant la remarque 2.2.2 , on peut mettre

$$\Lambda_3(z) = 1,$$

alors,

$$\beta = -z_x.$$

En utilisant l'équation (3.2.6)

$$z_x = z_x\Gamma_4(z)$$

ce qui implique

$$\Gamma_4(z) = 1.$$

de l'équation (3.2.7)

$$z_t + \alpha z_x = -z_x^2 \Gamma_5(z),$$

ce qui implique

$$\alpha(x,t) = -z_x \Gamma_5(z) - \frac{z_t}{z_x}$$

ce qui implique

$$\alpha(x,t) = \beta(x,t)\Gamma_5(z) - \frac{z_t}{z_x}.$$

d'après la remarque 2.2.2 donc

$$\Gamma_5(z) = 0.$$

Ainsi

$$\Gamma_3 = \Lambda_3' = 0.$$

l'équation (3.2.5) montre cela

$$\beta_x = 0$$

de l'équation (3.2.6) et (3.2.7) , on obtient

$$z_x = -B(t)$$

alors

$$\beta = B(t).$$

En intégrant par rapport à x

$$z(x,t) = -xB(t) + D(t). \tag{3.2.37}$$

On a

$$\alpha = -\frac{z_t}{z_x},$$

et

$$z_t = -xB'(t) + D'(t),$$

donc,

$$\alpha(x,t) = -x\frac{B'(t)}{B(t)} + \frac{D'(t)}{B(t)}. \tag{3.2.38}$$

Où la fonction $D(t)$ reste à déterminer.

Les équations (3.2.4), (3.2.37) et (3.2.38) impliquent

$$-z_x^3\Gamma_2(z) = -B' + \frac{B'}{B}B,$$

ce qui implique

$$-z_x^3\Gamma_2(z) = 0,$$

alors,

$$\Gamma_2(z) = 0.$$

Dans l'équation (3.2.4) devient

$$B'(t) + B(t)\alpha_x = 0, \tag{3.2.39}$$

ce qui implique

$$\alpha_x = -\frac{B'}{B},$$

alors

$$\alpha(x,t) = -\frac{B'}{B}x + m(t),$$

on prend la fonction $m(t)$ comme une fonction nulle,donc

$$\alpha(x,t) = \alpha_0(t)x, \quad \alpha_0(t) = -\frac{B'}{B}. \tag{3.2.40}$$

Maintenant, l'équation (3.2.3) devient :

premièrement on trouve

$$\begin{cases} \alpha_x = \alpha_0(t), \\ \alpha_{xx} = 0, \\ \alpha_t = \alpha_0'(t). \end{cases}$$

Et en plaçant dans (3.2.3)

$$B^3\Gamma_1(z) = -x(\alpha_0' + \alpha_0^2), \tag{3.2.41}$$

on peut assumer $\Gamma_1(z) = 0$ de sorte que

$$-x(\alpha_0' + \alpha_0^2) = 0.$$

Si on prend $x = 0$, alors

$$z(x,t) = z(t) \text{ et } B = 0,$$

donc

$$(\alpha_0' + \alpha_0^2) = 0,$$

ce qui implique

$$-\frac{\alpha_0'}{\alpha_0^2} = 1,$$

en intégrant par apport à t

$$\frac{1}{\alpha_0(t)} = t + c,$$

alors

$$\alpha_0(t) = (t + c)^{-1},$$

où c est une constante arbitraire.

De (3.2.40) , on a:

$$\alpha(x,t) = x(t + c)^{-1}, \quad t + c \neq 0. \tag{3.2.42}$$

Par conséquent de (3.2.39)

$$B' + B\alpha_x = 0,$$

en plaçant α_x

$$B' + (t + c)^{-1}B = 0,$$

ce qui implique

$$\frac{B'}{B} = -(t + c)^{-1},$$

ce qui implique

$$\frac{B'}{B} = -\frac{1}{(t + c)},$$

en intégrant par rapport à t:

$$\ln B = -\ln(t + c) + c_1,$$

alors

$$B(t) = b(t + c)^{-1}, \tag{3.2.43}$$

où b est une constante arbitraire.

