N° d'ordre :

UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUE ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Magister

Spécialité : **Mathématiques**

Option : **Logique mathématique, Langages formels et Analyse non standard**

Par

Brahim ZIANE

SUJET

Relation d'ordre flou et ensemble partiellement fuzzy ordonné

Soutenu publiquement le 15 / 07 / 2010 devant le jury composé de :

B. BOUDERAH	Président	Pr	Université de M'sila
A. AMROUNE	Rapporteur	M. C	Université de M'sila
N. MIDOUNE	Examinateur	M. C	Université de M'sila
L. ZEDAM	Examinateur	M. C	Université de M'sila
R. ZITOUNI	Examinateur	M. C	Université Ferhat Abbas Sétif

Promotion : 2007/2008.

Remerciements et reconnaissances

Je tiens à exprimer ici toute ma gratitude à Monsieur Abdelaziz AMROUNE, Maître de Conférences à l'Université de M'sila, pour l'honneur qu'il m'a fait en assurant la direction du présent mémoire. Je le remercie pour ses précieux conseils et orientations...

Je suis heureux de pouvoir remercier Mr. Brahim BOUDERAH, Professeur à l'université de M'sila, pour avoir accepté de présider le jury de soutenance.

Je remercie profondément Messieurs Nourdine MIDOUNE, Maître de Conférences à l'université de M'sila et Lemnaouar ZEDAM, Maître de Conférences à l'Université de M'sila, d'avoir accepté d'examiner ce travail. J'exprime aussi ma profonde gratitude à Monsieur Rachide ZITOUNI, Maître de Conférences à l'Université de Ferhat Abbas Sétif, d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je n'oublierai pas de remercier ma famille qui m'a toujours encouragé et soutenu, ainsi que tout mes amis.

Je dédie ce modeste travail :
A mes très chers parents.
A toute ma famille. . .

Table des matières

Introduction

La théorie des sous-ensembles flous, débuté en 1965 avec la publication de l'article "fuzzy sets" (ensembles flous) par Lotfi ZADEH, dans la revue "information and control". Cette théorie est l'élément de base de la logique floue, une logique qui essaie d'associer l'imprécision inhérente aux phénomènes naturels à la puissance de calcul des ordinateurs, pour réaliser des systèmes de raisonnement intelligents robustes et souples. La logique floue concerne les propriétés d'événements imprécis, elle s'occupe de l'imprécision associée à la description d'un événement, au lieu de l'imprécision associée à son occurrence.

La parution de la notion de relation floue et similarité floue en 1971 dans l'article de Monsieur Lotfi ZADEH (Similarity relations and fuzzy orderings) a motivée plusieurs chercheures de travailler sur la théorie des relations floues.

Parmi les chercheures qui ont abordé ce sujet on cite les noms des Messieurs Branimir Šešelja et sa femme Andreja Tepavčević, Ulrich Bodenhofer, Bernard De Baets et Jànos Fodorc, ces derniers ont enrichi considérablement la théorie des relations floues, en introduisant de nouvelles concepts et outils de travail.

Le but de ce travail, est d'assimiler les concepts et les résultats de Branimir Šešelja et Andreja Tepavčević présentés dans leur article, (Fuzzy Ordering Relation and Fuzzy Poset), paru en 2007 d'une part, d'autre part d'assimiler les concepts et les résultats de Ulrich Bodenhofer, Bernard De Baets et Jànos Fodorc, présentés dans leur article, (A compendium of fuzzy weak orders : Representations and constructions), paru en 2007.

Commençons par le travail de Monsieur Branimir. Šešelja, ce dernier a établi la connections entre la relation d'ordre flou (faible) sur un ensemble non vide X et l'ensemble des parties floues d'un ensemble nette partiellement ordonné sur X (Fuzzy poset), prouvés et plusieurs propriétés des coupes de structures.

Le travail d'U. Bodenhofer donne une vue d'ensemble tout à fait nouvelle de la représentation et la construction de l'ordre flou faible. Dans ce travail U. Bodenhofer s'intéresse aux trois méthodes de représentation de l'ordre flou : (i) Représentations basé sur fonctions score, (ii) Représentations basé sur l'inclusion, (iii) Représentations par décomposition, en ordres linéaires classiques et des relations floues d'équivalence, ce qui facilite également une construction basé sur pseudo-métriques.

Dans le cadre des concepts cités ci-dessus, nous avons essayé de détailler la démonstration de certains théorèmes et propriétés et de démontrer certains théorèmes et propriétés non démontrés dans ces travaux et inspiré certaines définitions. C'est dans ce contexte qu'on a reparti le mémoire en quatre chapitres.

Dans le premier chapitre on donne les définitions et les notions de base, concernant les relations d'ordres classiques, les treillis, et les ensembles flous, ainsi que les relations floues, les normes triangulaires, d'implication et la biimplication résiduelle.

Dans le deuxième chapitre on rappel également les définitions d'ordre flou et poset et poset flou. On discute aussi les deux aspects, concernant les treillis flous comme structure algébrique et le deuxième aspect qui considère les treillis comme cas particulier de l'ensemble flou ordonné. On donne aussi la définition de l'ordre faible, de l'ordre faible flou et comment les coupes d'un ordre faible sont aussi des ordres faibles.

Dans le troisième chapitre on donne les définitions concernant les relations complètement fortes, les relations d'équivalence floues et les relations d'ordres flous faibles au sens d'une t-norme T et l'ordre basé sur une relation d'équivalence, ainsi que la relation entre l'ordre flou faible et l'ordre flou (au sens d'une t-norme). Il donne aussi la définition de L'ensemble antérieur (foreset) et l'après ensemble (afterset), et la construction et représentation de relation qui est basé sur une fonction score.

Le dernier chapitre donne une fuzzification du résulta classique connu "tout ordre faible peut être décompose a un ordre linéaire et une relation d'équivalence", on injecte aussi un ordre faible dans un ensemble partiellement ordonné $(P(X), \subset)$ au moyen de l'application qui à tout élément fixe x de X associe l'ensemble $C_{\{x\}}$ tel que : $C_{\{x\}}(y) = R(x, y), \forall y \in X$, [1], et donné la représentation et la construction de relations qui basés sur inclusion et sur pseudo-métrique.

Chapitre 1

Définitions et notions générales

Résume

Dans ce chapitre nous donnons des définitions et notions de base, concernant les relations d'ordres classiques, les treillis, et les ensembles flous, ainsi que les relations floues tout en attirant notre attention sur les normes triangulaires aux moyens de d'implication et la biimplication résiduelle.

Contenu

1.1 Relations d'ordre classiques

Définition 1.1.1 *Une relation binaire R de l'ensemble X vers Y est une partie de $X \times Y$.*

Définition 1.1.2 *Une relation binaire R sur un ensemble non vide X, est une partie de $X \times X$.*

Notation 1.1.3 La notation $(x, y) \in R$ (ou xRy) signifie que le couple (x, y) appartient à la relation R. On écrit $(x, y) \notin R$ (ou $xR^c y$) dans le cas contraire.

Définition 1.1.4 [21] *Soit R une relation binaire sur un ensemble non vide X.*

R est réflexive $\Leftrightarrow \forall x \in X : xRx$.

R est irréflexive $\Leftrightarrow \forall x \in X : xR^c x$.

R est faiblement réflexive $\Leftrightarrow \forall x, y \in X : xRy \Rightarrow xRx$ et yRy.

R est symétrique $\Leftrightarrow \forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$.

R est antisymétrique $\Leftrightarrow \forall x, y \in X : (xRy$ et $yRx) \Rightarrow x = y$.

R est transitive $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in X : (xRy$ et $yRz) \Rightarrow xRz$.

Définition 1.1.5 [6] *Une relation R qui est réflexive, antisymétrique et transitive est dite une relation d'ordre sur X. Si pour tout $x, y \in X$, $x \leq y$ ou $y \leq x$, alors on dit que l'ordre est linéaire, ou encore que X est totalement (linéairement) ordonné.*

Définition 1.1.6 *Soit R une relation sur définie sur X. Le dual de R est la relation R^d, définie comme suit, pour tout $(x, y) \in X^2$, $xR^d y \Leftrightarrow yRx$.*

Théorème 1.1.7 *Soit R une relation définie sur un ensemble non vide X et R^d son dual.*

R est une relation d'ordre $\Leftrightarrow R^d$ est une relation d'ordre.

Preuve. Soit R une relation d'ordre sur un ensemble non vide X. On va montrer que R^d une relation d'ordre.

1. La réflexivité ;

$$
\begin{aligned}
R \text{ réflexive} &\Leftrightarrow \forall x \in X : (x, x) \in R, \\
&\Leftrightarrow \forall x \in X : (x, x) \in R^d, \\
&\Leftrightarrow R^d \text{ réflexive.}
\end{aligned}
$$

2. L'antisymétrie ;

$$\begin{aligned} R \text{ est antisymétrique} &\Leftrightarrow \forall x, y \in X : ((x,y) \in R \text{ et } (y,x) \in R \Rightarrow x = y), \\ &\Leftrightarrow \forall x, y \in X : (x,y) \in R^d \text{ et } (y,x) \in R^d \Rightarrow x = y, \\ &\Leftrightarrow R^d \text{ est antisymétrique.} \end{aligned}$$

Alors, R^d est antisymétrique

3. La transitivité ;

$$\begin{aligned} R \text{ est transitive} &\Leftrightarrow \forall x, y, z \in X : [(x,y) \in R \text{ et } (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R]. \\ &\Leftrightarrow \forall x, y, z \in X : (x,y) \in R^d \text{ et } (y,z) \in R^d \Rightarrow (x,z) \in R^d. \\ &\Leftrightarrow R^d \text{ est transitive.} \quad \square \end{aligned}$$

Définition 1.1.8 [7] *Un ensemble partiellement ordonné (brièvement Poset*[1]*) est un ensemble non vide P muni d'une relation d'ordre R (pas nécessairement linéaire).*

Définition 1.1.9 [6] *Un ensemble ordonné est un couple $P = (X, R)$ où X est un ensemble non vide, R est un ordre sur X. Si R est un ordre total, $P = (X, R)$ est alors appelé un ensemble totalement ordonné (ou ensemble linéairement ordonné ou chaîne).*

Exemple 1.1.10 Soit $X = \{a, b, c, d, e\}$ et $P = (X, R)$ l'ensemble ordonné où R est l'ordre suivant sur X :

$R = \{(a,b), (a,e), (c,b), (c,d), (c,e), (d,e), (a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e)\}$.

On peut représenter l'ensemble ordonné P par un « réseau » dans le plan dont les points correspondent aux éléments de X et les arcs fléchés aux couples de R,

les boucles représentant les couples de la forme (x, x).

On peut aussi le représenter au moyen de tables.

[1] *Poset : **P**artially **o**rdered **set**.*

R	a	b	c	d	e
a	$\times$	$\times$			$\times$
b		$\times$			
c		$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
d				$\times$	$\times$
e					$\times$

ou bien

R	a	b	c	d	e
a	1	1	0	0	1
b	0	1	0	0	0
c	0	1	1	1	1
d	0	0	0	1	1
e	0	0	0	0	1

Définition 1.1.11 [6] *Soit R une relation sur un ensemble X.*

▶ *R est un ordre strict si elle est irréflexive antisymétrique et transitive. Un ensemble strictement ordonné est un couple $P = (X, R)$ où X est un ensemble et R un ordre strict sur X.*

▶ *L'ordre strict R est dit strictement total s'il est tel que $(x \neq y \text{ et } xR^c y)$ impliquent yRx. On dit alors que P est un ensemble strictement totalement ordonné.*

1.2 Treillis

Définition 1.2.1 *Un ensemble ordonné L est un treillis si toute paire de ses éléments admet un infimum noté $x \wedge y$ et un supremum noté $x \vee y$. Un treillis sera souvent noté $(L, \leq, \wedge, \vee)$.*

Définition 1.2.2 *Un treillis complet L est un treillis, tel que toute partie de L admet une borne supérieure et une borne inférieure dans L.*

Définition 1.2.3 [3] *Soit L un treillis complet, on dit que a $(a \in L - \{0\})$ est un atome de L s'il couvre le zéro, c'est-à-dire : $\forall x \in L : 0 \leqslant x \leqslant a \Rightarrow (x = 0$ ou $x = a)$.*

Définition 1.2.4 [21] *Un monolithe est un treillis qui possède un seul atome.*

Définition 1.2.5 [21] *Chaque treillis complet L vérifiant :*

$[\forall x \in L - \{0\}, \exists a\,(a \text{ atome}) \in L - \{0\}, a \leqslant x]$, *est dite atomistique.*

Définition 1.2.6 [21] *Un treillis complet L vérifiant :*
$\forall x \in L - \{o\}, \exists a_i (i \in I,\ a_i$ *atome) tel que* $: x = \bigvee_{i \in I} a_i$*, est dit treillis engendré par les atomes.*

1.3 Sous-ensembles flous

Définition 1.3.1 [22], [20] *Soit L un treillis complet, S un ensemble non vide.*
Un sous-ensemble flou sur S est une application $\mu : S \longrightarrow L$.
Le sous-ensemble classique est un cas particulier d'un sous-ensemble flou, défini comme suit $\mu : S \longrightarrow \{0, 1\}$.
Définition 1.3.2 [22], [20] *Soit $\mu : S \to L$ un ensemble flou sur S et $\alpha \in L$.*
On appelle α-coupe de μ l'ensemble classique noté μ_α, tel que $\mu_\alpha = \{x \in S, \mu(x) \geqslant \alpha\}$.
Une α-coupe strict de μ est un ensemble classique noté par $\mu_\alpha^>$, tel que $\mu_\alpha^> = \{x \in S, \mu(x) > \alpha\}$.

