

# Table des matières

0.1	Introduction générale . . . . .	0
<b>1</b>	<b>INTRODUCTION A LA THEORIE DES OPERATEURS COMPACTS</b>	<b>5</b>
1.1	Compacité (Définitions et Propriétés) . . . . .	5
1.2	Compacité dans $C(G)$ . . . . .	6
1.3	Opérateurs compacts . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Equations intégrales</b>	<b>11</b>
2.1	Opérateurs intégraux . . . . .	11
2.2	Opérateurs produits . . . . .	12
2.3	Classification des équations intégrales . . . . .	14
2.3.1	Equations intégrales linéaires . . . . .	14
2.3.2	Equations intégrales non-linéaire . . . . .	15
2.3.3	Equation intégrale singulière et faiblement singulière . . . . .	17
2.4	Existence et unicité de la solution de l'équation de Volterra . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Transformée de Fourier</b>	<b>24</b>
3.1	Transformation de Fourier dans $L^1$ . . . . .	24
3.1.1	Définitions et Propriétés . . . . .	24
3.1.2	Récapitulatif . . . . .	28

3.2	Transformé de Fourier dans $L^2$ . . . . .	29
3.3	Convolution . . . . .	30
3.4	Applications . . . . .	32

## **Bibliographie**

---

---

## 0.1 Introduction générale

Dans ce mémoire on va traiter les équations intégrales linéaires, où on va démontrer l'existence et l'unicité de la solution de ces équations et parmi les meilleures méthodes d'approximation.

On a commencé dans le premier chapitre par une introduction sur les opérateurs compacts, dans les espaces des fonctions continues et quelques propriétés.

Le deuxième chapitre présente une introduction sur les équations intégrales, et on va les traiter dans les espaces de dimension finie.

Le dernier chapitre représente le but de ce mémoire consiste à la Résolution des équations intégrales à l'aide des transformations de Fourier, en appliquant le théorème classique du point

fixe pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution..

# Chapitre 1

## INTRODUCTION A LA THEORIE DES OPERATEURS COMPACTS

Ce chapitre aborde une introduction à la théorie des opérateurs compacts, dans les espaces des fonctions continues et on a pris un cas spécial les opérateurs intégraux avec la méthode des approximations successives.

### 1.1 Compacité (Définitions et Propriétés)

Nous commençons d'abord par des rappeler la définition et quelques propriétés des ensembles compacts.

#### **Définition 1.1**

*Soit  $U$  un ensemble d'un espace normé  $X$ ,  $U$  est dit compact si de tout recouvrement de  $U$  par des ouverts de  $U$  on peut extraire un sous recouvrement fini i.e*

$\forall V_J, j \in J$  (ouverts) tels que  $U \subset \bigcup_{j \in J} V_j$ ,  $\exists V_{J(k)}, j(k) = 1, 2, \dots, n$  tel que  $U \subset \bigcup_{k=1}^n V_{J(k)}$

**Définition 1.2**

Un ensemble  $U$  est dit séquentiellement compact si pour toute suite d'éléments dans  $U$  contient une sous suite converge vers un élément dans  $U$ .

**Théorème 1.3**

Un sous ensemble d'un espace normé est compact si et seulement si il est séquentiellement compact.

**Définition 1.4**

Un sous ensemble d'un espace normé est dit relativement compact si son adhérence est compacte.

**Théorème 1.5**

Tout ensemble borné et de dimension finie d'un espace normé est relativement compact.

## 1.2 Compacité dans $C(G)$

Dans cette partie, on muni l'espace des fonctions continues définies dans  $C(G)$  est par la norme maximum

$$\|\varphi\|_{\infty} = \max_{x \in G} |\varphi(x)|$$

**Définition 1.6**

Etant donné un espace topologique  $(E, T)$  et un ensemble  $K$  de fonctions de  $E$  dans un espace métrique  $(F, d)$ , on dit que :

i)  $K$  est équicontinu en un point  $a \in E$  si, pour chaque réel  $\varepsilon > 0$ , il existe un voisinage  $V$  de  $a$  tel que, pour chaque  $x \in V$  et chaque  $f \in K$ , on a  $d(f(x), f(a)) \leq \varepsilon$ .

ii)  $K$  est équicontinu lorsque  $K$  est équicontinu en chaque point de  $E$ .

**Exemple 1.7**

Tout ensemble fini de fonctions continues de  $E$  dans  $F$  est équicontinu.

### Définition 1.8

Un sous-ensemble  $G$  de l'espace normé  $E$  est relativement compact si la fermeture  $\overline{G}$  est compact.

### Théorème 1.9 (Arzelà-Ascoli)

Soit  $K$  un espace topologique compact. Un sous-ensemble  $G$  de  $\mathcal{C}(K)$  est relativement compact si et seulement si,  $G$  est un borné et équicontinues. On dit que, s'il existe un constant  $M$  tel que

$$|f(x)| \leq M \quad \forall x \in K \quad \text{et} \quad \forall f \in G.$$

De plus,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tel que ;  $\forall f \in G$ , on a

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y \in K \quad \text{avec} \quad |x - y| < \delta.$$

L'ensemble  $\mathcal{C}(K)$  désigner l'espace des fonctions définies et continues dans l'ensemble compact  $K \subset \mathbb{R}^n$ , et muni de la norme maximum

$$\|f\|_{\infty} = \max_{x \in K} |f(x)|.$$

## 1.3 Opérateurs compacts

### Définition 1.10 (Opérateurs linéaires)

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur le corps  $\mathbb{k} = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ , on dit que l'application  $\mathcal{A}$  défini sur  $E$  dans  $F$  est une application linéaire ou un opérateur linéaire si

$$\forall x, y \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{k}, \text{ on a } \mathcal{A}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{A}(x) + \beta \mathcal{A}(y).$$

### Définition 1.11 (Opérateurs bornés)

Un opérateur linéaire  $\mathcal{A}$  défini sur  $E$  dans  $F$  est dit borné s'il existe une constante positive  $C > 0$ , telle que

$$\|\mathcal{A}(x)\|_F \leq C \|x\|_E, \quad \forall x \in E.$$

**Définition 1.12**

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach. Une application linéaire continue  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(E, F)$  est dite **compacte**, ou **complément continu** si pour tout sous-ensemble borné  $G$  de  $E$ , l'image  $\mathcal{A}(G)$  est une partie relativement compacte de  $F$ .

En d'autre terme,  $\mathcal{A}$  est un opérateur compact si, pour toute suite bornée  $(x_n)$  dans  $E$ , la suite  $(\mathcal{A}x_n)$  contient une sous-suite convergente.

