Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire on s'intéresse à l'étude d'un problème aux limites avec des conditions aux limites mixtes Dirichlet-Neumann, pour un problème fortement elliptique. Notre objectif dans ce travail est sous certaines conditions sur les données et sur les coefficients de l'opérateur elliptique et via le théorème de Lax-Milgram, de démontrer l'existence et l'unicité d'une solution faible en se basant sur la méthode variationnelle.

Le travail se décompose de trois chapitres comme suit :

Dans le premier chapitre on donne quelques rappels sur l'analyse fonctionnelle, les espaces métriques et les espaces normés ainsi que leurs propriétés les plus importantes dans la suite de ce travail. Ce chapitre se termine par donner quelques notions sur la topologie faible $\sigma(E, E')$ et la topologie faible $* \ \sigma(E', E)$.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des espaces de Sobolev dont on commence par donner un rappel sur quelques notions préliminaires, puis on présente un rappel sur les espaces de Lebesgue et leurs propriétés et on termine par la formule de Green, l'inégalité de Poincaré et le théorème de trace.

Dans le dernier chapitre, on s'intéresse à l'étude d'un problème aux limites pour un opérateur fortement elliptique. Sous certaines conditions sur les données et après avoir donné la formulation variationnelle du problème considéré, en sa basant sur le théorème de Lax-Milgram on démontre l'existence et l'unicité d'une solution faible. Ce chapitre se termine par décrire le problème initial sous forme d'un problème d'optimisation avec contraintes.

Chapitre 1

Quelques rappels sur les espaces fonctionnels

Résumé. Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques rappels sur l'analyse fonctionnelle, notamment les espaces métriques et les espaces normés, ainsi que leurs propriétés qui seront utilisées dans la suite de ce mémoire.

Contenu :

Nous commençons par donner quelques notions sur la topologie des espaces métriques.

1.1 Rappels sur les espaces topologiques

Définition 1.1.1 *On appelle* ***structure topologique*** *sur un ensemble X une structure constitue par la donnée d'un ensemble τ de parties de X possédant les propriétés suivants :*

1. $\emptyset$, $X \in \tau$.
2. $\forall O_i$ $(i \in I)$ *dans* $\tau, \bigcup\limits_{i \in I} O_i \in \tau$.
3. $\forall O_i$ $(i = 1, ..., N) \in \tau$, $\cap_{i=1}^{N} O_i \in \tau$.

Les ensembles de τ sont appelés ***ensembles ouverts*** *de la structure topologique définie par τ sur X.*

Définition 1.1.2 *On appelle* ***espace topologique*** *un ensemble muni d'une structure topologique.*

Définition 1.1.3 *Dans un espace topologique X, on appelle* ***voisinage*** *d'un partie A de X tout ensemble qui contient ensemble ouvert contenant A. Les voisinages d'une partie $\{x\}$ réduite à un seul point s'appellent aussi voisinages de point x.*

Définition 1.1.4 *Dans un espace topologique X, on appelle* ***ensembles fermés*** *les complémentaires des ensembles ouverts de X.*

Définition 1.1.5 *Dans un espace topologique X, on dit qu'un point x est intérieur à une partie A de X lorsque A est un voisinage de x, l'ensemble des points intérieurs à A s'appelle l'intérieur de A et on note $\mathring{A}$.*

- *L'intérieur $\mathring{A}$ d'une partie A de X est le plus grand ouvert contenu dans X.*
- *Une partie A de X est ouvert ssi $\mathring{A} = A$.*

Définition 1.1.6 *Dans un espace topologique X, on dit que x est* ***adhérent*** *à un ensemble A lorsque tout voisinage de x rencontre A, Pour une partie A de X, on appelle* ***adhérent de*** *A et on noté $\bar{A}$ l'ensemble de tous les points adhérent à A.*

Définition 1.1.7 *Dans un espace topologique X, on appelle **frontière** d'une partie A de X et note $F_r(A) = \bar{A} - \mathring{A} = \bar{A} \cap \overline{C_X^A}$.*

Définition 1.1.8 *On dit qu'une partie A d'un espace topologique X est **dense** dans X si $\bar{A} = X$.*

Définition 1.1.9 *Un espace topologique E est dit **séparé** si étant donnés deux points distincts x et y de E, il existe un voisinage O_x de x et un voisinage O_y de y tels que $O_x \cap O_y = \emptyset$ c-à-d :*

$$\forall x, y \in E : (x \neq y) \text{ il existe deux ouverts } O_x \text{ et } O_y \text{ tqs : } x \in O_x,\ y \in O_y \text{ et } O_x \cap O_y = \emptyset.$$

Proposition 1.1.1 *Soient E un espace topologique et A une partie de E.*

1. *Un point x de E est **adhérent** à A si et seulement si tout voisinage de x rencontre A.*
2. *Supposons que A soit infinie. On dit que $x \in E$ est **un point d'accumulation** de A si tout voisinage de x contient une infinité de points de A (ce qui implique en particulier $x \in \bar{A}$).*

Définition 1.1.10 *Un espace topologique E est dit **séparable** s'il contient un sous-ensemble dénombrable et dense dans E.*

1.2 Espaces topologiques

1.2.1 Espaces métriques

Définition 1.2.1 *On appelle une **distance** toute application $d_x : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant: pour tout $x, y, z \in X$:*

1. $d_x(x; y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $d_x(x; y) = d_x(y; x)$.
3. $d_x(x; y) \leq d_x(x; z) + d_x(z; y)$.

- On dit que le couple (X, d_x) est **un espace métrique** òu X un ensemble et d_x une distance.

Exemple 1.2.1 *La fonction d définie par $d(x, y) = |x - y|$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est une distance sur $\mathbb{R}$. C'est la distance usuelle sur $\mathbb{R}$.*

Définition 1.2.2 *(Les boules) Soit (X, d_x) un espace métrique; soient $a \in X$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$:*

1. ***La boule ouverte** de centre a et de rayon r est :*

$$B(a, r) = \{x \in X \ tq \ d(a, x) < r\}.$$

2. ***La boule fermée** de centre a et de rayon r est :*

$$B(a, r) = \{x \in X \ tq \ d(a, x) \leq r\}.$$

3. ***La sphère** de centre a et de rayon r est :*

$$S(a, r) = \{x \in X \ tq \ d(a, x) = r\}.$$

Définition 1.2.3 *Soit (X, d_x) un espace métrique et $a \in X$*

1. *Un sous-ensemble V de X est appelé **voisinage** de a s'il contient touts les points voisins de a : $\exists p \succ 0$ tq $d(a, x) < p \Rightarrow x \in V$, on note $V \in V_x$.*
2. *Un sous-ensemble V de X est appelé **ouvert** de X s'il est voisinage de tout ses éléments.*
3. *Un sous-ensemble V de X est appelé **fermé** de X, si $X \backslash F$ est un ouvert.*

- *V est un ouvert si pour tout $x \in V$, il existe une boule $B(x, r)$ avec $r > 0$ tq $x \in B(x, r) \subset V$.*

Théorème 1.2.1 *Tout espace métrique est un espace séparé.*

Preuve. Soit E un espace métrique et soient x et y deux points distincts de E. Alors, si on pose :

$$\delta = d(x,y) > 0,\ V_x = B(x, \frac{\delta}{2}) \text{ et } V_y = B(y, \frac{\delta}{2}).$$

alors V_x et V_y sont disjoints, car si $z \in U \cap V$, on aurait :

$$\delta = d\left(x,y\right) \leq d(x,z) + d(y,z) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

ce qu'est impossible. ■

La continuité dans les espaces métrique

Définition 1.2.4 *Une fonction f définie sur une partie A d'un espace métrique (X_1, d_1) à valeurs dans un espace métrique (X_2, d_2) est* ***continue*** *en $a \in A$: $(A \subseteq X_1)$ si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in X_1 \cap A : d_1\left(a,x\right) < \delta \Longrightarrow d_2\left(f\left(a\right), f\left(x\right)\right) < \epsilon.$$

Définition 1.2.5 *On dit qu'une application $f : X_1 \longrightarrow X_2$ entre deux espace métrique (X_1, d_1) et (X_2, d_2) est* ***uniformément continue*** *si l'on a :*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x,y \in X_1 : d_1\left(x,y\right) < \delta \Longrightarrow d_2\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right) < \epsilon.$$

Définition 1.2.6 *Soit K un réel positif, une application entre deux espaces métriques $(X_1.d_1)$ et $(X_2.d_2)$ est dite* ***lipschitzienne de rapport*** *K si*

$$\forall x,y \in X_1,\ d_2\left(f\left(x\right), f\left(x\right)\right) \leq K d_1\left(x,y\right).$$

Exemple 1.2.2 *Dans $\mathbb{R}^+$ muni de la distance associée a la valeur absolue, la fonction $x \longmapsto 2x+3$ est lipschitzienne de rapport 2, la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sans être lipschitzienne, et la fonction $x \longmapsto x^2$ est continue sans être ni uniformément continue ni lipschitzienne.*

- f est lipshitzienne $\Rightarrow f$ est unif-continue $\Rightarrow f$ est continue.

Définition 1.2.7 *Soient (X_1, d_1) et (X_2, d_2) deux espaces métriques, on dit que $f : X_1 \longrightarrow X_2$ est une* ***isométrie*** *si f est bijective et conserve la distance :*

$$\forall x,y \in X_1 :\ d_2\left(f\left(x\right), f\left(x\right)\right) = d_1\left(x;y\right).$$

Définition 1.2.8 *Une suite (x_n) de l'espace métrique (X,d) est dite* ***convergente*** *vers $l \in X$ si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 \Longrightarrow d(x_n, l) < \epsilon.$$

Soit (X,d) un espace métrique, si (x_n) une suite dans X, le point $x \in X$ est dit ***valeur d'adhérenc****e de la suite (x_n) s'il existe une sous-suite (x_n) tq: $x_{n_k} \longrightarrow x$.*

- *si $x_n \longmapsto x$, alors x la seule valeur d'adhérence de la suite (x_n).*

Définition 1.2.9 *On dit qu'une application f de l'espace métrique (X_1, d_1) dans (X_2, d_2) est une* ***contraction*** *si elle est K-lipshitzienne pour un rapport K strictement inférieur à 1.*

Définition 1.2.10 *Soit (X,d) un espace métrique ,on dit que une suite (x_n) d'éléments de X est une* ***suite de Cauchy*** *si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geq n_0 \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

Proposition 1.2.1 *Dans un espace métrique (X,d)*

1. toute suite convergente est une suite de Cauchy.
2. toute suite de Cauchy est une suite bornée.
3. toute suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence l converge vers cette valeur l.

