REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filiére : Mathématiques
Option : Analyse mathématique et numérique

Thème

Fractional differential equations in Orlicz spaces

Présentée par :
SALMI Fatima

Soutenu publiquement le : 14/06/2025.

Devant le jury composé de :

Président :	*NADIR* Mostefa	Prof,	Université de M'sila
Encadreur :	*GAGUI* Bachir	M.C.A,	Université de M'sila
Examinateur :	*DILMI* Mustapha	M.C.B,	Université de M'sila

Année universitaire 2024/2025.

REMERCIEMENTS

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu Allah qui m'a donné la volonté et le courage pour achever ce travail. Je tiens à remercier tout d'abord mon encadreur le Dr.GAGUI Bachir qui m'a fourni le sujet de ce mémoire et de m'a voir guidé. Leurs critique

tré

qu'il

et le

dispo

à la réalisation ,Du pré

SALMI Fatima

DEDICATIONS

Je dédie ce mode

À me

À me

À me

À tous me

.

Salmi FATIMA

TABLE DES MATIÈRES

NOTATIONS

$\Gamma(.)$:	Fonction Gamma.
$\beta(.,.)$:	Funtion Beta.
I_{a+}^{α} :	L'intégrale fractionnaire à gauche d'ordre α, au sens de Riemann-Liouville
I_{b-}^{α} :	L'intégrale fractionnaire à droite d'ordre α, au sens de Riemann-Liouville
$\frac{d}{dx}$:	La dérivée usuelle.
$\|.\|$:	norme.
$\partial\Omega$:	La frontière de Ω.
$diam(A)$:	Diamètre de l'ensemble A.
$dim(A)$:	Dimension de l'ensemble A.
$\alpha(.)$:	La mesure de non-compacité de Kuratowski.
$conv(A)$:	L'enveloppe convexe de l'ensemble A.
$\overline{conv}(A)$:	L'enveloppe convexe fermé de l'ensemble A.
p.p :	presque partout.
L espace d Orlicz :	$L(\Omega) = \{u :$ fonction mesurable sur $\Omega \vert \exists\lambda > 0 : \int_{\Omega}(\frac{u}{\lambda})ds < +\infty$.
$S(x, r)$:	La sphère unité.
$B(x, r)$:	La boule unité.

INTRODUCTION

Les équations différentielles fractionnaires (EDF) ont été perçus comme un outil puissant pour modéliser des phénomènes complexes dans divers domaines tels que la physique, l'ingénierie, l'économie et la biologie. Comme les équations différentielles classiques, les EDF intègrent des dérivées d'ordre non entier, permettant ainsi de capturer des effets de mémoire et des dynamiques non locales inhérents à de nombreux systèmes réels.

L'étude de solutions de ces équations nécessite une approche mathématique rigoureuse, notamment dans des espaces fonctionnels adaptés. L'espace d'Orlicz, en tant que généralisation des espaces L^p , offre un cadre approprié pour traiter des EDFs, en particulier lorsque les solutions présentent des comportements complexes ou non linéaires. Une des méthodes efficaces pour démontrer l'existence de solutions dans ce contexte est l'utilisation de la mesure de non-compacité, associée aux théorèmes du point fixe.
Ces outils permettent de caractériser la compacité des opérateurs et d'établir des conditions suffisantes pour l'existence de solutions. Ce mémoire est structuré en trois chapitres principaux :

Le premier chapitre : Nous présentons ici la structure de l'espace d'Orlicz L^{φ}, en mettant en évidence ses propriétés topologiques, sa convexité et son rôle dans l'analyse des EDFs.

Le deuxième chapitre : Ce chapitre explore les concepts de mesure de non-compacité, notamment les mesures de Kuratowski et de Hausdorff, et leur application ainsi les théorèmes du point fixe utilisés.

Dans Le dernier chapitre : on présente notre travail et nous appliquons les théorèmes précédemment énnoncé pour démontrer l'existence de solutions d'EDF dans les espaces d'Orlicz, en tenant compte de conditions spécifiques telles que la condition Δ' À travers de cette étude, nous visons à approfondir la compréhension des EDFs dans des espaces fonctionnels adaptés et à fournir des outils mathématiques robustes pour leur analyse.

CHAPITRE 1

ESPACE D'ORLICZ

- Dans ce chapitre ,on parle sur la structure topologique de cet espace noté l'espace d'Orlicz L^ρ qui généralise l'espace de Lebsgue L^P,espace linéaire,espace vectoriel,espace convexe,la norme et équivalence,les inégalités......etc.

1.1 N-fonction

Définition 1.1 (N-fonction) *[6] On appelle fonction d'Orlicz un fonction ϕ : $\mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty]$ telle que*

1. ϕ *est pair,convexe et continue à gauche sur* $[0, +\infty[$
2. $\phi(0) = 0$ *et* ϕ *n'est pas identiqument nulle.*
3. $\phi(x) > 0$ *pour tout* $x > 0$.
4. $\phi(x) < +\infty$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *c'est à dire* ϕ *est à valeurs dans* $[0, \infty[$.
5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\phi(x)}{x} = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\phi(x)}{x} = +\infty$.

la fonction ϕ est dite N-fonction

Exemple 1.1 *Les fonctions suivantes sont N-fonctions :*

$$\phi(x) = |x|^p \,, 1 < p < +\infty$$

$$\phi(x) = e^{|x|} - |x| - 1$$

$$\phi(x) = e^{(|x|^p)} - 1, 1 < p < +\infty$$

$$\phi(x) = (1 + |x|) \ln (1 + |x|) - |x|$$

Théorème 1.1 *[18] Chaque fonction convexe $\phi(x)$, qui vérifiée la condition $\phi(a) = 0$, peut être représentée sous la forme*

$$\phi(x) = \int_a^x p(t)dt$$

Définition 1.2 (définition équivalente) *[18] Soit ρ une fonction.*
ρ est une N-fonction si elle admet la représentation intégrale suivante :

$$\rho(x) = \int_0^{|u|} p(t)dt$$

où la fonction $p(t)$ est continue pour $t \geq 0$, positive pour $t > 0$ et non décroissante qui vérifiée les conditions

$$p(0) = 0, p(\infty) = \lim_{t \to \infty} p(t) = \infty. \quad (1)$$

1.1.1 Fonction complémentaire de N-fonction

Définition 1.3 *[18]*

Soit la fonction positive $p(t)$, $t > 0$, continue à droite pour $t \geq 0$, croissante est satisfaite la condition (1). On d éfinit la fonction $q(s), (s \geq 0)$ par l'égalité

$$q(s) = \sup_{p(t) \leq s} t.$$

La fonction q est dite fonction conjuguée de la fonction p.

Définition 1.4 *[18] Si φ est une N-fonction , alors la fonction conjuguée (duale) $\phi : [0, \infty] \to [0, \infty]$ est définie par*

$$\phi(y) = sup\{xy - \varphi(x)\}.$$

Exemple 1.2 *la fonction complémentaire de $\varphi(x) = |x|^p$, $1 < p < +\infty$ est $\psi(y) = |x|^q$, $1 < q < +\infty$ avec $\frac{1}{P} + \frac{1}{q} = 1$*

Théorème 1.2 *[18] Soit φ une fonction de Young (N-fonction) et ψ la fonction conjuguée, alors ψ aussi est une fonction de Young*

Démonstration.

1. *Pour tout y, la relation $xy - \varphi(x) = 0$, $si\ x = 0$ i.e. $\psi(y) \geq 0$, donc il est trivial que $\psi(0) = 0$.*
2. *Si $0 \leq y_1 \leq y_2$, alors*

$$xy_2 - \varphi(x) \geq xy_1 - \varphi(x),\ pour\ tout\ x$$

implique $\psi(y_2) \geq \psi(y_1)$, alors $\psi \uparrow$.

Par définition, il existe un nombre $0 < x_0 < \infty$, tel que $\varphi(x_0) < \infty$, ainsi

$$\psi(y) \geq x_0 y - \varphi(x_0)\ pour\ tout\ y$$

tend vers ∞, si $y \to \infty$.

Puisque φ est convexe et $\varphi(0) = 0$, la fonction $\frac{\varphi(x)}{x}$ croissante vers une valeur positive, lorsque x tend vers l'infini.

On note par m la limite de cette fonction et on suppose que $0 < y < m$, alors

$$xy - \varphi(x) \to -\infty,\ si\ x \to \infty$$

implique que $\psi(y)$ est finie.

3. *ψ est convexe, si $0 \leq y_1 \leq y_2 < \infty$ et $0 < \lambda < 1$, alors*

$$\begin{aligned} x(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) - \varphi(x) &= \lambda xy_1 + xy_2 - \lambda xy_2 - \varphi(x) \\ &= \lambda(xy_1 - \varphi(x)) + (1-\lambda)(xy_2 - \varphi(x)) \\ &\leq \lambda\psi(y_1) + (1-\lambda)\psi(y_2), \forall x \geq 0. \end{aligned}$$

On prend le sup *sur le membre à gauche, on trouve*

$$\psi(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \leq \lambda\psi(y_1) + (1-\lambda)\psi(y_2)$$

■

Remarque 1.1 *[5] Il est facilement de vu que la fonction* q *possède les mêmes propriétés que la fonction* p*, elle est positive pour* $s > 0$*, continue à droite pour* $s \geq 0$*, croissante et vérifiée les conditions*

$$q(0) = 0, \ \lim_{s\to\infty} q(s) = \infty$$

Exemple 1.3 *Soient* M_1 *et* M_2 *deux N-fonctions*

1. $M_1(u) = \frac{|u|^\alpha}{\alpha}, \ \alpha > 0$*, où* $p_1(t) = M_1'(t) = t^{\alpha-1}, (t \geq 0)$*, donc* $q_1(s) = s^{\beta-1}$ $(s \geq 0)$ *avec* $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.
   Alors la fonction conjuguée est
   $$N_1(v) = \int_0^{|v|} q_1(s)ds = \frac{|v|^\beta}{\beta}.$$
2. $M_2(u) = e^{|u|} - |u| - 1$*, où* $p_2(t) = M_2'(t) = e^t - 1$ $(t \geq 0)$ *donc* $q_2(s) = \ln(s+1), \ (s \geq 0)$.
   Alors la fonction conjuguée est
   $$N_2(v) = \int_0^{|v|} q_2(s)ds = (1+|v|)\ln(1+|v|) - |v|.$$

1.2 Espace fonctionnel de Banach

Soit (Ω, μ) espace mesuré et soit $\mathcal{M}^+$ un cône des fonctions μ-mesurables sur Ω dont les valeurs dans $[0, \infty]$

Définition 1.5 *[5]*

Soit l'application ρ *suivante* $\rho : \mathcal{M}^+ \to [0, \infty]$.
On appelle une norme fonctionnelle de Banach l'application ρ*, s'elle vérifiée les propriétés suivantes Si pour tout* f, g *et* $f_n (n = 1, 2, ...)$ *dans* $\mathcal{M}^+$ *et pour* $\lambda \geq 0$

1. $\rho(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0,\ \mu - p.p.$
   $\rho(\lambda f) = \lambda\rho(f)$.
   $\rho(f + g) \leq \rho(f) + \rho(g)$.
2. $0 \leq g \leq f,\ \mu - p.p \Rightarrow \rho(f) \leq \rho(g)$.
3. $0 \leq f_n \uparrow f,\ \mu - p.p \Rightarrow \rho(f_n) \uparrow \rho(f)$.
4. $\mu(E) < \infty \Rightarrow \rho(\chi_E) < \infty$.
5. $\mu(E) < \infty \Rightarrow \int_E f d\mu \leq C_E\rho(f)$ *où la constante* C_E *dépend seulement de* E.

