UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Appliquées et fondamentales

Par

OUDINA IMANE

Sujet

Etude analytique et résolution numérique de l'équation de Burgers

Soutenu publiquement le :.......... **Devant le jury composé la :**

D. : Gacemi AbdelKader	Président
Prof. : Benhamidouche Nouredine	Rapporteur
D. : Merzougui AbdelKrim	Examinateur

Promotion : 2010/2011

Table des matières

Introduction **1**

1 L'équation de Burgers **3**

1.1 Définition du problème 3

1.2 Propriétés d'auto similarité 4

1.2.1 Définition d'une solution auto similaire 5

1.2.2 Auto similarité dans les EDP's 5

1.3 Equation de Burgers 9

1.3.1 Solution de type "auto similaire" de l'équation de Burgers 10

1.3.2 Recherche de la solution de type auto similaire générale "$u(x,t) = c(t)\,\varphi\left(\frac{x}{a(t)}\right)$" 17

2 Résolution numérique de l'équation de Burgers **23**

2.1 Résolution du système des équations non linéaires 24

2.1.1 La méthode de Newton pour des systèmes 24

2.2 Méthodes de différence finies pour des problèmes non linéaires 31

2.3 Résolution de l'équation de Burgers 33

2.3.1 Méthode numérique pour des équations ordinaires "équations de Burgers" 33

2.3.2 Résultats numériques 36

2.3.3 Comparaison entre les deux solutions d'auto similaire 42

Conclusion 45

Bibliographie 47

Introduction

Pour résoudre les EDP's non linéaires il y a de diverses techniques pour ramener l' EDP's à une EDO.Parmis elles, la technique d'auto similaire.

Les solutions de type " auto similaire " de la forme :

$$u(x,t) = t^{\alpha}\varphi\left(\frac{x}{t^{\beta}}\right)$$

permettent la transformation de l' EDP's à une EDO, la détermination de la solution revient donc à déterminer les deux paramétres α, β et le profil φ , ce type de solution a la particularité qu'elle est invariance sous l'action de dilatation.

On distingue trois cas pour la détermination des paramétres, selon que l'équation est linéaire ou non linéaire, et aussi, le nombre de termes de l'équation. (Des exemples nombreux peuvent être trouvés dans [2]).

Cas 1:L'un des paramètres est déterminé, alors que le deuxième reste indéterminé.

Cas 2:Les deux paramètres restent indéterminé et sont liés.

Cas 3:Les deux paramètres prennent des valeurs déterminées indépendamment du profil.

Dans cette travail nous voulons chercher la solution auto similaire de l'équation de Burgers, basant sur les travaux de [8]:

Nous présentons une analyse pour l'équation de Burgers en utilisant la solution auto similaire. Cette technique permet de réduire l'EDP gouvernante avec ses conditions limites et initiales à une équation différentielle ordinaire avec conditions appropriées. En utilisant le troisième cas pour la détermination des paramètres, nous simplifions la solution de similarité qui sont étudiées pour un choix de conditions aux limites et qui nous donnent des solutions analytiques.

L'équation de Burgers, qui tire son nom du physicien allemand *Johannes Martinus-Burgers* (1895-1981) est une équation aux dérivées partielles fondamentales à la mécanique des fluides. Elle est utilisée dans plusieurs domaines des mathématiques appliquées tels que la modélisation de la dynamique des gaz et l'étude du transfert de l'écoulement des fluides. Cette équation sert à étudier l'évolution de la vitesse des fluides dans un milieu donné. [3]

La forme générale de l'équation de Burgers est:

$$u_t = uu_x + u_{xx}.$$

Le premier chapitre, on cherche les solutions de l'équation de Burgers sous la forme $u\,(x,t) = t^{\alpha}\varphi\left(\frac{x}{t^{\beta}}\right)$ et $u\,(x,t) = c\,(t)\,\varphi\left(\dfrac{x}{a\,(t)}\right)$.Et pour déterminer φ, on résolution de l'équation différentielle ordinaire avec conditions appropriées.