1.4 Relations floues

Définition 1.4.1 *Soit X un ensemble non vide. Une relation floue ρ sur X est un sous-ensemble flou de X^2.*
Définition 1.4.2 *Une α-coupe de ρ est un sous ensemble de X^2 noté par ρ_α, tel que*
$\rho_\alpha = \{(x, y) \in X^2 : \rho(x, y) \geqslant \alpha\}$.
Une α-coupe strict de ρ est un sous ensemble de X^2 noté par $\rho_\alpha^>$, tel que
$\rho_\alpha^> = \{(x, y) \in X^2 : \rho(x, y) > \alpha\}$.
Définition 1.4.3 *Soit $\rho : X^2 \longrightarrow L$ une relation floue. Une α-coupe de ρ est un sous ensemble classique ρ_α de X^2, tel que :*

$$\rho_\alpha(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ si } \rho(x, y) \geqslant \alpha; \\ 0 \text{ si } \rho(x, y) < \alpha. \end{cases}$$

lemme 1.4.4 *Soit ρ une relation floue sur X.*

Alors, pour tout $x, y \in X$ et $\alpha \in L - \{0\}$, $\rho(x,y) = \sup\limits_{\alpha \in L-\{0\}} \alpha \cdot \rho_\alpha(x,y)$.

Preuve. Soient $x, y \in X$, on pose $\rho(x,y) = \alpha$. Alors, $\rho_\alpha(x,y) = 1$,

donc, $\rho(x,y) = \alpha \cdot \rho_\alpha(x,y)$. Alors, $\rho(x,y) \leqslant \sup\limits_{\alpha \in L-\{0\}} \alpha.\rho_\alpha(x,y)$..........(1).

D'autre part pour tout $x, y \in X$, on a : $\begin{cases} \rho_\alpha(x,y) = 0 \text{ si } \rho(x,y) < \alpha \\ \rho_\alpha(x,y) = 1 \text{ si } \rho(x,y) \geqslant \alpha \end{cases}, \forall \alpha \in L - \{0\}$.

D'où, $\begin{cases} \alpha \cdot \rho_\alpha(x,y) = 0 \text{ si } \rho(x,y) < \alpha \\ \alpha \cdot \rho_\alpha(x,y) = \alpha \text{ si } \rho(x,y) \geqslant \alpha \end{cases}, \ \forall \alpha \in L - \{0\}$.

Alors, dans les deux cas on a : $\alpha \cdot \rho_\alpha(x,y) \leqslant \rho(x,y), \forall \alpha \in L - \{0\}$.

Donc, $\sup\limits_{\alpha \in L-\{0\}} \rho_\alpha(x,y) \leqslant \rho(x,y)$..........(2).

De (1) et(2) on a : $\sup\limits_{\alpha \in L-\{0\}} \rho_\alpha(x,y) = \rho(x,y)$. $\square$

1.5 Normes triangulaires

Définition 1.5.1 *On appelle norme triangulaire (brièvement t-norme) ; toute application $T : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$. Satisfait les conditions suivantes :*

1. *$T(x, T(y,z)) = T(T(x,y), z)$, pour tous $x, y, z \in [0,1]$; (associativité),*
2. *$T(x,y) = T(y,x)$, pour tous $x, y \in [0,1]$; (commutativité),*
3. *$x \leq y$ et $z \leq t \Rightarrow T(x,z) \leq T(y,t)$, pour tous $x, y, z, t \in [0,1]$; (non-décroissante),*
4. *$T(x,1) = x$, pour tout $x \in [0,1]$; (1 est l'élément neutre).*

Définition 1.5.2 [3] *Une t-norme T est appelée continue à gauche si et seulement si tout application partielle $T(x,.)$ et $T(.,x)$ sont continues à gauches.*

Définition 1.5.3 [3] *Une t-norme T est dite archimédienne si seulement si, $\forall x, y \in]0,1[: \exists n \in \mathbb{N} \ / \ T(\underbrace{x, x, x, ..., x}_{n \text{ fois}}) < y$.*

[1] $(x, T(x,x)) = (T(x,x), x) = (x,x,x)$

Définition 1.5.4 [3] *Une t-norme continue T est dite archimédienne si, seulement si, elle n'a pas d'élément idempotent non trivial tel que $T(x,x) < x$ pour tout $x \in]0,1[$.*

Exemple 1.5.5 Les trois opérations suivantes sont les t-normes les plus connues

$$T_M(x,y) = \min(x,y), \quad T_P(x,y) = x \cdot y, \quad T_L(x,y) = \max(x+y-1,0).$$

Les trois opérations sont continues et ordonnées comme suit $T_L \leq T_P \leq T_M$.

On va montrer que, $T_P \leq T_M$ et $T_L \leq T_P$.

En effet :

Soient $x, y \in [0,1]$,

$$\begin{cases} x \cdot y \leq x, \\ x \cdot y \leq y, \end{cases} \Rightarrow x \cdot y \leq \min(x,y) \Rightarrow T_P(x,y) \leq T_M(x,y).$$

Montrons maintenant que, $T_L \leq T_P$.

Soient $x, y \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} \text{On a } : \begin{cases} x \leq 1, \\ y \leq 1, \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} (x-1) \leq 0, \\ (1-y) \geq 0, \end{cases} \\ &\Rightarrow (x-1)(1-y) \leq 0, \\ &\Rightarrow x - xy + y - 1 \leq 0, \\ &\Rightarrow x + y - 1 \leq x \cdot y. \end{aligned}$$

Donc, on a : $x + y - 1 \leq x \cdot y$ et $0 \leq x \cdot y$, alors, $\max(x+y-1,0) \leq x \cdot y$, d'où $T_L \leq T_P$.

Définition 1.5.6 (Klement et Mesiar. [13], Schweizer et Sklar [19]) *Une application, $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ est une t-norme Archimédienne continue si et seulement s'il existe une fonction continue strictement décroissante $f : [0,1] \to [0,+\infty]$ avec $f(1) = 0$, appelée fonction génératrice additive. Pour tout $x, y \in [0,1]$, la condition suivante est vérifiée, $T(x,y) = f^{-1}(\min(f(x)+f(y), f(0)))$.*

Remarque 1.5.7 La fonction génératrice additive f au dessus, est déterminée uniquement à une constante multiplicative positive près.

Exemple 1.5.8 (Bodenhofer, U. [3]) On sait que f est une fonction génératrice additive de la t-norme T,

donc on a, $T(x,y) = f^{-1}(\min(f(x)+f(y), f(0)))$.

Montrons que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = 1 - x$,

est une fonction génératrice additive pour T_L.

Il est facile de montrer que f est continue, strictement décroissante,

$f(1) = 0$ et $f^{-1}(x) = 1 - x$.

On va vérifier que $T_L(x,y) = f^{-1}(\min(f(x)+f(y), f(0)))$.

Si $x + y - 1 > 0$, on a, $T_L(x,y) = \max(x+y-1, 0) = x+y-1$. Alors,

$$\begin{aligned} f^{-1}(\min(f(x)+f(y), f(0))) &= f^{-1}(\min(2-x-y, 1)) \\ &= 1-2+x+y = x+y-1 \quad = T_L(x,y). \end{aligned}$$

Si $x+y-1 < 0$, alors $1-x-y > 0$, donc $T_L(x,y) = \max(x+y-1, 0) = 0$.

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} f^{-1}(\min(f(x)+f(y), f(0))) &= f^{-1}(\min(2-x-y, 1)); \\ &= f^{-1}(1) = 1-1 = 0. \end{aligned}$$

(car $x+y-1 < 0 \Rightarrow 1-x-y > 0 \Rightarrow 2-x-y > 1$) .

D'où, $T_L(x,y) = f^{-1}(\min(f(x)+f(y), f(0)))$.

On va montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x)$ =-$\ln(x)$,

est une fonction génératrice additive pour T_P.

Il est facile de montrer que f est continue, strictement décroissante,

$f(1) = 0$ et $f^{-1}(x) = e^x$.

Il reste à montrer que, $T_P(x,y) = f^{-1}(\min(f(x)+f(y), f(0)))$.

Soient, $x, y \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} f^{-1}(\min(f(x)+f(y), f(0))) &= f^{-1}(f(x)+f(y)) &&= f^{-1}(-\ln(x)\text{-}\ln(y)); \\ &= f^{-1}(-\ln(x \cdot y)) &&= e^{\ln(x \cdot y)} = x \cdot y = T_P(x,y). \end{aligned}$$

Donc, f est une fonction génératrice additive pour T_P.

1.6 Implications et biimplications résiduelles

Définition 1.6.1 (Gottwald, [11], Hajek, P. [12], Klement, E.P., Mesiar, R. [13]) *Soit T une t-norme. Une implication résiduelle est donnée par :*

$$\overrightarrow{T}(x,y) = \sup\{u \in [0,1] / T(x,u) \leq y\}$$

A l'égard de l'état complet nous inscrivons les propriétés fondamentales suivantes :

Proposition 1.6.2 (Gottwald, [11], Hajek, P. [12], Klement, E.P., Mesiar, R. [13]) *Pour tous* $x, y, z \in [0,1]$.

$(I\ 1)$ $x \leq y$ *si, et seulement si,* $\overrightarrow{T}(x,y) = 1$.

$(I\ 2)$ $T(x,y) \leq z$ *si, et seulement si,* $x \leq \overrightarrow{T}(y,z)$.

$(I\ 3)$ $T(\overrightarrow{T}(x,y), \overrightarrow{T}(y,z)) \leq \overrightarrow{T}(x,z)$.

$(I\ 4)$ $\overrightarrow{T}(1,y) = y$.

$(I\ 5)$ $T(x, \overrightarrow{T}(x,y)) \leq y$.

$(I\ 6)$ $y \leq \overrightarrow{T}(x, T(x,y))$.

Preuve. [2] $(I\ 1)$. " $\Rightarrow$ ". Soit $x \leq y$. On a : $\mu \leq 1$ car $\mu \in [0,1]$.

Alors, $T(x,\mu) \leq T(y,1) = y$, $\forall \mu \in [0,1]$.

Donc, $\vee \{\mu \in [0,1], T(x,\mu) \leq y\} = 1$.

D'où, $\overrightarrow{T}(x,y) = 1$.

" $\Leftarrow$ ". On a : $\overrightarrow{T}(x,y) = 1 \Rightarrow \vee \{\mu \in [0,1], T(x,\mu) \leq y\} = 1 \Rightarrow T(x,1) \leq y \Rightarrow x \leq y$.

$(I\ 2)$. $T(x,y) \leq z \Leftrightarrow x \leq \overrightarrow{T}(y,z)$. " $\Rightarrow$ ". Soient $x, y, z \in [0,1]$ et soit $T(x,y) \leq z$.

On a : $\overrightarrow{T}(y,z) = \vee \{\mu \in [0,1], T(y,\mu) \leq z\}$ et on a, $T(x,y) \leq z$.

Alors, $x \in \{\mu \in [0,1], T(y,\mu) \leq z\}$.

Donc, $x \leq \vee \{\mu \in [0,1], T(y,\mu) \leq z\}$.

D'où, $x \leq \overrightarrow{T}(y,z)$. " $\Leftarrow$ ". On a : $x \leq \overrightarrow{T}(y,z) = \vee \{\mu \in [0,1], T(y,\mu) \leq z\} = \mu_0$.

Donc, $x \leq \mu_0$. Alors, $T(x,y) \leq T(y,\mu_0) \leq z$. D'où, $T(x,y) \leq z$.

$(I\ 3)$. On pose :

$$\begin{cases} u_0 = \overrightarrow{T}(x,y) = \vee \{u \in [0,1] : T(x,u) \leq y\}; \\ v_0 = \overrightarrow{T}(y,z) = \vee \{v \in [0,1] : T(y,v) \leq z\}; \\ w_0 = \overrightarrow{T}(x,z) = \vee \{w \in [0,1] : T(x,w) \leq z\}. \end{cases}$$

[2] La preuve est une contribution personnelle.

On sait que, $T(x,u_0) \leq y$. Alors, $T(T(x,u_0),v_0) \leq T(y,v_0) \leq z$,
d'où $T(x,T(u_0,v_0)) \leq z$.
Donc,$T(u_0,v_0) \in \{w \in [0,1], T(x,w) \leq z\}$, alors $T(u_0,v_0) \leq w_0$.
D'où, $T\left(\overrightarrow{T}(x,y), \overrightarrow{T}(y,z)\right) \leq \overrightarrow{T}(x,z)$.
$(I\ 4)$. Pour tout $y \in [0,1]$ on a : $\overrightarrow{T}(1,y) = \vee\{u \in [0,1], T(1,u) \leq y\} = y$.
$(I\ 5)$. $T\left(x, \overrightarrow{T}(x,y)\right) \leq y$, on a : $T\left(\overrightarrow{T}(1,x), \overrightarrow{T}(x,y)\right) \leq \overrightarrow{T}(1,y) \leq y$, (d'après $(I\ 3)$).
$(I\ 6)$. $y \leq \overrightarrow{T}(x,T(x,y))$, on a,
$\overrightarrow{T}(x,T(x,y)) = \vee\{u \in [0,1] : T(x,u) \leq T(x,y)\} \geq y$. $\square$

En autre, $\overrightarrow{T}$ n'est pas croissante, et sa première composante est continue à gauche et, non-décroissante, et sa deuxième composante est continue à droite.