Définition 1.6 *[5] Soit* ρ *une norme fonctionnelle de Banach,* $X = X(\rho)$ *l'ensemble de toute les fonctions* f *dans* $\mathcal{M}$ *avec* $\rho(|f|) < \infty$*, s'appelle espace fonctionnel de Banach (EFB), pour toute* $f \in X$*, on définit*

$$\|f\|_X = \rho(|f|).$$

1.3 Espace modulaire

Définition 1.7 *[5] Soit* X *un espace vectoriel sur le corps* $\mathbb{K}$*. La fonction* $\rho : X \to [0, \infty]$ *est dite semimodulaire dans* X*, si les propriétés suivantes sont satisfaisantes :*

1- $\rho(x) = 0$

2- $\rho(\lambda x) = \rho(x), \forall x \in X, \lambda \in \mathbb{K},$ *avec* $|\lambda| = 1$.

3- ρ *est continue à gauche.*

4- $\rho(\lambda x) = 0, \forall\lambda > 0,$ *implique* $x = 0$.

le semimodulaire ρ *est dit continu si*

5- l application $\lambda \longmapsto \rho(\lambda x)$ *est continue dans* $[0, \infty]$ *,pour*$x \in X$.

Définition 1.8 *[18] Si* ρ *est un semimodulaire ou modulaire dans* X*, alors*

$$X_\rho = \left\{x \in X; \lim_{\lambda\to 0} \rho(\lambda x) = 0\right\}$$

est appelé espace semimodulaire ou espace modulaire (respectivement).

Remarque 1.2 *[18] Puisque* $\rho(\lambda x) = \rho(|\lambda|x)$ *requis à* $\lim\limits_{\lambda\to 0} \rho(\lambda x)$*, avec* $\lambda \in [0, \infty]$*, on peut définir* X_ρ *par :*

$$X_\rho = \{x \in X, \rho(\lambda x) < \infty;\ pour\ \lambda > 0\}.$$

Théorème 1.3 *[18] Soit ρ un semimodulaire dans X, alors X_ρ est un espace vectoriel normé sur le corps $\mathbb{K}$, où la norme définie par*

$$\|x\|_\rho = \inf\left\{\lambda > 0, \rho\left(\frac{1}{\lambda}x\right) \leq 1\right\}$$

Démonstration.

• X_ρ est un espace vectoriel.

- Il est claire que $0 \in X_\rho$.

- Soit $u, v \in X_\rho \; et \; \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, par la définition de X_ρ et $\rho(\alpha u) = \rho(|\alpha| u)$ il est claire que $\alpha u \in X_\rho$.

- Par la convexité de la fonction ρ, on peut l'estimer

$$0 < \rho(\lambda(u+v)) \leq \frac{1}{2}\rho(\frac{1}{2}\lambda u) + \frac{1}{2}\rho(\frac{1}{2}\lambda v) \to 0, \lambda \to 0$$

et par conséquent, on a $u + v \in X_\rho$.

Donc X_ρ est un espace vectoriel.

• X_ρ est un espace normé.

- Il est claire que $\|u\|_\rho < \infty$, pour tout $u \in X_\rho$ et $\|0\|_\rho = 0, \; \forall \alpha \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} \|\alpha u\|_\rho &= \inf\{\lambda > 0 \; ; \; \rho\left(\frac{\alpha u}{\lambda}\right) \leq 1\} \\ &= |\alpha| \inf\{\lambda > 0 \; ; \; \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\} \\ &= |\alpha| \|u\|_\rho. \end{aligned}$$

- Soit $u, v \in X \; et \; x \geq \|u\|, \; y \geq \|v\|$, alors

$$\rho\left(\frac{u}{x}\right) \leq 1 \; et \; \rho\left(\frac{v}{y}\right) \leq 1$$

et par conséquent de la convexité de ρ, on a

$$\begin{aligned} \rho\left(\frac{u+v}{x+y}\right) &= \rho\left(\frac{x}{x+y}\frac{u}{x} + \frac{y}{x+y}\frac{v}{y}\right) \\ &\leq \frac{x}{x+y}\rho\left(\frac{u}{x}\right) + \frac{y}{x+y}\rho\left(\frac{v}{y}\right) \leq 1 \end{aligned}$$

alors $\|u+v\|_\rho \leq x+y$, d'où

$$\|u+v\|_\rho \leq \|u\|_\rho + \|v\|_\rho$$

- Si $\|u\|_\rho = 0 \; alors \; \rho(\alpha u) \leq 1, \forall \alpha > 0$, donc

$$\rho(\lambda u) \leq \beta \rho\left(\frac{\lambda u}{\beta}\right) \leq \beta, \forall \lambda > 0 \; et \; \beta \in (0,1]$$

d'après les propriétés de ρ, alors $\rho(\lambda u) = 0, \; \forall \lambda > 0$ et que $u = 0$. ■

1.4 Condition Δ_2

Définition 1.9 *[5] On dit que la N-fonction $M(u)$ satisfait la condition Δ_2, s'il existe une constante $k > 0$, telle que*

$$M(2u) \leq kM(u), \; (u \geq u_0)$$

pour une valeur positive de u_0.

Remarque 1.3 *[5] On le voit facilement que nous avons toujours $k \geq 2$ on a*

$$M(2u) \leq 2M(u) \textit{ pour } u \neq 0.$$

Exemple 1.4 *1- La fonction $M(s) = |s| \ln(|s|+1)$ est satisfaite la condition Δ_2. En effet, on peut vérifier aisément que M est une N-fonction et on a : $k = 4$.*
2- On a aussi, la fonction $M(s) = \frac{1}{p}|s|^p, \; pour \; p > 1$ est vérifiée la condition Δ_2. En effet, on a $k = 2^p$

1.5 Condition Δ'

Définition 1.10 *[5] Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction de Young.*
On dit qu'une fonction de Young satisfaite la condition Δ', noté $\gamma \in \Delta'$, s'il existe une constante $c > 0$, telle que

$$\gamma(xy) \leq c\gamma(x)\gamma(y), \; x, y \geq x_0 \geq 0.$$

1.6 les classes des espaces d'Orlicz

Nous d'abord présenterons et étudierons la structure des espaces d'Orlicz sur un espace de mesure arbitraire, et nous spécialisons ensuite pour obtenir des résultats particuliers.
Soit l'espace mesuré (Ω, Σ, μ) où Ω un certain ensemble de points et Σ est un σ-algèbre.

Remarque 1.4 *[18]*
1- Soit $\Phi : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction de Young, où la fonction de Young permette que, pour un certain $x_0 \in \mathbb{R}$, si la fonction $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ est measurable, alors $\Phi(f) =: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ est measurable.
2- D'après la définition de la fonction de Young, c'est une extension de la fonction réelle de Borel.

Définition 1.11 *[18] L'ensemble de toutes les fonctions mesurables $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, telles que*

$$\int_{\Omega} \Phi(|f|) d\mu < \infty,$$

est noté par $\widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$.

Remarque 1.5

1. *$\widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$ l'ensemble des classes des espaces d'Orlicz*
2. *Les classes d'Orlicz $\widetilde{L}^{\varphi}$ ne sont pas des espaces vectoriels.*

Exemple 1.5 *On considère $\Omega =]0, 1[$ et $\phi(t) = e^t$, alors la fonction $u(x) = -\frac{1}{2} \ln x$ appartient à $\widetilde{L}^{\varphi}$, mais la fonction $v(x) = 2u(x) = -\ln x$, n'appartient pas.*

Théorème 1.4 *[18]*

1. *L'espace $\widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$ est absolument convexe. i.e., si $f, g \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$ et α, β des scalaires, tels que $|\alpha| + |\beta| \leq 1$, alors*
$$\alpha f + \beta g \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu).$$
Aussi si $h \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$ et $|f| \leq |h|$, telle que f est measurable, alors $f \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$
2. *L'espace $\widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$ est linéaire (i.e., espace vectoriel) si $\Phi \in \Delta_2$, globalement quand $\mu(\Omega) = \infty$ et localement si $\mu(\Omega) < \infty$.*

Démonstration.

1. Soit $f, g \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$.

   Alors par monotonicité et convexité de Φ, pour $0 < \gamma = |\alpha| + |\beta| \leq 1$, on obtient

$$\begin{aligned}\Phi(|\alpha f + \beta g|) \leq \Phi(|\alpha||f| + |\beta||g|) &\leq \gamma\Phi(\frac{|\alpha|}{\gamma}|f| + \frac{|\beta|}{\gamma}|g|)\\ &\leq |\alpha|\Phi(|f|) + |\beta|\Phi(|g|),\end{aligned}$$

   de même le membre droit est intégrable. Par conséquent $\alpha f + \beta g \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$.

   Le deuxième rapport est clair, puisque $\Phi(|f|) \leq \Phi(|h|)$.

2. Pour la linéarité, il suffit de vérifier que $f \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu),\ 2f \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$, puis $nf \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$ pour tout nombre entier n et par conséquent aussi pour $\alpha > 0,\ \alpha f \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$.

   Par la dernière partie de , on a

$$af_1 + bf_2 = \gamma(\frac{a}{\gamma}f_1 + \frac{b}{\gamma}f_2) \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu), \gamma = |a| + |b| > 0,$$

   pour tout $f_i \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu),\ i = 1, 2$, par .

   Ainsi nous devons montrer seulement $2f \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$ pour toute $f \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$. Si Φ est satisfaite la condition Δ_2, on trouve $\mu(\Omega) = +\infty$,

$$\Phi(2|f|) \leq k\Phi(|f|),\ k > 0,$$

   par conséquent $2f \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$ avec $f \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$.

   Le cas $\mu(\Omega) < \infty$, alors $\Phi(2x) \leq k\Phi(x)$, pour $x \geq x_0 \geq 0$.

   Maintenant soit

$$f_1 = \begin{cases} f,\ |f| \leq x_0 \\ 0,\ autre \end{cases}$$

   On pose $f_2 = f - f_1$, alors $f = f_1 + f_2$ et

$$\Phi(2|f|) = \Phi(2|f_1|) + \Phi(2|f_2|) \leq \Phi(2|f_1|) + k\Phi(|f_2|).$$

Par conséquent

$$\int_{\Omega} \Phi(2|f|)d\mu \leq \Phi(2x_0)\mu(\Omega) + k \int_{\Omega} \Phi(|f|)d\mu < \infty$$

donc $2f \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$, ceci montre que $\widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$ est un espace linéaire.

■

Définition 1.12 *[18] Soit $\widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$ l'ensemble, sur un espace de mesure arbitraire (Ω, Σ, μ). Alors l'espace $L^{\varphi}(\mu)$ de toute fonctions mesurables $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, telle que $\alpha f \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$ pour $\alpha > 0$, s'appelle l'espace d'Orlicz. Autrement dit*

$$L^{\varphi}(\mu) = \{f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}},\ \textit{measurable}; \int_{\Omega} \Phi(\alpha f)d\mu < \infty \textit{ pour } \alpha > 0\}$$

Définition 1.13 *[18] Soit $\Phi(u)$ une N-fonction. On note par $\widetilde{L}^{\varphi}(\Omega)$ la classe des fonctions à valeurs réelles, définie sur Ω, par*

$$\rho(u; \Phi) = \int_{\Omega} \Phi[u(x)]d\mu < \infty.$$

1.6.1 Comparaison de classes

Les classes d'Orlicz $\widetilde{L}^{\varphi_1}$ et $\widetilde{L}^{\varphi_2}$ qui sont déterminées par des N-fonctions distincte $\varphi_1(u)$ et $\varphi_2(u)$, est généralement distincte.