On note par  $\mathcal{K}(E, F)$  l'ensemble des opérateurs linéaires compacts de  $E$  dans  $F$ . On pose  $\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}(E, E)$

**Théorème 1.13**

Tout opérateur compact est borné, c'est-à-dire que l'on a l'inclusion  $\mathcal{K}(E) \subset \mathcal{L}(E)$ .

**Démonstration.** Soit  $\mathcal{A}$  un opérateur compact dans  $E$ . L'image de la boule unité de  $E$  est un ensemble relativement compact, donc borné. Il existe, alors une constante  $M > 0$ , telle que

$$\|\mathcal{A}y\| \leq M, \forall y \in E, \|y\| \leq 1$$

On déduit que

$$\|\mathcal{A}x\| \leq M \|x\|, \forall x \in E$$

L'opérateur  $\mathcal{A}$  est donc continu et sa norme est majorée par  $M$  est parfois un moyen bien pratique pour calculer les applications tangentes. ■

**Théorème 1.14**

La combinaison linéaire  $\mathcal{A} = \alpha\mathcal{A}_1 + \beta\mathcal{A}_2$  de deux opérateurs compacts  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  est un opérateur compact, pour tout  $\alpha$  et  $\beta$  scalaires.

**Démonstration.** Soit  $\varphi_n$  est une suite bornée dans  $E$  et soit  $\mathcal{A}\varphi_n$  est une suite dans  $F$ , alors

$$\mathcal{A}\varphi_n(x) = \alpha\mathcal{A}_1\varphi_n(x) + \beta\mathcal{A}_2\varphi_n(x) \quad , \text{ avec } \varphi_n \in E, n \in \mathbb{N}.$$

Les opérateurs  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  sont compacts, on peut extraire  $\mathcal{A}_1\varphi_n$  et  $\mathcal{A}_2\varphi_n$  deux sous suites convergences donnant par leur somme une sous suite de  $\mathcal{A}\varphi_n$  convergente. donc  $\mathcal{A}$  est compacte. ■

**Théorème 1.15**

*Le produit  $\mathcal{A}\mathcal{B}$  des deux opérateurs bornés  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  est compact si l'un des deux opérateurs  $\mathcal{A}$  ou  $\mathcal{B}$  est compact.*

**Démonstration.** Soit  $\varphi_n$  est une suite borné de  $E$ , alors si  $\mathcal{B}$  est un opérateur borné, la suite  $\mathcal{B}\varphi_n(x)$  est aussi bornée, et la compacité de l'opérateur  $\mathcal{A}$  donné une sous suite  $\mathcal{A}(\mathcal{B}\varphi_{n(k)}(x))$  de  $\mathcal{A}(\mathcal{B}\varphi_n(x))$  converge dans  $E$ . Donc la compacité de  $\mathcal{A}\mathcal{B}$ .

D'autre part, si  $\mathcal{B}$  est un opérateur compact, on peut extraire de  $\mathcal{B}\varphi_n(x)$  une sous suite  $\mathcal{B}\varphi_{n(k)}(x)$  converge dans  $E$ , et l'opérateur borné  $\mathcal{A}$  donne la suite  $\mathcal{A}(\mathcal{B}\varphi_{n(k)}(x))$  est converge. Donc la compacité de  $\mathcal{A}\mathcal{B}$ . ■

**Théorème 1.16**

*Un suite  $\mathcal{A}_n$  d'opérateur compact défini de l'espace normé  $E$  dans un espace Banach  $F$  et qui converge uniformément à opérateur  $\mathcal{A}$ , dites*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{A}_n - \mathcal{A}\| = 0.$$

*alors l'opérateur de la limite  $\mathcal{A}$  est compact.*

**Définition 1.17**

*On dit que  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(E, F)$  est un opérateur de **rang fini** si  $\dim \mathcal{A}(E) < \infty$ .*

**Exemple 1.18** Prenons pour  $\mathcal{H}$  l'espace  $L^2$ , avec la mesure de Lebesgue sur  $[0, \pi]$ . L'opérateur  $\mathcal{A}$  défini par :

$$(\mathcal{A}\varphi)(t) = \int_0^\pi \cos(t-s)\varphi(s)ds$$

*est de rang fini. En effet,  $\mathcal{A}$  est manifestement linéaire et continu. En suite*

$$(\mathcal{A}\varphi)(t) = \cos(t) \int_0^\pi \cos(s)\varphi(s)ds + \sin(t) \int_0^\pi \sin(s)\varphi(s)ds$$

Donc  $(\mathcal{A}\varphi)$  est la forme  $\lambda \cos t + \mu \sin t$ , où  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux éléments linéairement de  $L^2$ . Car la condition

$$\|a \cos t + b \sin t\| = 0 \quad \text{ou} \quad \int_0^\pi |a \cos t + b \sin t| dt = 0$$

S'écrit  $|a|^2 + |b|^2 = 0$ , On entraîne bien  $a = 0$ ,  $b = 0$ . Donc l'image par  $\mathcal{A}$  de  $L^2$  est un espace vectoriel  $E$  de dimension 2, rapporté à une base constituée par les deux fonction  $\cos t$ ,  $\sin t$ .

**Proposition 1.19**

*Un opérateur de rang fini est compact.*

**Démonstration.** En effet, pour tout ensemble borné  $G$  dans  $E$ , le rang  $\mathcal{A}(G)$  est un ensemble borné dans l'espace **rang de dimension finie**  $\mathcal{A}(E)$ . Donc  $\mathcal{A}(G)$  est relativement compact, alors l'opérateur  $\mathcal{A}$  est compact. ■

**Proposition 1.20**

*Soit  $\mathcal{A}$  un opérateur borné défini de  $E$  dans  $F$  avec le domaine  $E$  admetant une dimension finie  $\dim E < \infty$ , alors l'opérateur  $\mathcal{A}$  est compact.*

**Proposition 1.21**

*L'opérateur identité  $\mathcal{I}$  défini d'un espace normé  $E$  dans  $E$  est compact si et seulement si la dimension d'espace  $E$  est fini.*

# Chapitre 2

## Equations intégrales

### 2.1 Opérateurs intégraux

#### Définition 2.1

Soit  $G$  un ensemble compact de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $K$  une fonction continue de  $G \times G$  dans  $\mathbb{C}$  alors l'opérateur linéaire défini de  $C(G)$  dans  $C(G)$  par

$$A\varphi(x) = \int_G |k(x, y)| dy \quad , \quad x \in G$$

est appelé opérateur intégral à noyau continu  $K$ , cet opérateur est borné de norme  $\|A\|$  donnée par

$$\|A\| = \max_{x \in G} \int_G |k(x, y)| dy$$

Une classe particulièrement simple d'opérateurs intégraux est constituée des opérateurs à noyau dits dégénérés, c'est-à-dire de la forme

$$K(x, y) = \sum_{j=1}^n a_j(x) b_j(y)$$

Les opérateurs correspondants sont de rang fini.