Proposition 1.6.3 *Si T est une t-norme continue, alors on a la propriété suivante :*
Pour tout $x,y,z \in [0,1]$, $z \geq x \Rightarrow \overrightarrow{T}(x,y) = \overrightarrow{T}(\overrightarrow{T}(z,x), \overrightarrow{T}(z,y))$........$(I\ 7)$.

Preuve. [3] Soient $x,y,z \in [0,1]$, on a,
$\overrightarrow{T}\left(\overrightarrow{T}(z,x), \overrightarrow{T}(z,y)\right) = \vee\left\{u \in [0,1] / T\left(\overrightarrow{T}(z,x), u\right) \leq \overrightarrow{T}(z,y)\right\}$.
D'après $(I\ 3)$ on a, $T\left(\overrightarrow{T}(z,x), \overrightarrow{T}(x,y)\right) \leq \overrightarrow{T}(z,y)$.
Donc, $\overrightarrow{T}(x,y) \in \left\{u \in [0,1] / T\left(\overrightarrow{T}(z,x), u\right) \leq \overrightarrow{T}(z,y)\right\}$,
alors $\overrightarrow{T}(x,y) \leq \overrightarrow{T}\left(\overrightarrow{T}(z,x), \overrightarrow{T}(z,y)\right)$. $\square$

Définition 1.6.4 [4] *Soit T une t-norme. Une biimplication résiduelle T est définie comme suit :*

$$\overleftrightarrow{T}(x,y) = T(\overrightarrow{T}(x,y), \overrightarrow{T}(y,x)).$$

Proposition 1.6.5 (Gottwald, [11], Hajek, P. [12]) *La biimplication de T vérifiée les assertions suivantes : Pour tous $x,y,z \in [0,1]$,*
$(B\ 1)$ $\overleftrightarrow{T}(x,y) = 1$ *si, et seulement si,* $x = y$.
$(B\ 2)$ $\overleftrightarrow{T}(x,y) = \overleftrightarrow{T}(y,x)$.
$(B\ 3)$ $\overleftrightarrow{T}(x,y) = \min(\overrightarrow{T}(x,y), \overrightarrow{T}(y,x))$.

[3] La preuve est une contribution personnelle.

$(B\ 4)$ $T(\overleftrightarrow{T}(x,y), \overleftrightarrow{T}(y,z)) \leq \overleftrightarrow{T}(x,z)$.

$(B\ 5)$ $\overleftrightarrow{T}(x,y) = \overrightarrow{T}(\max(x,y), \min(x,y))$.

Preuve. [4] $(B\ 1)$ $\overleftrightarrow{T}(x,y) = 1 \Leftrightarrow x = y$?

On a :

$$\begin{aligned} \text{Si } \overleftrightarrow{T}(x,y) = 1 &\Leftrightarrow T(\overrightarrow{T}(x,y), \overrightarrow{T}(y,x)) = 1, \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{T}(x,y) = 1; \\ \overrightarrow{T}(y,x) = 1. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq y; \\ y \leq x. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

$(B\ 2)$ $\overleftrightarrow{T}(x,y) = \overleftrightarrow{T}(y,x)$. Trivial par la définition.

$(B\ 3)$ $\overleftrightarrow{T}(x,y) = \min(\overrightarrow{T}(x,y), \overrightarrow{T}(y,x))$?

On a : $\overleftrightarrow{T}(x,y) = T\left(\overrightarrow{T}(x,y), \overrightarrow{T}(y,x)\right)$, est vérifiée pour $T = min$.

$(B\ 4)$ $T\left(\overleftrightarrow{T}(x,y), \overleftrightarrow{T}(y,z)\right) \leq \overleftrightarrow{T}(x,z)$?

Soient $x, y, z \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} T\left(\overleftrightarrow{T}(x,y), \overleftrightarrow{T}(y,z)\right) &= T\left(T\left(\overrightarrow{T}(x,y), \overrightarrow{T}(y,x)\right), T\left(\overrightarrow{T}(y,z), \overrightarrow{T}(z,y)\right)\right); \\ &= T\left(T\left(\overrightarrow{T}(x,y), \overrightarrow{T}(y,z)\right), T\left(\overrightarrow{T}(z,y), \overrightarrow{T}(y,x)\right)\right); \\ &\leq T\left(\overrightarrow{T}(x,z), \overrightarrow{T}(z,x)\right); \\ &\leq \overleftrightarrow{T}(x,z). \end{aligned}$$

$(B\ 5)$ $\overleftrightarrow{T}(x,y) = \overleftrightarrow{T}(\max(x,y), \min(x,y))$?

Soient $x, y \in [0,1]$.

Si $x \leq y$, on a : $\overleftrightarrow{T}(\max(x,y), \min(x,y)) = \overleftrightarrow{T}(y,x) = \overleftrightarrow{T}(x,y)$.

Si $y \leq x$, on a : $\overleftrightarrow{T}(\max(x,y), \min(x,y)) = \overleftrightarrow{T}(x,y)$. $\square$

Le long de ce travail on confond entre ensembles flous et leur fonctions d'appartenance (membership functions).

[4] La preuve est une contribution personnelle.

Chapitre 2

Poset flou et l'ordre flou

Résume

Dans cette partie nous rappelons les définitions de l'ordre flou, poset, poset flou, nous discutons les deux aspects concernant les treillis flous comme structure algébrique et nous concentrons notre travail sur le deuxième aspect que considèrent les treillis comme cas particulier d'ensemble flou ordonné. Nous donnons aussi la définition d'ordre faible, d'ordre faible flou et comment les coupes d'un ordre faible sont aussi des ordres faibles.

Contenu

2.1 Ensembles flous ordonnés

Définition 2.1.1 [21] *Soit* $(P, \leq)$ *un ensemble ordonné et* $(L, \wedge, \vee)$ *un treillis complet. Un ensemble flou ordonné est une application* $\mu : P \to L$, *avec* $\leq$ *une relation d'ordre classique donnée sur* P.

2.2 Ordre faible

Définition 2.2.1 [21] *Soit* P *un ensemble non vide et* ρ *une relation sur* P, *alors* ρ *est une relation d'ordre faible sur* P *si et seulement si* ρ *est faiblement réflexive*[1], *antisymétrique et transitive.*

2.3 Ordre faible flou

Définition 2.3.1 [21] *Soit* $(P, \leq)$ *un ensemble ordonné. Nous fuzzifions une relation* $\leq$ *comme une application de* P^2 *dans* $\{0, 1\}$, *nous obtenons une relation d'ordre flou faible sur* P, *comme une application de* P^2 *dans* L *qui est faiblement réflexive*[2], *antisymétrique et transitive.*

Remarque 2.3.2 Il est claire que les coupes d'une relation d'ordre flou faible sur P sont des relations ordres faibles sur P.

Théorème 2.3.3 [21] *Une relation* $\rho : S^2 \to L$ *est une relation d'ordre floue si, et seulement si, toute les coupes (sauf* 0*-coupe) sont des relations d'ordre classiques.*

Preuve. " $\Rightarrow$ ". ρ_α réflexive ?

Soit $\alpha \in L, \alpha \neq 0$ et soit $x \in S$.

On a : $\rho(x, x) = 1 \geqslant \alpha$ et $\forall \alpha \in L$, donc $(x, x) \in \rho_\alpha$.Alors, ρ_α est réflexive.

ρ_α antisymétrique ?

Soit $\alpha \in L, \alpha \neq 0$ et soient $x, y \in S$.

---

[1] *ρ faiblement réflexive $\Leftrightarrow \forall x, y \in X : \rho(x, x) \geq \rho(x, y)$ et $\rho(x, x) \geq \rho(y, x)$.[21]*

[2] *R est faiblement réflexive $\Leftrightarrow \forall x, y \in X : xRy \Rightarrow xRx$ et yRy.[21]*

on a : $(x,y)\in\rho_\alpha$ et $(y,x)\in\rho_\alpha \Rightarrow \rho(x,y)\geqslant\alpha$ et $\rho(y,x)\geqslant\alpha \Rightarrow \rho(x,y)\wedge\rho(y,x)\geqslant\alpha$

$\Rightarrow \rho(x,y)\wedge\rho(y,x)\neq 0 \Rightarrow x=y$, (car ρ antisymétrique).

Alors, ρ_α est antisymétrique.

ρ_α transitive ?

Soit $\alpha\in L,\alpha\neq 0$ et soient $x,y,z\in X,\ (x,y)\in\rho_\alpha$ et $(y,z)\in\rho_\alpha \Rightarrow (x,z)\in\rho_\alpha$?

On a : $(x,y)\in\rho_\alpha$ et $(y,z)\in\rho_\alpha \Rightarrow \rho(x,y)\geqslant\alpha$ et $\rho(y,z)\geqslant\alpha$,

$\Rightarrow \rho(x,y)\wedge\rho(y,x)\geqslant\alpha$. Mais $\rho(x,y)\wedge\rho(y,z)\leqslant\rho(x,z)$.

Donc $\rho(x,z)\geqslant\alpha$. Alors, $(x,z)\in\rho_\alpha$,donc ρ_α est transitive.

Alors, ρ_α est transitive, antisymétrique et réflexive, d'où ρ_α est une relation d'ordre.

" $\Leftarrow$ " On suppose que les coupes de ρ sont des relations d'ordre (sauf 0-coupe).

On va montre qui ρ est une relation d'ordre flou (L-relation d'ordre flou) ?

La réflexivité ?

Soit $\alpha\in L,\alpha\neq 0$ et soit $x\in X$. On a : $(x,x)\in\rho_\alpha \Rightarrow \rho(x,x)\geqslant\alpha$, $\forall\alpha\in L,\alpha\neq 0$.

Donc, $\rho(x,x)=1 \Rightarrow \rho$ est réflexive.

L'antisymétrie ?

Soit $\alpha\in L,\alpha\neq 0$ et soient $x,y\in X$.

Si $x\neq y \Rightarrow (x,y)\notin\rho_\alpha$ ou $(y,x)\notin\rho_\alpha \Rightarrow \rho(x,y)<\alpha$ ou $\rho(y,x)<\alpha$

$\Rightarrow \rho(x,y)\wedge\rho(y,x)<\alpha$, pour tout $\alpha\in L,\ \alpha\neq 0 \Rightarrow \rho(x,y)\wedge\rho(y,x)=0$.

Alors, ρ est antisymétrique.

La transitivité ?

Soit $\alpha\in L,\alpha\neq 0$ et soient $x,y,z\in X$, on a : $\rho(x,y)\in L$ et $\rho(y,z)\in L$,

alors $\rho(x,y)\wedge\rho(y,z)\in L$ car (L treillis complet).

On pose $\rho(x,y)\wedge\rho(y,z)=\alpha$, donc $\rho(x,y)\geqslant\alpha$ et $\rho(y,z)\geqslant\alpha$

$\Rightarrow (x,y)\in\rho_\alpha$ et $(y,z)\in\rho_\alpha \Rightarrow (x,z)\in\rho_\alpha \Rightarrow \rho(x,z)\geqslant\alpha$.

Mais $\rho(x,y)\wedge\rho(y,z)=\alpha$, alors $\rho(x,z)\geqslant\rho(x,y)\wedge\rho(y,z)$. Donc, ρ est transitive.

Alors, ρ est une relation d'ordre floue. $\square$

2.4 Ordres flous

Définition 2.4.1 [21] *Soit X un ensemble non vide, ρ une relation sur X, alors*

ρ réflexive $\Leftrightarrow \forall x \in X : \rho(x,x) = 1$.

ρ faiblement réflexive $\Leftrightarrow \forall x, y \in X : \rho(x,x) \geq \rho(x,y)$ et $\rho(x,x) \geq \rho(y,x)$.

ρ antisymétrique $\Leftrightarrow \forall x, y \in X : x \neq y \Rightarrow \rho(x,y) \wedge \rho(y,x) = 0$.

ρ transitive $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in X : \rho(x,y) \wedge \rho(y,z) \leq \rho(x,z)$.

ρ est une relation d'ordre flou sur X si et seulement si ρ est réflexive, antisymétrique et transitive.

lemme 2.4.2 [21] *Soit $\rho : S^2 \to L$ tel que $S \neq \varnothing$ et L un treillis complet, une relation d'ordre floue qui a un monolithe a, alors le 0-coupe strict $\rho_0^>$ est une relation d'ordre classique sur S.*

Preuve. On a : $\rho_0^> = \{(x,y) \in S^2 : \rho(x,y) > 0\}$, alors, $\rho_0^> = \rho_a = \{(x,y) \in S^2 : \rho(x,y) \geqslant a\}$, car a est un atome. ρ_a est un ensemble d'ordre d'après le théorème 2.3.3.

En effet, pour tout $x \in S$, $\rho(x,x) = 1 > 0 \Rightarrow (x,x) \in \rho_0^>$.

Alors, $\rho_0^>$ est réflexive.

Soient $x, y \in S$, tel que $(x,y) \in \rho_0^>$ et $(y,x) \in \rho_0^>$, donc $\rho(x,y) > 0$ et $\rho(y,x) > 0$.

implique $\rho(x,y) > a$ et $\rho(y,x) > a$ implique $\rho(x,y) \wedge \rho(y,x) > a$ implique,

$\rho(x,y) \wedge \rho(y,x) \neq 0$. Alors, $x = y$ car ρ est antisymétrique.

Donc, $\rho_0^>$ est antisymétrique.