Définition 1.2.11 *Un espace métrique (X,d) est dit* ***complet*** *si toute suite de Cauchy de X converge dans X.*

Proposition 1.2.2 *Soit (X,d) un espace métrique et $F \subset X$*

- *Si le sous espace métrique (F,d) est complet, alors F est un fermé de X.*
- *Si X un espace complet et si F est fermé dans X, alors F est complet.*

Preuve. Soit F une partie complet de l'espace métrique (X, d). Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente d'éléments de F alors c'est une suite de Cauchy dans X. Comme F est complet, la limite de cette suite est dans F. En conséquence F est fermé.

Soit F une partie fermée d'un espace métrique complet (X, d) et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de F. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite de Cauchy de X donc converge dans X. comme F est fermé, la limite de cette suite est dans F. ■

Définition 1.2.12 (***Picard***)***:*** *Soit (X, d) un espace métrique complet.*

Si l'application $f : X \longrightarrow X$ est une ***application contractante****, alors elle admet un unique point fixe $x \in X : f(x) = x$.*

Théorème 1.2.2 *Si (X, d) un espace métrique, $\exists \left(\tilde{X}, \tilde{d}\right)$ un espace métrique complet dont (X, d) et un s-espace dense, cet espace est unique à isométrie on s'appelle le complété de (X, d).*

Définition 1.2.13 *Soit X un ensemble quelconque et soit A une partie de X, un* ***recouvrement*** *de A est une famille $(B_i)_{i\in I}$ de parties de X vérifiant: $A \subset \cup_{i\in I} B_i$.*

Définition 1.2.14 *Soit (X, d) un espace métrique, on dit que (X, d) est* ***précompact*** *(ou bien totalement borné) si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de X par des parties de X dont le diamètre est inferieure à ϵ.*

Définition 1.2.15 *Un espace métrique (X, d) sera dit* ***compact*** *s'il est précompact et complet.*

Remarque 1.2.1 *1) Un espace métrique (X, d) est séparable.*

2) Soit (X, d) un espace ***complet,*** *alors $A \subset X$: A est compact $\Longleftrightarrow$ A est bornée et fermé.*

Définition 1.2.16 *Un espace métrique (X, d) et dit* ***localement compact*** *si pour tout $x \in X$ il existe ou moins un voisinage V_x de x que est compact.*

Définition 1.2.17 *Soit (E, d), on dit que (E, d) est un espace* ***connexe*** *si et seulement si les parties de E à la fois ouvertes et fermés sont l'ensemble vide $\emptyset$ et E.*

1.2.2 Espaces Normés

Définition 1.2.18 *Soit E–e-v sur $\Bbbk\,(\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. Une application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est dite* ***norme*** *sur E s'elle vérifie les conditions suivantes:*

1. $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$.

1. $\forall \lambda \in \Bbbk, \forall x \in E : N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$.

2. $\forall x, y \in E : N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

Définition 1.2.19 *Le couple (E, N) est appelé un* ***espace vectoriel normé*** *noté par (e-v-n).*

Remarque 1.2.2 *Si N vérifie les propriétés 2) et 3) seulement alors N est dite semi-norme sur E.*

Définition 1.2.20 *Soit (E, N) un espace normé, on définit l'application:*

$$\begin{array}{l} d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x,y) \longrightarrow d(x,y) = N(x-y) \end{array}.$$

Alors d est une distance sur E s'appelle la distance canonique associée à la norme N et elle satisfait les deux propriétés suivantes:

1. $\forall x, y, z \in E : d(x+z, y+z) = d(x,y)$ *(invariante par translation).*

2. $\forall x, y, \in E,\ \forall \lambda \in K : d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, d(x,y)$ *(distance homogène).*

Théorème 1.2.3 *Soit (E, N) un espace vectoriel normé alors:*

$$\forall x, y \in E : \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \Longleftrightarrow |\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|.$$

Preuve. Soit $x, y \in E$ on a:
$\Rightarrow)$

$$\|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\| \quad (1)$$
$$\|y\| = \|y-x+x\| \leq \|x-y\| + \|x\| \quad (2)$$

de (1) on a : $\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$ et de (2) on a: $-\|x-y\| \leq \|x\| - \|y\|$.

alors $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

$\Leftarrow$) $\|x\| = \|x + y - y\| \geq \|x + y\| - \|y\| \Longrightarrow \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. ■

Remarque 1.2.3 *1. Dans la suite on note par $\|.\|_E$, ou simplement $\|.\|$ la norme sur E.*

2. Donc $(E, \|.\|)$ est un espace normé et par suite un espace métrique.

Définition 1.2.21 *Soit $(E, \|.\|)$ un e-v-n et $O \subseteq E$,$F \subseteq E$*

■ *On dit que O est un ouvert pour la distance canonique si pour tout $x \in O$, $\exists \rho_x > 0$ tq $B(x, \rho_x) \subseteq O$ et par suite $B(x, \rho_x)$ est ouvert.*

■ *F est dit fermé si et seulement si F^c est un ouvert.*

Théorème 1.2.4 *Soit $(E, \|.\|)$ un e-v-n, l'ensemble τ de toute les parties ouvertes de E c-à-d: l'ensemble $\tau = \{O \subset E : O \text{ est ouvert de } E\} \subseteq P(E)$ constitue une topologie sur E s'appelle **la topologie associée à la norme** $\|.\|$.*

Remarque 1.2.4 *Sur le même e-v nous pouvons définir plusieurs normes.*

Définition 1.2.22 *Soint $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ deux norme sur le même e-v -E. On dit que $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalente si*

$$\forall x \in E,\ \exists m,\ M > 0 :\ m \|.\|_1 \leq \|.\|_2 \leq M \|.\|_1 .$$

Lemme 1.2.1 *La topologie associée à deux normes équivalentes est la même.*

Exemple 1.2.3 *Dans $M_n(\mathbb{R})$, les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes.*

Définition 1.2.23 *Soit $(E, \|.\|)$ un e-v-n, on dit que E est un **compact** si pour chaque recouvrement ouvert de E on peut extraire un recouvrement fini.*

Définition 1.2.24 *Soit $(E, \|.\|)$ un e-v-n et $A \subseteq E$. A est **relativement compact** si $\bar{A}$ est compact.*

Lemme 1.2.2 *Soit $(E, \|.\|)$ un e-v-n de dimension finie, alors les compacts dans E sont les fermés bornés.*

Théorème 1.2.5 *Soit $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ deux e-v-n et $f : (E, \|.\|_E) \longrightarrow (F, \|.\|_F)$ une application continue Alors:*

Si A est compact dans E, alors $f(A)$ est compact dans F.

Remarque 1.2.5 *Si $f : (E, \|.\|) \longrightarrow (\mathbb{R}, \|.\|)$ est continue et E est un compact, Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

1. *f est uniformément continue.*
2. *f est borné.*
3. *$\exists x_1, x_2 \in E : \min_E f(x) \leq f(x) \leq \max_E f(x), \forall x \in E$.*

Lemme 1.2.3 *Soit $(E, \|.\|)$ un e-v-n de dimension finie alors, E est localement compact.*

Lemme 1.2.4 *Soit $(E, \|.\|)$ un e-v-n alors, (E est localement compact $\Leftrightarrow \bar{B}(0,1)$ est compact).*

1.2.3 Espace de Banach

Soit $(E, \|.\|)$ un e-v-n.

Définition 1.2.25 *Une suite $(x_n) \in E$ est dite **convergente** (fortement) dans $(E, \|.\|)$ s'il existe $x \in E$ tq:*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n(\xi) \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n(\xi) \Longrightarrow \|x_n - x\| < \epsilon.$$

Définition 1.2.26 *Une suite $(x_n)_n \in E$ est dite **suite de Cauchy** dans $(E, \|.\|)$ si:*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n(\xi) \in \mathbb{N},\ \forall n \geq m \geq n(\xi) \Longrightarrow \|x_n - x_m\| < \epsilon.$$

Remarque 1.2.6 *Soit $(E, \|.\|)$ un e-v-n, $(x_n)_n \in E$.*

1. *$(x_n) \in E$ converge vers x dans $E \Longleftrightarrow U_n = \|x_n - x\| \longrightarrow 0$.*

2. *$(x_n) \in E$ est une suite de Cauchy ssi* $\lim_{\substack{n \longmapsto +\infty \\ m \longmapsto \infty}} \|x_n - x_m\| = 0.$

Lemme 1.2.5 *Soit $(E, \|.\|)$ un e-v-n alors toute suite cv dans $(E, \|.\|)$ est une suite de Cauchy.*

Preuve. Soient $(x_n)_n$ une suite convergente vers $x \in E$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$: $\forall m, n \geq N$:

$$\|x_n - x_m\| \leq \|x_n - x\| + \|x_m - x\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

alors $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy. ■

Définition 1.2.27 *Un espace de* ***Banach*** *est un e-v-n complet.*

Théorème 1.2.6 *Tout espace de dimension fini est un espace de Banach.*

- *Dans un e-v-n de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.*

1.2.4 Les Applications Linéaires Continues

Soient $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F)$ deux e-v-n sur $\mathbb{k}$

Définition 1.2.28 *On dit que $f : E \longrightarrow F$* ***une application linéaire*** *s'elle vérifie les deux conditions:*

1. *$\forall \lambda \in K, \forall x \in E : f(\lambda x) = |\lambda| f(x)$.*
2. *$\forall x, y \in E : f(x + y) = f(x) + f(y)$.*

   On note par $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Notation 1.2.1 *On note par $l(E, F)$ l'ensemble* ***des applications linéaires continues*** *de E dans F, on a: $l(E, F) \subseteq L(E, F)$.*

Théorème 1.2.7 *Soient $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F)$ deux e-v-n sur $\mathbb{k}$ et soit $f \in L(E, F)$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

1. *il existe $M > 0$ tq: $\|f(x)\|_F \leq M \ \|x\|_E, \forall x \in E$.*

2. $f \in l(E, F)$.

3. f *continue sur* $\bar{B}_E(0,1)$.

4. f *est bornée sur* $\bar{B}_E(0,1)$.

5. f *est bornée sur* $S_E(0,1)$.