### Proposition 2.2

Soit  $A$  un opérateur intégral à noyau dégénéré (séparable). L'image de  $A$  est de dimension finie.

### Théorème 2.3

L'opérateur intégral  $A$  de  $C(G)$  dans  $C(G)$  à noyau continu est un opérateur compact.

**Démonstration.** En effet, soit  $E$  un ensemble borné de  $C(G)$ , ( $\|\varphi\| \leq M$ , pour tout  $\varphi \in E$ ). De plus, on a

$$|A\varphi(x)| \leq M |G| \max_{x,y \in G} |k(x,y)| \quad , \quad \forall x \in G \text{ et } \forall \varphi \in E$$

D'où l'ensemble  $A(E)$  est borné. D'autre part, le noyau  $K$  est uniformément continu sur le compact  $G \times G$ , alors pour tout  $x, y$  et  $z$  de  $G$ , on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tel que } |x - y| < \delta \implies |k(x,z) - k(y,z)| < \frac{\varepsilon}{M|G|}$$

d'où

$$|A\varphi(x) - A\varphi(y)| < \varepsilon \text{ pour tout } \varphi \in E \text{ et } x, y \in G \text{ avec } |x - y| < \delta$$

Ceci exprime que l'ensemble  $A(E)$  est équicontinu, d'où  $A(E)$  est relativement compact par le **théorème d'Arzelà-Ascoli**. Alors  $A$  est compact. ■

### Théorème 2.4

L'opérateur intégral  $A$  de  $C(\partial G)$  dans  $C(\partial G)$  à noyau continu ou à noyau faiblement singulier est un opérateur compact sur  $C(\partial G)$  si  $\partial G$  est de classe  $C^1$ .

## 2.2 Opérateurs produits

Soient  $T_1, T_2$  deux opérateurs intégraux sur  $L_p(E)$  avec les noyaux  $K_1, K_2$  respectivement, l'opérateur produit envoie aussi  $L_p(E)$  dans  $L_p(E)$ , où  $(T_1 T_2)\varphi = T_1(T_2\varphi)$ .

Si les noyaux  $K_1, K_2$  justifient l'interchangement de l'ordre d'intégration alors, on peut déduire le noyau  $K$  du produit  $T_1T_2$  en fonction de  $K_1, K_2$

$$\begin{aligned} T_1T_2\varphi(x) &= \int K_1(x, z) \int T_2\varphi(z) dz \\ &= \int K_1(x, z) \int K_2(z, y)\varphi(y) dy \\ &= \int \varphi(y) dy \int K_1(x, z)K_2(z, y)dz \end{aligned}$$

D'où l'opérateur  $T_1T_2$  est un opérateur intégral de noyau

$$K(x, y) = \int K_1(x, z)K_2(z, y)dz$$

Notons que, si on prend  $T_1 = T_2 = T$ , de noyau  $K_1 = K_2 = K$ , alors l'opérateur  $T_1T_2 = T^2$  admet le noyau  $K_2(x, y)$  donné par

$$K_2(x, y) = \int K(x, z)K(z, y)dz$$

### **Théorème 2.5 (Fubini)**

Soit  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable et  $E \times F$  un ensemble mesurable de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

- si  $f$  est positive sur  $E \times F$  on a

$$\begin{aligned} \int_{E \times F} f(x, y) dx dy &= \int_E dx \int_F f(x, y) dy \\ &= \int_F dy \int_E f(x, y) dx \end{aligned}$$

### **Proposition 2.6**

Soit  $A$  un l'opérateur intégral de noyau  $K$  Alors l'opérateur adjoint  $A^*$  est un opérateur intégral de noyau  $K^*$  avec

$$K^*(t, s) = K(s, t)$$

**Démonstration.** Il suffit de partir de la définition. Soit  $\varphi, \psi \in L^2([a, b])$ .

$$(T\varphi, \psi) = \int_a^b \left( \int_a^b k(x, y) \varphi(y) dy \right) \psi(x) dx = \int_{[a,b] \times [a,b]} k(x, y) \varphi(y) \psi(x) dy dx$$

par le théorème de Fubini. En échangeant encore l'ordre d'intégration, il vient

$$(T\varphi, \psi) = \int_a^b \left( \int_a^b k(x, y) \psi(x) dx \right) \varphi(y) dy = (\varphi, T^*\psi)$$

D'après la définition de l'adjoint. En permutant le nom des variables, on obtient le résultat voulu. ■

## 2.3 Classification des équations intégrales

### 2.3.1 Equations intégrales linéaires

On appelle équation intégrale une équation où la fonction inconnue  $\varphi$ , tel que

$$\varphi(x) + f(x) = \lambda \int_T k(x, t) \varphi(t) dt$$

avec  $f(x)$  et  $k(x, t)$  sont deux fonctions connus,  $\lambda$  un paramètre numérique et  $T$  un ensemble borné et fermé d'un espace Euclidien.

#### a-Equations intégrales de Fredholm

1-On appelle équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) + f(x) = \lambda \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt \quad (2.1)$$

2-On appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce une équation de la

forme

$$f(x) = \lambda \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt \quad (2.2)$$

**Remarque 2.7**

*i-Si  $f(x) \neq 0$ , l'équation (2.1) est dite non homogène.*

*ii-Si  $f(x) = 0$ , l'équation (2.1) est dite homogène.*

**b-Equations intégrales de Volterra**

1-On appelle équation intégrale de Volterra de deuxième espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) + f(x) = \lambda \int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt \quad (2.3)$$

2-On appelle équation intégrale de Volterra de première espèce une équation de la forme

$$f(x) = \lambda \int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt \quad (2.4)$$

**Remarque 2.8**

*L'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm, il suffit de prendre le noyau  $k(x, t) = 0$  pour  $x < t$*

**2.3.2 Equations intégrales non-linéaire**

**a-Equations intégrales de non linéaire Fredholm**

1-On appelle équation intégrale non linéaire de Fredholm de deuxième espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) + f(x) = \lambda \int_a^b k(x, t, \varphi(t)) dt \quad (2.5)$$