$\rho_0^>$ est transitive ?

Soient $x, y, z \in S$, tel que $(x,y) \in \rho_0^>$ et $(y,z) \in \rho_0^>$, alors $\rho(x,y) > 0$ et $\rho(y,z) > 0$,

$\Rightarrow \rho(x,y) \geqslant a$ et $\rho(y,z) \geqslant a$

$\Rightarrow \rho(x,y) \wedge \rho(y,x) \geqslant a \Rightarrow \rho(x,z) \geqslant a \Rightarrow (x,z) \in \rho_0^>$, alors $\rho_0^>$est transitive.

Donc, $\rho_0^>$ est une relation d'ordre classique sur S. $\square$

Remarque 2.4.3 Le fait que L est monolithe est essentiel, car sinon, le 0-coupe n'est pas nécessairement un ensemble ordonné.

Théorème 2.4.4 [21] *Soit* $\mu : P \to L$ *un ensemble flou ordonné. Alors, l'application* $\rho : P^2 \to L$ *définie par :*

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y; \\ \mu(x) \wedge \mu(y) & \text{si } x < y; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est une relation d'ordre floue.

Preuve. La réflexivité de ρ.

Soit $x \in P$, on a : $\rho(x,x) = 1 \Rightarrow \rho$ est réflexive.

L'antisymétrie de ρ.

Soient $x, y \in P$ tel que $x \neq y \Rightarrow \rho(x,y) \wedge \rho(y,x) = 0$?

$$\text{Si } x \neq y \Rightarrow \begin{cases} x < y; \\ \textit{ou} \\ y < x; \\ \textit{ou} \\ x \text{ et } y \text{ incomparable.} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho(x,y) \wedge \rho(y,x) = \mu(x) \wedge \mu(y) \wedge 0 = 0; \\ \text{ou} \\ \rho(x,y) \wedge \rho(y,x) = 0 \wedge \mu(y) \wedge \mu(x) = 0; \\ \text{ou} \\ \rho(x,y) \wedge \rho(y,x) = 0. \end{cases}$$

Donc, dans tous les cas on a, $\rho(x,y) \wedge \rho(y,x) = 0$, alors ρ est antisymétrique.

La transitive de ρ ?

Soient $x, y, z \in P$, Nous vérifions l'inégalité $\rho(x,y) \wedge \rho(y,z) \leqslant \rho(x,z)$?

Si $x = z$	$\Rightarrow \rho(x,y) \wedge \rho(y,z) \leqslant \rho(x,z) = 1$ *pour tout* y *de* X.
Si $x < z$	$y < x < z \Rightarrow \rho(x,y) \wedge \rho(y,z) = 0 \leqslant \rho(x,z)$, $y = x < z \Rightarrow \rho(x,y) \wedge \rho(y,z) = 1 \wedge \rho(y,z) = \rho(y,z) = \rho(x,z) \leqslant \rho(x,z)$, $x < y < z \Rightarrow \rho(x,y) \wedge \rho(y,z) = \mu(x) \wedge \mu(y) \wedge \mu(y) \wedge \mu(z)$, $= \mu(x) \wedge \mu(y) \wedge \mu(z)$ $\leqslant \mu(x) \wedge \mu(z) = \rho(x,z)$, $x < y = z \Rightarrow \rho(x,y) \wedge \rho(y,z) = \rho(x,y) = \rho(x,z) \leqslant \rho(x,z)$, $x < z < y \Rightarrow \rho(x,y) \wedge \rho(y,z) = 0 \leqslant \rho(x,z)$.
Si $z < x$	$y < z < x \Rightarrow \rho(x,y) \wedge \rho(y,z) = 0 \leqslant \rho(x,z)$, $y = z < x \Rightarrow \rho(x,y) \wedge \rho(y,z) = 0 \leqslant \rho(x,z)$, $z < y < x \Rightarrow \rho(x,y) \wedge \rho(y,z) = 0 \leqslant \rho(x,z)$, $z < y = x \Rightarrow \rho(x,y) \wedge \rho(y,z) = 0 \leqslant \rho(x,z)$, $z < x < y \Rightarrow \rho(x,y) \wedge \rho(y,z) = 0 \leqslant \rho(x,z)$.
Si $x \nleq z$	$y < x$ *et* $y < z \Rightarrow \rho(x,y) \wedge \rho(y,z) = 0 \leqslant \rho(x,z)$, $x < y$ et $z < y \Rightarrow \rho(x,y) \wedge \rho(y,z) = 0 \leqslant \rho(x,z)$, x et y et z incomparables $\rightarrow$ $\rho(x,y) \wedge \rho(y,z) = 0 \leq \rho(x,z)$.

Donc, ρ transitive. Alors, ρ est une relation d'ordre floue dans P. $\square$

Notation 2.4.5 [21] Dans ce que suit on utilise la notation $0 \oplus L$ pour le treillis obtenu par l'addition d'un nouveau plus petit élément à l'ensemble L qui donne un monolithe d'atome 0_L.

Théorème 2.4.6 [21] *Soit* $\mu : P \to L$ *est un sous-ensemble flou ordonné et,* $L^{'} = 0 \oplus L$*, alors l'application* $\rho : P^2 \to L^{'}$ *définie par,*

$$\rho(x,y) = \begin{cases} \mu(x) \wedge \mu(y) & si\ x \leq y; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

, est une relation d'ordre floue faible.

De plus, pour tout $\alpha \in L$*,* μ_α *et* ρ_α *coïncident avec les sous-ensembles ordonnés classiques.*

Preuve. Montrons que ρ est faiblement réflexive.

Soient $x, y \in P$, on a : $\rho(x,x) = \mu(x) \geqslant \mu(x) \wedge \mu(y) = \rho(x,y)$.

$\rho(x,x) = \mu(x) \geqslant \mu(x) \wedge \mu(y) = \mu(y) \wedge \mu(x) = \rho(y,x)$.

Donc, $\forall x, y \in P : \rho(x,x) \geqslant \rho(x,y)$ et $\rho(x,x) \geqslant \rho(y,x)$.

Alors, ρ est faiblement réflexive.

L'antisymétrie de ρ.

Soient $x, y \in P$,

$\rho(x,y) \wedge \rho(y,x) \neq 0 \Rightarrow \rho(x,y) \wedge \rho(y,x) > 0 \Rightarrow (\rho(x,y) > 0$ et $\rho(y,x) > 0)$

$\Rightarrow (x \leq y$ et $y \leq x) \Rightarrow x = y$.

Donc, ρ est antisymétrique.

La transitivité de ρ.

Soient $x, y, z \in P$,

cas	$x \leq z$	$x \leq y$	$y \leq z$	$\rho(x,y) \wedge \rho(y,z) \leqslant \rho(x,z)$
1	1	1	1	1
2	1	1	0	1
3	1	0	1	1
4	1	0	0	1
5	0	1	1	cas impossible
6	0	1	0	1
7	0	0	1	1
8	0	0	0	1

Dons tous les cas on a $\rho(x,y) \wedge \rho(y,z) \leqslant \rho(x,z)$ est vraie, alors ρ est transitive.

Donc, ρ est une relation d'ordre floue faible.

On veut montrer que μ_α est un ensemble ordonné et ρ_α son ordre.

Soit $\alpha \in L$, d'après le théorème 2.3.3 on a : ρ_α est une relation d'ordre sur P.

Soient $x, y \in \mu_\alpha$, alors

$$\mu(x) \geqslant \alpha \text{ et } \mu(y) \geqslant \alpha \Leftrightarrow \mu(x) \wedge \mu(y) \geqslant \alpha \quad \Leftrightarrow \rho(x,y) \geqslant \alpha$$
$$\Leftrightarrow (x,y) \in \rho_\alpha.$$

Donc, ρ_α la relation d'ordre faible classique sur μ_α. $\square$

Théorème 2.4.7 [21] *Soit $\rho : P^2 \to L'$ est une relation d'ordre flou faible où $L' = 0 \oplus L$ est une treillis complet avec un monolithe 0_L, de plus grand élément noté 1_L, et de plus petit élément noté 0.*

Soit $S = \{x \in P \ / \ \rho(x,x) > 0\}$, alors $\mu : S \to L$ définie par :

$\forall x \in S : \mu(x) = \rho(x,x)$ est un (L-poset flou) ensemble flou partiellement ordonné de $(S, \leq)$,

tel que $\leq = \ \rho_0^>$. De plus pour tout $\alpha \in L$, on a :

pour que $(x,y) \in \rho_\alpha$ il faut et il suffit que $x \in \mu_\alpha$ et $y \in \mu_\alpha$.

Preuve. La réflexivité de $\leq$.

Soit $x \in S$ on a : $\mu(x) = \rho(x,x) > 0 \Rightarrow \mu(x) > 0 \Rightarrow (x,x) \in \rho_0^> \ \Rightarrow x \leq x$.

Donc, $\leq$ est réflexive.

L'antisymétrie de $\leq$.

Soient $x, y \in S$ tel que $(x,y) \in \rho_0^>$ et $(y,x) \in \rho_0^> \Rightarrow \rho(x,y) > 0$ et $\rho(y,x) > 0$

$\Rightarrow \rho(x,y) \wedge \rho(y,x) > 0 \Rightarrow x = y$, puisque ρ est une relation d'ordre.

Donc, $\leq$ est antisymétrique.

La transitivité de $\leq$.

Soient $x, y, z \in S$ tel que :

$$\begin{cases} (x,y) \in \rho_0^>; \\ (y,z) \in \rho_0^>. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho(x,y) > 0; \\ \rho(y,z) > 0. \end{cases} \Rightarrow \rho(x,y) \wedge \rho(y,z) > 0 \Rightarrow \rho(x,z) > 0,$$

(car $\rho(x,z) \geqslant \rho(x,y) \wedge \rho(y,z)$).

Alors, $(x,z) \in \rho_0^> \Leftrightarrow x \leq z$. Donc, $\leq$ est transitive.

$\leq$ est une relation d'ordre classique sur S, donc $(S, \leq)$ est un ensemble partiellement ordonné et on a : $\mu : S \to L$ est une application.

On va montrer que μ est un ensemble partiellement ordonnés flou sur S, donc il faut et il suffit de montrer $\forall \alpha \in L : (\mu_\alpha, \leq)$ est un ensemble partiellement ordonné au sens classique.

Puisque $(P, \leq)$ est un ensemble ordonné d'après le lemme 2.4.2, alors les coupes de μ sont des sous-ensembles ordonnés, donc μ est un ensemble flou ordonné. $\square$

Proposition 2.4.8 [21] *Soit $\rho : S^2 \to L$ une relation d'ordre flou faible tel que L est un treillis atomistique avec A l'ensemble des atomes de L. Alors, il existe une famille d'ensembles partiellement ordonnés $\{P_a \ , \ a \in A\}$ déduite de ρ, tel que tout ensemble partiellement ordonné de cette famille est maximal au sens de l'inclusion des ensembles. Et tout élément de cette famille est un coupe de la relation floue ρ. De plus toute coupe de ρ est un sous-ensemble partiellement ordonné d'un ensemble partiellement ordonné de cette famille.*

Preuve. D'après le théorème 2.3.3 toutes les coupes de ρ (sauf 0-coupe) sont des ensembles partiellement ordonnés.

On a : $\alpha, \beta \in L$, si $\alpha \leqslant \beta \Rightarrow \rho_\beta \subseteq \rho_\alpha$, (Car L est atomistique)

Alors, $\forall \alpha \in L - \{0\}, \exists a \in A : \alpha \geqslant a$, ($A$ l'ensemble des atomes de L).

On a : $\alpha \geqslant a \Rightarrow \rho_\alpha \subseteq \rho_a$, donc ρ_a est maximal.

Donc, on prend la famille $F = \{\rho_a \ , \ a \in A\}$ des ensembles partiellement ordonnés sont maximaux au sens de l'inclusion et on a, tout coupe de ρ est un sous -ensemble partiellement ordonné d'un élément de F. $\square$

Proposition 2.4.9 [21] *Soient L est un treillis atomistique, $\rho : S^2 \to L$, une relation d'ordre floue faible, A l'ensemble des atomes de L.*

Alors, $\rho(x, y) > 0$ si, et seulement si„ il existe $a \in A$ tel que $x \leq y$ dans P_a, où $\{P_a \ , a \in A\}$ l'ensemble partiellement ordonné défini dans la proposition 2.4.8

Preuve. "$\Rightarrow$" Soit $(x, y) \in S^2 : \rho(x, y) > 0$, on pose $\rho(x, y) = \alpha > 0$,

implique $\exists a \in A$ (car L atomistique) tel que $\alpha \geqslant a \Rightarrow \rho_\alpha \subseteq \rho_a$,

$\Rightarrow (x, y) \in \rho_a \Rightarrow x \leq y$.

"$\Leftarrow$" Il existe $a \in A$ tel que $x \leq y$ dans P_a, donc $(x, y) \in \rho_a$,

implique $\rho(x, y) \geqslant a > 0 \Rightarrow \rho(x, y) > 0$. $\square$

Proposition 2.4.10 [21] *Soit $\rho : S^2 \longrightarrow L$ une relation d'ordre flou faible où L est un treillis engendré par les éléments de A, avec A l'ensemble des atomes de L.*

Alors, $\rho(x,y) = \bigvee_{a\in A} a \cdot P_a(x,y)$, tel que : $P_a(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

De plus on a : $a \cdot 1 = a$ et $a \cdot 0 = 0$.