Remarque 1.2.7 *Si* $f \in l(E, F)$ *Alors:* $\sup \|f(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F$ *et* $\inf_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F$ *sont toujours existes.*

Lemme 1.2.6 *Soient* $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F)$ *deux e-v-n sur* $\Bbbk$

- *l'espace* $l(E, F)$ *est un espace vectoriel sur* $\Bbbk$.
- *on définit sur* $l(E, F)$ *l'application*

$$\begin{aligned} N \quad &: \quad l(E, F) \longrightarrow \mathbb{R}(+) \\ f \quad &\longmapsto \quad N(f) = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F \end{aligned}$$

Alors, N *est une norme sur* $l(E, F)$ *noté* $\|.\|_{l(E;F)}$ *et* $\left(l(E, F), \|.\|_{\|.\|_{l(E,F)}}\right)$ *est un e-v-n sur* $\Bbbk$.

Lemme 1.2.7 *Soit* $f \in l(E, F)$ *alors:*

$$\sup \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F \; = \inf\{k > 0 : \; \|f(x)\|_F \leq k \|x\|_E, \; \forall x \in E\}.$$

Théorème 1.2.8 *Soient* $f \in l(E, F)$, $g \in l(F, G)$ *alors:*

1. $g \circ f \in l(E, G)$.

2. $\|g \circ f\|_{l(E,G)} \leq \|f\|_{l(E,F)} \cdot \|g\|_{l(F,G)}$.

3. $\forall h \in l(E, E) : \|h \circ \cdots \circ h\| \leq \|h\|^n_{l(E,E)}$.

Théorème 1.2.9 *Soient* $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F)$ *deux e-v-n, si* F *est un Banach. Alors* $\left(l(E, F), \|.\|_{l(E,F)}\right)$ *est un Banach.*

Preuve: voir [6].

1.2.5 Théorèmes de l'applications ouvertes et de graphe fermé

Définition 1.2.29 *Soit* $f : (E, \|.\|_E) \longrightarrow (F, \|.\|_F)$ *une application*

- f *est dit ouvert si l'image d'un ouvert de* E *est un ouvert de* E.
- f *est dit fermé ssi pour tout* B *fermé dans* $(E, \|.\|_E) \Longrightarrow f(B)$ *est fermé dans* $(F, \|.\|_F)$.

Théorème 1.2.10 *Soient* $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F)$ *deux espace de Banach et* $f \in l(E, F)$. *Si* f *est surjective,* f *est une application ouverte, c'est à dire:*

$$\exists c > 0 : B(0_F, c) \subseteq f(B_E(0, 1)).$$

Corollaire 1.2.1 *Soit* $f \in l(E, F)$ *où* E, F *sont deux espaces de Banach, si* f *est bijective alors* f *est isomorphisme de* E *vers* F *c'est à dire:* f *est bijective, continue et* f^{-1} *est continue.*

Théorème 1.2.11 *(du graphe fermé) Soit* $f \in L(E, F)$ *où* E, F *deux espaces de Banach alors:* f *est continue si et seulement si* f *est fermée.*

1.2.6 Dualité dans les espace normés

Définition 1.2.30 *Soit* $(E, \|.\|)$ *est un e-v-n sur* $\Bbbk$

- *Dans* $\Bbbk$*-e-v* E *l'ensemble des formes linéaires est dit le dual algébrique de* E *et on note* E^* $(E^* = L(E, \Bbbk))$.
- *Sur e-v-n* E *l'ensemble des formes linéaires continues sur* E *est dit le dual topologique de* E *et l'on note* E' $(E' = l(E, \Bbbk))$.
- *On munit* E' *par la norme des applications linéaires continues:*

$$\forall f \in E' : \|f\|_{E'} = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|.$$

Remarque 1.2.8 *Pour tout l'espace v-n-E sont dual* E' *est toujours un espace de Banach.*

Définition 1.2.31 *Soit E e-v-n défini sur l'espace $E' \times E$ l'application $\langle .,. \rangle$:*

$$\begin{array}{rcl} \langle .,. \rangle & : & E' \times E \longrightarrow \Bbbk \\ (f,x) & \longmapsto & \langle f,x \rangle = f(x) \end{array}$$

l'application $\langle .,. \rangle$ est une forme bilinéaire sur $E' \times E$ et continue sur $E' \times E$ est appelée ***le crochet de dualité.***

Définition 1.2.32 *Soit E espace v-n. et E' son dual. On dit que le* ***bidual*** *de E, le dual de E' $(E'' = l(E, \Bbbk), \Bbbk)$.*

- *Toujours E'' est un espace de Banach*

Proposition 1.2.3 *Soit E espace vectoriel norme, alors l'application: $I : E \longrightarrow E''$ est linéaire continue de E dans E'', avec $\|I(x)\|_{E''} = \|x\|_E$, $\forall x \in E$.*

Donc I est l'injection isométrique, on note $E \hookrightarrow E''$.

Définition 1.2.33 *Soit E espace vectoriel normé, on dit que l'espace E est* ***réflexif*** *si l'application I est surjective, i.e. $I(E) = E''$.*

1.3 La topologie faible $\sigma(E, E')$

1.3.1 La topologie faible $\sigma(E, E')$

Soit E un espace de Banach et soit $f \in E'$. On désigne par $\varphi_f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi_f(x) = (f, x)$. Lorsque f décrit E' on obtient une famille $(\varphi_f)_{f \in E'}$, d'applications de E dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.3.1 ***La topologie faible*** *$\sigma(E, E')$ sur E est la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les applications $(\varphi_f)_{f \in E'}$.*

Proposition 1.3.1 *La topologie faible $\sigma(E, E')$ est séparée.*

Preuve. Soient $x_1, x_2 \in E$ avec $x_1 \neq x_2$. On cherche à construire O_1 et O_2 ouverts pour la topologie faible $\sigma(E, E')$ tels que $x_1 \in O_1$, $x_2 \in O_2$, $O_1 \cap O_2 = \varnothing$

D'après le théorème de Hahn-Banach (deuxième forme géométrique) il existe un hyperplan fermé séparant $\{x_1\}$ et $\{x_2\}$ au sens strict. Donc il existe $f \in E'$et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que :

$$(f, x_1) < \alpha < (f, x_2) .$$

on pose

$$\begin{aligned} O_1 &= \{x \in E : (f, x) < \alpha\} = \varphi_f^{-1}\left(]-\infty, \alpha[\right) . \\ O_2 &= \{x \in E : (f, x) > \alpha\} = \varphi_f^{-1}\left(]\alpha, +\infty[\right) . \end{aligned}$$

O_1 et O_2 sont des ouverts pour $\sigma(E, E')$ qui vérifient $x_1 \in O_1$, $x_2 \in O_2$,$O_1 \cap O_2 = \varnothing$. ■

Notation 1.3.1 *Etant donnée une suite (x_n) de E, on désigne par $x_n \longmapsto x$ la convergence de x_n vers x pour la topologie faible $\sigma(E, E')$. Afin d'éviter les confusions on précisera souvent ‹‹ $x_n \longmapsto x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$››. En cas d'ambiguité on insistera en disant «$x_n \longmapsto x$ fortement ›› pour signifier que $\|x_n - x\| \to 0$.*

Proposition 1.3.2 *Soit (x_n) une suite de E. On a:*

1. $[x_n \longmapsto x$ *pour* $\sigma(E, E')] \Longleftrightarrow [(f, x_n) \to (f, x), \forall f \in E']$.
2. *Si $x_n \longmapsto x$ fortement, alors $x_n \longmapsto x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$.*
3. *Si $x_n \longmapsto x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$, alors $||x_n||$ est bornée et $||x|| < \liminf ||x_n||$.*
4. *Si $x_n \longmapsto x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$ et si $f_n \longrightarrow f$ fortement dans E' (i.e. $||f_n \longrightarrow f||_{E'} \longrightarrow 0$), alors $(f, x_n) \to (f, x)$.*

Proposition 1.3.3 *Lorsque E est de dimension finie, la topologie faible $\sigma(E, E')$ et la topologie usuelle coïncident. En particulier une suite (x_n) converge faiblement si et seulement si elle converge fortement.*

1.3.2 La topologie faible $*$ $\sigma(E', E)$

Soit E un espace de Banach, soit E' son dual (muni de la norme duale $\|f\| = \sup\limits_{x \in E, \|x\| \leq 1} |(f, x)|$) et soit E'' son bidual, i.e. le dual de E', muni de la norme

$$\|\xi\| = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} |(\xi, f)| .$$

On a une injection canonique $j : E \longrightarrow E'$ définie comme suit: soit $x \in E$ fixé, 1'app1ication $f \longrightarrow (f, x)$ de E' dans $\mathbb{R}$ constitue une forme linéaire continue sur E' i.e. un élément de E'' noté Jx. On a donc.

$$(Jx, f)_{E'',E'} = (f, x)_{E',E}, \ \forall f \in E', \ \forall x \in E.$$

Il est clair que J est linéaire et que J est une isométrie i.e. $\|Jx\|_{E''} = \|x\|_E$ pour tout $x \in E$, en effet :

$$\|Jx\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |(Jx, f)| = \sup_{\|f\| \leq 1} |(f, x)| = \|x\|.$$

Définition 1.3.2 ***La Topologie faible*** $*$ *désignée aussi par* $\sigma(E', E)$ *est la topologie la moins fine sur* E' *rendant continues toutes les applications* $(\varphi_x)_{x \in E}$.

Comme $E \subset E''$*, il est clair que la topologie* $\sigma(E', E)$ *est moins fine que la topologie* $\sigma(E', E'')$*. Autrement dit la topologie* $\sigma(E', E)$ *possède moins d'ouverts (resp. fermés) que la topologie* $\sigma(E', E'')$ *[qui à son tour possède moins d'ouverts (resp. fermés) que la topologie forte].*

Proposition 1.3.4 *La topologie faible* $* \ \sigma(E', E)$ *est séparée.*

Notation 1.3.2 *Etant donnée une suite* (f_n) *de* E'*, on désigne par* $f_n \overset{*}{\longmapsto} f$ *la convergence de* f_n *vers* f *pour la topologie faible* $* \ \sigma(E', E)$*. Afin d'éviter les confusions on précisera souvent ‹‹* $f_n \overset{*}{\longmapsto} f$ *pour* $\sigma(E', E)$*››, ‹‹* $f_n - f$ *pour* $\sigma(E', E'')$*›› et «* $f_n \longmapsto f$ *fortement ››.*

Proposition 1.3.5 *Soit* (x_n) *une suite de* E*. On a les propriétés suivant:*

1. $\left[f_n \overset{*}{\longmapsto} f \text{ pour } \sigma(E', E)\right] \Longleftrightarrow [(f_n, x) \to (f, x), \ \forall x \in E].$
2. *Si* $f_n \longmapsto f$ *fortement, alors* $f_n \longmapsto f$ *pour* $\sigma(E', E'')$.