En utilisant (3.2.42) et (3.2.43), l'équation (3.2.38) donne:

$$B' = -b(t + c)^{-2},$$

ce qui implique
$$x(t+c)^{-1} = x\frac{b(t+c)^{-2}}{b(t+c)^{-1}} + \frac{D'}{b(t+c)^{-1}},$$
ce qui implique
$$\frac{D'}{b(t+c)^{-1}} = 0 \Longrightarrow D' = 0,$$
alors
$$D(t) = d,$$
d est un constant dans $\mathbb{R}$.

Donc, on obtient la réduction de similarité sous forme
$$u(x,t) = \alpha(x,t) + \beta(x,t)w(z) \Longrightarrow u(x,t) = x(t+c)^{-1} + b(t+c)^{-1}w(z),$$
ce qui implique
$$u(x,t) = (t+c)^{-1}\left[x + bw(z)\right], \tag{3.2.44}$$
et
$$z(x,t) = -bx(t+c)^{-1} + d. \tag{3.2.45}$$
L'EDO (3.2.2) pour $w(z)$ dans ce cas est:
$$w'' + ww' = 0.$$
Pour trouver la solution similaire de l'équation générale de Burgers dans ce cas, on intégre L'EDO par rapport à z
$$w' + \frac{1}{2}w^2 = p.$$
On prend $p = 0$
$$w' + \frac{1}{2}w^2 = 0,$$
ce qui implique
$$-\frac{w'}{w^2} = \frac{1}{2},$$
en intégrant par rapport à z
$$\frac{1}{w} = \frac{1}{2}z + k,$$
k est une constante arbitraire.

Le résultat

la fonction de similarité est:

$$w(z) = \frac{2}{2k+z} = \frac{2}{d - bx(t+c)^{-1} + 2k}.$$

La solution similaire de l'équation générale de Burgers est :

$$u(x,t) = (t+c)^{-1}\left(x - \frac{2b}{d - bx(t+c)^{-1} + 2k}\right).$$

Chapitre 4

Réduction de similarité pour l'équation de Burgers avec amortissement linéaire

4.1 Introduction

Dans ce chapitre on va développer la méthode de Clarkson et Kruskal sur l'équation le plus générale de Burgers. En se basent sur plusieurs travaux en particulier de l'article de Y.Peng et W.Chen. Paru le 16 *décembre* 2005 dans "CZECHOSLOVAK" journal de la physique [16],

On a l'équation suivante:

$$u_t + uu_x + \sigma u = u_{xx}, \quad \sigma > 0. \tag{4.1.1}$$

Cette équation est l'équation de Burgers avec amortissement linéaire.

La forme de solution cherchée est:

$$u(x,t) = \alpha(x,t) + \beta(x,t)w(z), x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{4.1.2}$$

avec $\alpha(x,t)$, $\beta(x,t)$ et $z = z(x,t)$ sont des fonctions à déterminées.

4.2 Principe de la méthode

Il existe deux cas $z_x = 0$ et $z_x \neq 0$:

4.2.1 Le cas particulier $z_x \neq 0$

On détermine les dérivées u_t, u_x et u_{xx}:

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha_t + \beta_t w + z_t \beta w', \qquad (4.2.1)\\ u_x &= \alpha_x + \beta_x w + z_x \beta w', \\ u_{xx} &= \alpha_{xx} + \beta_{xx} w + \beta_x z_x w' + z_{xx} \beta w' + z_x^2 \beta w'' + z_x \beta_x w'. \end{aligned}$$

On remplace l'équation (4.1.2) et (4.2.1) dans l'équation (4.1.1), on obtient

$$\beta z_x^2 w'' + (2\beta_x z_x + \beta z_{xx} - \beta z_t - \alpha\beta z_x) w' + (\beta_{xx} - \beta_t - \alpha\beta_x - \alpha_x\beta - \sigma\beta) w \qquad (4.2.2)$$

$$-\beta^2 z_x w w' - \beta\beta_x w^2 + \alpha_{xx} - \alpha_t - \alpha\alpha_x - \sigma\alpha = 0.$$