Preuve. On pose $\rho(x,y) = \alpha,\ \alpha \in L - \{0\}$, comme L est un treillis engendre par des atomes, alors il existe a_i ($i \in I,\ a_i$ atome) tel que $\alpha = \bigvee_{i\in I} a_i$. On pose, $A = A_1 \cup A_2$ tel que $A_1 = \{i, i \in I\}$ et $A_2 = \{j, j \notin I\}$.

On a : $\begin{cases} (x,y) \notin \rho_{a_j} & \text{si } j \notin I \\ \rho(x,y) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ et $\begin{cases} (x,y) \in \rho_{a_i} & \text{si } i \in I; \\ \rho(x,y) = 1 & \text{si } x \leq y. \end{cases}$

$$\bigvee_{a\in A} a \cdot P_a(x,y) = \bigvee_{a\in A_1\cup A_2} a \cdot P_a(x,y) = \left(\bigvee_{a\in A_1} a \cdot \underbrace{P_a(x,y)}_{\underset{1}{\shortparallel}} \right) \vee \left(\bigvee_{a\in A_2} a \cdot \underbrace{P_a(x,y)}_{\underset{0}{\shortparallel}} \right)$$

$$= \bigvee_{a\in A_1} a = \alpha = \rho(x,y).$$

Deuxième méthode.

$\rho(x,y) = \alpha \in L,\ P_a(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \leq y \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$,

$x \leq y \Leftrightarrow \exists a \in A : (x,y) \in \rho_a \Leftrightarrow \rho(x,y) \geqslant a$.

Donc, $P_a(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } \rho(x,y) \geqslant a \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$, alors $\alpha \cdot P_a(x,y) = \begin{cases} \alpha \text{ si } \rho(x,y) \geqslant a \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$.

Donc, $\alpha \cdot P_a(x,y) = \alpha = \rho(x,y), \forall \alpha \in L$.

Alors, $a \cdot P_a(x,y) = \rho(x,y) \ \Leftrightarrow \bigvee_{a\in A} a \cdot P_a(x,y) = \bigvee_{a\in A} \rho x, y$

Donc, $\bigvee_{a\in A} a \cdot P_a(x,y) = \rho(x,y)$. $\square$

Chapitre 3

Abrégé de relation d'ordre faible (représentation et construction)

Résumé

Dans ce chapitre nous donnons les définitions concernant les relations complètement fortes, les relation d'équivalence floue au sens d'une t-norme T, l'ordre basé sur une relation d'équivalence, la relation entre l'ordre flou faible et l'ordre flou (au sens d'une t-norme). Nous donnons aussi la définition de L'ensemble antérieur (foreset) et après ensemble (afterset), et la construction et représentation de relation basée sur une fonction de score.

Contenu

3.6 L'ensemble antérieur (foreset) et après ensemble (afterset)

3.7 Constructions et représentations basé sur une fonction score

3.1 Relation T-transitive, relation fortement complète et relation d'ordre flou faible

Définition 3.1 [4] *Soient* $R : X^2 \to [0,1]$ *une relation floue binaire,* T *une t-norme continue à gauche.*

▶ R *est appelée* T*-transitive si et seulement si* $T(R(x,y), R(y,z)) \leq R(x,z)$ *pour tout* $x, y, z \in X$.

▶ R *est fortement complète, si et seulement si* $\max(R(x,y), R(y,x)) = 1$ *pour tout* $x, y \in X$.

▶ R *est une relation d'ordre flou faible si et seulement si* R *est* T*-transitive et fortement complète.*

3.2 Préordres flous au sens d'une t-norme T

Définition 3.2 [4] *Les relations floues qui sont réflexives et* T*-transitives sont appelées préordres flous au sens d'une t-norme* T*, (brièvement* T*-préordre).*

3.3 Relations d'équivalences floues au sens d'une t-norme T

Définition 3.3 [4] *Un* T*-préordre symétrique est appelé une relation d'équivalence floue au sens d'une t-norme* T*, (brièvement* T*-équivalence).*

3.4 Ordre faible flou au sens d'une t-norme T

Définition 3.4 [4] *Tout* T*-transitive fortement complet est appelé un ordre faible flou au sens d'une t-norme* T*, (brièvement* T*-ordre faible).*

3.5 Ordre flou au sens d'une t-norme T et une relation d'équivalence E

Définition 3.5 [4] *Soit $E : X^2 \to [0,1]$ une T-équivalence.*
Une relation floue binaire $L : X^2 \to [0,1]$ est appelé un ordre flou au sens de T et E, brièvement T-E-Ordre, si L est T-transitive et vérifie les deux propriétés suivantes :

1. *E-réflexivité : $E(x,y) \leq L(x,y)$ pour tout $x, y \in X$.*
2. *T-E-antisymétrie : $T(L(x,y), L(y,x)) \leq E(x,y)$ pour tout $x, y \in X$.*

3.6 L'ensemble antérieur (foreset) et après ensemble (afterset)

Définition 3.6.1 [4] *Soient $R : X^2 \to [0,1]$ une relation binaire floue et $x \in X$. Nous définissons l'ensemble antérieur (foreset) de x (en analogie avec le cas classique) comme un ensemble flou $C(x) \in \mathcal{F}(X)$,par : $C(x)(y) = R(y,x)$. Cela exprime le degré avec lequel une valeur donnée $y \in X$ est plus petit ou équivalent à x,* [1].
Dans ce que suit, nous utiliserons aussi la notation $R(.,x)$.
De la même manière on définit l'après ensemble (afterset) de x comme l'ensemble flou $D(x) \in \mathcal{F}(X)$, par $D(x)(y) = R(x,y)$ cela exprime le degré avec lequel une valeur donnée $y \in X$ est plus grande ou équivalente à x, [1].
Nous utiliserons aussi la notation $R(x,.)$.

Avant de continuer ce travail il est utile de mentionner le résulta suivant que nous aurons besoin dans la suite [10], [24].

lemme 3.6.2 [4] *Tout T-préordre $R : X^2 \longrightarrow [0,1]$, satisfait l'égalité suivante :*
pour tout $x, y \in X$, $R(x,y) = \inf_{z \in X} \overrightarrow{T}(R(z,x), R(z,y))$.

Preuve. On a : $T(\alpha,\beta) \leq \gamma \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \leq \overrightarrow{T}(\beta,\gamma) \quad (I\ 2)$.

donc,

$$\begin{aligned} T(R(z,x), R(x,y)) \leq R(z,y) \quad &\Rightarrow \quad T(R(x,y), R(z,x)) \leq R(z,y), \\ &\Rightarrow \quad R(x,y) \leq \overrightarrow{T}(R(z,x), R(z,y)), \text{ pour tout } x,y;z \in [0,1], \\ &\Rightarrow \quad R(x,y) \leq \inf_{z\in X} \overrightarrow{T}(R(z,x), R(z,y)). \end{aligned}$$

D'autre part si on prend $z = x$ on a, $\inf_{z\in X} \overrightarrow{T}(R(z,x), R(z,y)) \leq \overrightarrow{T}(R(x,x), R(x,y)) = R(x,y)$,

donc, $R(x,y) = \inf_{z\in X} \overrightarrow{T}(R(z,x), R(z,y))$. $\square$

Théorème 3.6.3 [4] *Une relation binaire $\lesssim$ définie sur un domaine non vide X est un ordre faible si, et seulement si, il existe un ordre faible total sur un ensemble non vide $(Y, \preccurlyeq)$ et une application $f : X \to Y$ tel que $\lesssim$ peut être représentée de la façon suivante :*

$$\forall x, y \in X : x \lesssim y \textit{ si, et seulement si, } f(x) \preccurlyeq f(y). \tag{3.1}$$

Preuve. " $\Rightarrow$ " $\lesssim$ est une relation d'ordre faible.

On peut définir $C(x) = \{y \in X; y \lesssim x\} = \downarrow x$, on prend $Y = \{C(x) / x \in X\}$, et on définit sur Y une relation $\preccurlyeq$ comme suit : $\forall x, y \in X : C(x) \subset C(y) \Leftrightarrow x \lesssim y$.

Montrons que $\subset$ est une relation d'ordre sur Y.

Soit $x \in X$, on a : $x \lesssim x$, donc $C(x) \subset C(x)$ alors $\subset$ est réflexive.

Soient $x, y \in X$ tel que :

$x \lesssim y$ et $y \lesssim x \Leftrightarrow C(x) \subset C(y)$ et $C(y) \subset C(x) \Leftrightarrow C(x) = C(y)$.

Donc, $\subset$ est antisymétrique.

Soient $C(x), C(y), C(z) \in Y$ tel que :

$$\begin{cases} C(x) \subset C(y); \\ C(y) \subset C(z). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \lesssim y; \\ y \lesssim z. \end{cases} \Leftrightarrow x \lesssim z \Leftrightarrow C(x) \subset C(z).$$

Donc, $\subset$ est transitive.

Montrons que $\subset$ est linéaire.

Soient $C(x), C(y) \in Y$ on a, $x \lesssim y$ ou $y \lesssim x \Rightarrow C(x) \subset C(y)$ ou $C(y) \subset C(x)$, donc $\subset$ est linéaire.

Et on définit l'application $f : X \to Y$ tel que : $f(x) = C(x)$ qui vérifie (3.1) $\square$

Dans le cas ou X est au plus nombrable, Le théorème **3.6.3** peut être fortifié dans le sens suivant : Il est toujours possible de choisir $Y = [0,1]$, c'est-à-dire, pour chaque ordre faible, nous pouvons trouver une application $f : X \to [0,1]$, tel que la représentation 3.1 soit réalisée. En d'autres termes, les ordres faibles sur les domaines dénombrables peuvent toujours être injectés dans l'ordre linéaire naturel sur l'intervalle unité. C'est un résultat classique qui revient à Cantor [5], [14], [17].

Pour la représentation d'autres concepts fondamentaux de la théorie d'ordre : il est connu que les préordres, c'est-à-dire, relations binaires réflexive et transitives, sont uniquement caractérisé comme intersections d'ordres faibles. En analogie avec ce cas classique, les ordres faibles flous sont des concepts fondamentaux dans le modèle de préférence floue [8], [9], [10], [16].

3.7 Constructions et représentations basé sur une fonction de score

Le point de départ de cette section est le théorème 3.6.3. Il est naturel de posé la question suivante : Est ce qu'il y a une généralisation simple de ce théorème au cas d'ordres flous faibles.

Théorème 3.7.1 [4] *Une relation floue binaire $R : X^2 \to [0,1]$ est un T-ordre faible si, et seulement si, il existe un domaine non vide Y, une relation T-équivalence $E : Y^2 \to [0,1]$, un T-E-ordre fortement complète $L : Y^2 \to [0,1]$ et une application $f : X \to Y$ tel que :*

$$\forall x, y \in X : R(x,y) = L(f(x), f(y)) \tag{3.2}$$

Preuve. " $\Leftarrow$ "évident. " $\Rightarrow$ " on a, : R est un T-ordre, on prend :

$$\begin{cases} X = Y, \\ f = Id_X, \\ L(x,y) = R(x,y), \\ E(x,y) = T(L(x,y), L(y,x)). \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que E est réflexif et symétrique.

Il reste de vérifier que E est transitif.

Soient $x, y, z \in X,\ E(x,y) = T(L(x,y), L(y,x))$.

On va montrer que : $T(E(x,y), E(y,z)) \leq E(x,z)$, on a :

$$\begin{aligned} T(E(x,y), E(y,z)) &= T(T(L(x,y), L(y,x)), T(L(y,z), L(z,y))), \\ &= T(T(R(x,y), R(y,x)), T(R(y,z), R(z,y))), \\ &= T(T(R(x,y), R(y,z)), T(R(z,y), R(y,x))), \\ &\leq T(R(x,z), R(z,x)) = E(x,z). \quad \square \end{aligned}$$

Le théorème **3.7.1** peut être vu de deux côtés différents.

D'un côté, c'est une généralisation simple et convenable du théorème **3.6.3** et démontre l'interaction lisse entre ordres faibles flous et ordres flous fortement complets (d'une manière analogue au cas classique).

D'autre côté, la preuve triviale révèle que les ordres faibles flous et les ordres flous fortement complets sont fondamentalement les mêmes concepts. De ce point de vue, le (Théorème **3.7.1**) ne nous fournit pas de nouvelle méthode de construction ou tout nouvel aperçu. Plus d'aperçus seront obtenus potentiellement si nous puissions restreindre le choix de Y ou E à certains cas standard qui pourraient être utilisés pour les constructions dans un chemin plus facile.

Proposition 3.7.2 [4] *Soit une fonction* $f : X \longrightarrow [0,1]$, *La relation floue binaire* $R : X^2 \longrightarrow [0,1]$ *définie par :*

$$R(x,y) = \overrightarrow{T}(f(x), f(y)) \tag{3.3}$$

est un T-ordre faible.

Preuve. La réflexivité.

Soit $x \in X$. On a : $f(x) \leq f(x) \Leftrightarrow \overrightarrow{T}(f(x), f(x)) = 1$ car $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \overrightarrow{T}(\alpha, \beta) = 1$.

Donc, $R(x,x) = 1$.

T-transitivité.

Soient $x, y, z \in X$. $T(R(x,y), R(y,z)) \leq R(x,z)$?

$T\left(\overrightarrow{T}(f(x), f(y)), \overrightarrow{T}(f(y), f(z))\right) \leq \overrightarrow{T}(f(x), f(z)) = R(x,z)$ d'après $(I\ 3)$.

Donc, R est T-réflexive.