Théorème 1.5 *L'inclusion suivant*

$$L^{\varphi_1} \subset L^{\varphi_2}$$

est vérifé si et seulement si, s'il existe des constantes positives u_0 et telles que

$$\varphi_2(u) \leq \alpha\varphi_1(u), (u > u_0)$$

1.7 Structure de l'espace d'Orlicz $L^{\varphi}(\Omega)$

D'après l'inégalité de Jensen la classe d'Orlicz $\widetilde{L}^{\varphi}$ est un ensemble convexe, toutes les fois que la classe $\widetilde{L}^{\varphi}$ contient les deux fonctions $u_1(x)$ et $u_2(x)$ puis il contient également le segment entier

$$u_\alpha(x) = \alpha u_1(x) + (1-\alpha)u_2(x) \quad (0 \leq \alpha \leq 1).$$

En effet, si $u_1(x), u_2(x) \in \widetilde{L}^\varphi$, alors

$$\begin{aligned} \rho(u_\alpha; \Phi) &= \int_\Omega \Phi[\alpha u_1(x) + (1-\alpha)u_2(x)]dx \\ &\leq \alpha\rho(u_1;\Phi) + (1-\alpha)\rho(u_2;\Phi) < \infty. \end{aligned}$$

1.7.1 Norme d'Orlicz

Définition 1.14 *[5] Soit (Ω, Σ, σ) un espace mesuré.*

Soient $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et (φ, ψ) couple complémentaire de N-fonctions, alors on définit la norme d'Orlicz $\|.\|_\varphi : u \mapsto \|u\|_\varphi$, par

$$\|u\|_0 = \|u\|_\varphi^O = \sup\left\{\int_\Omega |uv|d\mu : \int_\Omega \psi(v)d\mu \leq 1\right\}.$$

l'ensemble L^φ à l'aide de l'égalité suivante

$$\|u\|_\varphi = \sup_{\rho(v;\psi)\leq 1}\left|\int_\Omega u(x)v(x)dx\right|. \tag{2}$$

D'après la définition la norme ci-dessus, est que satisfaite les axiomes habituels :

1$-$ $\|u\|_\varphi = 0$ ssi $u(x) = 0$ p.p ;

2$-$ $\|\alpha u\|_\varphi = \alpha\|u\|_\varphi$;

3$-$ $\|u_1 + u_2\|_\varphi \leq \|u_1\|_\varphi + \|u_2\|_\varphi$.

L'ensemble L^φ devient un espace linéaire normé qui s'appel l'espace d'Orlicz.

Proposition 1.1 *[18] La formule (2) définie une norme dans L^φ.*

Démonstration. • Soit $\|u\|_\varphi = 0$ et soit Ω un sous ensemble de Ω, tel que $0 < \mu(\Omega) < \infty$.
Soit ψ une fonction de Young (N-fonction), alors $\lim_{n\to\infty} \psi(t) = 0$ et par conséquent il existe $k > 0$, tel que $\psi(k) < \frac{1}{\mu(\Omega_1)}$.

On définit la fonction v par

$$v(x) = \begin{cases} x, \ si \ x \in \Omega \\ 0, \ si \ x \in \Omega \backslash \Omega_1 \end{cases}$$

Alors

$$\rho(v;\psi) = \int_{\Omega} \psi(|v(x)|)dx = \int_{\Omega_1} \psi(k)dx < 1,$$

et par la définition da la norme d'Orlicz, on a

$$\|u\|_{\varphi} \geq \int_{\Omega} |u(x)|v(x)dx = k \int_{\Omega} |u(x)|dx,$$

et $\|u\| = 0$ implique $u(x) = 0$ pour presque tout $x \in \Omega_1$. Puisque $\Omega_1 \subset \Omega$ était arbitraire, $u(x) = 0$ pour presque tout $x \in \Omega$.
Soit $u, w \in L^{\varphi}(\Omega)$ i.e., $\|u\|_{\varphi} < \infty$, $\|w\|_{\varphi} < \infty$ et soit $c \in \mathbb{C}$, alors

$$\begin{aligned} \bullet\|cu\|_{\varphi} = \sup_{v} \int_{\Omega} |cu(x)v(x)|dx &= |c| \sup_{v} \int_{\Omega} |u(x)v(x)|dx \\ &= |c|\|u\|_{\varphi} < \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet\|u+w\|_{\varphi} = \sup_{v} \int_{\Omega} |(u+w)(x)v(x)|dx &= \sup_{v} \int_{\Omega} |u(x)+w(x)||v(x)|dx \\ &\leq \sup_{v} \int_{\Omega} |u(x)||v(x)|dx + \sup_{v} \int_{\Omega} |w(x)||v(x)|dx \\ &= \|u\|_{\varphi} + \|w\|_{\varphi}. \end{aligned}$$

■

1.7.2 Norme de Luxemburg

L'ensemble L^{φ} peut être transformé en espace de Banach à l'aide des normes distinctes de la norme présentée ci-dessus.
Considérerons une telle norme qui a été étudiée en détail par Luxembourg .[5]

Définition 1.15 *[5] Soient φ une fonction de Young et u une fonction mesurable définie sur Ω, le nombre*

$$\|u\|_1 = \|u\|_{\varphi}^{L} = \inf\left\{k > 0; \int_{\Omega} \varphi\left(\frac{1}{k}|u(x)|\right) dx \leq 1\right\}$$

est appelé la norme de Luxemburg de u.

1.7.3 Norme de Amemiya

Définition 1.16 *[5] Soient ρ une fonction de young et u une fonction mesurable définie sur Ω,le nombre*

$$\|u\|_2 = \|u\|_{\varphi}^{A} = \inf_{k>0} \frac{1}{k}\left(1 + \int_{\Omega} \rho[ku(x)]dx\right).$$

est appelé la norme de Amemiya de u.

1.7.4 Extension de l'inégalité de Hölder

Théorème 1.6 *[18] Soit (φ, ψ) le couple complémentaires de fonctions de Young.*
Si $u \in L^{\varphi}(\Omega)$ et $v \in L^{\psi}(\Omega)$, alors $u.v \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)|dx \leq \|u\|_{\varphi}\|v\|_{\psi} \tag{3}$$

Démonstration. *Si $\|v\|_{\psi} = 0$, l'inégalité (3) est évidente.*
si $\|v\|_{\psi} \neq 0$, on trouve

$$\rho\left(\frac{v}{\|v\|_{\psi}}; \psi\right) \leq 1,$$

et par la définition de la norme d'Orlicz de u, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u(x)v(x)|dx &\leq \|v\|_{\psi} \int_{\Omega} \left|u(x)\frac{v(x)}{\|v\|_{\psi}}\right| dx \\ &\leq \|u\|_{\varphi}\|v\|_{\psi}. \end{aligned}$$

■

Remarque 1.6 *[18] L'inégalité (3) peut être vue comme prolongation de l'inégalité de Hölder, mais il convient noter que l'inégalité habituelle de Hölder n'est pas cas particulier de (3).*
En effet, si nous traitons les espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$ et $L^q(\Omega)$ comme des espaces d'Orlicz $L^{\varphi}(\Omega)$ et $L^{\psi}(\Omega)$, avec

$$\varphi(t) = \frac{t^p}{p} \text{ et } \psi(t) = \frac{t^q}{q},\ p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

alors l'inégalité (3) est de la forme

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)|dx \leq p^{\frac{1}{p}} q^{\frac{1}{q}} \|u\|_{\varphi}\|v\|_{\psi}$$

1.8 Inégalité de Jensen

Théorème 1.7 *[6] Soit $f \in L_\phi(\Omega)$.Alors,*

$$\phi\left(\frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega f(t)d\mu\right) \leq \frac{1}{\mu(\Omega)}\rho_\phi(\Omega)$$

Démonstration. [6] ϕ est une N-fonction,donc convexe alors elle peut s'écrire comme enveloppe supérieure de fonction affines

$$\phi(x) = \sup_{n\geq 0}(a_n x + b_n)$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}
\phi\left[\frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega f(t)d\mu\right] &= \underset{n\geq 0}{sup}\left[\frac{a_n}{\mu(\Omega)}\int_\Omega f(t)d\mu + b_n\right] \\
&= \underset{n\geq 0}{sup}\left[\frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega a_n f(t)d\mu + \mu(\Omega)b_n\right] \\
&= \sup_{n\geq 0}\left[\frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega a_n f(t)d\mu + \int_\Omega b_n d\mu\right] \\
&= \sup_{n\geq 0}\frac{1}{\mu\left(\Omega\right)}\int_\Omega [a_n f(t)d\mu + b_n]d\mu \\
&\leq \frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega \sup_{n\geq 0}[a_n f(t)d\mu + b_n]d\mu \\
&= \frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega \phi(f(t))d\mu \\
&= \frac{1}{\mu(\Omega)}\rho_\phi(\Omega)
\end{aligned}$$

■

CHAPITRE 2

MESURE DE NON-COMPACITÉ ET THÉORÈME DU POINT FIXE

Dans ce chapitre nous exposons la mesure de non compacité(mesure de Kuratowski et Hausdorff) et leurs propriétés ainsi la relation entre les ensembles compacts, relativement compacts au sens topologique et au sens mesure, et ainsi les propriétés des opérateurs par la vision de la mesure de non compacité et en finir par la théorie du point fixe .

2.1 Notions et définitions

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, notons par A un sous-ensemble de X, et ∂A la frontière de A

de plus le diamètre de A et leur distance,

$$diam\left(A\right)=\sup\left\{\|x-y\|;x,y\in A\right\}$$

$$dist\left(x,A\right)=\inf\left\{\|x-y\|;x,y\in A\right\}$$

Si A est sous-ensemble de X, alors $\bar{A}$ et $conv\bar{A}$ sont la fermeture et l'adhérence de l'enveloppe convexe de A respectivement notons par

$$B_r\left(X,A\right)=B_r=\left\{x\in X;\|x-a\|\leq r\right\}.$$

La boule fermé dans X de centre a et de rayon r et

$$\partial B_r=\left\{x\in X;\|x\|=r\right\},\qquad S_1\left(X\right)=S\left(X\right)=S_X$$

La sphère dans X.

Définition 2.1 *([14]) Soient X et Y deux espaces de Banach de dimension infini et on noté l'ensemble des opérateurs linéaires de X dans Y par $L(X,Y)$,nous mettons $L\left(X\right)=B\left(X,X\right)$ un opérateur liéaire T défini sur X vers X*

2.2 Notion sur les opérateurs

2.2.1 Compacité :

Définition 2.2 (les ensembles compacts) *[14] On dit qu un ensemble U de X est compact si de toute suite d'éléments de U,on peut extraire une sous-suite converge vers un élément de U*

Définition 2.3 (Autre définition d'ensemble compact) *[19] Soit U un ensemble d'un espace normé X, U est dit compact si de tout recouvrement de U par des ouverts de U on peut extraire un sous-recouvrement fini,* ***i.e.***,

$$\forall V_j,\ j\in J(ouverts)\text{ tels que }U\subset\underset{j\in J}{\cup}V_{j(k)}\quad j(k)=1,2,...,n$$

tel que $U \subset \cup_{k=1}^{n} V_{j(k)}$

Définition 2.4 *[3]*

1. *Un ensemble* U *est dit séquentiellement compact si pour toute suite d' éléments dans* U *contient une sous-suite converge vers un élément dans* U.
2. *Un sous-ensemble d'un espace normé est compact si et seulement si il est séquentiellement compact .*
3. *Un sous-ensemble d'un espace normé est dit relativement compact si son adhérence est compact.*
4. *Un sous-ensemble* G *d'un espace normé est totalement borné si il éxiste une suite finie i,e :*

$$\forall \epsilon > 0 : G \subset \cup_{j=1}^{n} B(\varphi_{j,\epsilon})$$

Théorème 2.1 *[3] Tout ensemble borné de dimension finie d'un espace norme est relativement compact.*

Définition 2.5 (Opérateur linéaire) *[19] Soient* E *et* F *deux espaces normés, un opérateur* A *défini sur* E *dans* F *est dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes :*
Condition additive :

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in E, onaA(\varphi_1 + \varphi_2) = A(\varphi_1) + A(\varphi_2)$$

Condition homogéne :

$$\forall \varphi \in E, \lambda \in \Bbbk = (\mathbb{R} \textit{ ou } \mathbb{C}), \textit{ on a } A(\lambda\varphi) = \lambda A(\varphi)$$

Définition 2.6 (Opérateur borné) *[19] Un opérateur linéaire* A *défini sur* E *dans* F *est dit borné s'il existe une constante positive* $C > 0$*, telle que :*

$$\|A(x)\|_F \leq C \|x\|_E, \forall x \in E$$

Définition 2.7 (Opérateur Compact) *[19] Soit A un opérateur linéaire d'un espace normé X dans un espace normé Y, on dit que A est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné un ensemble relativement compact dans Y*