Pour que cette équation soit une équation différentielle ordinaire pour $w(z)$, alors les coefficients doivent être sous la forme $\beta z_x^2 \Gamma(z)$, ce qui génère un système à déterminer des équations $\alpha(x,t)$, $\beta(x,t)$ et $z = z(x,t)$:

$$\begin{cases} \beta z_x^2 \Gamma_1(z) = 2\beta_x z_x + \beta z_{xx} - \beta z_t - \alpha\beta z_x, \\ \beta z_x^2 \Gamma_2(z) = \beta_{xx} - \beta_t - \alpha\beta_x - \alpha_x\beta - \sigma\beta, \\ \beta z_x^2 \Gamma_3(z) = \beta^2 z_x, \\ \beta z_x^2 \Gamma_4(z) = \beta\beta_x, \\ \beta z_x^2 \Gamma_5(z) = \alpha_{xx} - \alpha_t - \alpha\alpha_x - \sigma\alpha. \end{cases} \qquad (4.2.3)$$

on trouve la solution spéciale par des cas particuliers.

On pose $\beta = 1$ et on remplace dans (4.2.3), on obtient un autre système :

$$\begin{aligned} z_x^2 \Gamma_1(z) &= z_{xx} - z_t - \alpha z_x, \qquad (4.2.4)\\ z_x^2 \Gamma_2(z) &= -\alpha_x - \sigma, \\ z_x \Gamma_3(z) &= 1, \\ z_x^2 \Gamma_4(z) &= 0, \\ z_x^2 \Gamma_5(z) &= \alpha_{xx} - \alpha_t - \alpha\alpha_x - \sigma\alpha. \end{aligned}$$

On prend $\Gamma_3(z) = 1$

$$z_x = 1,$$

ce qui implique

$$z(x,t) = x + \varphi(t).$$

On remplace z dans le système (4.2.4) , on donne

$$\begin{cases} \alpha = -\varphi'(t) - \Gamma_1(z), \\ \alpha_x = -\Gamma_2(z) - \sigma, \\ \alpha = \dfrac{\alpha\alpha_x}{\sigma} + \dfrac{\alpha_t}{\sigma} + \dfrac{\alpha_{xx}}{\sigma} - \dfrac{\Gamma_5(z)}{\sigma}. \end{cases} \tag{4.2.5}$$

On prend $\Gamma_1(z) = 0$, $\Gamma_2(z) = -\sigma$ et $\Gamma_5(z) = A$, $A \in \mathbb{R}$ et on remplace dans l'équation (4.2.5) , on obtient :

$$\alpha = -\varphi'(t). \tag{4.2.6}$$

Et

$$\alpha_x = 0. \tag{4.2.7}$$

Aussi

$$\alpha = -\frac{A}{\sigma} - \frac{\alpha_t}{\sigma}. \tag{4.2.8}$$

de l'équation (4.2.7)

$$\alpha_x = 0 \Longrightarrow \alpha(x,t) = \psi(t).$$

On remplace α dans (4.2.8)

$$\psi(t) = \frac{A}{\sigma} - \frac{\psi'(t)}{\sigma},$$

ce qui implique

$$\sigma\psi + \psi' = -A.$$

Cette équation c'est une équation différentielle ordinaire linéaire de 1^{er} ordre pour $\psi(t)$.