   Si $f_n \longrightarrow f$ *pour* $\sigma(E', E'')$*, alors* $f_n \overset{*}{\longrightarrow} f$ *pour* $\sigma(E', E)$.
3. *Si* $f_n \overset{*}{\longmapsto} f$ *pour* $\sigma(E', E)$*, alors* $\|f_n\|$ *est bornée et* $||f|| \leq \liminf \|f_n\|$.
4. *Si* $f_n \overset{*}{\longmapsto} f$ *pour* $\sigma(E', E)$ *et si* $x_* \longrightarrow x$ *fortement dans* E*, alors* $(f_n, x_n) \to (f, x)$.

Chapitre 2

Les espaces de Sobolev

Résumé. Dans ce chapitre, on présente un rappel sur les espaces de Sobolev. Plus précisément nous commençons par donner quelques rappels sur les espaces de Lebesgue et les inégalités les plus importantes. Puis nous présentons quelques notions sur les espaces Sobolev, ainsi que leurs propriétés.

Continu:

2.1 Quelques notions préliminaires

Définition 2.1.1 *Une* ***forme bilinéaire*** $\varphi(.,.)$ *sur un espace vectoriel* H *est une application de* $H \times H$ *dans* $\mathbb{R}$ *telle que:* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in H$:

- $\varphi(\alpha x_1 + x_{2,} y) = \alpha\varphi(x_1, y) + \beta\varphi(x_{2,} y)$.

- $\varphi(x_, \alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha\varphi(x, y_1) + \beta\varphi(x_, y_2)$.

- *Elle est dite symétrique si pour tout* $x, y \in H : \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.

Définition 2.1.2 *Un* ***produit scalaire*** *sur un vectoriel réel* H *est une forme bilinéaire symétrique et positive, ou la notera* $(.,.)_H$.

Définition 2.1.3 *Une* ***forme sesquilinéaire*** *sur un e.v complexe* H *est une application de* $H \times H$ *dans* $\mathbb{C}$ *tq:* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\forall x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in H$:

- $\varphi(\alpha x_1 + x_{2,} y) = \alpha\varphi(x_1, y) + \beta\varphi(x_{2,} y)$.

- $\varphi(x_, \alpha y_1 + \beta y_2) = \bar{\alpha}\varphi(x, y_1) + \bar{\beta}\varphi(x_, y_2)$.

Elle est dite hermitienne si, pour tout $x, y \in H : \varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$.

Définition 2.1.4 *Un produit scalaire sur un vectoriel complexe* H *est une forme sesquilinéaire hermitienne et définie positive, on la notera* $(.,.)_H$.

On associe à $(.,.)_H$ *la norme définie sur* H *par:* $\|x\|_H = \sqrt{(x, x)_H}$.

Définition 2.1.5 *Un espace vectoriel réel ou complexe* H *est un espace* ***préhilbertien*** *qui est complet pour la norme associe au produite scalaire, c'est donc en particulier un espace de Banach pour la norme dérivée du produite scalaire.*

Définition 2.1.6 *Un espace de* ***Hilbert*** *est un espace préhilbertien qui est complet pour la norme associée au produit scalaire. C'est donc en particulier un espace de Banach pour la norme dérivée du produit scalaire.*

Théorème 2.1.1 *Soit F un s-e-v fermé d'un espace de Hilbert H, alors pour tout $x \in H$, $\exists a! \in F$ tq:$\|x-a\|_H = d(x,F) = \inf_{b\in F}\|x-b\|_H$, ce point a noté $P_F(x)$ est appelé* ***projection*** *de x sur F, on a ainsi défini une fonction $P_F : H \longrightarrow H$ vérifiant $\operatorname{Im}(P_F) = F$ et caractérisée par: $(x - P_F(x), b) = 0, \forall b \in F$ i.e: $(P_F x, b) = (x, b), \forall b \in F$.*

En particulier $x - P_F(x) \in F^{\perp}$. P_F est appelé ***projection orthogonale*** *de H sur F, De plus on a:*

$$\text{pour tout } x, y \in H : \|P_F(x) - P_F(y)\|_H \leq \|x-y\|_H .$$

où $F^{\perp} = \{x \in H : (x,b)_H = 0, \ \forall b \in F\}$.

2.2 Espaces de Lebesgue

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et μ une mesure sur $\mathbb{R}^n$.

2.2.1 Espace $l^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$.

Définition 2.2.1 *(on rappelle que: Soit (X, M) un espace mesurable, on appelle mesure positive sur X, $\mu : M \longrightarrow [0,+\infty] = \bar{\mathbb{R}}^n$ qui vérifie:*

1. *$\mu(\varnothing) = 0$.*
2. *Pour tout suite $(A_n) \subset M$ deux a deux disjoint $(A_n \cap A_m = \varnothing \quad \forall m \neq n)$ alors: $\mu\left(\cup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n)$.*

Définition 2.2.2 *Soit $1 \leq p < +\infty$. On définit l'espace $l^p(\Omega)$ comme suit:*

$$l^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable p.p: } \int_\Omega |f|^p < +\infty \right\}.$$

On munit cet espace par la norme :

$$\forall f \in l^p(\Omega) : \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Définition 2.2.3 *Soit f et g deux fonctions mesurables sur Ω, on dit que f et g sont* ***égaux p.p*** *et l'on note $f = g$ p.p, si l'ensemble:*

$$\{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\} \text{ est négligeable, i.e:}\mu\{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\} = 0.$$

Théorème 2.2.1 *Soit f et g deux fonctions égal p.p avec $f \in l^1(\Omega)$ et $g \in l^1(\Omega)$, alors:*

$$f = g \Rightarrow \int_\Omega |f|\, d\mu = \int_\Omega |g|\, d\mu.$$

Définition 2.2.4 *On définit la relation "$\sim$":*

$\forall f, g$ deux fonctions mesurables alors: $f \sim g$ ssi $f = g$ p.p ou bien $f - g = 0$ p.p.

Alors la relation "$\sim$" est une ***relation d'équivalence*** *et par suite, $\forall f \in l^p(\Omega)$:*

$$\bar{f} = \{g \in l^p(\Omega) \ \text{tq: } g \sim f\}.$$

Définition 2.2.5 $\forall\ p \in [1, +\infty[$ *ou définit l'espace $L^p(\Omega)$ par:*

$$L^p(\Omega) = \frac{l^p(\Omega)}{\sim} = \left\{\bar{f} \ \text{tq } f \in l^p(\Omega)\right\} = \left\{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable p.p } : \int_\Omega |f|^p < +\infty\right\}.$$

Remarque 2.2.1 $\forall f \in l^p(\Omega) : \bar{f} \subseteq l^p(\Omega)$.

Remarque 2.2.2 *Comme la relation "$\sim$" est compatible avec addition et la multiplication par un scalaire:*

- ♦ $\bar{f} + \bar{g} = \left\{f + g : f \in \bar{f}, g \in \bar{g}\right\}$;
- ♦ $\overline{f + g} = \left\{f + g : f \in \bar{f}, g \in \bar{g}\right\}$;
- ♦ $\overline{\lambda f} = \lambda \bar{f} = \left\{\lambda f, f \in \bar{f}\right\}$.

Alors l'espace $L^p(\Omega)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Lemme 2.2.1 *Pour tout $p \geq 1$ l'espace $L^p(\Omega)$ muni par:$\left\|\bar{f}\right\|_p = \|f\|_p$ ou $f \in \bar{f} \subseteq l^p(\Omega)$ est un e-v-n.*

2.2.2 Espace $l^\infty(\Omega)$

Définition 2.2.6 *Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable, on dit que f est* ***essentiellement bornée*** *sur Ω, s'il existe: $M \geq 0$ telle que*

$$|f(x)| \leq M \text{ p.p, c'est à dire: } \mu\{x \in \Omega : |f(x)| > M\} = 0.$$

Définition 2.2.7 *On définit l'espace $l^{\infty}(\Omega)$ par:*

$$l^{\infty}(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable et essentiellement bornée sur } \Omega\}.$$

On munit l'espace $l^{\infty}(\Omega)$ par la norme

$$\|f\|_{\infty} = \inf_c \{c > 0 : \ |f| \leq c\}.$$

Définition 2.2.8 *On définit $L^{\infty}(\Omega)$ par:*

$$L^{\infty}(\Omega) = \frac{l^{\infty}(\Omega)}{\sim} = \left\{F = \bar{f} \ \text{ tq } f \in l^{\infty}(\Omega)\right\}.$$

$$\forall F \in L^{\infty}(\Omega) \Rightarrow \exists f \in l^{\infty}(\Omega) \ \text{ tq } F = \bar{f} : \|F\|_{\infty} = \|f\|_{\infty}.$$

Théorème 2.2.2 *L'espace $L^{\infty}(\Omega)$ est un espace vectoriel normé.*

Remarque 2.2.3 *pour $1 \leq p \leq +\infty$, $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach.*

2.2.3 Quelques propriétés des espaces L_p

Théorème 2.2.3 ***(Inégalité de Hölder)***

1) Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $p \in [1, +\infty]$ et p^* le conjugué de p $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1\right)$, alors pour tout $f \in L^p(\Omega), g \in L^{p^*}(\Omega)$ on a

$$f.g \in L^1(\Omega) \ \text{ et } \ \|f.g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_{p^*}.$$

2) Soient p, q, t sont des réels positifs tq: $\frac{1}{t} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ alors pour tout $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ on a

$$f.g \in L^t(\Omega) \ \text{ et } \ \|f.g\|_t \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Preuve. on a :

$\frac{1}{p} \leq \frac{1}{t} \Rightarrow 1 \leq \frac{p}{t} = \bar{p}$ et $\frac{1}{q} \leq \frac{1}{t} \Rightarrow 1 \leq \frac{q}{t} = \bar{q}$, avec $\frac{1}{\bar{p}} + \frac{1}{\bar{q}} = \frac{1}{p/t} + \frac{1}{q/t} = t\left(\frac{1}{t}\right) = 1$.