2-On appelle équation intégrale non linéaire de Fredholm de première espèce une équation de la forme

$$f(x) = \lambda \int_a^b k(x, t, \varphi(t)) dt \quad (2.6)$$

**Remarque 2.9**

*i-Si  $f(x) \neq 0$ , l'équation (2.5) est dite non homogène.*

*ii-Si  $f(x) = 0$ , l'équation (2.5) est dite homogène.*

**b-Equations intégrales non linéaire de Volterra**

1-On appelle équation intégrale non linéaire de Volterra de deuxième espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) + f(x) = \lambda \int_a^x k(x, t, \varphi(t)) dt \quad (2.7)$$

2-On appelle équation intégrale non linéaire de Volterra de première espèce une équation de la forme

$$f(x) = \lambda \int_a^x k(x, t, \varphi(t)) dt$$

**Remarque 2.10**

*i-Si  $f(x) \neq 0$ , l'équation (2.7) est dite non homogène.*

*ii-Si  $f(x) = 0$ , l'équation (2.7) est dite homogène.*

### 2.3.3 Equation intégrale singuliere et faiblement singuliere

Considérons l'équation intégrale suivante

$$\varphi(x) = g(x) + \int_T R(x,t)k(x,t)\varphi(t)dt \quad (2.8)$$

On dit que l'équation (2.8) est singulière si  $R(x,t)$  admet une singularité ou le domaine  $T$  n'est pas bornée.

#### a-Equations deVolterra et de Fredholm

##### Définition 2.11

On considère l'équation intégrale de deuxième espèce

$$\varphi(x) = g(x) + \int_a^x R(x,t)k(x,t)\varphi(t)dt \quad a \leq x < \infty \quad (2.9)$$

où  $k(x,t)$  est faiblement singulier , en générale  $k(x,t)$  donnons par

$$k(x,t) = \begin{cases} |x-t|^{-\alpha} & 0 < \alpha < 1 \\ \log|x-t| & \end{cases}$$

Alors

i- l'équations (2.9) est de **Volterra**.

ii-si  $x = b$  l'équations (2.9) est de **Fredholm**.

iii-Le cas ou  $k(x,t) = |x-t|^{-\alpha}$  ,  $0 < \alpha < 1$  s'appelle **singularité algébriques**.

iv-Le cas ou  $k(x,t) = \log|x-t|$  s'appelle **singularité logarithmiques**.

## 2.4 Existence et unicité d la solution de l'quation de Volterra

### Introduction à la théorie du point fixe

#### Définition 2.12

Soient  $H$  est un espace de Hilbert et  $U$  un opérateur borné, l'opérateur  $U$  est dit opérateur contractant s'il existe une constante positive  $k$  telle que :  $0 < k < 1$  et

$$\|U\varphi_1 - U\varphi_2\| \leq k \|\varphi_1 - \varphi_2\|.$$

#### Théorème 2.13

Soit  $U$  un opérateur contractant dans un espace de Hilbert  $H$ , alors l'équation

$$U\varphi = \varphi \tag{1}$$

admet une solution unique  $\varphi$  dans  $H$ , cette solution est le point fixe de cet opérateur.

**Démonstration.** Pour démontrer l'existence de la solution de l'équation (1) on utilise la méthode des approximations successives, soit  $\varphi_0$  une fonction arbitraire, on définit la suite  $(\varphi_n)$  comme suit

$$\varphi_{n+1} = U\varphi_n \quad n = 1, 2, \dots$$

est de Cauchy et converge vers la solution de l'équation (1), en effet :

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{p+1} - \varphi_p\| &= \|U\varphi_p - U\varphi_{p-1}\| \leq k \|\varphi_p - \varphi_{p-1}\| \\
&\leq k^2 \|\varphi_{p-1} - \varphi_{p-2}\| \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&\leq k^p \|\varphi_1 - \varphi_0\|
\end{aligned}$$

d'autre part, pour tout  $q > p$ , on a

$$\begin{aligned}
\|\varphi_q - \varphi_p\| &\leq \|(\varphi_q - \varphi_{q-1}) + (\varphi_{q-1} - \varphi_{q-2}) + \dots + (\varphi_{p+1} - \varphi_p)\| \\
&\leq \|\varphi_q - \varphi_{q-1}\| + \|\varphi_{q-1} - \varphi_{q-2}\| + \dots + \|\varphi_{p+1} - \varphi_p\| \\
&\leq (k^p + k^{p+1} + \dots + k^{q-1}) \|\varphi_1 - \varphi_0\| \\
&\leq k^p \left(1 + k + k^2 + \dots + k^{\frac{q-1}{p}}\right) \|\varphi_1 - \varphi_0\| \\
&\leq \frac{k^p - k^q}{1 - k} \|\varphi_1 - \varphi_0\|
\end{aligned}$$

ce qui nous montre que

$$\lim_{p,q \rightarrow \infty} \|\varphi_q - \varphi_p\| = 0$$

d'où la suite  $\varphi_n$  est de Cauchy dans un espace de Hilbert donc elle converge vers la solution unique  $\varphi$ .

En effet de la continuité de l'opérateur  $U$  on obtient :

$$\varphi = \lim U\varphi_{n+1} = \lim U\varphi_n = U \lim \varphi_n = U\varphi$$

Pour démontrer l'unicité, on suppose qu'il existe deux points fixes distincts  $\varphi$  et  $\psi$

tels que :

$$U\varphi = \varphi$$

$$U\psi = \psi$$

alors on peut écrire

$$\|\varphi - \psi\| = \|U\varphi - U\psi\| \leq K \|\varphi - \psi\|$$

d'où

$$(1 - k) \|\varphi - \psi\| \leq 0$$

ce qui nous donne

$$\|\varphi - \psi\| = 0 \Rightarrow \varphi = \psi \quad \blacksquare$$

### **Corollaire 2.14**

*Supposons que l'opérateur  $U$  admet un point fixe dans l'espace de Hilbert  $H$  alors l'opérateur  $U^n$  admet le même point fixe.*

### **Corollaire 2.15**

*Soit  $U$  un opérateur dans l'espace  $H$  tel que l'opérateur est un opérateur contractant, alors  $U$  admet un point fixe unique  $\varphi$  dans l'espace  $H$  .*

### **Théorème 2.16**

*Soit  $H$  est un espace de Hilbert et  $A$  un opérateur borné dans  $H$  avec la propriété suivante*

$$\|A\varphi_1 - A\varphi_2\| \leq k \|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

*alors l'équation suivante*

$$\varphi - \lambda A\varphi = f$$

*admet une solution unique pour toute  $f \in H$  à condition que  $|\lambda|$  est petit.*

**Théorème 2.17**

Soit  $K(x, y)$  est une fonction continue pour  $x, y \in [a, b]$  , alors l'équation de Volterra

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt = f(x) \quad a \leq x \leq b \quad (2)$$

admet une solution unique  $\varphi(x)$  pour toute  $f$  dans  $L_2([a, b])$  et dans  $\mathbb{R}$ .