2.2.2 compacité dans C(G)

Définition 2.8 (Compacité Dans $C(G)$) *[19] Dans cette partie, l'espace des fonctions continues définies dans C(G) est muni de la norme maximum :*

$$\|\varphi\|_\infty = \max_{x\in G} |\varphi(x)|$$

Théorème 2.2 (de Bolzano-Weierstrass) *[19] Un espace métrique (X, d) est compact si et seulement si toute suite d'éléments de X admet une sous-suite convergente.*

Théorème 2.3 (Arzela-Ascoli) *[19] Un ensemble $U \subset C(G)$ est relativement compact si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *L'ensemble U est borné telle que :*

$$\forall\varphi \in U : \forall x \in k, \exists M > 0 : |\varphi(x)| \leq M$$

2. *L'ensemble U est équicontinu :*

$$\forall\epsilon > 0 : \forall\varphi \in U : \forall x, y \in k : \exists\delta > 0 \text{ telle que } : |x - y| \leq \delta \rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \epsilon$$

Définition 2.9 *[19] Un opérateur A de X dans Y est compact si et seulement si pour toute suite bornée$\{\varphi_n\}$ de X,la suite$\{A\varphi_n\}$contient une sous suite convergente dans Y*

Définition 2.10 *Un ensemble $G \subset X$ est relativement compact si pour toute suite $\{\varphi_n\}$ il existe une sous suite $\{\varphi_{n(k)}\}$ qui converge dans Y*

2.3 Mesure de non compacité

La mesure de non compacité est un outil très utile dans les espaces de Banach ,elles sont largement utilisée dans la théorie du point fixe ,les équations différentielles,les équations fonctinnelles ,les intégrales et équations integro-différentielles,....etc

2.3.1 Mesure de non compacité en général :

Avant de rappeler la mesure de non compacité,on note par $(X, \|.\|)$ un espace de Banach , nous désignous par M_X la famille des sous-ensembles bornée non vide de X, et par N_X la famille des sous-ensemble relativement compact de X ,et l'enveloppe convexe d'un ensemble $A \subset X$ notons par $conv(A)$.

Définition 2.11 *[17] Une applicaion $\mu : M_X \to [0, +\infty[$ est appelle la mesure de non compacité dans l'espace X,qui satisfait les condition suivantes :*

$$\text{La famille } \ker(\mu) := \{D \in M_X \text{ telle que :} \mu(D) = 0\} \neq \phi, \text{et } \ker(\mu) \subset N_X$$

(est appelé le noyau de MNC)
Soit $A, B \in M_X$ on a les propriétés suivantes :

1. *Si $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$*
2. $\mu\left(\bar{A}\right) = \mu(A)$
3. $\mu\left(\overline{conv\ A}\right) = \mu(A)$
4. $\mu(\lambda A + (1-\lambda) B) \leq \lambda\mu(A) + (1-\lambda)\mu(B), \quad \lambda \in [0,1]$
5. $\mu(A \cup B) = \max\{\mu(A), \mu(B)\}.$
6. *Si (A_n) ensemble de suite de M_X telle que $A_{n+1} \subset A_n (n = 1, ..., n)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$,alors $A_\infty = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$ et $A_\infty \in \ker(\mu)$*

Définition 2.12 *[17] On dit que la mesure de non compacité μ sublinéaire ,si $\forall A, B \in M_X$si elle satisfait les deux conditions suivantes :*

1. $\mu(\lambda A) = |\lambda|\, \mu(A)$ *(μ est dit homogéne)*
2. $\mu(A + B) \leq \mu(A) + \mu(B)$*($\mu$ est dit subadditif)*

2.4 Mesure de non-compacité de Kuratowskii

Définition 2.13 *[19] La mesure de non-compacité de Kuratowski d'un ensemble borné '$A \in M_X$, notée $\alpha(A)$, est définie par :*

$$\alpha(A) = \inf \{\forall\epsilon > 0 : A \subset \cup_{i=1}^{n} B_i, B_i \subset X, diam(B_i) < \epsilon, i = 1, .., n\}$$

où : $diamB_i$ désigne le diamètre de l'ensemble B_i.

$\alpha(A) = \inf\{\epsilon > 0$ *: admet une recouverment fini par des ensemble de diamétre* $< \epsilon\}$.

avec :

B est sous ensemble de X et $B \in M_X$.

On notera que, dans cette difinition, l'expression $diamB_i < \epsilon$ peut etre remplacée par $diamB_i < \epsilon$. il est clair que $\alpha(A) \leq diamA$ pour tout ensemble borné A dans M_X et que $\alpha(A) = 0$ si A est fini. Les propriétées essentielles de la mesure de non-compacité de Kuratowski d'un ensemble borné sont résumées dans le théoréme suivant :

Théorème 2.4 *[19] Soit (X, d) un espace métrique et $A, A_{1,} A_2 \in M_X$, alors*

1. $\alpha(A) = 0 \Leftrightarrow \bar{A}$ *est compact.*
2. $A \subset A_1 \Rightarrow \alpha(A) \leq \alpha(A_1)$.
3. $\alpha(A) = \alpha\left(\bar{A}\right)$.
4. $\alpha(A_1 \cup A_2) = \max\{\alpha(A_1), \alpha(A_2)\}$.
5. $\alpha(A_1 \cap A_2) \leq \min\{\alpha(A_1), \alpha(A_2)\}$.
6. *Si X est complet, $(F_n)_n$ une suite des ensembles croissantes d'ensembles non vide,fermés et bornés, telles que : $\lim_n \alpha(F_n) = 0$, alors $F_\infty = \cap_{n=1}^{\infty} F_n$ est sous-ensemble non vide et compact.*

Démonstration. [19]

1. Par définition de la mesure de non-compacité.
2. Soit $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0, \{B_i\}_{i=1}^{n}$ un recouvrement fini de l'ensemble A avec $diamB_i \leq \epsilon_1; i = 1, ..., n$. et $\{\varphi_j\}_{j=1}^{m}$ un recouvrement fini de l'ensemble A_1avec $diam\varphi_j \leq \epsilon_2; j = 1, ..., m$ Puisque $A \subset A_1$,on peut toujours choisir les φ_j ,telle que :

$$A \subset \cup_{i=1}^{n} B_i \subset \cup_{j=1}^{m} \varphi_j$$

Ceci implique $\alpha(A) < \epsilon_2$, Par conséquent $\alpha(A) \leq \alpha(A_1)$.

3. Puisque $A \subset \bar{A}$ alors $\alpha(A) \leq \alpha\left(\bar{A}\right)$ d'après l'assertion 2, il suffit de démontrer l'inégalité dans l'autre sens :$\alpha\left(\bar{A}\right) \leq \alpha(A)$ Soit $\epsilon > 0$ Avec $diamB_i \leq \epsilon$;Pour i=1,...,n, on a

$$A \subset \cup_{i=1}^{n} B_i \Rightarrow \bar{A} \subset \overline{\cup_{i=1}^{n} B_i} = \cup_{i=1}^{n} \bar{B}_i$$

Comme $diamB_i = diam\bar{B}_i$, on déduit que $\alpha(A) < \epsilon$, par conséquent $\alpha\left(\bar{A}\right) \leq \alpha(A)$.

4. D'après l'assertion 2, on a

$$A_1 \subset A_1 \cup A_2 \Rightarrow \alpha(A_1) \leq \alpha(A_1 \cup A_2)$$

$$A_2 \subset A_1 \cup A_2 \Rightarrow \alpha(A_2) \leq \alpha(A_1 \cup A_2).$$

Donc

$$\max(\alpha(A_1), \alpha(A_2)) \leq \alpha(A_1 \cup A_2).$$

Montrons l'inégalité dans l'autre sens ,soit $\epsilon, \epsilon_1, \epsilon_2 > 0, r = \max(\alpha(A_1), \alpha(A_2))$ et considérons $\{B_i\}_{i=1}^{n} = \{\overline{\varphi_j}\}_{j=1}^{m}$ des recouvrements finis des ensemble A_1, A_2 respectivement avec $diamB_i < \epsilon_1$ pour $i = 1, ..., n$ et $diam\varphi_j \leq \epsilon_2$ pour j=1,...,m on a $diamB_i < r + \epsilon$ et $diam\varphi_j < r + \epsilon$ pour i=1,...,n et $diam\varphi_j \leq \epsilon_2$ pour $j = 1, ..., m$. par conséquent

$$A_1 \cup A_2 \subset \left(\cup_{i=1}^{n} B_i\right) \cup \left(\cup_{j=1}^{m} \varphi_j\right) \Rightarrow A_1 \cup A_2 \subset \cup_{k=1}^{l} G_k < r + \epsilon.$$

D'où :

$$\alpha(A_1 \cup A_2) \leq \max\{\alpha(A_1), \alpha(A_2)\}.$$

5. Utilisons l'assertion 2 ,on obtient :

$$A_1 \cap A_2 \subset A_1 \Rightarrow \alpha(A_1 \cap A_2) \leq \alpha(A_1)$$

$$A_1 \cap A_2 \subset A_2 \Rightarrow \alpha(A_1 \cap A_2) \leq \alpha(A_2)$$

D'où :

$$\alpha(A_1 \cap A_2) \leq \min\{\alpha(A_1), \alpha(A_2)\}$$

6. Montrons que F_∞ est non vide ,Choisissons,pour chaque n ,un élément $x_n \in F_n$. Posons $X_n = \{x_i, i \geqslant n\}$ .Puisque $X_n \subset F_n$ alors $\alpha(X_n) \leq \alpha(F_n); \forall n$. Par passage a la limite, on obtient $\alpha(X_1) = 0$. C'est a dire X_1 est relativement compact .Donc la suite $(X_n)_n$ contient une sous-suite $(X_{nk})_k$ convergente dans X. Soit $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Comme F_∞ est un sous-ensemble fermé de X alors $x \in F_n; \forall n$. Ceci implique que $F_\infty \neq \emptyset$.

   Montrons maintenant que F_∞ est compact .Comme $F_\infty \subset F_n; \forall n$ alors $\alpha(F_\infty) \leq \alpha(F_n)$ est relativement compact et donc compact puisqu'il fermé.

   Si X est un espace normé alors la mesure de non-compacité de Kuratowski vé rifie,en outre, les propriétés citées dans la proposition suivante.

■

Proposition 2.1 *[19] :Soit (X, d) un espace normé et $A, A_1, A_2 \in M_X$,alors :*

1. $\alpha(A_1 + A_2) \leq \alpha(A_1) + \alpha(A_2)$.
2. $\alpha(A + x) = \alpha(A), \forall x \in X$.
3. $\alpha(\lambda A) = |\lambda| \alpha(A)$.
4. $\alpha(A) = \alpha(conv(A))$ où $convA$ désigne l'enveloppe convexe de l'ensemble A.