on trouve la solution homogène

$$\psi(t) = ce^{-\sigma t}.$$

Par la méthode de variation constante:

$$\psi(t) = c(t)e^{-\sigma t},$$

en plaçant $\psi(t)$ dans l'équation différentielle précédante

$$c'e^{-\sigma t} - \sigma ce^{-\sigma t} + \sigma ce^{-\sigma t} = -A,$$

ce qui implique

$$c'e^{-\sigma t} = -A \Longrightarrow c(t) = -\frac{A}{\sigma}e^{\sigma t} + k, \quad k \in \mathbb{R},$$

alors

$$\psi(t) = \left(-\frac{A}{\sigma}e^{\sigma t} + k\right)e^{-\sigma t} = ke^{-\sigma t} - \frac{A}{\sigma},$$

on pose $k = \sigma c_1$, donc

$$\alpha(x,t) = \psi(t) = c_1\sigma e^{-\sigma t} - \frac{A}{\sigma}, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

de l'équation (4.2.7)

$$\alpha = -\varphi'(t),$$

alors

$$z(x,t) = x + \varphi(t) = x - \int \alpha dt = x + c_1 e^{-\sigma t} + \frac{A}{\sigma}t + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de système (4.2.3) sont:

$$\begin{aligned}
\alpha(x,t) &= c_1\sigma e^{-\sigma t} - \frac{A}{\sigma}, \qquad \beta = 1, \\
z(x,t) &= x + c_1 e^{-\sigma t} + \frac{A}{\sigma}t + c_2.
\end{aligned}$$

On remplace α, β et z dans l'équation (4.1.1) , on obtient la réduction de similarité sous forme:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= c_1\sigma\exp(-\sigma t) - \frac{A}{\sigma} + w(z), \quad c_1 \in \mathbb{R}, \\
z(x,t) &= x + c_1 e^{-\sigma t} + \frac{A}{\sigma}t + c_2, \qquad\qquad c_2 \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

Où $w(z)$ satisfait l'EDO :

$$w'' - \sigma w - ww' + A = 0. \tag{4.2.10}$$

Cette équation est une équation différentielle ordinaire non-linéaire et il est impossible de trouver $w(z)$ explicitement.

4.2.2 Le cas particulier $z_x = 0$

Il est clair que $z = z(t)$, on prend $z(t) = t$ sans perdre la généralité.

Le substition de l'équation (4.1.2) par $w(z) = w(t)$ dans l'équation (4.1.1), on obtient l'ED

$$\beta w' + (\beta_t + \alpha\beta_x + \alpha_x\beta + \sigma\beta - \beta_{xx})w + \beta\beta_x w^2 + \alpha_t + \alpha\alpha_x + \sigma\alpha - \alpha_{xx} = 0.$$

Pour que ceci soit une équation différentielle ordinaire, alors les coefficients doivent être sous la forme $\beta\Gamma(t)$, on obtient le système à déterminer des équations pour $\alpha(x,t)$ et $\beta(x,t)$:

$$\begin{cases} \beta\Gamma_1(t) = \beta_t - \alpha\beta_x - \alpha_x\beta + \sigma\beta - \beta_{xx}, \\ \beta\Gamma_2(t) = \beta\beta_x, \\ \beta\Gamma_3(t) = \alpha_t + \alpha\alpha_x + \sigma\alpha - \alpha_{xx}. \end{cases} \tag{4.2.11}$$

Il est très difficile pour trouver la solution générale de ce système, pour cela on trouve la solution spéçiale par des cas particuliers.

On pose $\alpha = 0$, on obtient:

$$\begin{cases} \beta\Gamma_1(t) = \beta_t + \sigma\beta - \beta_{xx}, \\ \beta_x = \Gamma_2(t), \\ \Gamma_3(t) = 0. \end{cases} \tag{4.2.12}$$

On prend $\Gamma_2(t) = 1$, alors

$$\beta = x + m(t), \quad t > 0.$$

On remplace β dans la première équation du système (4.2.12)

$$(x + m(t))\Gamma_1(t) = m'(t) + \sigma x + \sigma m(t),$$

ce qui implique

$$m'(t) = (m(t) + x)(\Gamma_1(t) - \sigma),$$

On prend $\Gamma_1(t) = \sigma$, alors

$$m'(t) = 0,$$

donc

$$m(t) = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

On pose $c = 0$ donc

$$\beta = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Alors, les solutions de système (4.2.11) sont:

$$\alpha = 0, \ \beta = x.$$

Après le remplacement de α, β dans l'équation (4.1.2) , on obtient une nouvelle réduction de la similarité de l'équation (4.1.1)

$$u(x,t) = xw(t). \tag{4.2.13}$$

En substituant l'équation (4.2.13) dans l'équation (4.1.1) pour trouver l'EDO de $w(t)$

$$w' + \sigma w + w^2 = 0. \tag{4.2.14}$$

Cette équation c'est une équation de **Bernoulli,** et la résolution de cette équation:

$$y = w^{-1} \Longrightarrow \begin{cases} w = y^{-1}, \\ dy = -w^{-2}dw. \end{cases}$$