**Démonstration.** Pour l'équation intégrale de Volterra nous considérons l'opérateur

$$T\varphi(x) = f(x) + \lambda A\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt$$

avec :

$$A\varphi(x) = \int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt$$

et nous essayons de prouver que l'opérateur  $T^n$  est une contraction pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ , donc  $T\varphi$  admet un point fixe, qui doit être une solution de l'équation (2)

$$\begin{aligned} T\varphi &= f + \lambda A\varphi \\ T^2\varphi &= T(f + \lambda A\varphi) = f + \lambda A(f + \lambda A\varphi) = f + \lambda Af + \lambda^2 A^2\varphi \\ &\cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \\ T^n\varphi &= f + \lambda Af + \lambda^2 A^2f + \dots + \lambda^{n-1} A^{n-1}f + \lambda^n A^n\varphi \end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned} \|T^n\varphi_2 - T^n\varphi_1\| &= \|\lambda^n A^n\varphi_2 - \lambda^n A^n\varphi_1\| \\ &= |\lambda|^n \left\| \int_a^x k_n(x, t) (\varphi_2(t) - \varphi_1(t)) dt \right\| \end{aligned}$$

Rappelons que  $K_n(x, y)$  est le noyau itéré d'ordre  $n$  donné par

$$K_n(x, y) = \int_x^t k(x, z) k_{n-1}(z, t) dz$$

puisque on a par hypothèse

$$|k(x, t)| \leq M$$

alors

$$|k_n(x, t)| \leq \frac{M^n (x - t)^{n-1}}{(n - 1)!} \quad a \leq y \leq x \leq b \quad (3)$$

Pour  $n = 1$  l'expression (3) est évidente.

Supposons qu'elle est vraie pour  $m \in \mathbb{N}$

$$|k_m(x, t)| \leq \frac{M^m (x - t)^{m-1}}{(m - 1)!}$$

alors

$$\begin{aligned} |k_{m+1}(x, t)| &= \left| \int_t^x k(x, z) k_m(z, t) dz \right| \\ &\leq \int_t^x |k(x, z) k_m(z, t)| dz \\ &\leq \frac{M^{m+1}}{(m - 1)!} \int_t^x (x - z)^{m-1} dz \\ &\leq \frac{M^{m+1}}{m!} (x - t)^m \end{aligned}$$

tel que

$$\|T_n \varphi_2 - T_n \varphi_1\| \leq \frac{|\lambda|^n M^n}{(n - 1)!} \|\varphi_2 - \varphi_1\|$$

pour  $n \in \mathbb{N}$  assez grand on obtient

$$\frac{|\lambda|^n M^n}{(n-1)!} < 1$$

ainsi que l'opérateur  $T^n$  est contractant ce qui implique que  $T$  admet un point fixe, on écrit

$$T\varphi = \varphi \Leftrightarrow \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, y) \varphi(y) dy \quad \blacksquare$$

# Chapitre 3

## Transformée de Fourier

### 3.1 Transformation de Fourier dans $L^1$

#### 3.1.1 Définitions et Propriétés

##### Définition 3.1

on appelle transformée de Fourier de  $f$  et on note par  $\hat{f}$

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi x} f(x) dx$$

pour  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , on appelle transformée inverse de Fourier et on note par

$$\check{f} = \overline{\mathcal{F}f} = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i \xi x} f(x) dx$$

##### Proposition 3.2

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $L^1(\mathbb{R})$ , alors  $\widehat{f\hat{g}}$  et  $\widehat{\hat{f}g}$  sont dans  $L^1(\mathbb{R})$  et on a

$$\int f(t)\widehat{g}(t)dt = \int \widehat{f}(x)g(x)dx \quad (3, 1)$$

**Démonstration.** On vient de voir dans le théorème précédent que  $\widehat{g}$  est borné.  $f\widehat{g}$  est donc dans  $L^1(\mathbb{R})$ . de même  $\widehat{f}g \in L^1(\mathbb{R})$ . L'égalité (3, 1) résulte du théorème de Fubini car  $e^{-2i\pi tx} f(t)g(x) \in L^1(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned} \int f(t)\widehat{g}(t)dt &= \int f(t) \left( \int e^{-2\pi i\xi x} g(x)dx \right) dt \\ &= \int g(x) \left( \int e^{-2\pi i\xi x} f(t)dt \right) dx \\ &= \int g(x)\widehat{f}(x)dx \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Proposition 3.3**

$$\forall f, g \in L^1 \quad \widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$$

**Démonstration.** Rappelons que  $f * g \in L^1$  donc  $f * g$  a un sens. Rappelons que la fonction  $(x, y) \longrightarrow f(x - y)g(y)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(t) &= \int (f * g)(x)e^{-2i\pi tx} dx \\ &= \int \left( \int f(x - y)g(y)dy \right) e^{-2i\pi tx} dx \\ &= \int \int f(x - y)e^{-2i\pi t(x-y)} g(y)e^{-2i\pi ty} dx dy \\ &= \int g(y)e^{-2i\pi ty} \left( \int f(x - y)e^{-2i\pi t(x-y)} dx \right) dy \\ &= \widehat{f}(t) \cdot \widehat{g}(t) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Proposition 3.4 (Dérivation)**

i) Si  $x^k f(x)$  est dans  $L^1(\mathbb{R})$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ ,  $\widehat{f}$  est  $n$  fois dérivable et on a pour

$$k = 0, 1, 2, 3, \dots, n \quad \widehat{f^{(k)}}(\xi) = (-2i\pi\xi)^k \widehat{f}(x)$$

ii) Si  $f \in \mathcal{L}^n(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  et si toutes les dérivées  $f^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  sont dans  $L^1(\mathbb{R})$

alors pour

$$k = 0, 1, 2, 3, \dots, n \quad \widehat{f^{(k)}}(\xi) = (2i\pi\xi)^k \hat{f}(\xi) \dots \dots \dots 17(6)$$

iii) Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  est à support borné alors  $\hat{f} \in \ell^\infty(\mathbb{R})$

**Démonstration.** i) La fonction  $h : \xi \longrightarrow e^{-2i\pi\xi x} f(x)$  indéfiniment dérivable on a  $h^{(k)}(\xi) = (-2i\pi x)^k e^{-2i\pi\xi x} f(x)$  et  $|h^{(k)}(\xi)| \leq 2\pi |x^k f(x)|$ . On peut

$$\hat{f}^{(k)}(\xi) = \int e^{-2i\pi\xi x} (-2i\pi x)^k f(x) dx$$

ii) Montrons ce point pour  $n = 1$ , la fonction pour  $n \geq 2$  obtenant en itérant le résultat. Comme  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$  on peut calculer  $\widehat{\hat{f}}$  par la formule

$$\widehat{\hat{f}}(\xi) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-2i\pi\xi x} \hat{f}(x) dx$$