Alors d'après 1) on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |f.g|^t \, dx &= \int_{\Omega} |f|^t |g|^t \, dx \\
&\leq \left\||f|^t\right\|_{\bar{p}} \cdot \left\||g|^t\right\|_{\bar{q}} \\
&\leq \left(\int_{\Omega} \left(|f|^t\right)^{\frac{p}{t}} dx\right)^{\frac{t}{p}} \cdot \left(\int_{\Omega} \left(|g|^t\right)^{\frac{q}{t}} dx\right)^{\frac{t}{q}} \\
&\leq \left(\int_{\Omega} |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_{\Omega} |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

ce qui implique que $\|f.g\|_t \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$.

Finalement $f.g \in L^t(\Omega)$ et $\|f.g\|_t \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$. ■

Remarque 2.2.4 *Pour* $p = +\infty \Longrightarrow p^* = 1$ *et* $(|fg| = |f|\,|g| \leq \|f\|_\infty |g| \Rightarrow \int_\Omega |fg|\, d\mu \leq \|f\|_\infty \int_\Omega |g|\, d\mu) \Rightarrow fg \in L^1(\Omega)$ *et* $\|f.g\|_1 \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$.

Théorème 2.2.4 ***(Inégalité de Yong)***

$$|ab| \leq \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{p^*}|b|^{p^*}, \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Remarque 2.2.5 *Pour* $p = 2$ $(p^* = 2)$ *inégalité de hölder dans ce cas est* ***l'inégalité de Cauchy-Shwartz:***

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2 .$$

Théorème 2.2.5 ***(Inégalité de Minkowski)***

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p .$$

Théorème 2.2.6 *Soit* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *un ouvert borné* $(\mu(\Omega) < +\infty)$ *alors* :$\forall q \geq p > 0$, *on a:*

$$L^q(\Omega) \subseteq L^p(\Omega) \;\; et \;\; \|f\|_p \leq (\mu(\Omega))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q .$$

Théorème 2.2.7 *Soit* $(f_n)_n$ *une suite dans* $L^p(\Omega)$: $(0 < p \leq +\infty)$, *si elle existe* $f \in L^p(\Omega)$ *telle que*

$$\|f_n - f\|_p \longrightarrow 0.$$

alors il existe une sous suite $(f_{n_k})_k$ *telle que*

1) $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ *p.p sur* Ω;

2) $\exists h \in L^p(\Omega)$ *tq:* $f_{n_k}(x) \leq h(x)$ *p.p sur* Ω.

Remarque 2.2.6 *Si* Ω *n'est pas borné, on n'a pas en général* $L^q(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$ *pour* $q \geq p$.

2.2.4 Espace C_0, $C(K)$

Définition 2.2.9 *On définit l'espace C_0 par:*

$$C_0 = \{x = (x_n)_n \subset \mathbb{R} : \lim x_n = 0\}.$$

On munit C_0 par:

$$\forall x \in C_0 \, \|x\|_{C_0} = \max_{n \in \mathbb{N}} |x_n| = \|x\|_\infty.$$

Lemme 2.2.2 $(C_0, \|.\|_\infty)$ *est un espace vectoriel normé.*

Définition 2.2.10 *Soit K un compact on définit $C(K)$ par:*

$$C(K) = \{f : K \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue}\}.$$

On munit $C(K)$ par la norme

$$\forall f \in C(K) : \|f\|_\infty = \max_K |f(x)|.$$

Lemme 2.2.3 $(C(K), \|.\|_\infty)$ *est un espace de Banach.*

2.2.5 Dualité

Théorème 2.2.8 ***(représentation de rieze)****. Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $p \geq 1$ alors pour $\varphi \in (L^p(\Omega))'$ il existe $f \in L^{p'}$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ telle que:*

$$\varphi(h) = \int_\Omega fh = (f, h)_{L^p \times L^{p'}}, \ \forall h \in L^p(\Omega).$$

De plus

$$\|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'} = \|f\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Définition 2.2.11 *Pour tout $p \geq 1$ on a $(L^p(\Omega))' = L^{p'}(\Omega)$.*

2.3 Espace de Sobolev

2.3.1 Rappels sur les distributions

Définition 2.3.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit f une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$. On appelle* ***support*** *de f l'ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$ défini par:*

$$supp(f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}} \subset \mathbb{R}^n.$$

On note $D(\Omega)$ l'espace des fonctions $C^\infty(\Omega)$ à support compact dans Ω :

$$D(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) : supp(f) \text{ borné}, supp(f) \subset \Omega\}.$$

Proposition 2.3.1 *$D(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, i.e:*

$$\forall f \in L^2(\Omega), \forall \epsilon > 0, \exists \varphi \in D(\Omega) : \|f - \varphi\|_{L^2(\Omega)} < \epsilon.$$

Donc $f \in L^2(\Omega)$ étant donnée, il existe une suite $(\varphi_n) \in D(\Omega)$, telle que $\varphi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ au sens de la convergence dans $L^2(\Omega)$, i.e. $\|f - \varphi\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0$.

Définition 2.3.2 *Une fonction $\varphi \in D(\Omega)$ est* ***dérivable*** *à tout ordre. Soit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on note $|\alpha| = \sum_{i=1,n} \alpha_i$, et:*

$$\partial^\alpha \varphi(x) \overset{déf}{=} \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}(x).$$

On munit $D(\Omega)$ de la convergence suivante (convergence très contraignante): la suite $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $D(\Omega)$ converge vers $\varphi \in D(\Omega)$, et on note $\varphi_m \longrightarrow \varphi$ dans $D(\Omega)$, si et seulement si:

1) les supports des φ_m restent dans un compact fixe:

$$\exists K \text{ compact } \subset \Omega \text{ t.q: } \forall \varphi_m \in D(\Omega) : supp(\varphi_m) \subset K.$$

2) Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ (i.e. pour chaque ordre) on a $\partial^\alpha \varphi_m \longrightarrow \partial^\alpha \varphi$ uniformément dans Ω, i.e :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \forall \epsilon > 0, \exists m > M : \|\partial^\alpha \varphi_m \longrightarrow \partial^\alpha \varphi\|_\infty < \epsilon.$$

On définit l'espace dual $D'(\Omega) = L(D(\Omega), \mathbb{R})$ de $D(\Omega)$, i.e. l'espace des formes linéaires continues (pour la notion de convergence ci-dessus) sur $D(\Omega)$. $D'(\Omega)$ est appelé ***espace des distributions*** *et ses éléments sont appelés distributions.*

Donc on a $T \in D'(\Omega)$ si $T : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie:

1. la linéarité*: pour tout* $r \in \mathbb{R}$ *et tous* $\varphi, \psi \in D(\Omega)$*:* $T(r\varphi + \psi) = rT(\varphi) + T(\psi)$ *(égalité dans* $\mathbb{R}$*);*

2. la continuité: *au sens de* $D(\Omega)$*:* $T(\varphi_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} T(\varphi)$ *dans* $\mathbb{R}$ *dès que* $\varphi_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \varphi$ *au sens ci-dessus de* $D(\Omega)$*.*

   Pour $T \in D'(\Omega)$ *(fonctionnelle linéaire continue), on utilise la notation du crochet de dualité:*

$$T(\varphi) \overset{noté}{=} (T, \varphi)_{D'(\Omega), D(\Omega)} = (T, \varphi).$$

Dérivation des distributions

Il est évident que si $\varphi \in D(\Omega)$ alors $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in D(\Omega)$, pour tout $i = 1; \ldots ; n$. Et donc, si T est une distribution, pour tout $\varphi \in D(\Omega)$. l'expression $\left(T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) \in D(\Omega)$ a un sens.

Définition 2.3.3 *Pour* $T \in D'(\Omega) = L(D(\Omega), \mathbb{R})$*, on définit les fonctionnelles, pour* $i = 1; \ldots ; n$*:*

$$S_i : \varphi \in D(\Omega) \longrightarrow S_i(\varphi) \overset{déf}{=} -\left(T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right).$$

Les S_i *sont appelées les dérivées premières de* T *au sens des distributions, et notées* $S_i = \frac{\partial T}{\partial x_i}$*.*

Donc, les dérivées premières de T *au sens des distributions sont définies par:*

$$\forall \varphi \in D(\Omega) : \left(\frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi\right) \overset{déf}{=} -\left(T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right), i = 1, ..., n.$$

Ou encore, pour tout $\varphi \in D(\Omega) : \frac{\partial T}{\partial x_i}(\varphi) \overset{déf}{=} -T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)$*.*

Proposition 2.3.2 *Si* $T \in D'(\Omega)$ *alors, pour tout* $i = 1; ...; n$*, les fonctionnelles* $S_i = \frac{\partial T}{\partial x_i}$ *sont des distributions:* $\frac{\partial T}{\partial x_i} \in D'(\Omega)$*.*

Définition 2.3.4 *De manière générale, pour* $T \in D'(\Omega)$ *et* $\alpha \in \mathbb{N}^n$*,* $\partial^\alpha T$ *est défini par:*

$$(\partial^\alpha T, \varphi) \overset{déf}{=} (-1)^{|\alpha|} (T, \partial^\alpha \varphi).$$

Et on vérifie immédiatement que $\partial^\alpha T \in D'(\Omega)$ *(définit une distribution) pour tout* $\alpha \in \mathbb{N}^n$*.*

Proposition 2.3.3 *Une distribution est infiniment dérivable au sens des distributions.*

2.3.2 L'espace de sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^n$.

Plus généralement, on peut définir des espaces $W^{m,p}(\Omega)$ pour un entier $m > 0$ et pour un réel $1 \leq p \leq +\infty$. Ces espaces sont construits sur l'espace de Banach $L^p(\Omega)$. La notion de dérivée faible s'étend à $L^p(\Omega)$. Nous pouvons donc donner la définition suivante:

Définition 2.3.5 *Pour tout entier $m \geq 0$, l'espaces de sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est défini par:*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \ \textit{tel que}, \forall \alpha \ \textit{avec} \ |\alpha| \leq m, \ \partial^\alpha u \in L^p(\Omega)\}.$$

où la dérivée partielle $\partial^\alpha u$ est à prendre au sens faible.

Muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^P}^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \textit{si } 1 \leq p < \infty.$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty} \quad \textit{si } p = \infty.$$

Proposition 2.3.4 $\left(W^{m,p}(\Omega), \|.\|_{W^{m,p}(\Omega)}\right)$ *est un espace de Banach réflexif et séparable, $\forall p$, $1 \leq p \leq +\infty$.*

Définition 2.3.6 *On désigne par $W_0^{m,p}(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$, l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$, au sens de la norme $\|.\|_{W^{m,p}(\Omega)}$.*

Proposition 2.3.5 *L'espace $D(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$.*

2.3.3 Espace $H^m(\Omega)$

Soit Ω un ouvert bornée de $\mathbb{R}^n$ à frontière $\partial\Omega = \Gamma$, pour $p = 2$, on remplace l'espace $W^{m,p}(\Omega)$, par l'espace $H^m(\Omega)$.