On plaçant dans l'EDO

$$-w^{-2}w' - \sigma w^{-1} - 1 = 0,$$

ce qui implique

$$y' - \sigma y - 1 = 0.$$

Cette équation est une équation différentielle ordinaire linéaire de 1^{er} ordre

$$\begin{aligned} y' - \sigma y &= 0 \Longrightarrow y(t) = ce^{\sigma t}. \\ y' - \sigma y &= 1 \Longrightarrow y(t) = -\frac{1}{\sigma}e^{-\sigma t} + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Le résultat La solution de l'équation de **Bernoulli (la fonction de similarité)** est:

$$w(t) = \frac{\sigma}{c\exp(\sigma t) - 1},$$

où c est la constante d'intégration, ainsi on obtient

la solution similaire de l'équation de Burgers avec amortissement linéaire de forme (4.1.1) est:

$$u(x,t) = \frac{\sigma x}{c\exp(\sigma t) - 1} \tag{4.2.15}$$

4.3 L'application du théorème de forme bilinéaire

En appliquant le théorème (forme bilinéaire) pour trouver la même solution similaire de l'équation de Burgers avec amortissement linéaire.qu'on a trouver par la méthode utilisée dans les chapitres précédants

On considère la solution cherchée sous forme suivante

$$u(x,t) = \alpha(x,t) + \beta(x,t)w(z).$$

On va étudier deux cas $z_x \neq 0$ et $z_x = 0$

Cas 4.3.1 $z_x \neq 0$ *les mêmes les étapes de la méthode précédant, pour obtenir l'équation* (4.2.2). *On peut écrire l'équation* (4.2.2) *sous la forme bilinéaire, on pose:*

$$\begin{cases} f_1(z) = w'' \\ f_2(z) = w' \\ f_3(z) = w \\ f_4(z) = ww' \\ f_5(z) = w^2 \\ f_6(z) = 1 \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} g_1(x,t) = \beta z_x^2 \\ g_2(x,t) = 2\beta_x z_x + \beta z_{xx} - \beta z_t - \alpha\beta z_x \\ g_3(x,t) = \beta_{xx} - \beta_t - \alpha\beta_x - \alpha_x\beta - \sigma\beta \\ g_4(x,t) = \beta^2 z_x \\ g_5(x,t) = \beta\beta_x \\ g_6(x,t) = \alpha_{xx} - \alpha_t - \alpha\alpha_x - \sigma\alpha \end{cases}$$

et en remplace $f_i(z)$ *et* $g_i(x,t)$ $\{i = 1, \ldots, 6\}$ *dans l'équation* (4.2.2) , *on obtient:*

$$f_1(z)g_1(x,t) + f_2(z)g_2(x,t) + f_3(z)g_3(x,t) + f_4(z)g_4(x,t) + f_5(z)g_5(x,t) + f_6(z)g_6(x,t) = 0$$

elle est de forme bilinéaire, alors:

$$\begin{cases} f_1(z) = \sum_{i=2}^{6} A_i f_i(z) & (*) \\ g_k(x,t) = -A_k g_1(x,t), \quad k = 2, \ldots, 6 & (**) \end{cases}$$

de l'équation $(**)$

$$-A_k g_1 = g_k, \quad k = 2, \ldots, 6 \Longleftrightarrow \begin{cases} -A_2\beta z_x^2 = 2\beta_x z_x + \beta z_{xx} - \beta z_t - \alpha\beta z_x \\ -A_3\beta z_x^2 = \beta_{xx} - \beta_t - \alpha\beta_x - \alpha_x\beta - \sigma\beta \\ -A_4\beta z_x^2 = \beta^2 z_x \\ -A_5\beta z_x^2 = \beta\beta_x \\ -A_6\beta z_x^2 = \alpha_{xx} - \alpha_t - \alpha\alpha_x - \sigma\alpha \end{cases}$$