Intégrons par parties :

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-2i\pi\xi x} \hat{f}(x) dx = [e^{-2i\pi\xi x} \hat{f}(x)]_{-\alpha}^{+\alpha} + \int_{-\alpha}^{+\alpha} (2i\pi\xi) e^{-2i\pi\xi x} \hat{f}(x) dx \dots \dots \dots 17(7)$$

Supposons pour l'instant que  $f(\pm\alpha)$  ait une limite  $\alpha \longrightarrow +\infty$ . Comme  $f$  est intégrable cette limite est nécessairement nulle. Quand  $\alpha \longrightarrow +\infty$  17(7) donne

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-2i\pi\xi x} \hat{f}(x) dx = \int_{-\alpha}^{+\alpha} (2i\pi\xi) e^{-2i\pi\xi x} \hat{f}(x) dx$$

qui est formule 17(6) pour  $k = 1$  montrons maintenant que  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} f(\alpha)$  existe. On a

$$f(\alpha) = f(0) + \int_0^\alpha \hat{f}(t) dt$$

Comme  $\hat{f} \in l^1(\mathbb{R})$ ,  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_0^\alpha \hat{f}(t) dt$  existe et donc  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} f(0)$  existe. De la même façon  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} f(-\alpha)$  existe.

iii) Si  $f \in l^1(\mathbb{R})$  est à support borné il est clair que pour tout  $k \in \mathbb{N}$   $x^k f(x)$  est intégrable et donc d'après i)  $\hat{f} \in \ell^\infty(\mathbb{R})$ . ■

### Proposition 3.5 (Translation)

Soient la fonction  $f$  définie par

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ \tau_\alpha f(x) &= f(x - \alpha) \\ \mathcal{F}(\tau_\alpha f)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x - \alpha) dx \end{aligned}$$

on pose  $x - \alpha = X$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\tau_\alpha f)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi(X+\alpha)} f(X) dX \\ &= e^{-i\xi\alpha} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi X} f(X) dX \end{aligned}$$

Alors

$$\mathcal{F}(\tau_\alpha f)(\xi) = e^{-i\alpha\xi} \hat{f}(\xi) .$$

### Exemple 3.6

Calculer  $\mathcal{F}(g)(\xi)$  telle que  $g(x) = e^{-(x-\pi)^2}$ .

soit  $f(x) = e^{-x^2}$  donc nous avons  $\hat{f}(\xi) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\xi^2}{4}}$

$g(x) = e^{-(x-\pi)^2}$

$$\begin{aligned} \hat{g}(\xi) &= \mathcal{F}(\tau_\pi f)(\xi) \\ &= e^{-i\pi\xi} \hat{f}(\xi) \\ \mathcal{F}(g)(\xi) &= \sqrt{\pi} e^{-i\pi\xi - \frac{\xi^2}{4}} . \end{aligned}$$

**Proposition 3.7 (conjugaison et parité)**

Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . On a

i)  $\overline{\mathcal{F}(f)} = \mathcal{F}(\overline{f})$ .

ii)  $(\mathcal{F}(f))_\alpha = \overline{\mathcal{F}(f)} = \mathcal{F}(f_\alpha)$ .

On en déduit les propriétés de parité

iii)  $f$  pair (resp<sup>t</sup> impaire) implique  $\hat{f}$  paire (resp<sup>t</sup> impaire).

iv)  $f$  réelle paire (resp<sup>t</sup> réelle impaire) implique  $\hat{f}$  réelle paire (resp<sup>t</sup> imaginaire impaire).

**Proposition 3.8**

Si  $\mathcal{F}(\lambda)$  est une transformée de Fourier de  $f(\xi)$ . Alors la transformée de Fourier de la fonction  $f(-\xi)$  est  $\mathcal{F}(-\lambda)$ .

**Démonstration.**  $\mathcal{F}\{f(-\xi)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-\xi)e^{(-i\xi\lambda)}d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-\xi)e^{[-i(-\xi)(-\lambda)]}d\xi$

Pour une nouvelle variable  $\tau = -\xi$

$$\mathcal{F}\{f(-\xi)\} = - \int_{+\infty}^{-\infty} f(\tau)e^{[-i\tau(-\lambda)]}d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{[-i\tau(-\lambda)]}d\tau = \mathcal{F}(-\lambda) \blacksquare$$

**3.1.2 Récapitulatif**

i)  $\widehat{\hat{f}^{(k)}}(\xi) = (-2\pi i x)^k f(x)$

$$\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (2i\pi\xi)^k \hat{f}(\xi)$$

ii)  $f(x - \alpha) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-2i\pi\alpha\xi} \hat{f}(\xi)$

$$e^{2i\pi\alpha\xi} f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\xi - \alpha)$$

iii)  $\alpha \neq 0$

$$f(\alpha x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|\alpha|} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)$$

iv) Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$  tel que  $\text{Re}(\alpha) > 0$

$$\frac{x^k}{k!} e^{-\alpha x} u(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{(\alpha + 2i\pi\xi)^{k+1}} k = 0, 1, 2, \dots$$

## 3.2 Transformé de Fourier dans $L^2$

On rappelle que  $L^2_{\mathcal{C}}$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire  $(f/g) = \int f(t)\overline{g(t)}dt$ . La transformée de Fourier d'une fonction de  $L^2$  ne peut être définie comme pour une fonction de  $L^1$  car a priori la fonction  $x \rightarrow f(x)e^{2\pi tx}$  n'est pas intégrable. On va utiliser une méthode de prolongement par densité en s'appuyant sur les deux résultats suivants

### Proposition 3.9

$S$  est dense dans  $L^2$  i.e.  $\forall f \in L^2 \exists (f_n)_{n \geq 0} \subset S$ , telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$

### Proposition 3.10

$\forall f, g \in S \quad (\widehat{f/\widehat{g}}) = (f/g) \quad (\text{en particulier } \|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2)$

**Démonstration.** Soient  $f, g \in S$ , Alors  $f, g, \widehat{f}, \widehat{g} \in L^2$  et on a

$$\begin{aligned} (\widehat{f/\widehat{g}}) &= \int \widehat{f}(t)\overline{\widehat{g}(t)}dt = \int \widehat{f}(t)\overline{\widehat{g}(-t)}dt \\ &= \int \widehat{f}(t)\overline{g(-t)}dt \\ &= \int f(t)\overline{g(-t)}dt \\ &= \int f(t)\overline{g(t)}dt = (f/g) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### Proposition 3.11