Dans le deuxième chapitre, nous étudierons la résolution numérique de l'EDO par la méthode de différence finie pour des problèmes non linéaires, et comparaison entre solution analytique et numérique.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous présentons une méthode plus efficace à l'étude des problèmes les EDP's non linéaires.

La recherche de solutions auto similaire fait intervenir des équations différentielles ordinaires non linéaires, et caractérisée par des conditions appropriées. Le nombre de termes de l'équation joue un rôle dans la détermination des paramètres et par suite la détermination du profil.

Nous avons cherchée des solutions de type " auto similaire " de plusieurs formes pour l'équation de Burgers.

Les équations différentielles ordinaire sont non linéaires, donc difficile à résoudre. Nous avons résolus ce type d'équation différentielles non linéaires par la méthode des différences finis pour cherches des solutions auto similaire. Une comparaison entre la solution analytique et la solution numérique, En outre, tous les résultats numériques obtenus par la méthode non linéaire de différence finie montrent est bien coïncide avec la solution analytique.

Bibliographie

[1] **A.D. Polyanin and V.F. Zaitsev**, Handbook of exact solutions for ordinary differential equations, CRC Press, Boca Raton, Fla. 1995.

[2] **A. HANACHE**, MEMOIRE de Magistère,ETUDE COMPARATIVE ENTRE 'SELF –SIMILAR' METHOD ET LA METHODE DES PROFILES MOBILES, univ. M'sila.2009.

[3] **A. Taik** , Cours Formation Doctorale: Résolution numérique des Equations aux Dérivées Partielles par les Fonctions Radiales de Base (RBF).Département de Mathématiques FST-Mohammedia, (2009).

[4] **D. Zwillinger** ,Handbook of Differential Equations,3rd edition, Academic Press, 1997.

[5] **E.S. Fahmya, K.R. Raslanb, and H.A. Abdusalama**, On the exact and numerical solution of the time-delayed Burgers equation, International Journal of Computer Mathematics, Vol. 00, No. 0, Month 2008, pp.1–12.

[6] **Faires & Burden** ,Numerical Methods, Third Edition (June 18, 2002).

[7] **GAST˜AO A. BRAGA, F. FURTADO, and V. ISAIA** "RENORMALIZATION GROUP CALCULATION OF ASYMPTOTICALLY SELF-SIMILAR DYNAMICS", June 16 - 19, 2004, Pomona, CA, USA, pp.1-13.

[8] **I.A. Hassanien, A.A. Salama, and H.A. Hosham**, Analytical and numerical solutions of generalized Burgers' equation via Buckingham's Pi-theorem,Can. J. Phys. 83: 1035–1049 (2005).

[9] **J. Fran¸c. Coulombel**,Equations hyperboliques non-linéaires, 23 septembre 2009.

[10] **J. ROUSSEL**, évolution en échelle de descripteurs de forme pour l'analyse d'agrégats fractals,sous la direction de Pierre-Olivier Amnlard et Jocelyn Chanussot ,31 août 2004.

[11] **L. T. Watson** ,solving finite difference approximations to nonlinear two-point boundary value problems by a homotopy method, Virginia polytechnic Institute state university, Blacksburg, Va.24061.

[12] **M. Benhamou** ,GROUPE DE RENORMALISATION APPLIQUE AUX EQUATIONS DE REACTION-DIFFUSION, Laboratoire de Physique des Polymères et Phénomènes Critiques Faculté des Sciences Ben M'sik, B.P. 9755, (Année académique 2006 – 2007) Casablanca, Maroc

[13] **N.Benhamidouche** ,cours d'équation de physique 2éme master ,2010/2011.

[14] **S. V. MELESHKO** ,METHODS FOR CONSTRUCTING EXACT SOLUTIONS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS, Springer 2005.