On considère les coefficients $-A_k$ *comme des fonctions de* z*, on pose* $-A_k = \Gamma_{k-1}(z)$*, on obtient le même système* (4.2.3) *, alors les mêmes solutions :*

$$\begin{aligned} \alpha(x,t) &= c_1\sigma e^{-\sigma t} - \frac{A}{\sigma}, \qquad \beta = 1 \\ z(x,t) &= x + c_1 e^{-\sigma t} + \frac{A}{\sigma}t + c_2 \end{aligned}$$

avec,

$$A_2 = 0,\ A_3 = \sigma,\ A_4 = 1,\ A_5 = 0,\ A_6 = -A$$

de l'équation $(*)$*:*

$$f_1(z) = \sum_{i=2}^{6} A_i f_i(z) \Longleftrightarrow f_1(z) = A_2 f_2 + A_3 f_3 + A_4 f_4 + A_5 f_5 + A_6 f_6$$

$$w'' = \sigma w + ww' - A \Longleftrightarrow w'' - \sigma w - ww' + A = 0$$

donc c'est l'équation différentielle ordinaire (E.D.O) pour $w(z)$*.*

Cas 4.3.2 $z_x = 0$*, les mêmes étapes de la méthode précédantes, on obtient l'équation différentielle suivante :*

$$\beta w' + (\beta_t + \alpha\beta_x + \alpha_x\beta + \sigma\beta - \beta_{xx})w + \beta\beta_x w^2 + \alpha_t + \alpha\alpha_x + \sigma\alpha - \alpha_{xx} = 0$$

si $\alpha_t = 0$ *et* $\beta_t = 0$ *c'est-à-dire* $\alpha = \alpha(x)$ *et* $\beta = \beta(x)$ *on peut écrire cette équation sous la forme bilinéaire, on pose:*

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(t) = w', \\ f_2(t) = w, \\ f_3(t) = w^2, \\ f_4 = 1. \end{array}\right. \quad et \quad \left\{\begin{array}{l} g_1(x) = \beta, \\ g_2(x) = \alpha\beta_x + \alpha_x\beta + \sigma\beta - \beta_{xx}, \\ g_3(x) = \beta\beta_x, \\ g_4(x) = \alpha\alpha_x + \sigma\alpha - \alpha_{xx}. \end{array}\right.$$

On remplace f_i *et*g_i $\{i = 1, \ldots, 5\}$ *dans l'équation différentielle précédant ce qui donne:*

$$f_1(t)g_1(x) + f_2(t)g_2(x) + f_3(t)g_3(x)f_4(t)g_4(x) = 0.$$

Donc elle est une forme bilinéaire, d'après le théorème de forme bilinéaire:

$$\left\{\begin{array}{ll} f_1(t) = \sum\limits_{i=2}^{4} A_i f_i(t), & (*) \\ g_k(x) = -A_k g_1(x), \quad k = 2,3,4. & (**) \end{array}\right.$$

On a $g_k = -A_k g_1, \quad (k = 2,3,4)$ *, on obtient le système surdéterminé des équations* α, β *suivant:*

$$\begin{cases} -A_2\beta = \alpha\beta_x + \alpha_x\beta + \sigma\beta - \beta_{xx}, \\ -A_3\beta = \alpha\alpha_x + \sigma\alpha - \alpha_{xx}, \\ -A_4\beta = \beta\beta_x. \end{cases} \tag{4.3.1}$$

on pose $\alpha = 0$

$$\begin{cases} -A_2\beta = \sigma\beta - \beta_{xx}, \\ \beta_x = -A_3, \\ A_4 = 0. \end{cases}$$