Démonstration. [19]

1. Soit $\epsilon_1 \epsilon_2 > 0, A_1 \subset \cup_{i=1}^n B_i, A_2 \subset \cup_{j=1}^m \varphi_j$ avec $diam B_i < \epsilon_1$ pour i=1,....,n et $diam \varphi_j < \epsilon_2$ pour j=1,....,m. Alors :

$$A_1 + A_2 \subset \cup_{i=1}^n \cup_{J=1}^m (B_i + \varphi_j).$$

Avec :

$$diam(B_i + \varphi_j) \leq \epsilon_1 + \epsilon_2,$$

c'est à dire :

$$\alpha(A_1 + A_2) \leq \alpha(A_1) + \alpha(A_2).$$

2. D'une part,en utilisant la assertion précédente on obtient

$$\alpha(A+x) \leq \alpha(A) + \alpha(\{x\}) = \alpha(A).$$

Et d'une part,

$$\alpha(A) = \alpha(A+x-x) \leq \alpha(A+x) + \alpha(\{-x\}).$$

D'où

$$\alpha(A+x) = \alpha(A), \forall x \in X.$$

3. Considérons $\epsilon > 0, A \subset \cup_{i=1}^{n} B_i$ avec $diam B_i < \epsilon$ pour $i = 1, ..., n$ .Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{k}, \lambda A \subset \cup_{i=1}^{n} \lambda B_i$ et $diam \lambda B_i =\mid \lambda \mid diam B_i <\mid \lambda \mid \epsilon$. C'est à dire :

$$\alpha(\lambda A) \leq \mid \lambda \mid \alpha(A).$$

L'autre inégalité est évidente puisque :

$$\alpha(A) = \alpha\left(\lambda^{-1}\lambda A\right) \leq \mid \lambda^{-1} \mid \alpha(\lambda A).$$

4. L'inégalité $\alpha(A) = \alpha(con(A))$ est toujours satisfaite puisque $A \subset con(A)$
Pour démontrer l'autre inégalité ,$\alpha(con(A)) \leq \alpha(A)$
Pour A_i sous suite borné de $X diam A_i < d$ pour tout $i = 1, ..., n$ et $A = \cup_{i=1}^{n} A_i$ on a :

$$con(A) = \{_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : \lambda_i \geq 0,_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, x_i \in con(A_i)\,(i = 1, ..., n)\}$$

pour $\epsilon > 0$ et

$$A = \{(\lambda_i, ..., \lambda_n) : \lambda_i \geq 0,_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, (i = 1, ..., n)\}$$

Puis A sous suit compact de $(\mathbb{R}^n, \parallel . \parallel_\infty)$ où $\parallel \lambda_1, ..., \lambda_n \parallel = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$.

■

2.5 Mesure de non-compacité de Hausdorff :

En 1957,Goldenstein,Goh'berg et Markus ont introduit une autre mesure de non-compacité appelée mesure de non-compacité de Hausdorff.

Définition 2.14 *[14] La mesure de non-compacité de Hausdorff d'un ensemble borné $A \in M_X$,notée $\chi(A)$, est définie par :*

$$\chi(A) = \inf\left\{\epsilon > 0 : A \subset \cup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i), x_i \in X, r_i < \epsilon, i = 1, ..., n\right\}.$$

Où :$B(x_i, r_i)$ désigne la boule de centre x_i et de rayon r_i.
où :

$$\chi(A) = \inf\{\epsilon > 0, B \text{ admet un recouvrement fini des boules de rayons} < \epsilon\}$$

avec B est la famille des sous espace fermés de X et $B \in M_X$.Dans cette définition ,l'inégalité $r_i < \epsilon$,peut être remplacée par $r_i < \epsilon$,De plus les centres x_i des boules qui recouvrent l'ensemble A ne sont pas forcement dans l'ensemble$(Ax_i \in X, \text{ en général})$.

Les propriétés fondamentales de la mesure de non-compacité de Hausdorff sont données par le théorème suivant :

Théorème 2.5 *[14] :Soit(X, d) un espace de Banach et soit A, A_1, A_2 des sous ensembles bornés.*

1. Si est fini$A$ alors :$\chi(A) = 0 \Leftrightarrow A$ totalement bornée$\Leftrightarrow \bar{A}$ est compact.
2. Si Aest fini,alors $\chi(A) = 0$.
3. $A \subset A_1 \Rightarrow \chi(A) \leq \chi(A_1)$
4. $\chi(A) = \chi\left(\bar{A}\right) = \chi(con(A))$.
5. $\chi(A_1 \cup A_2) = \max\{\chi(A_1), \chi(A_2)\}$.
6. $\chi(A_1 \cap A_2) \leq \min\{\chi(A_1), \chi(A_2)\}$
7. Si Xest complet ,$(F_n)_n$une suite décroissante d'ensembles non vides, fermés et bornés telle que :$\lim_n(F_n) = 0$,alors$F_\infty = \cap_{n=1}^{\infty} F_n$ est un sous-ensemble non vide et compact.

Proposition 2.2 *[19] Soient (X, d) un espace normé $A, A_1, A_2 \in M_X$. Alors :*

1. $\chi(A_1 + A_2) \leq \chi(A_1) + \chi(A_2)$.
2. $\chi(A + x) = \chi(A), \forall x \in X$.
3. $\chi(\lambda A) =\mid \lambda \mid \chi(A), \lambda \in \Bbbk$.
4. $\chi(A) = \chi(con(A))$ *,où* $con(A)$ *désigne l'enveloppe convexe de l'ensemble* A.

2.6 Mesure de non compacité sur les opérateurs

Définition 2.15 *[14] Soient* $T : D(T) \subseteq X \to X$ *un opérateur continu* $\alpha(.)$ *est la mesure de non compacité de Kuratowski dans* X *,pour tout* $k > 0$ *,on dit que* T*est une contraction si pour tout sous-ensemble borné* A *de* $D(T)$, $T(A)$*est un sous-ensemble borné dans* X *et*

$$\alpha(T(A)) \leq k\alpha(A).$$

Remarque 2.1 *[14] pour tout sous-ensemble borné* A *de* $D(T)$, *alors* $\alpha(A) > 0, T(A)$ *est un sous-ensemble borné dans* X *et*

$$\alpha(T(A)) < \alpha(A)$$

Définition 2.16 *[14] :Soient* $T : D(T) \subseteq X \to X$ *un opérateur continu* $\chi(.)$ *est la mesure de non compacité de Hausdroff dans* X *et* $k > 0, T$ *est dit K-boule contraction si pour tout sous-ensemble borné* A *de* $D(T)$,$T(A)$*est un sous-ensemble borné dans* X *et*

$$\chi(T(A)) \leq k\chi(A).$$

1. $\frac{1}{2}\alpha(T) \leq \chi(T) \leq 2\alpha(T)$.
2. $\alpha(T) = 0 \Leftrightarrow \chi(T) = 0 \Longleftrightarrow T$ est compact.
3. Si $T, S \in L(X)$,donc $\alpha(TS) \leq \alpha(T)\alpha(S)$ et $\chi(TS) \leq \chi(S)\chi(T)$.
4. Si $k \in K(X)$,donc $\alpha(T + k) = \alpha(T)$ et $\chi(T + k) = \chi(T)$
5. $\alpha(T^*) \leq \chi(T)$ et $\alpha(T) \leq \chi(T^*)$, où T^* désigne l'opérateur dual de T.
6. Si B est un sous-ensemble borné de X, donc $\alpha(T(B)) \leq \alpha(T)\alpha(B)$.
7. Si $A \subset D(T), \alpha(A) > 0$ alors $T(A)$ borné ,

2.7 Quelques théorèmes de point fixe

Dans cette section on a rappelle quelques outils et résultats d'analyse fonctionnelle utilisés par la suite : principe de contraction de Banach , équicontinuité,théorème de Schauder, de Brower résoudre des équations différentielle d'ordre fractionnaire où deuxième membre est non linéaire, nous besoin des théories du point fixe.

On note par $L^1(I,E)$ L'espace de Banach des fonctions mesurables, $y : I \to E$ qui sont Bochner intégrales, muni de la norme

$$\|y\|_{L^1} = \int_0^T \|y(t)\| \, dt.$$

L'espace de Banach des fonctions mesurables $y : I \to E$ qui sont bornées est noté par $L^\infty(I,E)$ muni de la norme :

$$\|y\|_\infty = \inf\{c > 0, \|y(t)\| < c, \text{ p.p } t \in J\}.$$

On note par $AC^1(I,E)$ l'espace de Banach des fonctions dérivables $y : I \to E$,ayant la première dérivée absolument continue.

Définition 2.17 *[3] L'application $f : I \times E \to E$ est dit de Carathéodory si,*

1. $t \to f(t,u)$ est mesurable $\forall u \in E$.
2. $u \to f(t,u)$ est continue presque pour tout $t \in I$.
3. $\forall r > 0$,il existe une fonction $\Phi_r \in L^1(I,\mathbb{R}_+)$, telle que $\forall u \in \mathbb{R}$ avec $\|u\| < r$,

$$\|f(t,u)\| \le \Phi_r(t).$$

Remarque 2.2 *[3] Si f vérifier l'assertion 3 ,alors est dite L^1 Carathéodory.*

Définition 2.18 *[3] Soit X une espace de Banach on dit que F est contractent $\Rightarrow \forall x_1, x_2 \in X$ on a :*

$$|F(x_1) - F(x_2)| \le k|x_1 - x_2|, 0 < k < 1$$

Théorème 2.6 *[3] (**Scharefer**).Soient X un espace de Banach l'opérateur $F : X \to X$ complément continu .Alors F possède au moins un point fixe. on dit que F est complètement continu si :*

i) $\forall b \in X \Rightarrow F(b)$ *est relativement compacte.*

ii) *Si l'ensemble* $P = \{y \in X, \lambda F(y) = y, \lambda \in [0,1]\}$ *est borné.*

Définition 2.19 *[3] (**Banach**).Soit X une espace de Banach ,et soit l'opérateur$F : X \to X$ est contractent alors :F admets un point fixe unique :*

$$\exists y^* \in X \text{ telle que } F(y^*) = y^*$$

Définition 2.20 *[3] (**Schauder**).Soit $(E; d)$ un espace métrique complet et A une partie convexe fermée de E et soit $F : A \to A$,on a si l'ensemble $\{Fx : x \in A\}$ est relativement compact dans E .Alors F possède ou moins un point fixe.*

Définition 2.21 *[3] On dit que A est convexe :*

$$\forall x, y \in A, \forall t \in [0,1] : tx + (1-t)\,y \in A$$

Définition 2.22 *[3] L'application $T : C \subset E \to E$ est dit une α_E contraction s'il existe une constante $k < 1$ positive telle que :*

$$\alpha_E(T(W)) \leq k\alpha_E(W)\,, (\forall W \text{ fermé et borné})$$

Théorème 2.7 *[3] (**Darbo-généralisé**) C un sous ensemble non vide, ,fermé,borné et convexe d'un espace de Banach E l'application continue*

$$T : C \to C,$$

satisfaisant :

$$\mu(T(W)) \leq \Phi\mu(W)\,, \qquad \forall W \subset C,$$

où μ une mesure de non compacité arbitraire et $\Phi : [0,\infty[\to [0,\infty[$, une fonction strictement croissante (non nécessairement continue),avec :

$$\lim_{n\to\infty} \Phi^n(t) = 0, \quad \forall t \in [0,\infty[\,.$$

Alors, T admet au moins un point fixe dans C.

Lemme 2.1 *[3] Soit C un sous ensemble non vide, fermé,borné et convexe d'un espace de Banach, $C(I,E)$ et soit G une fonction continue de $I \times I$ et $f : I \times E \to E$ une fonction qui satisfait les conditions de Carathéodory,et il existe $p \in L^1(I;\mathbb{R}_+)$ telle que tout $t \in I$, et tout sous ensemble borné $B \subset E$ on a :*

$$\lim_{h\to 0^+} \alpha\left(f\left(I_{t,h} \times B\right)\right) \leq p(t)\,\alpha(B)\,; I_{t,h} = [t-h,t] \cap I$$

Si V est un sous ensemble équicontinu de D ,alors :

$$\alpha\left(\left\{\int G(t,s)\, f(s,y(s))\, ds : y \in V\right\}\right) \leq \int_I \shortparallel G(t,s) \shortparallel p(s)\,\alpha(V(s))\, ds.$$

Théorème 2.8 *[3] (**Darbo-sadovskii**) Soit C un sous ensemble non vide ,fermé,borné et convexe d'un espace de Banach E et soit l'application continue*

$$T : C \to C$$

une α_E contraction ,alors T admet au moins un point fixe dans C.

Théorème 2.9 *[3] (**Mönch**) Soit D un sous espace fermé,borné et convexe d'un espace de Banach, tel que $0 \in D$;et soit N une application continue de D dans D .Si l'implication*

$$V = conv\overline{N(V)} \text{ ou } V = N(V) \cup \{0\} \Rightarrow \alpha(V) = 0.$$

est vérifiée pour tout ensemble V de D, alors N admet un point fixe dans D.