Définition 2.3.7 *Pour $m \in \mathbb{N}$, on pose:*

$$H^m(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) \ \textit{telles que} \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \ \textit{avec} \ |\alpha| \leq m, \partial^\alpha u \in L^2(\Omega)\right\}.$$

Théorème 2.3.1 *L'espace vectoriel $H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire*

$$(f,g)_{H^m(\Omega)} = \int_\Omega f(x)\, g(x)\, dx + \sum_{1\leq|\alpha|\leq m} \int_\Omega \partial^\alpha f(x)\, \partial^\alpha g(x)\, dx.$$

est un espace de Hilbert. Sa norme est notée $\|.\|_{H^m}$.

Preuve. Il suffit de vérifier que $H^m(\Omega)$ est complet pour la norme $\|u\|_{H^m}$. Soit donc (u_k) une suite de Cauchy pour cette norme.

Il en résulte que $D^\alpha u_k$ est, $\forall\alpha$ avec $|\alpha| \leq m$, est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$: Comme $L^2(\Omega)$ est complet, il en résulte que:

$$D^\alpha u_k \longrightarrow \Psi_\alpha \text{ dans } L^2(\Omega)\,, \forall\alpha,\ |\alpha| \leq m.$$

Posons $\Psi_0 = u$; comme $u_k \longrightarrow u$; dans $D'(\Omega)$ et la dérivation étant continue au sens de $D'(\Omega)$ on a:

$$D^\alpha u_k \longrightarrow D^\alpha u \text{ dans } D'(\Omega)\,.$$

Donc $\Psi_\alpha = D^\alpha u$, alors $u \in H^m(\Omega)$. ■

Remarque 2.3.1 *1) $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$;*

2) Le produit scalaire de $H^2(\Omega)$ s'écrit :

$$(f,g)_{H^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)\, g(x)\, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\frac{\partial g(x)}{\partial x_i} dx + \sum_{i,j} \int_\Omega \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_i \partial x_j} dx.$$

Théorème 2.3.2 *(Rellich): Si Ω est un ouvert borné à bord continu, alors*

$$H^m(\Omega) \underset{c}{\hookrightarrow} H^{m-1}(\Omega)\,, \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

En particulier

$$H^m(\Omega) \underset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)\,,\ \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

2.3.4 L'espace de sobolev $H^1(\Omega)$

Soit une fonction $u \in L^2(\Omega)$. En général u n'est pas dérivable et $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ n'a pas de sens (au sens des fonctions) et en particulier n'est pas dans $L^2(\Omega)$. Mais $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ a un sens au sens des distributions donné par définition par:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi\right) \overset{\text{déf}}{=} -\left(u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right), \text{ pour tout } \varphi \in D(\Omega).$$

Soit $T_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ la distribution ainsi définie. S'il existe une fonction $f_i \in L^2(\Omega)$ telle que $T_i = T_{f_i}$ alors T_i est une distribution régulière, et on note simplement $f_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$.

On définit alors l'espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ par:

$$\begin{aligned} H^1(\Omega) &= \left\{u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \text{ pour tout } i = 1; ...; n\right\} \\ &= \left\{u \in L^2(\Omega) : \ \overrightarrow{\text{grad}} u = \overrightarrow{\nabla} u \in L^2(\Omega)^n\right\}. \end{aligned}$$

On lui associe le produit scalaire :

$$\begin{aligned} (u, v)_{H^1(\Omega)} &= \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\, dx \\ &= \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx + \int_\Omega \left(\overrightarrow{\text{grad}} u(x), \overrightarrow{\text{grad}} v(x)\right)_{\mathbb{R}^n} d\Omega, \end{aligned}$$

où

$$\left(\overrightarrow{\text{grad}} u(x), \overrightarrow{\text{grad}} v(x)\right)_{\mathbb{R}^n} \overset{\text{noté}}{=} \overrightarrow{\text{grad}} u(x) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, v(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}.$$

Donc :

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \left(\overrightarrow{\text{grad}} u(x), \overrightarrow{\text{grad}} v(x)\right)_{L^2(\Omega)}.$$

où on a noté $\left(\overrightarrow{\text{grad}} u(x), \overrightarrow{\text{grad}} v(x)\right)_{L^2(\Omega)} \overset{\text{noté}}{=} \int_\Omega \overrightarrow{\text{grad}} u(x) \,.\, \overrightarrow{\text{grad}} v(x)\, d\Omega$.

La norme associée est notée :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{(u, u)_{H^1(\Omega)}} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

ou sous forme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\overrightarrow{\text{grad}} u\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lors qu'aucune confusion n'est possible, on note simplement :$\|u\|_{H^1} = \|u\|_{H^1(\Omega)}$.

2.3.5 L'espace de sobolev $H_0^1(\Omega)$

Théorème 2.3.3 *$D(\mathbb{R}^n)$ est dense sans $H^1(\mathbb{R}^n)$ pour la norme H^1, c'est à dire :*

Pour tout $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$, il existe $\phi_n \in D(\mathbb{R}^n)$ telle que $\lim_n \|f - \phi_n\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} = 0$.

- *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, $D(\Omega)$ n'est pas dense dans $H^1(\Omega)$.*

Définition 2.3.8 *On définit $H_0^1(\Omega)$ comme la fermeture de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ (pour la norme $H^1(\Omega)$). Autrement dit:*

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ f \in H^1(\Omega) \ \exists \phi_n \in D(\Omega) \ \ tq \ \phi_n \longrightarrow f \ \ dans \ H^1(\Omega) \right\}.$$

Remarque 2.3.2 - *$H_0^1(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n)$;*

- *Si $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ avec inclusion stricte;*

- *$D(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$ pour la norme $H^1(\Omega)$;*

- *$H_0^1(\Omega)$ est un fermé de $H^1(\Omega)$.*

Théorème 2.3.4 *$H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de $H^1(\Omega)$.*

2.3.6 Injection de Sobolev

On considère une fonction $u \in H^1(\Omega)$. Bien sûr, $u \in L^2(\Omega)$. On peut se demander si u n'est pas plus régulière que ceci, du fait que ∇u soit dans $L^2(\Omega)$. Le théorème suivant répond à cette question.

Théorème 2.3.5 *Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$, et soit m un entier. On a les injections continues suivantes:*

♦ *Si $d > 2m$, alors $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{2} - \frac{m}{d}$.*

♦ *Si $d = 2m$, alors $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [2, +\infty[$.*

♦ *Si $d < 2m$, alors $H^m(\Omega) \hookrightarrow C^0\left(\bar{\Omega}\right)$.*

2.4 Traces

Pour une fonction définie dans un ouvert Ω, on souhaite définir sa valeur au bord de Ω. Pour les fonctions $u \in L^2(\Omega)$, cette notion n'a pas de sens. Par contre, si u plus régulière, Alors on peut définir rigoureusement cette notion .

Proposition 2.4.1 *(La Trace) Soit Ω un ouvert borné et régulier. On peut définir une application linéaire et continue:*

$$\begin{aligned} \gamma \quad &: \quad H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega) \\ u \quad &\longmapsto \quad \gamma(\Omega) \end{aligned}$$

et qui prolonge l'application ***trace*** *pour les fonctions continues sur $\bar{\Omega}$: pour tout $u \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, $\gamma(u) = u|_{\partial\Omega}$.*

L'application trace est continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, ce qui signifie qu'il existe une constante C_Ω telle que:

$$\forall u \in H^1(\Omega), \ \ \|\gamma(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_\Omega \|u\|_{H^1(\Omega)} .$$

Remarque 2.4.1 *L'application trace n'est pas surjective sur $L^2(\partial\Omega)$, mais sur un espace plus petit, qui est $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Elle est en fait continue de $H^1(\Omega)$*

vers $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, si bien qu'il existe C_Ω tel que:

$$\forall u \in H^1(\Omega), \|\gamma(u)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq C_\Omega \|u\|_{H^1(\Omega)} .$$

Enfin, pour tout $u \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, on a $\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq \|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$.

L'espace $H_0^1(\Omega)$, défini comme la fermeture dans $H^1(\Omega)$ de $D(\Omega)$, s'identifie à l'espace des fonctions à trace nulle.

Proposition 2.4.2 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On a:*

$$H_0^1(\Omega) = \left\{u \in H^1(\Omega), \gamma(u) = 0\right\}.$$

Théorème 2.4.1 *Soit Ω un ouvert de classe C^1 alors il existe un opérateur linéaire continue, appelé opérateur trace et noté γ_0 de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ qui se coïncide avec l'opérateur de restriction usuelle pour les fonctions continues. Son noyau est ker $(\gamma_0) = H_0^1(\Omega)$.*

A la suite de ce théorème; on pose :

Définition 2.4.1 *Soit Ω un ouvert de classe C^m avec $m \in \mathbb{N}^*$ et γ_0 l'opérateur décrit dans le théorème précédent. On définit alors;*

$$H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma) := \gamma_0 \left(H^m(\Omega) \right).$$

Que l'on munit de la norme :

$$\|u\|_{H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \inf_{v \in \gamma_0^{-1}(\{u\})} \|v\|_{H^m(\Omega)}.$$

Définition 2.4.2 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Pour une fonction u à valeur vectorielle $u = (u_1, \ldots, u_n) \in L^2(\Omega)^n$, on note:*

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|_{L^2(\partial\Omega)}^2}.$$

Proposition 2.4.3 ***(Inégalité de Poincaré)*** *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe une constante C_Ω telle que:*

$$u \in H_0^1(\Omega), \ \|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\partial\Omega)}.$$

Preuve. Nous remarquons d'abord qu'il suffit de prouver la proposition pour f à valeurs réelles. De plus, en utilisant la densité de $D(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ on voit qu'il suffit de prouver l'inégalité pour $f \in D(\Omega)$.

Considérons un système de coordonnées tel que $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid -\frac{\delta}{2} < x_1 < \frac{\delta}{2}\}$ et prolongeons f par zéro en dehors de Ω.