On prend $A_3 = -1$*, alors*

$$\beta_x = 1,$$

donc

$$\beta = x + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Si $c_1 = 0$ *, donc*

$$\beta = x \Longrightarrow A_2 = \sigma$$

Les solutions de système (4.3.1) *sont:*

$$\alpha = 0 \quad et \quad \beta = x.$$

de l'équation $(*)$

$$f_1 = A_2 f_2 + A_3 f_3 + A_4 f_4,$$

ce qui implique

$$w' = A_2 w + A_3 w^2 + A_4.$$

avec

$$A_2 = -\sigma, \quad A_3 = -1, \quad A_4 = 0,$$

donc

$$w' + w + w^2 = 0.$$

C'est la même équation de la méthode précédant, alors on obtient la même la solution similaire de l'équation de Burgers avec amortissement linéaire (4.2.15)*, et ceci par l'utilisation du théorème de forme bilinéaire.*

Conclusion

Dans ce mémoire on a cherché, la réduction de similarité et la solution de type similaire de l'équation de Burgers sous ces trois formes par une seule méthode de réduction qui s'appelle la méthode de Clarkson et Kruckal ou « la méthode directe ». on trouve ces solutions selon des cas particuliers. Ces solutions s'avèrent être intéressantes en pratique. on a détaillé les calculs liés à la recherche de ces solutions en proposant une nouvelle solution particulière pour l'équation générale de Burgers.

En plus, on a appliqué le théorème de forme bilinéaire qui on donne des résultats efficaces que ceux nous donne la méthode utilisée dans [10] et [16], car l'importance pour ces méthodes est d'arriver à séparer les différents variables, et résoudre ensuite les EDOs correspondantes.

Bibliographie

[1] G.W.Bluman&J.D.Cole:*similarity_ methods_ for_ differential_ equation,Appl.Math.Sci,vol.13 springer.verlag.New York.*

[2] Hartman, *P.Ordinary Differential equation, John wiley&sons New York(1964).*

[3] J.Martinus,*Burgers,physien hallandaiss,(1895-1981).*

[4] L.Densner, *Similarity solutions of nolinear partial differential equations, Bitman advanced publishing program, Bostan, London. January(1993).*

[5] L.Serlet, *Les équations différentielle, Janvier 2001.*

[6] N.Benhamidouche,*Cours Symetrie dans EDPs,Mastre deuxiéme année 2014.*

[7] N.M.Ivanova,R.O.Popovych&C.Sophocleous, *Labachevskii Journal of Mathematics 31, 100.(2010).*

[8] P.A.Clarkson&E.L.Mansfied,*Siamj.Appl.Math.54.(1994)1693.*

[9] P.A.Clarkson&M.D.Kruskal: *J.Math.Phys.30.(1989)2201.*

[10] P.L.Sachdev:*Self similarity and beyond exact solutions of nonlinear problemes ,chapman&Hall/CRC mangraphs,P.App.Math.London,D.C.*

[11] P.L.Sachdev& B.Mayil Vaganan,*On the mapping of solutions of nonlinear partial differential equation, Nonlin, World2,171-189, (1995).*

[12] P.L.Sachdev, K.R.C.Nair& V.G.Tikekar,*Generalized Burgers equations and Euler-Painleve Transcenphys.28, 997-1004(1987).*

[13] POLYANIN, A.D, ALEXEI I.ZHUROR. ANDREI V.VYAZMIN2,*Generalized separation of variables, 25pp, 251.267(2000).*

[14] POLYANIN, A.D, ZAITSEV V F.*Handbook of exact solutions for ordinary differential equations.CRC Press company.(2003).*

[15] T.KANAHARA, M.TANAKA, *Interaction of traveling fronts: An exact solution of a nonlinear diffusion equation, phys.Lett A 97(1983).311-314.*

[16] Y.Z.PENG&W.L.CHEN,*A new similarity solution of the Burgers equation with linear damping.Czech.J.Phys.vol 56.(2006).China.*