CHAPITRE 3

EXISTENCE DE SOLUTION DE EDFS PAR LA MESURE DE NON COMPACITÉ

- Dans ce chapitre on essaye d'appliquer la notion de la mesure de non compacité sur les problèmes de type des équations différentielles d'ordre fractionnaires pour étudier l'existence de solutions.

3.1 Equation différentielle fractionnaire

3.1.1 Fonctions spéciales

3.1.1.1 Fonction Gamma d'Euler

La fonction Gamma est une fonction complexe, considérée également comme une fonction spéciale. Elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexe (excepte en certains point)

Définition 3.1 *On appelle la fonction Gamma, la fonction définie par :*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad (x \in \mathbb{C}, Re(x) > 0).$$

avec $t^{x-1} = e^{(x-1)\ln t}$.

Lemme 3.1 *([1],[2])La fonction Gamma est une fonction de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *,(resp holomorphe sur le demi plan* $x \in \mathbb{C}, Re\,(x) > 0)$ *et,*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, (\textit{resp,} x \in \mathbb{C}, Re\,(x) > 0)\,, \Gamma^{(k)}\,(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k\, t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Proposition 3.1 *[3] ([1],[2]) Pour tout* $x \in \mathbb{C}, Re\,(x) > 0,\; n \in \mathbb{N}$*, on a :*

1. $\Gamma\,(x+1) = x\Gamma\,(x)\,.$
2. $\Gamma\,(n+1) = (n)!.$
3. $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n} n!}.$

Démonstration. [3]

1. $\Gamma\,(x+1) = \int\limits_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_0^{+\infty} + x \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$
   $= x\Gamma\,(x)$
2. il suffit d'appliquons 1 pour $x = n$
3.

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right) \\
&= \left(\frac{2n-1}{2}\right)\left(\frac{2n-3}{2}\right)\left(\frac{2n-5}{2}\right)...\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{(2n)\,(2n-1)\,(2n-2)\,...\,(1)}{2^n\,(2n)\,(2n-2)\,(2n-4)\,...\,(2)}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n} n!}
\end{aligned}$$

■

Remarque 3.1 *([1],[2]) La détermination de la fonction Gamma pour les valeurs négatifs non entiéres par la formule* $\Gamma\,(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$ *,la fonction Gamma n'existe pas pour les valeurs négatifs entières*

Exemple 3.1

1. $\Gamma\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{-1}{2}+1\right)}{\frac{-1}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{-1}{2}} = -2\sqrt{\pi}.$
2. $\Gamma\left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{-3}{2}+1\right)}{\frac{-3}{2}} = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{-3}{2}} = \frac{-2\sqrt{\pi}}{\frac{-3}{2}} = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}.$

3.1.1.2 Fonction Beta d'Euler

Définition 3.2 *[3] La fonction Beta est un type d'intégrale d'Euler définie par :*

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx, \quad (p,q \in \mathbb{C}, Re(p) > 0, Re(q) > 0).$$

Proposition 3.2 *On a la relation :*

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Démonstration. Soit $D = (0,+\infty) \times (0,+\infty)$

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= \left(\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx\right)\left(\int_0^{+\infty} y^{q-1}e^{-y}dy\right) \\ &= \iint_D x^{p-1}y^{q-1}e^{-(x+y)}dxdy \end{aligned}$$

en utilisant un changement de coordonnées ,considérons les nouvelles coordonnées

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = \frac{x}{x+y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = uv \\ y = u(1-v) \end{cases},$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -uv - u(1-v) = -u$$

de même que le domaine D' correspondant à D dans les coordonnées u, v est

$$D' = \{(u,v)\,/u \geqslant 0, 0 \leq v \leq 1\}.$$

alors :

$$\begin{aligned} \iint_D x^{p-1}y^{q-1}e^{-(x+y)}dxdy &= \iint_{D'} (uv)^{p-1}[u(1-v)]^{q-1}e^{-u}\mid -u \mid dudv \\ &= \iint_{D'} u^{p+q-1}v^{p-1}(1-v)^{q-1}e^{-u}dudv \\ &= \left(\int_0^{+\infty} u^{p+q-1}e^{-u}du\right)\left(\int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1}dv\right) \\ &= \Gamma(p+q)B(p,q), \end{aligned}$$

par conséquent on a :

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

■

3.1.2 Intégrale fractionnaire

3.1.2.1 Intégrale de Riemann-Liouville

Fonction définies sur $[a,b]$ Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$une fonction définie sur $[a,b]$.Notons par $\left(I_{\alpha^+}^1 f\right)$ la primitive de f qui s'annule on a :

$$\forall t \in [a,b], \left(I_{a^+}^1 f\right)(t) = \int_a^t f(x)\,dx.$$

L'intégration de $\left(I_{\alpha^+}^1 f\right)$ permet d'obtenir la primitive seconde de f qui s'annule en a et dont la dérivée s'annule en a .De plus,d'aprés le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}
\left(I_{a^+}^1 f\right)^2(t) &= \left(I_{a^+}^1 f\right) \circ \left(I_{a^+}^1 f\right)(t) \\
&= \int_a^t \left(\int_a^u f(x)\,dx\right) du \\
&= \int_a^t (t-x) f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, En notant$\left(I_{a^+}^1 f\right)^n$ la n-ième itération de $\left(I_{a^+}^1 f\right)$, une récurrence directe montre que

$$\left(I_{a^+}^1 f\right)^n(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-x)^{n-1} f(x)\,dx,$$

si on note $g = \left(I_{a^+}^1 f\right)^n$, g est donc l'unique fonction vérifiant ,

$$\forall 0 \le k \le n-1, g^{(k)}(a) = 0, g^{(n)} = f.$$

L'égalité $g^{(n)} = f$ justifie la définition suivante :

Définition 3.3 *[3] Soit $n \in \mathbb{N}^*$ L'intégrale à gauche d'ordre n de f, que l'on note $\left(I_{a^+}^1 f\right)$ est définie par :*

$$\left(I_{a^+}^1 f\right)(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-x)^{n-1} f(x)\,dx.$$

Grâce à la fonction Gamma d'Euler que nous avons définie précédemment. C'est la propriété $\Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}$, qui permet de généraliser la définition de la manière suivante :

Définition 3.4 *[3] L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre $\alpha > 0$, est* *définie par :*

$$\forall t \in [a,b], \ \left(I_{a^+}^{1} f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} f(x)\, dx$$

De même manière on définit l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre $\alpha > 0$, *est définie par :*

$$\forall t \in [a,b], \ \left(I_{a^-}^{1} f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (t-x)^{\alpha-1} f(x)\, dx.$$

Fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}$ Il est d'étendre la définition aux axes $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}$,Notons ces opérateurs $\left(I_{0^+}^{\alpha} f\right)$ et $\left(I_{+}^{\alpha} f\right)$:

$$\begin{aligned} \forall t \ &\in \ \mathbb{R}^+, \ \left(I_{0^+}^{\alpha} f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} f(x)\, dx. \\ \forall t \ &\in \ \mathbb{R}, \ \left(I_{+}^{\alpha} f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t (t-x)^{\alpha-1} f(x)\, dx. \end{aligned}$$

Proposition 3.3 *[3] ([1],[2])Pour* $\alpha > 0$, $\beta > 0$, *on a :*

1. $\left(I_{\alpha^+}^{\alpha} (t-a)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (t-\alpha)^{\alpha+\beta-1}$.
2. $\left(I_{b^-}^{\alpha} (b-t)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (b-t)^{\alpha+\beta-1}$.
3. *Soit* $\alpha > 0$, $\beta > 0$, *et* $f \in L^1([a,b])$. *Alors*

$$I_{\alpha^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\beta} f = I_{a^+}^{\alpha+\beta} f$$

Théorème 3.1 *[3] Si* $f \in L^1([a,b])$, *alors* $I_{a^+}^{\alpha} f$ *existe pour tout* $\alpha > 0$, *et* $I_{a^+}^{\alpha} f \in L^1([a,b])$.

3.1.2.2 Dérivées fractionnaire de Riemann-Liouville

Si $\alpha > 0$, on note $[\alpha]$ la partie entiére de α : $[\alpha]$ est l'unique entier vérifiant $[\alpha] \leq \alpha \leq [\alpha]+1$, Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. En s'inspirant de la relation classique $\frac{d}{dt} = \frac{d^2}{dt^2} \circ I_t^1$, on peut définir une dérivées fractionnaire d'ordre $0 \leq \alpha < 1$ par :

$$\frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}} = \frac{d}{dt} \circ I_t^{1-\alpha}.$$

Plus généralement,si $\alpha > 0$,et $n = [\alpha]+1$, on peut poser :

$$\frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}} = \frac{d^n}{dt^n} \circ I_t^{n-\alpha}.$$

On obtient exactement la dérivée de Riemann-Liouville gauche.

Définition 3.5 *[3] Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$, la dérivées fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α est définie par :*

$$\begin{aligned} \forall t \in & [a,b], D^{\alpha}_{a^+} f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \circ I^{n-\alpha}_{a^+} f(t) \\ = & \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-x)^{n-\alpha-1} f(x)\, dx. \end{aligned}$$

De plus, on a vu que la définition, d'intégrale à droit était associée à $-d/dt$. le raisonnement conduit donc à la définition suivante :

Définition 3.6 *[3] Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$, la dérivées fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre α est définie par :*

$$\begin{aligned} \forall t \in & [a,b], D^{\alpha}_{b^-} f(t) = \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \circ I^{n-\alpha}_{b^-} f(t) \\ = & \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^b (t-x)^{n-\alpha-1} f(x)\, dx \end{aligned}$$

Soit maintenant $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, les définitions précédentes se généralisent directement et sont appelées de Liouville.

Définition 3.7 *Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$. la dérivées fractionnaire de Riemann-Liouville gauche d'ordreα est définie par :*

$$\begin{aligned} \forall t \in & \mathbb{R}, D^{\alpha}_{+} f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \circ I^{n-\alpha}_{+} f(t) \\ = & \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{-\infty}^t (t-x)^{n-\alpha-1} f(x)\, dx \end{aligned}$$

De plus, on a vu que la définition, d'intégrale à droit était associée à $-d/dt$. le raisonnement précédent conduit donc à la définition suivante :

Définition 3.8 *Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$. la dérivées fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre α est définie par :*

$$\begin{aligned} \forall t \in & \mathbb{R}, D^{\alpha}_{-} f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \circ I^{n-\alpha}_{-} f(t) \\ = & \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^{+\infty} (t-x)^{n-\alpha-1} f(x)\, dx \end{aligned}$$

Remarque 3.2 *[3] ([7]) Pour $\alpha = 0, n = 1$,on a :*

1. $D^{\alpha}_{+} f(t) = \frac{d}{dt}\left(I^1_{a^+} f\right)(t) = f(t)$

2. *Toutes ces dérivées coïncident avec les dérivées usuelles pour les ordres entiers :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} D_{a^+}^{\alpha} f(t) = D_{+}^{\alpha} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t) \\ D_{b^-}^{\alpha} f(t) = D_{-}^{\alpha} f(t) = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} f(t) \end{cases}$$

Proposition 3.4 *([1],[2]) Pour $\alpha \geq 0, \beta > 0$, on a :*

1. $\left(D_{a^+}^{\alpha} (t-a)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}$

2. $\left(D_{b^-}^{\alpha} (b-t)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-t)^{\beta-\alpha-1}$

Remarque 3.3 *Pour $\lambda = \beta - 1, a = 0$ on a :*

$$\begin{aligned} \left(D_{0^+}^{\alpha} t^{\lambda}\right)(t) &= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(n-\alpha+\lambda+1)} (n-\alpha+\lambda)(n-\alpha+\lambda-1)\ldots(\lambda+1-\alpha)\, t^{\lambda-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(n-\alpha+\lambda+1)} (n-(\alpha-\lambda))(n-1-(\alpha-\lambda))\ldots(1-(\alpha-\lambda))\, t^{\lambda-\alpha} \end{aligned}$$

$$\left(D_{0^+}^{\alpha} t^{\lambda}\right)(t) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)}, si & \alpha-\lambda \notin \{1,2,.....,n\}\ \lambda > -1 \\ 0, \quad si & \alpha - \lambda \in \{1,2,.....,n\} \end{cases}$$