Pour  $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$  la transformée de Fourier de  $f$  est une fonction continue et bornée

**Démonstration.** La continuité est une conséquence du théorème sur les intégrales à paramètre. En effet pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$  la fonction  $\xi \mapsto e^{ix\xi}$  est continue et

$$\left| e^{-ix\xi} \int (x) \right| \leq \left| \int (x) \right|$$

or on suppose que  $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$

Enfin

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi} f(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)| dx. \blacksquare$$

### 3.3 Convolution

Comme pour les fonctions périodiques localement intégrables, on définit la convolution de deux fonctions  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$  par

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt$$

Par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt \right) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(x-t)dx \right) dt \\ &= \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty. \end{aligned}$$

Par conséquent  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt < \infty$  pour presque tout  $x$ . Cette observation implique que on peut définir

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt.$$

pour presque tout  $x$  et de plus  $f * g \in L^1(\mathbb{R})$  avec

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

La fonction  $f * g$  est appelée la *convolution* de  $f$  et  $g$ .

**Proposition 3.12**

Pour tous  $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$  et  $\alpha \in \mathbb{C}$  on a :

1. commutative :  $f * g = g * f$ .
2. associative :  $(f * g) * h = f * (g * f)$ .
3. distributive :  $f * (g + h) = f * g + f * h$ .
4. homogène :  $f * (\alpha g) = (\alpha f) * g = \alpha(f * g)$ .

**Lemme 3.13**

Soient  $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ . Alors

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$$

**Démonstration.** D'après le théorème de Fubini, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(t) e^{-xt} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(s) g(t-s) ds \right) e^{-xt} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(t-s) e^{-xt} dt \right) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-x(t+s)} dt \right) ds \\ &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-xs} ds \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-xt} dt \right) \\ &= \widehat{f}(x) \widehat{g}(x) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## 3.4 Applications

**Equations intégrales sur l'intervalle  $]-\infty, +\infty[$ .**

Soit l'équation intégrale

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-t)\varphi(t)dt \quad (1)$$

dont le noyau dépend de la différence  $(x-t)$ . L'on suppose que les fonction  $k(x)$  et  $f(x)$  appartiennent à  $L_1$  sur l'intervalle  $(-\infty, +\infty)$  et l'on cherche la solution dans la même classe. En appliquant aux deux membres la transformation de Fourier, On obtient

$$\Phi(\alpha) = F(\alpha) + K(\alpha)\Phi(\alpha) \quad (2)$$

où  $F(\alpha)$ ,  $\Phi(\alpha)$  et  $K(\alpha)$  sont les transformées respectivement de  $f(x)$ ,  $\varphi(x)$  et  $k(x)$  mises sous la forme

$$K(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x)e^{i\alpha x} dx$$

De (2) il résulte

$$\Phi(\alpha) = F(\alpha)[1 - K(\alpha)]^{-1} \quad (3)$$

Comme  $\Phi(\alpha)$  doit être une fonction continue, pour que l'équation (1) soit soluble, quelle que soit  $f(x)$  de  $L_1$ , il est nécessaire que

$$1 - K(\alpha) \neq 0 \quad (-\infty < \alpha < +\infty) \quad (4)$$

La condition (4) est suffisant pour que l'équation (1) soit soluble dans la classe  $L_1$ . En effet, d'après le théorème de Wiener il existe une fonction  $k_1(x)$  de  $L_1$  telle que

$$[1 - K(\alpha)]^{-1} = 1 + \int_{-\infty}^{+\infty} k_1(x) e^{-i\alpha x} dx = 1 + k_1(\alpha) \quad (5)$$

Entraîne l'équivalence de (2) et de la formule

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} k_1(x-t)\varphi(t)dt \quad (6);$$

la fonction  $\varphi(x)$  appartient à  $L_1$  comme produit de convolution de deux fonctions de la même classe. Soulignons encore que la solution (6) de l'équation (1) est unique dans classe  $L_1$  si est satisfaite la condition (4).

### Equation integrales sur l'intervalle $(0, \infty)$

si une équation integrale à noyau dépendant de  $(x-t)$  est considérée non pas sur l'intervalle  $(-\infty, +\infty)$  mais sur l'intervalle  $(0, \infty)$ , le problème se complique énormément les equations homogenes de cette ec spèce ont été étudiées par wiener et hop(1931) et les equations générales à noyaux symetriques, i e  $k(s-t) = k(t-s)$  par V Foc(1944)

soit l'équation

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^{\infty} K(x-t)\varphi(t)dt \quad (1)$$

la fonction  $k(x)$  est définie sur l'intervalle  $-\infty < x < +\infty$  et  $f(x)$  et  $0 \leq x < +\infty$  on cherche la solution  $\varphi(x)$  sur l'intervalle  $0 \leq x < +\infty$  on suppose que les fonctions données soient continues et que pour

un certain  $c$  réel les produits

$$k(x) e^{-cx}, \quad f(x) e^{-ntcx}$$

soient absolument intégrables et possèdent un nombre fini d'intervalles de de croissance et de décroissance sur les intervalles respectif de définition de  $k(x)$  et  $f(x)$

Achevons de définir  $f(x)$  posons  $f(x) = 0$  pour  $x < 0$  et cherchons une fonction  $\varphi(x)$  telle que l'équation (1) soit vérifiée sur l'intervalle  $-\infty < x < +\infty$  tout entier supposons encore que la fonction  $\varphi(x)e^{-cx}$  est absolument intégrable sur cet intervalle pour appliquer le théorème de convolution à la transformation bilatérale de Laplace nous devons avoir pour intervalles d'intégration l'intervalle  $-\infty < x < +\infty$

procédons comme suit introduisons les fonctions

$$(2) \quad \varphi_+(x) = \begin{cases} 0 & (x > 0) \\ \varphi(x) & (x < 0) \end{cases} \quad \varphi_-(x) = \begin{cases} -\varphi(x) & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

l'équation (1) s'écrit alors sous la forme

$$\varphi_+(x) - \varphi_-(x) = f(x) - \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)\varphi_-(t) dt \quad (3)$$

introduisons la transformation bilatérale de Laplace

$$\phi^+(s) = l_2(\varphi_+); \phi^-(s) = l_2(\varphi_-); f(s) = l_2(f); l(s) = l_2(k)$$

ou  $s = (c + \tau i)$  les transformations indiquées indiquées ayant lieu sous réserve de la convergence absolue des intégrales en vertu de (3)