Alors pour tout $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $x_1 \in \left(-\frac{\delta}{2}, 0\right)$ nous avons

$$f^2(x_1, x') = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(f^2(\zeta, x') \right) d\zeta = 2 \int_{-\frac{\delta}{2}}^{x_1} f(\zeta, x') \frac{\partial}{\partial x_1} (\zeta, x') \, d\zeta$$

ce qui implique (en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz) que

$$f^2(x_1, x') \leq \left(2 \int_{-\frac{\delta}{2}}^{0} f^2(\zeta, x') \, d\zeta \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\frac{\delta}{2}}^{0} \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} (\zeta, x') \right]^2 d\zeta \right)^{\frac{1}{2}}$$

Intégrant la relation ci-dessus par rapport à x_1, nous obtenons

$$\int_{-\frac{\delta}{2}}^{0} f^2(x_1, x')\, dx_1 \leq \delta \left(\int_{-\frac{\delta}{2}}^{0} f^2(x_1, x')\, dx_1 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\frac{\delta}{2}}^{0} \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x') \right]^2 dx_1 \right)^{\frac{1}{2}}$$

La relation ci-dessus implique que

$$\int_{-\frac{\delta}{2}}^{0} f^2(x_1, x')\, dx_1 \leq \delta^2 \int_{-\frac{\delta}{2}}^{0} \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x') \right]^2 dx_1$$

Intégrant par apport à x' nous obtenons

$$\int_{\left(-\frac{\delta}{2},0\right)\times\mathbb{R}^{n-1}} f^2(x)\, dx \leq \delta^2 \int_{\left(-\frac{\delta}{2},0\right)\times\mathbb{R}^{n-1}} \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \right]^2 dx \leq \delta^2 \int_{\left(-\frac{\delta}{2},0\right)\times\mathbb{R}^{n-1}} \left| (\nabla f)(x) \right|^2 dx.$$

En combinant l'inégalité ci-dessus avec l'estimation similaire pour $x_1 \in (0, \frac{\delta}{2})$ nous obtenons l'inégalité recherchée (Sans couper le domaine en deux parties nous aurions obtenu 2δ à la place de δ dans l'inégalité faisant l'objet de cette proposition). ■

Chapitre 3

Existence et unicité d'un problème aux limites pour un opérateur fortement.

Résumé. Dans ce chapitre, après avoir introduit la formulation variationnelle, sous certaines hypothèses sur les données, en se basant sur le théorème de Lax-Milgram nous allons démontrer l'existence et l'unicité d'une solution faible pour un problème aux limites mixtes (Dirichlet-Neumann) associé aux équations fortement elliptiques.

Continu :

3.1 Notations et position du problème:

Soit Ω un ouvert bornée de $\mathbb{R}^n$ et Γ sa frontière, on supposera qu'elle est assez régulière telle que $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ et $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$.

Le problème considéré ici, noté (P), consiste à chercher $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$Au = f \text{ dans } \Omega. \tag{P1}$$

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_1. \tag{P2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta_A} = g \text{ sur } \Gamma_2. \tag{P3}$$

oú g est une fonction donnée et

$$\frac{\partial u}{\partial \eta_A} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \eta_i.$$

u, f représente le vecteur de déplacement, la densité des forces extérieures, respectivement.

A est un opérateur défini par:

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right).$$

Le but de ce travail est de cherchée une fonction $u = u(x)$; $x \in \Omega$ a valeurs réelles solution du problème (P) sous certain hypothèse (H). Afin de bien poser le problème, et pour avoir les outils pour le résoudre, on a besoin d'introduire quelques définitions et quelques théorèmes que nous utiliserons ultérieurement.

Théorème 3.1.1 ***(Formule d'Ostrogradsky)*** *Soit Ω un ouvert borné de classe C^1 et Γ son bord. Soit F une fonction de $C^1(\bar{\Omega})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ (un champ de vecteurs). Alors :*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(F(X))\, dx = \int_{\Gamma} F(X) \cdot n(x)\, d\Gamma.$$

Remarque 3.1.1 *Dans cette formule ; $n(x)$ est le vecteur unitaire normal à Γ au point X, dirigé vers l'extérieur de Ω.*

Théorème 3.1.2 ***(Formule de Green)*** *Soit Ω un ouvert bornée de classe C^1. Alors pour toutes fonctions $u \in C^2(\bar{\Omega})$ et $v \in C^1(\bar{\Omega})$ on a :*

$$\int_{\Omega} \Delta u\,(x)\, v(x) dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta}\,(x)\, v\,(x)\, d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla u\,(x) \cdot \nabla v(x) dx.$$

où $\frac{\partial u}{\partial \eta}\,(x) := \nabla u\,(x) \cdot \eta(x)$ (dérivée normale de u).

Preuve. Il suffit d'appliquer la formule d'Ostrogradsky avec $F\,(x) := v(x)\nabla u\,(x)$ et de remarque que

$$\operatorname{div}\left(v(x)\nabla u\,(x)\right) = v(x)\Delta u\,(x) + \nabla u\,(x) \cdot \nabla v\,(x)\,.$$

■

On définie l'espace V par:

$$V = \left\{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ sur } \Gamma_1\right\}.$$

Théorème 3.1.3 *L'espace V est un espace de Hilbert pour la norme de $H^1(\Omega)$.*

3.1.1 hypothèses

On est maintenant en mesure de formulé de façon précise le problème (1.1). Pour cela on introduit les hypothèses (H), suivantes :

$$f \in L^2\,(\Omega)\,. \tag{H1}$$

$$g \in H^{-\frac{1}{2}}\,(\Omega)\,. \tag{H2}$$

$$a_{ij} \in C^{\infty}\left(\bar{\Omega}\right), a_{ij} = a_{ji}\,; \forall i, j = 1, ..., n. \tag{H3}$$

$$\alpha\text{-elliptique} : \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,(x)\, \xi_i \xi_j \geq \alpha\left(\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2\right)\ ,\alpha > 0,\ \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{H4}$$

3.2 Formulation variationnelle

Lemme 3.2.1 *Sous les hypothèses (H), le problème (P) est équivalent au problème variationnel suivant:*

$$(PV) : \begin{cases} \text{Trouver } u \in V : \\ a(u,v) = L(v), \forall v \in V, \end{cases}.$$

où :

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx; \\ L(v) &= \int_{\Omega} fvdx + \int_{\Gamma_2} gvd\Gamma; \end{aligned}$$

$$V = \left\{ u \in H^1(\Omega) : u = 0 \ sur \ \Gamma_1 \right\}.$$

Démonstration.

$(P) \Rightarrow (PV)$:

Soit u une solution de problème (P), On multiplie l'équation $(P.1)$ par un élément $v \in H^1(\Omega)$ et on intègre sur Ω on obtient:

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) vdx = \int_{\Omega} fvdx.$$

En utilisant la formule de Green on obtient:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Gamma} a_{ij}(x) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \eta_i v_i d\Gamma = \int_{\Omega} fvdx.$$

En utilisant le fait que la famille $\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ est une partition de Γ il en résulte

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Gamma_1} a_{ij}(x) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \eta_i v_i d\Gamma - \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Gamma_2} a_{ij}(x) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \eta_i v_i d\Gamma = \int_{\Omega} fvdx.$$

D'après $(P.3)$ et si on suppose $v = 0$ sur Γ_1 il vient:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int_{\Gamma_2} gvd\Gamma = \int_{\Omega} fvdx$$

Si on pose

$$V = \left\{ u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \right\};$$

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx; \\ L(v) &= \int_{\Omega} f v dx + \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Gamma_2} a_{ij}(x)\, g v d\Gamma. \end{aligned}$$

Alors u est une solution de (PV).

$(PV) \Rightarrow (P)$

Soit $u \in V$ une solution de (PV), on a :

$$a(u,v) = L(v), \forall v \in V,$$

ou encore

$$\sum_{i,,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_2} g v d\Gamma, \text{ pour tout } v \in V.$$

En utilisant la formule de Green on obtient

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) v dx + \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Gamma_2} a_{ij}(x) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \eta_i v_i d\Gamma = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_2} g v d\Gamma, \text{ pour tout } v \in V.$$

ou sous forme:

$$-\int_{\Omega} (Au)\, v dx + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\eta_A} v d\Gamma = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_2} g v d\Gamma, \text{ pour tout } v \in V.$$

Pour $v = \varphi \in D\left(\bar{\Omega}\right)$ il vient

$$-\int_{\Omega} (Au)\, \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx, \text{ pour tout } \varphi \in D\left(\bar{\Omega}\right).$$

Donc

$$-Au = f, \text{ pp dans } \Omega.$$

Reste à vérifier les conditions aux limites:

On a $v = 0$, car $v \in V$.

Soit $u \in V$ une solution de (P,V), on a :

$$-\int_{\Omega} (Au)\, v dx + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\eta_A} v d\Gamma = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_2} g v d\Gamma, \text{ pour tout } v \in V.$$

En utilisant la fait que $-Au = f$, pp dans Ω, il vient

$$\int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\eta_A} v d\Gamma = \int_{\Gamma_2} g v d\Gamma, \text{ pour tout } v \in V.$$

Ce qui implique que

$$\frac{\partial u}{\partial \eta_A} = g.$$

Alors u est un solution de (P). ■

3.3 Existence et Unicité

Dans ce paragraphe on va démontrer l'existence et l'unicité en utilisant le théorème de Lax-Milgram suivant:

Théorème 3.3.1 *(**Lax-Milgram**) Soit V un espace de Hilbert réel, $L(.)$ une forme linéaire continue sur V et $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur V. Alors la formulation variationnelle $(P.v)$ admet une unique solution. De plus cette solution dépend continûment de la forme linéaire L.*

$$\exists! u \in V : a(u, v) = L(v); \ \forall v \in V$$

Définition 3.3.1 *(**bilinéairté**) $a(u, v)$ est une forme **bilinéaire** sur $V : a(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ telle que pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in V$ on a:*

$$\begin{aligned} a(\alpha u_1 + \beta u_2, v) &= \alpha a(u_1, v) + \beta a(u_2, v); \\ a(u, \alpha v_1 + \beta v_2) &= = \alpha a(u, v_1) + \beta a(u, v_2). \end{aligned}$$