Si $\alpha - \lambda \in \{1,2,.....,n\} \Longrightarrow \alpha - \lambda = m \Rightarrow \lambda = \alpha - m, m \in \{1,2,.....,n\}$ c-à-d

$$\left(D_{0^+}^{\alpha} t^{\alpha-m}\right)(t) = 0, m \in \{1,2,.....,n\}$$

Proposition 3.5 *([1],[2])Soit $\alpha > 0, \beta > 0, n = [\alpha]+1$, on a les propriétés suivantes :*

1. *Si $f(t) \in L_p([a,b]), (1 \leq p < \infty)$, alors*

$$\left(D_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\alpha} f\right)(t) = f(t), \text{ et } \left(D_{b^-}^{\alpha} I_{b^-}^{\alpha} f\right)(t) = f(t).$$

2. *Si $\alpha > \beta$, et $f(t) \in L_p([a,b]), (1 \leq p < \infty)$, alors*

$$\left(D_{a^+}^{\beta} I_{a^+}^{\alpha} f\right)(t) = \left(I_{a^+}^{\alpha-\beta} f\right)(t), \text{ et } \left(D_{b^-}^{\beta} I_{b^-}^{\alpha} f\right)(t) = \left(I_{b^-}^{\alpha-\beta} f\right)(t),$$

3. *Si $f(t) \in C^q([a,b]), q = [\alpha+\beta]+1$, alors*

$$\left(D_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\beta} f\right)(t) = \left(D_{a^+}^{\alpha+\beta} f\right)(t), \text{ et } \left(D_{b^-}^{\alpha} I_{b^-}^{\beta} f\right)(t) = \left(D_{b^-}^{\alpha+\beta} f\right)(t),$$

4. *Si* $f(t) \in L_1([a,b]), \left(I_{a^+}^{n-\alpha} f\right) \in AC^n([a,b])$, *alors*

$$\begin{aligned}
\left(I_{a^+}^{\alpha} D_{a^+}^{\alpha} f\right)(t) &= f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(I_{a^+}^{n-\alpha} f\right)^{(n-K)}(a)}{\Gamma(\alpha - K + 1)} (t-a)^K \\
\left(I_{b^-}^{\alpha} D_{b^-}^{\alpha} f\right)(t) &= f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-K} \left(I_{b^-}^{n-\alpha} f\right)^{(n-K)}(b)}{\Gamma(\alpha - K + 1)} (b-t)^K .
\end{aligned}$$

3.2 Application de MNC pour une équation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville dans l'espace d'Orlicz

Notre objectif est d'étudier l'existence de la solution de l'équation suivante dans l'espace d'Orlicz :

$$x(t) = g(t) + G(x)(t). \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s, x(s)) ds, t \in [0, d], 0 < \alpha < 1 \tag{4}$$

Proposition 3.6 *[10] Supposons que M soit une fonction de Young, alors on a :*

(a) Pour un $\alpha \in (0,1)$ fixé, et tel que $\int_0^t M(s^{-\alpha_1}) ds$ est fini pour tout $t > 0$. Si $\alpha_1 < \alpha_2$, alors l'intégrale

$$\int_0^t M(s^{-\alpha_2}) ds$$

est également finie.

(b) Pour tout $t \in I\!R^+$ et $\alpha \in (0,1)$, l'ensemble

$$I\!M(t) = \left\{ k > 0 : \int_0^{tk^{\frac{1}{1-\alpha}}} M(s^{\alpha-1}) ds \leq k^{\frac{1}{1-\alpha}} \right\}$$

est constitué de fonctions croissantes et continues avec $I\!M(0) = 0$.

Définition 3.9 *[13] L'intégrale fractionnaire de Riemann–Liouville (R-L) d'une fonction bien définie x d'ordre α est définie comme suit :*

$$I^{\alpha} x(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} x(s) ds, \alpha > 0, t > 0$$

où $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-s} s^{\alpha-1} ds$.

Proposition 3.7 *[13] Pour $\alpha \in \mathbb{R}^+$, l'opérateur I^α transforme les fonctions positives et presque partout croissantes en des fonctions de même type*

Lemme 3.2 *[11] Soit $X \subset L_M(I)$ un ensemble borné. Supposons qu'il existe une famille $(\Omega_c)_{0\leq c\leq a} \subset I$ telle que $mes\Omega_c = c$ pour tout $c \in [0, a]$, et pour tout $x \in X$*

$$x(t_1) \geq x(t_2), \quad (t_1 \in \Omega_c,\ t_2 \notin \Omega_c)$$

Alors X est compact pour la convergence en mesure dans $L_M(I)$.

Lemme 3.3 *[11][16] Soit $X \subset E_M(I)$ un ensemble borné, non vide et compact pour la convergence en mesure. Alors :*

$$\beta_H(X) = c(X)$$

Théorème 3.2 *[8] Soit $Q \subset E$ un ensemble borné, non vide, convexe et fermé, et soit $V : Q \to Q$ une transformation continue qui est une contraction au sens de la mesure de non-compacité μ, c'est-à-dire qu'il existe $k \in [0, 1]$ tel que :*

$$\mu(V(X)) \leq k\mu(X),$$

pour tout sous-ensemble non vide $X \subset E$. Alors, V admet au moins un point fixe dans Q.

Soit $\mathbb{I} = [0, d]$ et réécrivons l'équation 4 sous forme d'opérateur comme suit

$$x = B(x) = g + U(x),$$

Oú

$$U(x) = G(x).A(x), A(x)(t) = I^\alpha F_f(x),$$

telle que F_f, est l'opérateur de superpositionet et I^α est comme dans la définition 3.9 Nous permet d'utiliser des conditions de croissance générales.

3.2.1 Le cas de la condition Δ'

Supposons que $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ sont des N-fonctions et que M et N sont des complémentaires N-fonctions de plus, posons les hypothèses suivantes :

(G1) il existe une constante $k_1 > 0$ telle que, pour tout $v \in L_{\varphi 1}(\mathbb{I})$ et $w \in L_{\varphi_2}(\mathbb{I})$ on a :

$$\|vw\|_\varphi \leq k_1 \|v\|_{\varphi_1} \|w\|_{\varphi_2}$$

(G2) $G : L_\varphi(\mathbb{I}) \to L_{\varphi_1}(\mathbb{I})$ est continue $E_\varphi(\mathbb{I}) \to E_{\varphi_1}(\mathbb{I})$ et il existe une constante $b_0 > 0$ telle que $|G(x)| \leq b_0 \|x\|_\varphi$ et G prend l'ensemble des fonctions presque partout croissantes sur elles -mêmes. De plus supposons que pour tout $x \in E_\varphi(\mathbb{I})$,on ait $G(x) \in E_{\varphi_1}(\mathbb{I})$.

(C1) $g \in E_\varphi(\mathbb{I})$ est presque partout croissante sur $\mathbb{I}$

(C2) $f(t,x) : \mathbb{I} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfait les conditions de Carathéodory. De plus, on suppose que $f(t,x)$ est croissante par rapport á chaque variable t et x

(C3) $|f(t,x)| \leq b(t) + R(|x|)$ pour $t \in \mathbb{I}$ et $x \in \mathbb{R}$ où $b \in E_N(\mathbb{I})$ et R est fonction non négative,continue et non décroissante sur $\mathbb{R}^+$

(C4) Soit N remplit la condition Δ' et supposons qu' il existe $\omega, \gamma, u_0 \geq 0$ pour lesquels

$$N(\omega(R(u))) \leq \gamma\varphi(u) \leq \gamma M(u) \text{ pour } u \geq u_0$$

(K1) Supposons que $k(t) = \frac{1}{\epsilon^{\frac{1}{1-\alpha}}} \int_0^{t\epsilon^{\frac{1}{1-\alpha}}} M(s^{\alpha-1})ds \in E_{\varphi_2}(\mathbb{I})$ pour a.e.$s \in \mathbb{I}$ et $\epsilon > 0$

Lemme 3.4 *Soient une φ_2 N-fonction et M et N des N-fonctions complémentaires. De plus, supposons que l'hypothèse (K1) est vérifiée. Alors, $I^\alpha : L_N(\mathbb{I}) \to L_{\varphi_2}(\mathbb{I})$ l'opérateur est continu.*

Démonstration. Supposons que

$$K(t,s) = \begin{cases} \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & \text{si } s \in [0,t],\ t > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, pour $x \in L_N(\mathbb{I})$ et en utilisant l'inégalité de Hölder, on a :

$$\begin{aligned} |I^\alpha x(t)| &= \left| \int_0^\infty K(t,s)x(s)ds \right| \\ &\leq 2\left\|K(t,\cdot)\right\|_M \|x\|_N \\ &\leq \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \left\|(t-\cdot)^{\alpha-1}\right\|_M \|x\|_N \\ &\leq \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \inf_{\epsilon>0} \left\{ \int_{\mathbb{I}} M\left(\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\epsilon}\right) ds \leq 1 \right\} \|x\|_N \end{aligned}$$

Posons $u = \frac{t-s}{\epsilon^{\frac{1}{\alpha-1}}}$ et utilisant (K1), nous avons

$$\begin{aligned} \|I^\alpha x\|_{\varphi_2} &\leq \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \left\| \inf_{\epsilon>0} \left\{ \frac{1}{\epsilon^{\frac{1}{1-\alpha}}} \int_0^{t\epsilon^{\frac{1}{1-\alpha}}} M(u^{\alpha-1})du \leq 1 \right\} \right\|_{\varphi_2} \|x\|_N \\ &\leq \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \|k\|_{\varphi_2} \|x\|_N . \end{aligned}$$

Alors en utilisant la proposition 3.6 et [[9],lemme 16.3] on a $I^\alpha : L_N(\mathbb{I}) \to L_{\varphi_2}(\mathbb{I})$ est continu.

Remarque 3.4 *En utilisant le Lemme 3.4 et l'hypothèse (C3), alors pour tout sous-ensemble mesurable arbitraire T de $\mathbb{I}$ et $x \in E_\varphi(\mathbb{I})$, on a :*

$$\|A(x)\chi_T\|_{\varphi_2} \leq \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \|k \cdot \chi_T\|_{\varphi_2} \cdot (\|b\|_N + \|R(|x(\cdot)|)\|_N).$$

Ensuite, en utilisant les hypothèses (C4) , il existe $\omega, \varphi, u_0 > 0$ telle que :

$$\|R(|x(\cdot)|)\|_N) \leq \frac{1}{\omega}\left(1+\int_0^d N(\omega R(|x(t)|))dt\right) \leq \frac{1}{\omega}\left(1+N(\omega R(u_0))+\gamma\int_0^d \varphi(|x(t)|)dt\right).$$

Théorème 3.3 *Soient les hypothéses(G1)(G2)(C1)(C4)et (K1) vérifiées*

$$\|g\|_{\varphi} + \frac{2k_1 \cdot b_0}{\Gamma(\alpha)} \|k\|_{\varphi_2} \Big(\|b\|_N + R(1) \Big) < 1,$$

alors il existe une solution $x \in E_{\varphi}(1)$ de (4)qui est p.p. non-décroissante sur $I = [0, a] \subset \mathbb{I}$