puisque  $f(x) = 0$  pour  $x < 0$  il vient

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

**Exemple 1.** 1. Posons dans l'équation (1)

$$f(x) = e^{-|x|}; \quad k(x) = \begin{cases} \lambda e^{-x} & \text{pour } x \leq 0, \\ 0 & \text{pour } x > 0, \end{cases}$$

i.e. l'équation est de la forme

$$\varphi(x) = e^{-|x|} - \lambda \int_x^{+\infty} e^{x-t} \varphi(t) dt$$

Les transformation de Fourier de  $f(x)$  et  $k(x)$  s'écrivent

$$F(\alpha) = \frac{2}{1 + \alpha^2}; \quad K(\alpha) = \frac{\lambda}{1 - i\alpha}; \quad 1 - K(\alpha) = \frac{1 - \lambda - i\alpha}{1 - i\alpha}$$

et donc  $k(\alpha) \neq 1$  pour  $\lambda - 1$  non nul et non imaginaire pur. La transformée de fourier  $\Phi(\alpha)$  de la solution a pour expression (3) :

$$\Phi(\alpha) = \frac{2}{(\alpha - i)(\alpha + i - \lambda i)}.$$

Nous pouvons écrire

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{(\alpha - i)(\alpha + i - \lambda i)} d\alpha.$$

cette intégrale se calcule aisément au moyen des résidus. L'on prendra toutefois soin de distinguer les cas  $x \geq 0$  et  $x < 0$ , de même que  $\operatorname{Re}(1 - \lambda) > 0$  et  $\operatorname{Re}(1 - \lambda) < 0$ .

On obtient en définitive

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{2}{2-\lambda} e^{-x} & (x > 0) \\ \frac{2}{2-\lambda} e^{(1-\lambda)x} & (x \leq 0) \end{cases} \quad (\operatorname{Re}(1 - \lambda) > 0);$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{2}{2-\lambda} (e^{-x} - e^{(1-\lambda)x}) & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases} \quad (\operatorname{Re}(1 - \lambda) < 0).$$

Lorsque  $\lambda = 2$  la solution s'écrit sous la forme  $\varphi(x) = -2xe^{-x}$  si  $(x > 0)$ ,  $\varphi(x) = 0$  si  $(x \leq 0)$ .

**Exemple2.**

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_x^{+\infty} e^{-|x-t|} \varphi(t) dt, \quad (7)$$

pour laquelle  $k(x) = \lambda e^{-|x|}$  et

$$K(\alpha) = \frac{2\lambda}{1 + \alpha^2},$$

d'où

$$1 - K(\alpha) = \frac{\alpha^2 + 1 - 2\lambda}{1 + \alpha^2},$$

donc  $1 - 2\lambda$  doit être non identiquement nul et non négatif.

En vertu de (5) l'on a

$$K_1(\alpha) = \frac{K(\alpha)}{1 - K(\alpha)} = \frac{2\lambda}{1 - 2\lambda + \alpha^2},$$

d'où

$$k_1(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix\alpha}}{1 - 2\lambda + \alpha^2} d\alpha.$$

En appliquant le théorème des résidus où l'on prendra soin de distinguer les cas  $x > 0$  et  $x < 0$ , on obtient

$$k_1(\alpha) = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - 2\lambda}} e^{-|x|\sqrt{1-2\lambda}};$$

la partie réelle de  $\sqrt{1 - 2\lambda}$  étant supposée positive. On a en définitive

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\lambda}{\sqrt{1 - 2\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-t|\sqrt{1-2\lambda}} f(t) dt,$$

Si  $f(x)$  est une fonction bornée, alors  $\varphi(x)$  le sera également. S'agissant de l'équation homogène (7) on obtient les solutions

$$\varphi(x) = C_1 e^{\sqrt{1-2\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{1-2\lambda}x} \quad (\lambda \neq \frac{1}{2}) \quad (8)$$

et

$$\varphi(x) = C_1 + C_2x \quad (\lambda = \frac{1}{2}) \quad (9)$$

Portons les expressions (8) et (9) dans le second membre de (7); pour que l'intégrale ait un sense, il est nécessaire que la partie réelle du radical  $\sqrt{1-2\lambda}$  soit contenue a l'interieur de l'intervalle  $[-1;1]$ , ou qu'elle soit nulle ( $\lambda = \frac{1}{2}$ ). Si  $1-2\lambda < 0$ , laformule (8) nous donne les solutions bornées  $\sin \sqrt{1-2\lambda}x$  et  $\cos \sqrt{1-2\lambda}x$ .

**Exemple3 :**

la fonction

$$\phi_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \varphi(t) \sin xtdt$$

est dite transformée de Fourier en *sinus* de  $\varphi(x)$ .

la fonction

$$\phi_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \varphi(t) \cos xtdt$$

est dite transformée de Fourier en *cosinus* de  $\varphi(x)$

Les formules des transformtions réciproques sont respectivement

$$\left. \begin{aligned} \varphi(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \phi_s(x) \sin tx dx \\ \varphi(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \phi_c(x) \cot sx dx \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6)$$

**exemple**

Résoudre l'equation intégrale

$$\int_0^{+\pi} \varphi(t) \sin xtdt = e^{-x} \quad (x > 0)$$

Solution . La fonction  $\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-x}$  est évidemment la transformation de fourier en*sinus* de la fonction cherchée . Appliquons la formule (6) (formule d'nversion de la trasformation de Fourier en *sinus*) il vient

$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-x} \sin xtdx = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\pi} e^{-x} \sin xtdx$$

la dernière intégrae se calcule en intégrant deux fois par parties

Nous avons

$$\int_0^{+\pi} e^{-x} \sin x dx = \frac{t}{1+t^2}$$

de sorte que

$$\varphi(t) = \frac{2}{\pi} \frac{t}{1+t^2}$$

# Bibliographie

- [1] **A.KHIRANI** : Equations Intégrales Lineaires de Volterra .Mémoire de Magister. Université de M'sila 2011.
- [2] **B.GAGUI** : Résolution Des Equations Intégrales Par Les Methodes Adaptatives Mémoire de Magister Université de M'sila 2006.
- [3] **C .Gasquet.P.Witomski** : Analyse de fourier et application
- [4] **M.NADIR** : Cours d'analyse fonctionnelle, université de M'sila 2004.
- [5] **M.NADIR** : Cours sur les Equations Intégrales.Université de M'sila 2008.
- [6] M.Krasnov.A.Kisselev.G.Makarenko :équations intégrales,problèmes et exercices
- [7] **R.P. Kanwal** : *Linear integral equations theory and technique*, Academic press, New York, 1971.