Définition 3.3.2 *(**continuité**) une forme bilinéaire $a(u, v)$ sur V est dite continue si et seulement si pour tout $u, v \in V$; il existe $c > 0$telle que*

$$|a(u, v)| \leq c \, \|u\|_V \, \|v\|_V \, .$$

Définition 3.3.3 *(**coercivité**) Soit V un espace de Hilbert et soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire sur V .On dit que $a(.,.)$ est **coercive** sur V s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que*

$$\forall u \in V, \ a(u, u) \geq \alpha \, \|u\|_V^2 \, .$$

Définition 3.3.4 *$a(u,v)$ est symétrique ssi :*

$$a\left(u,v\right)=a\left(v,u\right)\ \textit{ pour tout } v,u\in V.$$

Lemme 3.3.1 *Le problème (P) admet une unique solution $u\in V$.*

Démonstration. Montrons que le problème variationnel $a(u,v)=L(v)$ vérifie le théorème de Lax-Milgram. On a

$$\begin{array}{rcl} a(.,.) & : & V\times V\longrightarrow\mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & a(u,v)=\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}a_{ij}\left(x\right)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx \end{array}$$

$a)$ **Bilinéarité de** $a(.,.)$**:**

Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$; et soient $u_1,u_2,v_1,v_2\in V$ on a

$$\begin{aligned} a(\alpha u_1+\beta u_2,v) &= \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}a_{ij}\left(x\right)\frac{\partial(\alpha u_1+\beta u_2)}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx \\ &= \alpha\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}a_{ij}\left(x\right)\frac{\partial u_1}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx+\beta\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}a_{ij}\left(x\right)\frac{\partial u_2}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx \\ &= \alpha a(u_1,v)+\beta a(u_2,v). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(u,\alpha v_1+\beta v_2) &= \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}a_{ij}\left(x\right)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial(\alpha v_1+\beta v_2)}{\partial x_i}dx \\ &= \alpha\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}a_{ij}\left(x\right)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v_1}{\partial x_i}dx+\beta\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}a_{ij}\left(x\right)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v_2}{\partial x_i}dx \\ &= \alpha a(u,v_1)+\beta a(u,v_2). \end{aligned}$$

Alors $a(.,.)$ est une forme bilinéaire.

$b)$ **Continuité de** $a(.,.)$ **:**

$$|a(u,v)|=\left|\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}a_{ij}\left(x\right)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx\right|$$

$$\leq\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\left|a_{ij}\left(x\right)\right|\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|dx$$

$$\leq \max |a_{ij}(x)| \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right| \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| dx$$

$$\leq \|a_{ij}(x)\|_{\infty} \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right| \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| dx.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz:

$$|a(u,v)| \leq \|a_{ij}(x)\|_{\infty} \sum_{j=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Gamma)} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq \|a_{ij}(x)\|_{\infty} \|u\|_V \|v\|_V$$

$$\leq c \|u\|_V \|v\|_V .$$

Alors $a(.,.)$ est continue.

$c)$ **Coercivité de** $a(.,.)$:

Posant $\xi_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ on trouve :

$$a(u,u) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j dx.$$

D'après l'hypothèse $(H.4)$ on a :

$$a(u,u) \geq \alpha \int\limits_{\Omega} \left(\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2\right)$$

$$\geq \alpha \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left|\xi_i^2\right| dx = \alpha \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx$$

$$\geq \alpha |\nabla u|_2^2 .$$

Mais d'après l'inégalité de Poincaré on a

$$a(u,u) \geq C \|u\|_V^2 .$$

D'où la coercivité.

$d)$ **Linéarité de** L :

$$L(v) = \int_{\Omega} fv dx + \int\limits_{\Gamma_2} gv ds.$$

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,et soient $u, v \in V$, alors on a

$$\begin{aligned} L(\alpha u+\beta v) &= \int_{\Omega} f(\alpha u+\beta v)\, dx+\int_{\Gamma_2} g(\alpha u+\beta v)\, dx \\ &= \alpha \int_{\Omega} f u dx+\beta \int_{\Omega} f v dx+\alpha \int_{\Gamma_2} g u dx+\beta \int_{\Gamma_2} g v dx \\ &= \alpha L(u)+\beta L(v) . \end{aligned}$$

Alors $L(v)$ est linéaire .

$e)$**Continuité de** L :

Pour tout $v \in V$ on a

$$\begin{aligned} |L(v)| &= \left|\int_{\Omega} f v dx+\int_{\Gamma_2} g v dx\right| \\ &\leq \int_{\Omega}|f v|\, dx+\int_{\Gamma_2}|g v|\, dx . \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy Schwartz on a :

$$|L(v)| \leq\|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}+\|g\|_{L^2(\Gamma)}\|v\|_{L^2(\Gamma)} .$$

Comme $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ on a :

$$|L(v)| \leq c_1\|v\|_{L^2(\Omega)}+c_2\|v\|_{L^2(\Gamma)} .$$

En utilisant le fait que

$$\|v\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\|v\|_V, \forall v \in V,$$

il résulte que

$$|L(v)| \leq C\|v\|_V .$$

D'où la continuité de L.

Alors $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire continue et $v-$elliptique sur V et L est une forme linéaire continue, Alors d'après le théorème de Lax-Milgram le problème (P) a une unique solution $u \in V$ c-à-d:

$$\exists! u \in V: a(u, v)=L(v), \forall v \in V .$$

■

3.4 Formulation optimale

Dans ce paragraphe, nous démontrons que le fait que la forme $a(.,.)$ est symétrique nous permet d'avoir une autre formulation décrite par un problème d'optimisation avec contraintes.

Lemme 3.4.1 *Le problème variationnel (PV) est équivalent au problème de minimisation sous contraintes suivant:*

$$(PO) : \begin{cases} \min j(u) \\ u \in V, \end{cases} .$$

où

$$J(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - L(u).$$

Preuve. $(PV) \Rightarrow (PO)$

Soit u solution de (PV),

$$a(u,v) = L(v), \forall v \in V.$$

On doit montrer que

$$J(u) \leq J(v), \forall v \in V.$$

On a :

$$J(v) - J(u) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v) - \frac{1}{2}a(u,u) + L(u)$$

Comme $a(u,v) = L(v)$ alors

$$\begin{aligned} J(v) - J(u) = \frac{1}{2}a(v,v) - a(u,v) - \frac{1}{2}a(u,u) + a(u,u) &= \frac{1}{2}a(v,v) - a(u,v) + \frac{1}{2}a(u,u) \\ &= \frac{1}{2}a(u-v,u-v) \end{aligned}$$

Comme $a(u,v)$ est coercive il en résulte

$$J(v) - J(u) = \frac{1}{2}a(v-u,v-u) \geq \alpha \|v-u\|_V^2 \geq 0 \ \forall v \in V.$$

$(PO) \Rightarrow (PV)$

On suppose que u est une solution du problème (PO) et on montre que $\forall v \in V$:

$$a(u,v) = L(v), \forall v \in V.$$

Comme $u \in V$ est un minimum de f, alors

$$\nabla f(u) = 0.$$

ou encore

$$\nabla f(u) \cdot h = \lim_{t\to 0} \frac{f(u - th) - f(u)}{t} = 0, \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Par définition on a

$$\begin{aligned}
\nabla J(u) \cdot v &= \lim_{t\to 0} \frac{J(u - tv) - J(u)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{2}a(u - tv, u - tv) - L(u - tv) - \frac{1}{2}a(u,u) + L(u)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{2}a(u, u - tv) - \frac{1}{2}a(tv, u - tv) - L(u) + tL(v) - \frac{1}{2}a(u,u) + L(u)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{2}a(u,u) - \frac{1}{2}ta(u,v) - \frac{1}{2}ta(v,u) + \frac{1}{2}t^2 a(v,v) + tL(v) - \frac{1}{2}a(u,u)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{-ta(u,v) + \frac{1}{2}t^2 a(v,v) + tL(v)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} - a(u,v) + \frac{1}{2}ta(v,v) + L(v) = -a(u,v) + L(v)
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\nabla J(u) \cdot v = 0$, il vient

$$a(u,v) = L(v), \ v \in V.$$

ce qui achève la démonstration. ■

Conclusion 3.4.1 *Dans ce mémoire, nous avons démontré un résultat d'existence et d'unicité pour un problème aux limites mixtes, pour des équations elliptique. Les conditions aux limites considéré sont celles mixtes Dirichlet-Neumann. Sous certaines hypothèses sur les données et sur les coefficients de l'opérateur fortement elliptiqie, nous avons montré que le problème considéré est équivalent au problème variationnel. Sous les mêmes conditions en se basant sur le théorème de Lax-Milgram nous avons démontré que le problème admet une solution unique.*

Bibliographie

[1] B. Benabderrahmane, *Forrmulation variationnelle des EDP elliptique*, Cours de première année Master, option Analyse Fonctionnelle, Département de mathématiques, Faculté MI, Université M.B. de M'Sila, 2013-2014.

[2] Y. Boukhatem, B. Benabderrahmane et R. Abita, *Méthode de Faedo-Galerkin pour un problème aux limites non linéaires*, Anal. Univ. Oradea, fasc. Matematica, Tom XVI, 2009.

[3] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle –Théorie et Applications*, Masson, Paris (1987).

[4] P. Chapentier, *Licence de mathématiques pures, Topologie Générale*, Université Bordeaux I, Année universitaire, Polycopié 2000-2001.

[5] F. Demengel et G. Demengel, *Espaces fonctionnels, utilisation dans la résolution des équations aux dérivées partielles*, EDP sciences et CNRS Éditions, 2007.

[6] M. Dilmi, *Analyse fonctional*, Cours de première année Master, option Analyse Fonctionnelle, Département de mathématiques, Faculté MI, Université M.B. de M'Sila, 2013-2014.

[7] R. Heraiz, *Topologie des espace métriques*, Cours de troisième année Licence, Département de mathématiques, Faculté MI, Université M.B. de M'Sila, 2012-2013.

[8] G. Leborgne, *Approximations variationnelles de problèmes aux limites elliptiques et éléments finis*, Notes du cours d'Équations aux Dérivées Partielles de l'ISIMA, deuxième année, septembre 2003. http://isimath.fr.st.

[9] A. Munnier, *Espaces de Sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles*, Institut Elie Cartan, université Henri Poincaré, 2007-2008.

[10] F. Nier, D. Iftimie, *Introduction à la topologie*, Licence de Mathématiques Université de Rennes 1.

[11] S. Nicaise, *Analyse numérique et équations aux dérivées partielles*, Dunod, Paris, 2000.

[12] T.Soumia, *Technique de Faedo-Galerkin pour un problème hyperbolique semi linéaire associé à un opérateur fortement elliptique à coefficients vaiables*, Mémoire de Master soutenu le 18-06-2014, Département de mathématiques, Faculté MI, Université M.B. de M'Sila.

[13] M.Tucsnak, *Espace de sobolev et introduction aux équations aux dérivées paetielles*, Nancy University, CNRS/INRIA, université Henri Poincaré, May 7, 2012