Démonstration.
Étape I. D'abord, le Lemme 3.4 montre que l'opérateur $I^{\alpha} : L_N(\mathbb{I}) \to L_{\varphi_2}(\mathbb{I})$ est continu et que, d'après (C2), l'opérateur F_f est une application continue de la boule unité $B_1(E_{\varphi}(\mathbb{I}))$ dans $Ł_N(\mathbb{I})$. Par conséquent, l'opérateur $A = I^{\alpha}F_f : B_1(E_{\varphi}(\mathbb{I})) \to E_{\varphi_2}(\mathbb{I})$ est continu. Par les hypothèses (G2) , l'opérateur $U : B_1(E_{\varphi}(\mathbb{I})) \to E_{\varphi}(\mathbb{I})$ est aussi continu. Enfin,d'après (C1), on peut en déduire que l'opérateur $B : B_1(E_{\varphi}(\mathbb{I})) \to E_{\varphi}(\mathbb{I})$ est continu.
Étape II. Nous allons construire la boule $B_1(E_{\varphi}(I)) = \Big\{x \in L_{\varphi}(I) : \|x\|_{\varphi} \leq 1\Big\}$.
Soit $x \in B_1(E_{\varphi}(I))$, et en rappelant le Lemme 3.4, on a :

$$\begin{aligned}
\|Bx\|_{\varphi} &\leq \|g\|_{\varphi} + \|Ux\|_{\varphi} \\
&\leq \|g\|_{\varphi} + \|G(x)\cdot A(x)\|_{\varphi} \\
&\leq \|g\|_{\varphi} + k_1 \|G(x)\|_{\varphi_1} \cdot \|A(x)\|_{\varphi_2} \\
&\leq \|g\|_{\varphi} + k_1 \cdot b_0 \cdot \|x\|_{\varphi} \cdot \|I^{\alpha}F_f(x)\|_{\varphi_2} \\
&\leq \|g\|_{\varphi} + k_1 b_0 \|x\|_{\varphi} \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \|k\|_{\varphi_2} \|F_f(x)\|_N \\
&\leq \|g\|_{\varphi} + \frac{2k_1 b_0}{\Gamma(\alpha)} \|x\|_{\varphi} \|k\|_{\varphi_2} \Big(\|b\|_N + \|R(|x(\cdot)|)\|_N \Big) \\
&\leq \|g\|_{\varphi} + \frac{2k_1 b_0}{\Gamma(\alpha)} \|k\|_{\varphi_2} \Big(\|b\|_N + R(1) \Big) \leq 1
\end{aligned}$$

chaque fois que $\|x\|_{\varphi} \leq 1$ Alors $B : B_1(E_{\varphi}(I)) \to E_{\varphi}(I)$ est continue,oú $I = [0, a] \subset \mathbb{I}$
Étape III. Soit $Q_1 \subset B_1(E_{\varphi}(I))$ constitué de toutes les fonctions qui sont a.e. non décroissantes sur I.Cet ensemble est un ensemble non vide ,convexe ,borné et fermé dans $L_{\varphi}(I)$voir [11].De plus l'ensemble Q_1 est compact en mesure en raison du Lemme 3.2
Étape IV. Maintenant, nous allons montrer que B préserve la monotonie des fonctions. Soit $x \in Q1$, alors x est a.e. non décroissant sur I et par conséquent $A(x)$ est a.e. non décroissant sur I grâce à l'hypothèse (C2) et à la proposition 3.7. Par (G2), l'opérateur $U = G(x)A(x)$ est a.e. non décroissant sur I. Enfin, l'hypothèse (C1) donne que $B : Q1 \to Q1$ est continue.
Étape V. Nous allons prouver que B est une contraction concernant la mesure de non-

compactité. Supposons que $X \subset Q1$ est un ensemble non vide et soit $\epsilon > 0$ arbitraire. Alors, pour $x \in X$et pour un ensemble $D \subset I$, $measD \leq \epsilon$, et l'hypothèse (G2) implique

$$\|G(x) \cdot \chi_D\|_{\varphi_1} \leq \|G(x \cdot \chi_D)\|_{\varphi_1} \leq b_0 \|x \cdot \chi_D\|_{\varphi'}$$

puis nous avons

$$\begin{aligned}
\|B(x) \cdot \chi_D\|_{\varphi} &\leq \|g \cdot \chi_D\|_{\varphi} + \|U(x) \cdot \chi_D\|_{\varphi} \\
&\leq \|g \cdot \chi_D\|_{\varphi} + \|G(x) \cdot A(x) \cdot \chi_D\|_{\varphi} \\
&\leq \|g \cdot \chi_D\|_{\varphi} + k_1 \cdot \|G(x) \cdot \chi_D\|_{\varphi_1} \cdot \|A(x) \cdot \chi_D\|_{\varphi_2} \\
&\leq \|g \cdot \chi_D\|_{\varphi} + k_1 \cdot \|G(x \cdot \chi_D)\|_{\varphi_1} \cdot \|A(x) \cdot\|_{\varphi_2} \\
&\leq \|g \cdot \chi_D\|_{\varphi} + \frac{2k_1 \cdot b_0}{\Gamma(\alpha)} \|x \cdot \chi_D\|_{\varphi} \|k\|_{\varphi_2} \|F_f(x)\|_N \\
&\leq \|g \cdot \chi_D\|_{\varphi} + \frac{2k_1 \cdot b_0}{\Gamma(\alpha)} \|x \cdot \chi_D\|_{\varphi} \|k\|_{\varphi_2} \Big(\|b\|_N + R(1) \Big).
\end{aligned}$$

Par conséquent, en tenant compte du fait que $g \in E_{\varphi}$, nous avons

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left\{ \sup_{mesD \leq \epsilon} \left[\sup_{x \in X} \left\{ \|g \cdot \chi_D\|_{\varphi} \right\} \right] \right\} = 0$$

Ainsi, d'après la définition de $c(x)$, nous obtenons

$$c(B(X)) \leq \frac{2k_1 \cdot b_0}{\Gamma(\alpha)} \|k\|_{\varphi_2} \Big(\|b\|_N + R(1) \Big) \cdot c(X)$$

. Puisque $X \subset Q_1$ est un sous-ensemble borné, non vide et compact en mesure de E_{φ}, nous pouvons appliquer le lemme 3.3 et avoir

$$\beta_H(B(X)) \leq \frac{2k_1 \cdot b_0}{\Gamma(\alpha)} \|k\|_{\varphi_2} \Big(\|b\|_N + R(1) \Big) \cdot \beta_H(X)$$

. Puisque $\frac{2k_1 \cdot b_0}{\Gamma(\alpha)} \|k\|_{\varphi_2} \Big(\|b\|_N + R(1) \Big) < 1$, alors par le théorème 3.2, nous avons terminé.

Exemple 3.2 *Choisissons les N-fonctions $M(u) = N(u) = u^2$ et $\varphi_2(u) = \exp|u| - |u| - 1$. Il s'agit de montrer que l'opérateur $I^\alpha : L_N(I) \to L_{\varphi_2}(I)$ est continu et que le Lemme 3.4 est vérifié. En effet : pour $t \in [0, d]$ et tout $\alpha \in (0, 1)$, on a :*

$$k(t) = \int_0^t M\Big(s^{\alpha-1}\Big) ds = \frac{t^{2\alpha-1}}{2\alpha - 1}$$

Cela implique que la Proposition 3.6 est vérifiée. De plus :

$$\int_0^d \varphi_2\Big(k(t)\Big)ds = \int_0^d \Big(e^{\frac{t^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}} - \frac{t^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} - 1\Big)dt$$

ce qui est fini. Alors, pour $x \in L_N(I)$*, on a que* $I^\alpha : L_N(I) \to L_{\varphi_2}(I)$ *est continu. Pour plus de détails et pour différents exemples de* N*-fonctions* M*,*N *et* φ_2 *satisfaisant le Lemme 3.4, voir [21, Théorème 15.4]*

CONCLUSION

Ce travail s'inscrit dans un cadre d'étude des équations différentielles fractionnaires dans des cadres fonctionnels plus généraux, en particulier les espaces d'Orlicz. En combinant des outils analytiques puissants tels que le calcul fractionnaire, la mesure de non-compacité et les théorèmes du point fixe, ce mémoire vise à établir des résultats sur l'existence de solutions.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A.A.KILBAS et J.J.TRUJILLO. « Diferential equations of fractional order, methods, results and problems ». In : *App.Anal.81* (2002), p. 435-493.

[2] A.A.KILBAS, H.H.Sriva STAVA et J.J.TRUJILLO. « Theory and Applications of Fractional Dierential Equations ». In : *Elsevier Science B.V.Amsterdam* (2006).

[3] A.BELOUADAH. « Cauchy's problem and measure of non-compactness ». Mém. de mast. Université Mohamed Boudiaf de M'sila, 2023.

[4] A.DAOUI. « Sur de nouvelles classes de fonctions presque périodiques ». Thèse de doct.

[5] B.GAGUI. « Sur les équations intégrales dans les espaces d'Orlicz ». Thèse de doct. 2015.

[6] F.BOULAHIA. « Cours sur Espaces d'Orlicz ». In : *Université Abderrahmane Mira de Bejaia* (2023).

[7] H.MEDJEKAL. « Existence et Unicité de la Solution d'une équation Différentielle Fractionnaire de Temps infini dans un Espace de Banach ». Thèse de doct. Université de Annaba, 2015.

[8] J.BANAS et K.GOEBEL. « Measures of Noncompactness in Banach Spaces ». In : *Lect. Notes in Math., 60, M. Dekker, New York - Basel* (1980).

[9] M.A.KRSNOSEL'SKII et YU.RUTITSKII. « Covex Funtions and Orlicz Spaces ». In : *Groningen* (1961).

[10] M.CICHON et H.A.H.SALEM. « On the solutions of Caputo-Hadamard Pettis-type fractional differential equations ». In : *RACSAM* (2019), p. 1-23.

[11] M.CICHON et M.METWALI. « On solutions of quadratic integral equations in Orlicz spaces ». In : *Mediterr.J.Math.12* (2015), p. 901-920.

[12] M.M.A.METWALI. « On Some Properties of Riemann-Liouville Fractional Operator in Orlicz Spaces and Applications to Quadratic Integral Equations ». In : *University of Nis,Serbia* (2022).

[13] M.METWALI et K.CICHON. « On solutions of some delay Volterra integral problems on a half-line ». In : *Nonlinear Analysis : Modelling and Control 26(4)* (2021), p. 661-677.

[14] M.MEZAACHE. « L'existence d'une classe d'équations différentielles d'ordre fractionnaire en utilisant la mesure de non compacité. APPLICATION :L'opérateur de Hilfer ». Mém. de mast. Université Mohamed Boudiaf de M'sila, 2024.

[15] M.NADIR. « Cours sur les équations intégrales ». In : *Université Mohamed Boudiaf de M'sila* (2016).

[16] N.ERZAKOVA. « Compactness in measure and measure of noncompactness ». In : *Siberian Math. J* (1997), p. 926-928.

[17] N.HANA. « Mesure de non compacité et applications sur les équations intégrales ». Mém. de mast. Université Mohamed Boudiaf de M'sila, 2017.

[18] S.BENACERBEY. « Continuité des opérateurs linéaires dans les espaces d'Orlicz ». Mém. de mast. Université Mohamed Boudiaf de M'sila, 2022.

[19] S.GUELMINE. « Mesure de non compacité appliquée aux équations différentielles ». Mém. de mast. 2022.

# Résumé

Ce mémoire traite de l'étude de l'existence de solutions des équations différentielles d'ordre fractionnaire de type Riemann–Liouville dans les espaces d'Orlicz, en se basant sur la théorie du point fixe et la mesure de non-compacité de Kuratowski.

Mots clés : les équations différentielles fractionnaires, Riemann–Liouville, les espaces d'Orlicz, la théorie du point fixe, la mesure de non-compacité de Kuratowski.

ملخص

تعالج هذه المذكرة دراسة وجود حلول للمعادلات التفاضلية ذات الرتب الكسرية من نوع ريمان-ليوفيل في فضاءات أورلتز، وذلك بالاعتماد على نظرية النقطة الثابتة وقياس كيراتوسكي لعدم التراص.

الكلمات المفتاحية: المعادلات التفاضلية الكسرية، ريمان-ليوفيل، فضاءات أورلتز، نظرية النقطة الثابتة، قياس كيراتوسكي لعدم التراص.

Abstract

This dissertation deals with the existence of solutions to fractional-order differential equations of Riemann-Liouville type in Orlicz spaces, based on fixed point theory and Kuratowsli's measure of noncomactness.

Keywords: fractional differential equations, Riemann–Liouville, Orlicz spaces, fixed point theory, Kuratowski's measure of non-compactness.