La complétude forte.

Soient $x, y \in X$. On a :

$$\begin{cases} f(x) \leq f(y)\,; \\ \text{ou} \\ f(y) \leq f(x)\,. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{T}(f(x), f(y)) = 1; \\ \text{ou} \\ \overrightarrow{T}(f(y), f(x)) = 1. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R(x,y) = 1; \\ \text{ou} \\ R(y,x) = 1. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \max(R(x,y), R(y,x)) = 1.$$

Donc, R est un T-ordre faible.

On va montrer que $\overrightarrow{T}$ est un T-$\overleftrightarrow{T}$-ordre. Il est facile de vérifier que :

$\overleftrightarrow{T}(x,y) = T\left(\overrightarrow{T}(x,y), \overrightarrow{T}(y,x)\right)$ est une relation au sens d'une t-norme T.

En effet, pour tout $x, y \in X$,

$\overleftrightarrow{T}(x,y) = T\left(\overrightarrow{T}(x,y), \overrightarrow{T}(y,x)\right) \leq \overrightarrow{T}(x,y)$, donc la $\overleftrightarrow{T}$-réflexivité.

D'après $(B\ 4)$ $\overrightarrow{T}$ est T-transitive. $\square$

La fonction f dans la proposition **3.7.2** peut aussi être comprise comme un ensemble flou sur X.

Dans cette section (chapitre), nous laissons plutôt cette aspect de côté et adopte l'interprétation classique comme fonction de score.

Proposition 3.7.3 [4] La proposition **3.7.2** *pourrait aussi être déduite directement du* théorème **3.7.1** *et le fait que* $\overrightarrow{T}$ *est un ordre flou sur* $[0,1]$ *au sens de* T *et* $\overleftrightarrow{T}$*.*

(voir [2] Subsection 2.1).

Notons que la construction simple de proposition **3.7.2** n'est pas une caractérisation unique[4], c'est-à-dire il existe un T-ordre faible, qui ne peut pas être représentés au moyen d'une seule fonction de score. Pour démontrer ceci, considérons un ensemble X avec au moins trois éléments, et choisissons un ordre linéaire arbitraire des éléments de X (Lequel existe toujours dû aux résultats de base de la théorie des ordres [18],[23]) et définissons R comme l'ordre linéaire classique, lui-même :

$$R(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \preccurlyeq y; \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Il est clairement que R est un ordre flou faible au sens chaque t-norme T, on suppose qu'il existe une fonction score $f : X \to [0,1]$ telle que la représentation (3.3) est vérifie. Choisissons une chaîne arbitraire de trois éléments distincts x, y, z tel que $x \prec y \prec z$. Alors, il claire que :

$R(z,x) = \overrightarrow{T}(f(z), f(x)) = 0$ et $R(z,y) = \overrightarrow{T}(f(z), f(y)) = 0$,

ce qui implique $\overrightarrow{T}(x,y) \geq \overrightarrow{T}(1,y) = y$, d'après la définition de $\overrightarrow{T}$ et $(I\ 4)$,

il est trivial que $\overrightarrow{T}(x,y) = 0$ peut être atteint pour $y = 0$.

Donc, nous obtenons $f(x) = f(y) = 0$.

Cela entraîne $R(y,x) = \overrightarrow{T}(f(y), f(x)) = \overrightarrow{T}(0,0) = 1$ contradiction.

D'où, nous obtenons que l'ordre faible flou et l'ordre linéaire classique nous peuvent pas être représentés comme dans la proposition **3.7.2**, pour n'importe quelle T-norme choisie. Et par conséquent, justifié l'introduction de la représentabilité d'après proposition **3.7.2** [4], comme une notion distincte.

Définition 3.7.4 [4] *On considère un T-ordre faible et la relation $R : X^2 \to [0,1]$. R est dite représentable s'il existe une fonction $f : X \to [0,1]$, appelée fonction génératrice de score, telle que (*3.3*) soit vérifie.*

Un T_M-ordre faible représentable est appelé (Représentable de Godel [8]).

Exemple 3.7.5 Considérons $X = [0,5]$ et les deux fonctions de score $f_1, f_2, : X \to [0,1]$, telles que :

$f_1(x) = \min(1, \max(0, x-2))$,

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\,, \\ 0,4 \cdot (x-1) & \text{si } x \in [1,2[\,, \\ 0,7 + 0,3 \cdot (x-2) & \text{si } x \in [2,3[\,, \\ 1 & \text{si } x \in [3,5]\,. \end{cases}$$

$R_1(x,y) = \overrightarrow{T}_M(f_1(x), f_1(y))$, $R_2(x,y) = \overrightarrow{T}_M(f_2(x), f_2(y))$,

$R_3(x,y) = \overrightarrow{T}_P(f_1(x), f_1(y))$, $R_4(x,y) = \overrightarrow{T}_P(f_2(x), f_2(y))$,

$R_5(x,y) = \overrightarrow{T}_L(f_1(x), f_1(y))$, $R_6(x,y) = \overrightarrow{T}_L(f_2(x), f_2(y))$.

Théorème 3.7.6 [4] *Soit T une t-norme continue.*

Alors, un T-ordre R est représentable si, et seulement si, la fonction suivante :

$$\overline{f}(x) = \inf_{z \in X} R(z, x)$$

est une fonction génératrice de score de R.

Preuve. " $\Leftarrow$ ". On suppose que $\overline{f}$ est une fonction génératrice de score de R, on va montrer que R est représentable, d'après la définition **3.7.4**, il existe $\overline{f}$ est une fonction génératrice de score de R qui vérifie l'équation : $R(x, y) = \overrightarrow{T}(\overline{f}(x), \overline{f}(y))$. Donc, R est représentable.

" $\Rightarrow$ ". On suppose que R est un T-ordre et représentable, on va montrer que $\overline{f}$ est une fonction génératrice de score de R, c'est-à-dire $R(x, y) = \overrightarrow{T}\left(\overline{f}(x), \overline{f}(y)\right)$?

On a, $\overrightarrow{T}\left(\overline{f}(x), \overline{f}(y)\right) = \overrightarrow{T}\left(\inf_{z \in X} R(z, x), \inf_{z \in X} R(z, y)\right)$

$= \overrightarrow{T}\left(\inf_{z \in X}(\overrightarrow{T} f(z), f(x)), \inf_{z \in X}(\overrightarrow{T}(f(z), f(y))\right)$

$= \overrightarrow{T}\left(\overrightarrow{T}(\sup_{z \in X} f(z), f(x)), \overrightarrow{T}(\sup_{z \in X} f(z), f(y))\right)$, d'après $(I\ 7)$,

on a : $\sup_{z \in X} f(z) \geqslant f(x)$, alors $\overrightarrow{T}\left(\overline{f}(x), \overline{f}(y)\right) = \overrightarrow{T}(f(x), f(y)) = R(x, y)$. $\square$

Le théorème **3.7.6** nous fournit un outil facile à utiliser, pour vérifier si un ordre flou faible est représentable, nous devons vérifier seulement si une fonction spécifique est une fonction génératrice de score [4]. Cependant, notons le besoin que la fonction génératrice de score ne doit pas être unique.

Considérons cette question, et demandons nous sous-quelles conditions la fonction $\overline{f}$ coïncide avec la fonction génératrice de score f.

Donc on suppose que R est représentable comme suit, $R(x, y) = \overrightarrow{T}(f(x), f(y))$, alors on obtient : $\overline{f}(x) = \inf_{z \in X} R(z, x) = \inf_{z \in X} \overrightarrow{T}(f(z), f(x)) = \overrightarrow{T}(\sup_{z \in X}(f(z), f(x))$.

Alors, $\sup_{z \in X} f(z) = 1$, est une condition suffisante pour que f coïncide avec $\overline{f}$

$\overline{f}(x) = \inf_{z \in X} R(z, x) = \inf_{z \in X} \overrightarrow{T}(f(z), f(x)) = \overrightarrow{T}(\sup_{z \in X}(f(z), f(x)) = \overrightarrow{T}(1, f(x)) = f(x)$.

Le théorème suivant nous donne une bonne connaissance sur le chapitre.

Théorème 3.7.7 (Valverde [24]) *On considère une relation binaire floue* $R : X^2 \to [0,1]$*. Alors, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1. R *est un* T*-préordre.*
2. *Il existe une famille non vide de fonctions de score* $(f_i)_{i\in I} : X \to [0,1]$ *telle que :*

$$R(x,y) = \inf_{i\in I} \overrightarrow{T}(f_i(x), f_i(y)) \tag{3.4}$$

Preuve. (2) $\Rightarrow$ (1) ? On va montrer que $R(x,y) = \inf_{i\in I} \overrightarrow{T}(f_i(x), f_i(y))$ est un T-préordre.

R est réflexif ?

Soit $x \in X$, on a : $R(x,x) = \inf_{i\in I} \overrightarrow{T}(f_i(x), f_i(x)) = \inf_{i\in I} 1 = 1$.

Donc, R est réflexif.

R est T-transitive ?

Soient $x, y, z \in X$, on a :

$$\begin{array}{rcl} T(R(x,y), R(y,z)) & = & T\left(\inf_{i\in I} \overrightarrow{T}(f_i(x), f_i(y)), \inf_{i\in I} \overrightarrow{T}(f_i(y), f_i(z))\right), \\ & \leqslant & T\left(\left(\overrightarrow{T}(f_i(x), f_i(y)), \overrightarrow{T}(f_i(y), f_i(z))\right)\right), \\ & \leqslant & \overrightarrow{T}(f_i(x), f_i(z)),\ \forall i \in I, \\ & \leqslant & \inf_{i\in I} \left(\overrightarrow{T}(f_i(x)), f_i(z)\right) = R(x,z). \end{array}.$$

Alors, R est un T-transitive.

D'où, R est un T-préordre.

(1) $\Rightarrow$ (2) ? On suppose que R est un T-préordre, on prend $(f_z)_{z\in X}$ une famille tel que $f_z(x) = R(z,x)$.

Et on a : $\inf_{z\in X} \overrightarrow{T}(f_z(x), f_z(x)) = \inf_{z\in X} \overrightarrow{T}(R(z.x), R(z,y))$ d'après lemme **3.6.2**.

on a : $\inf_{z\in X} \overrightarrow{T}(f_z(x), f_z(x)) = \inf_{z\in X} \overrightarrow{T}(R(z.x), R(z,y)) = R(x,y)$. Donc, l'équation (3.4) est vérifiée. $\square$

lemme 3.7.8 [4] *Soit R un T-ordre faible. Alors, on définit sa relation ker comme :* $\forall x, y \in X : x \lesssim_R y \Leftrightarrow R(x,y) = 1$, *c'est un ordre faible classique, de plus, pour tout après ensemble (afterset) de R est non-décroissant au sens à $\lesssim_R$, c'est-à-dire :* $\forall x, y \in X : x \lesssim_R y \Leftrightarrow R(z,x) \leqslant R(z,y)$.

Preuve. $\lesssim_R$ est un ordre faible classique ?

$\lesssim_R$ réflexive ?

Soit $x \in X$ on a : $R(x,x) = 1 \Leftrightarrow x \lesssim_R x$, alors $\lesssim_R$ réflexive.

$\lesssim_R$ antisymétrique ?

Soit $x, y \in X$ tel que :

$$\begin{cases} x \lesssim_R y; \\ y \lesssim_R x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R(x,y) = 1; \\ R(y,x) = 1. \end{cases} \Rightarrow R(x,y) \wedge R(y,x) > 0 \Rightarrow x = y.$$

Alors, $\lesssim_R$ est antisymétrique.

$\lesssim_R$ transitive ?

Soient $x, y, z \in X$, on a,

$$\begin{aligned} \begin{cases} x \lesssim_R y; \\ y \lesssim_R z. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R(x,y) = 1; \\ R(y,z) = 1. \end{cases} &\Rightarrow T(R(x,y), R(y,z)) \leqslant R(x,z), \\ &\Rightarrow 1 \leqslant R(x,z), \\ &\Rightarrow R(x,z) = 1, \\ &\Rightarrow x \lesssim_R z. \end{aligned}$$

Alors $\lesssim_R$est un transitive. D'où, $\lesssim_R$ est un ordre faible classique.

On montre maintenant que pour tout après ensemble (afterset) de R est non-décroissante au sens à $\lesssim_R$.

Soient $x, y \in X$ tel que $x \lesssim_R y$, on a,

$$R(z,x) = T(R(z,x), \underbrace{R(x,y)}_{\overset{\shortparallel}{1}}) \leqslant R(z,y) \leqslant R(z,y). \quad \square$$

Théorème 3.7.9 [4] *On considère une relation binaire floue* $R : X^2 \to [0,1]$.
Alors, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1. R *est une* T*-ordre faible.*
2. *IL existe une relation d'ordre faible classique, et une famille non vide de fonctions de score* $(f_i)_{i\in I} : X \to [0,1]$ *non-décroissantes au sens d'une* $\lesssim$ *tel que la représentation (*3.4) *est vérifiée.*

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2) ? On suppose que R est un T-ordre faible, d'après le lemme **3.7.8**, il existe une relation d'ordre faible classique (ker) noté $\lesssim_R$, et on prend la famille $(f_z)_{z\in X}$: $X \to [0,1]$ tel que $f_z(x) = R(z,x)$, de plus $(f_z)_{z\in X}$ est non-décroissante au sens à $\lesssim_R$ d'après le lemme **3.7.8** et le lemme **3.6.2**,
on a : $\inf\limits_{z\in X} \overrightarrow{T}(f_z(x), f_z(y)) = \inf\limits_{z\in X} \overrightarrow{T}(R(z.x), R(z,y)) = R(x,y)$.
Donc, l'équation (3.4) est vérifie.
(2) $\Rightarrow$ (1) ?
On suppose qu'il existe une relation d'ordre faible classique $\lesssim$ et une famille non vide de fonctions de score $(f_i)_{i\in I} : X \to [0,1]$ non-décroissantes au sens d'une $\lesssim$ telle que la représentation (3.4) est vérifiée, donc d'après le théorème **3.7.7** on a :
$R(x,y) = \inf\limits_{i\in I} \overrightarrow{T}(f_i(x), f_i(y))$ est une T-préordre.
Il reste a montrer la complétude forte.
On a : $\lesssim$ linéaire d'après (l'hypothèse T-ordre faible), donc pour tout $x, y \in X$ on a : $x \lesssim y$ ou $y \lesssim x$.
Si $x \lesssim y$.
$x \lesssim y \Rightarrow f_i(x) \leqslant f_i(y)$, ($f_i$ non-décroissante)
$\Rightarrow \overrightarrow{T}(f_i(x), f_i(y)) = 1, \ \forall i \in I$ (d'après (I 1)
$\Rightarrow \inf\limits_{i\in I} \overrightarrow{T}(f_i(x), f_i(y)) = 1 \Rightarrow R(x,y) = 1$.
Si $y \lesssim x$ de la même méthode on trouve que $R(y,x) = 1$.
Donc $\max\{R(x,y), R(y,x)\} = 1$, alors R vérifie la condition de complétude forte.

Alors, R est un T-ordre faible. $\square$

lemme 3.7.10 [4] *Pour tout ordre flou faible R, il existe un ordre linéaire classique qui est une sous-relation du ker $\lesssim_R$, de plus pour tout après ensemble (afterset) de R est non-décroissante au sens de $\preccurlyeq$, c'est-à-dire pour tout $x, y, z \in X,\ x \preccurlyeq y \Rightarrow R(z, x) \leqslant R(z, y)$.*

Preuve. Soit R une relation d'ordre flou faible d'après le lemme 3.7.8 la relation ker $(\lesssim_R)$ est toujours un ordre faible classique. Nous définissons une relation $\sim$ comme le ker symétrique de $\lesssim_R$ comme suit :

$x \sim y \Leftrightarrow x \lesssim_R y$ et $y \lesssim_R x \Leftrightarrow R(x, y) = 1$ et $R(y, x) = 1$.

Donc, $\sim$ est une relation d'équivalence (Triviale). Maintenant on considère l'ensemble quotient $X\ /\ \sim$. Il est facile de voire que la projection de $\lesssim_R$ sur l'ensemble $X\ /\ \sim$ est un ordre linéaire car $\lesssim_R$ est complète. $\square$

Finalement le théorème suivant caractérise les T-ordres faibles comme intersections de T-ordres faibles représentables par des fonctions de score qui sont à la fois monotone et au sens du même ordre linéaire classique.

Théorème 3.7.11 [4] *On considère La relation binaire floue $R : X^2 \longrightarrow [0.1]$.*

Alors, les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) R est un T-ordre faible.

(ii) Il existe un ordre linéaire classique $\preccurlyeq$ est une famille $(f_i)_{i\in I}$ de fonctions de score non-décroissantes au sens de $\preccurlyeq$ tel que la représentation (3.4) est vérifiée.

Preuve. $(i) \Rightarrow (ii)$? R est un T-ordre faible d'après le lemme **3.7.10** il existe un ordre linéaire classique $\preccurlyeq$ tel que les aftresets de R sont non -décroissants et au sens d'une $\preccurlyeq$ d'après le théorème **3.7.9**.

$(ii) \Rightarrow (i)$? D'après le théorème **3.7.9** tout ordre linéaire classique est un ordre linéaire faible, donc cette implication vient du théorème **3.7.9**. $\square$

Exemple 3.7.12 On considère $X = [0, 5]$ et les fonctions définies par :

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \min(1, x), \\ g_2(x) &= \min(1, \max(0, x-1)), \\ g_3(x) &= \min(1, \max(0, x-2)), \\ g_4(x) &= \min(1, \max(0, x-3)), \\ g_5(x) &= \min(1, \max(0, x-4)). \end{aligned}$$

On voit immédiatement que les 5 fonctions sont non -décroissantes au sens de l'ordre naturel sur les nombres réels, donc on peut définir six ordres flous faibles comme suit :

$$\begin{aligned} R_7(x, y) &= \min_{i \in \{1,3,5\}} \overrightarrow{T_M}(g_i(x), g_i(y)), \\ R_8(x, y) &= \min_{i \in \{1,2,3,4,5\}} \overrightarrow{T_M}(g_i(x), g_i(y)), \\ R_9(x, y) &= \min_{i \in \{1,3,5\}} \overrightarrow{T_P}(g_i(x), g_i(y)), \\ R_{10}(x, y) &= \min_{i \in \{1,2,3,4,5\}} \overrightarrow{T_P}(g_i(x), g_i(y)), \\ R_{11}(x, y) &= \min_{i \in \{1,3,5\}} \overrightarrow{T_L}(g_i(x), g_i(y)), \\ R_{12}(x, y) &= \min_{i \in \{1,2,3,4,5\}} \overrightarrow{T_L}(g_i(x), g_i(y)). \end{aligned}$$

Chapitre 4

Représentations basées sur inclusions, décompositions en ordres linéaires classiques et T-équivalence d'un ordre faible

Résume

Dans ce chapitre nous fuzzifions le résulta classique connu "tout ordre faible peut être décompose en un ordre linéaire et une relation d'équivalence", nous pouvons aussi prouvé en injectant un ordre faible dans un ensemble partiellement ordonné $(P(X), \subset)$ au moyen d'une application qui pour tout élément fixe x de X associée l'ensemble $C_{\{x\}}$ où $C_{\{x\}}(y) = R(x, y), \forall y \in X$, [1], Nous donnons aussi la représentation et la construction de relation basée sur inclusion et sur pseudo-métrique.

Contenu

4.1 Représentations basées sur inclusion

[4] Comme déjà motionner dans le théorème **3.6.3**, on peut montrer par l'injection d'un ordre faible classique dans l'ensemble $(P(X), \subseteq)$. Ceci se faite par l'application des éléments $x \in X$ dans leur ensemble antérieur (foreset) $C_{\{x\}}$, la question suivante est faite par une technique analogue pour l'ordre faible flou.

On considère l'ensemble de parties floues $\mathcal{F}(X)$, alors l'inclusion classique est définie sur les ensembles flous comme suit :

$A \subseteq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x), \forall x \in X$. C'est un ordre partiel flou sur $\mathcal{F}(X)$.

Soit T une t-norme continue à gauche, on peut définir deux relations floues sur $\mathcal{F}(X)$ comme suit :

1. $INCL_T(A, B) = \inf\limits_{x \in X} \overrightarrow{T}(A(x), B(x))$.
2. $SIM_T(A, B) = \inf\limits_{x \in X} \overleftrightarrow{T}(A(x), B(x))$.

Proposition 4.1.1 [4] *La relation de similarité SIM_T est une T-équivalence sur $\mathcal{F}(X)$ et la relation d'inclusion $INCL_T$ est un T-SIM_T-ordre sur $\mathcal{F}(X)$.*

Preuve. [1] (1). Soit $x \in X$, on a :

$\overleftrightarrow{T}(A(x), A(x)) = 1 = \inf\limits_{x \in X} \overleftrightarrow{T}(A(x), A(x)) = SIM_T(A, A)$.

Donc, SIM_T est réflexive.

(2). Soient $A, B \in \mathcal{F}(X)$, d'après $(B2)$ on a :

$\overleftrightarrow{T}(A(x), B(x)) = \overleftrightarrow{T}(B(x), A(x)), \forall x \in X$.

Donc, $\inf\limits_{x \in X} \overleftrightarrow{T}(A(x), B(x)) = \inf\limits_{x \in X} \overleftrightarrow{T}(B(x), A(x))$.

D'où, $SIM_T(A, B) = SIM_T(B, A)$.

Donc, SIM_T est symétrique.

(3). Soient $A, B, C \in \mathcal{F}(X)$ on va montrer que :

$T(SIM_T(A, B), SIM_T(B, C)) \leq SIM_T(A, C)$. On a :

[1] La preuve est une contribution personnelle.

$$\begin{aligned}
T\left(SIM_T\left(A,B\right),SIM_T\left(B,C\right)\right) &= T\left(\inf_{x\in X}\overleftrightarrow{T}(A(x),B(x)),\inf_{x\in X}\overleftrightarrow{T}(B(x),C(x))\right),\\
&\leq T\left(\overleftrightarrow{T}(A(x),B(x)),\overleftrightarrow{T}(B(x),C(x))\right),\forall x\in X,\\
&\leq \overleftrightarrow{T}(A(x),C(x)),\forall x\in X.
\end{aligned}$$

Donc, $T\left(SIM_T\left(A,B\right),SIM_T\left(B,C\right)\right) \leq \inf_{x\in X}\overleftrightarrow{T}(A(x),C(x)) = SIM_T\left(A,C\right).$

D'où, SIM_T est T-transitive, alors SIM_T est T-équivalence.

Il reste a montrer que $INCL_T$ est un T-SIM_T-ordre sur $\mathcal{F}\left(X\right)$.

1) SIM_T-réflexive. Soient $A,B\in\mathcal{F}\left(X\right)$.

$$\begin{aligned}
SIM_T\left(A,B\right) &= \inf_{x\in X}\left(\overleftrightarrow{T}\left(A\left(x\right),B\left(x\right)\right)\right),\\
&= \inf_{x\in X}\left(\overrightarrow{T}\left(A\left(x\right),B\left(x\right)\right),\overrightarrow{T}\left(B\left(x\right),A\left(x\right)\right)\right),\\
&\leq \inf_{x\in X}\left(\overrightarrow{T}\left(A\left(x\right),B\left(x\right)\right)\right),\\
&= INCL_T\left(A,B\right).
\end{aligned}$$

Donc, $INCL_T$ est SIM_T-réflexive.

2) SIM_T-T-antisymétrique.

Soient $A,B\in\mathcal{F}\left(X\right)$. On va montrer que : $T\left(INCL_T\left(A,B\right),INCL_T\left(B,A\right)\right) \leq SIM_T\left(A,B\right)$, on a :

$$\begin{aligned}
T\left(INCL_T\left(A,B\right),INCL_T\left(B,A\right)\right) &= T\left(\inf_{x\in X}\overrightarrow{T}\left(A\left(x\right),B\left(x\right)\right),\inf_{x\in X}\overrightarrow{T}\left(B\left(x\right),A\left(x\right)\right)\right).\\
&\leq T\left(\overrightarrow{T}\left(A\left(x\right),B\left(x\right)\right),\overrightarrow{T}\left(B\left(x\right),A\left(x\right)\right)\right),\ \forall x\in X.\\
&\leq \overleftrightarrow{T}\left(A\left(x\right),B\left(x\right)\right),\ \forall x\in X.\\
&\leq \inf_{x\in X}\left(\overleftrightarrow{T}\left(A\left(x\right),B\left(x\right)\right)\right).\\
&= SIM_T\left(A,B\right).
\end{aligned}$$

3) T-transitive.

Soient $A, B, C \in \mathcal{F}(X)$.

$$\begin{aligned} T\left(INCL_T(A,B), INCL_T(B,C)\right) &= T\left(\inf_{x\in X} \overrightarrow{T}\left(A(x), B(x)\right), \inf_{x\in X} \overrightarrow{T}\left(B(x), C(x)\right)\right). \\ &\leq T\left(\overrightarrow{T}\left(A(x), B(x)\right), \overrightarrow{T}\left(B(x), C(x)\right)\right), \forall x \in X. \\ &\leq \overrightarrow{T}\left(A(x), C(x)\right), \forall x \in X. \\ &\leq \inf_{x\in X} \overrightarrow{T}\left(A(x), C(x)\right). \\ &= INCL_T(A,C). \end{aligned}$$

Donc, $INCL_T$ est T-transitive.

D'où, $INCL_T$ est un T-SIM_T-ordre sur $\mathcal{F}(X)$, de plus d'après (I_1) on a :

$$\begin{cases} INCL_T(A,B) = 1, \\ SIM_T(A,B) = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \subseteq B, \\ A = B. \end{cases} \quad \square$$

Théorème 4.1.2 [4] *On considère la relation binaire floue $R : X^2 \to [0,1]$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) R est un T-ordre faible.

(ii) Il existe une famille $S \subseteq \mathcal{F}(X)$ non vide d'ensembles flous linéairement ordonné au sens la relation d'inclusion $\subseteq$, et une application $\varphi : X \longrightarrow S$ tel que la représentation suivante soit vérifiée, pour tout $x, y \in X$,

$$R(x,y) = INCL_T(\varphi(x), \varphi(y)) \tag{4.1}$$

Preuve. $(i) \Rightarrow (ii)$? On définit S l'ensemble des ensembles antérieurs (foresets).

$S = \{C \in \mathcal{F}(X) \ / \text{ il existe } x \in X \text{ tel que } C(y) = R(y,x), \ \forall y \in X\}$.

On va montrer que S est linéairement ordonné au sens à l'inclusion ?

On sait que $\subseteq$ est une relation d'ordre sur X, il reste a montrer que $\subseteq$ est linéaire c'est-à-dire, $\forall C_x, C_y \in S : (C_x \subseteq C_y$ ou $C_y \subseteq C_x)$.

On sait que R est complètement forte c'est-à-dire $\max(R(x,y), R(y,x)) = 1, \forall x, y \in X$.

On a : $(R(x,y) = 1$ ou $R(y,x) = 1)$. Si $R(x,y) = 1$ on a : $T(R(z,x), R(x,y)) \leq R(z,y)$, (car $R(x,y) = 1$). Donc, $C_x(z) = R(z,x) \leq R(z,y) = C_y(z)$.

Alors, $C_x(z) \leq C_y(z)$. D'où, $C_x \subseteq C_y$.

De même si $R(y,x) = 1$ on trouve que $C_y \subseteq C_x$ (ce qu'il faut est démontrer).

On définie φ comme l'application qui associer tout élément x dans leur ensemble antérieur (foreset) $R(.,x)$.

C'est-à-dire $\varphi(x)(z) = R(z,x)$.

Donc, le lemme **3.6.2** donne :

$$\begin{aligned} R(x,y) &= \inf \overrightarrow{T}(R(z,x), R(z,y)); \\ &= \inf \overrightarrow{T}(\varphi(x)(z), \varphi(y)(z)); \\ &= INCL_T(\varphi(x), \varphi(y)). \end{aligned}$$

$(ii) \Rightarrow (i)$?

Soient $x, y, z \in X$, on a :

$$\begin{aligned} T(R(x,y), R(y,z)) &= T(INCL_T(\varphi(x), \varphi(y)), INCL_T(\varphi(y), \varphi(z))). \\ &\leq INCL_T(\varphi(x), \varphi(z)). \\ &= R(x,z). \end{aligned}$$

Donc, R est T-transitive.

Du théorème **3.7.1** on a, si un domaine $S \subseteq \mathcal{F}(X)$ tel que SIM_T est T-équivalence de $S^2 \to [0,1]$ et $INCL_T$ est un T-SIM_T- ordre et $\varphi : X \to S$ tel que :

$R(x,y) = INCL_T(\varphi(x), \varphi(y))$. Donc, R est une relation d'ordre faible. $\square$

Corollaire 4.1.3 [4] *On considère une relation binaire* $R : X^2 \to [0;1]$. *Alors, les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. R *est un* T*-ordre faible.*
2. *Il existe une application* $\varphi : X \to \mathcal{F}(X)$, *vérefiant* $\varphi(x) \subset \varphi(y)$ *ou* $\varphi(y) \subset \varphi(x)$, *pour tout* $x, y \in X$, *tel que la représentation* (4.1) *soit vérifiée.*

4.2 Décompositions en ordres linéaires classiques et T- équivalences

[4] La preuve du théorème 3.6.3 est basée sur la factorisation au sens du ker symétrique d'un ordre faible. On peut affirmer en d'autre terme qu'un ordre classique faible peut être décomposé en ordre linéaire classique et une relation d'équivalence classique.

Cette section suit cette idée et présente les résultats correspondants pour ordres flous faibles. Avant de venir au résultat principal nous allons introduire une condition importante et préalable.

Définition 4.2.1 [4] *Soit* $\preccurlyeq$ *un ordre classique sur* X *et* $E : X^2 \longrightarrow [0, 1]$ *une relation d'équivalence floue (sons se soucier du t-norme).* E *est compatible avec* $\preccurlyeq$ *si l'inégalité suivante est vérifiée,*
pour tout trois éléments $x \preccurlyeq y \preccurlyeq z$*, on a :* $E(x, z) \leq \min(E(x, y), E(y, z))$.

Théorème 4.2.2 [4] *On considère une relation binaire floue* $R : X^2 \longrightarrow [0, 1]$*. Alors, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) *R est un ordre faible.*
(ii) *Il existe un ordre linéaire* $\preccurlyeq$ *est une* T*-équivalence* E *compatible avec* $\preccurlyeq$ *tel que* R *peut être représenter comme suit :*

$$R(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \preccurlyeq y; \\ E(x, y) & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.2}$$

Preuve. $(i) \Rightarrow (ii)$? D'une part, d'après le lemme **3.7.10**, il existe un ordre linéaire classique $\preccurlyeq$.
D'autre part on peut définir une relation floue E comme noyau (ker) symétrique de R, c'est-à-dire $E(x, y) = T(R(x, y), R(y, x))$.

Il est facile de preuver que E est une T-équivalence.

On montre maintenant que la forme (4.2) est réalisée. On suppose que $x \preccurlyeq y$,

car $\preccurlyeq$ est une sous relation de la relation noyau (ker) $\preccurlyeq_R$ il s'en suit directement que :

$\preccurlyeq (x, y) = 1$ et le premier cas de (4.2) est vérifié. Inversement on suppose que :

$x \not\preccurlyeq^2 y$, puisque $\preccurlyeq$ est linéaire, alors on a : $y \preccurlyeq x$, donc $R(x, y) = 1$ et on obtient que $R(x, y) = T\left(R\left(x, y\right), R\left(y, x\right)\right) = E(x, y)$.

Montrons que E compatible avec $\preccurlyeq$.

Soient $x, y, z \in X$, tel que $x \preccurlyeq y \preccurlyeq z$, c'est-à-dire $R(x, y) = 1$ et $R(y, z) = 1$ et $R(x, z) = 1$.

On veut montre que $E(x, y) \leq \min(E(x, y), E(y, z))$?

Soit $x; y; z \in X$, on a : $x \preccurlyeq y \preccurlyeq z$

$$R(z, x) = T\left(R\left(z, x\right), R\left(x, z\right)\right) = E(x, y) \text{ ?}$$

$$E(x, z) \leq \min(E(x, y), E(y, z)) \Leftrightarrow \begin{cases} E(x, z) \leq E(x, y) \ldots\ldots (1) \\ E(x, z) \leq E(y, z) \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

$R(x, z) = T(R(x, .), R(., z)), R(z, x) = T(R(z, x), \overbrace{R(x, y)}^{\overset{1}{\shortparallel}}) \leq R(z, y) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*)$.

$R(z, x) = T(\underbrace{R(y, z)}_{\underset{1}{\shortparallel}}, R(z, x)) \leq R(y, x)$.

$R(z, x) = T(R(z, x), 1) = T(R(z, x), R(x, y)) \leq R(z, y)$, d'après la T-transitivité.

$E(x, z) = T(R(x, z).R(z, x))$ par définition.

$= R(z, x)$ car $R(x, z) = 1$.

$\leq R(z, y)$ d'après $(*)$, mais $R(z, y) = E(y, z)$ par définition, alors $E(x, z) \leq E(y, z) \ldots .(1)$.

De même $E(x, z) = T(R(x, z), R(z, x))$ par définition. Donc, $R(z, x) \leq R(y, x) = E(x, y)$.

Alors, $E(x, z) \leq E(x, y) \ldots .(2)$.

Donc, d'après (1) et (2) on a : $E(x, z) \leq \min(E(x, y), E(y, z))$.

$(ii) \Rightarrow (i)$? Il suffit de montrer que l'égalité définit un T-ordre faible, la réflexivité et trivial,

---

[2] $\not\preccurlyeq$ est la négation de $\preccurlyeq$

pour montrer la T-transitivité, on suppose que : $T(R(x,y),R(y,z)) \leq R(x,y) \Leftrightarrow M$.

cas	$x \leqslant z$	$x \leqslant y$	$y \leqslant z$	M
1	1	1	1	1
2	1	1	0	1
3	1	0	1	1
4	1	0	0	1
5	0	1	1	cas impossible
6	0	1	0	1
7	0	0	1	1
8	0	0	0	1

On a : $R\left(x,y\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant y; \\ E\left(x,y\right) & \text{sinon.} \end{cases}$

Il reste montre que si $x \leqslant y$ et $y \nleqslant z$ et $x \nleqslant z$ alors : $R(x,z) \geq T(R(x,y),R(y,z))$?

on a : $R(x,z) \geq T(R(x,y),R(y,z))$.

$E(x,z) \geq T(E(x,y),E(y,z)) = T(1,E(y,z)) = E(y,z)$.

$E(x,z) \geq E(y,z)$, montre que pour $x \leqslant y$ et $y \nleqslant z$ et $x \nleqslant z$ on a : $E(x,z) \geq E(y,z)$,car $\leqslant$ est linéaire on a : $x \leqslant y$ et $z \leqslant y$ et $x \leqslant z$ c'est-à-dire $z \leqslant x \leqslant y$ et car E compatible avec $\leqslant$.

On a : $E(z,y) \leq \min(E(z,x),E(x,y)) \Leftrightarrow E(z,y) \leq E(z,x)$ et $E(z,y) \leq E(x,y)$

$\Leftrightarrow E(z,x) \geq E(z,y) = E(y,z)$ ce qui est démontre.

le 6=eme (sixièmes) cas si $x \nleqslant y$ et $y \leqslant z$ et $x \nleqslant z$.

On a : $R(x,y) = E(x,y)$ et $R(y,z) = 1$ et $R(x,z) = E(x,z)$.

On veut montrer que $R(x,z) \geq T(R(x,y),R(y,z))$?

$E(x,z) \geq T(E(x,y),E(y,z)) = T(E(x,y),1) = E(x,y)$ et car $\leqslant$ linéaire.

on a$(x \nleqslant y \ et \ y \leqslant z \ \ et \ x \nleqslant z) \Leftrightarrow (y \leqslant x \ et \ y \leqslant z \ et \ z \ \leqslant x) \Leftrightarrow (y \leqslant z \leqslant x)$ et car E compatible avec $\leqslant$.

on a : $E(y,x) \leq \min(E(y,z),E(z,x)) \Leftrightarrow E(y,x) \leq E(y,z)$ et $E(y,x) \leq E(z,x)$.

Donc, on a : $E(x,z) \geq E(x,y)$ (ce qu'il faut démontrer).

Le 8=eme (huitièmes) cas :

on a : $x \nleqslant y$ *et* $y \nleqslant z$ et $x \nleqslant z$ c'est-à-dire $R(x,y) \geq T(R(x,y), R(y,z))$

$\Leftrightarrow E(x,y) \geq T(E(x,y), E(y,z))$ car $\leqslant$ est linéaire.

On a : $y \leqslant x$ *et* $z \leqslant y$ *et* $z \leqslant x$; alors $z \leqslant y \leqslant x$, de plus on a E est T-transitive alors, $E(z,x) \geq T(E(z,y), E(y,x))$, donc on a : $R(x,y) \geq T(R(x,y), R(y,z))$,

(ce qu'il faut démontrer).

Il reste qui a montrer qui pour tout $x, y \in X$,

on a : $R(x,y) = 1$ ou bien $R(y,x) = 1$ car $\leqslant$ est linéaire on a ($x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$), alors $R(x,y) = 1$ ou $R(x,y) = 1$.

D'où, la complétude forte. $\square$

la représentation de (4.2) dit simplement que les T-ordres faibles sont caractérisés comme la réunion des ordres totaux classiques et relations T-équivalence compatible avec l'ordre linéaire c'est-à-dire $R = \leqslant \cup E$, est car pour tout $x, y \in X$, on a :

$(x \leqslant y$ ou $y \leqslant x) \Leftrightarrow (x \leqslant y$ ou $x \nleqslant x)$

$\Leftrightarrow (R(x,y) = \leqslant (x,y) = 1$ou $R(x,y) = E(x,y))$ car $R(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant y; \\ E(x,y) & \text{sinon.} \end{cases}$

$\Leftrightarrow (R(x,y) = \leqslant (x,y)$ ou $R(x,y) = E(x,y)) \Leftrightarrow R = \leqslant \cup E$

En d'autres termes, nous pouvons dire que les T-ordres faibles sont fuzzification d'ordres linéaires classiques, et que la composante floue soit attribuée uniquement à une T-équivalence. Pour utiliser le théorème 4.2.2 afin de construire les T-ordres faibles, nous devons savoir plus au sujet de la construction des T-équivalences compatibles avec un ordre linéaire classique donné. Commençons avec un résultat célèbre sur T-équivalences. Ce résultat qui est analogue à celui du théorème 3.7.7.

Théorème 4.2.3 [4] *On considère une relation binaire* $E : X^2 \longrightarrow [0,1]$.

Alors, les deux conditions suivantes sont équivalentes.

(i) E est une T-équivalence.

(ii) Il existe une famille nom vide des fonctions $(f_i)_{i \in I}$ de $X \longrightarrow [0,1]$, telle que la

représentation suivante :

$$E(x,y) = \inf_{i\in I} \overleftrightarrow{T}\left(f_i(x), f_i(y)\right) \tag{4.3}$$

soit satisfaite.

Preuve. [3] $(ii) \Rightarrow (i)$? On va montrer que $E(x,y) = \inf_{i\in I} \overleftrightarrow{T}\left(f_i(x), f_i(y)\right)$ est une T-équivalence.

$E(x,x) = \inf_{i\in I} \overleftrightarrow{T}\left(f_i(x), f_i(x)\right) = 1$, car d'après $(B\ 2)$ on a : $\overleftrightarrow{T}(x,y) = 1$ si $x = y$.

la symétrie : $E(x,y) = \inf_{i\in I} \overleftrightarrow{T}\left(f_i(x), f_i(y)\right) = \inf_{i\in I} \overleftrightarrow{T}\left(f_i(y), f_i(x)\right) = E(y,x)$ d'après $(B\ 2)$.

Il reste à montrer que : $E(x,y) \geq T\left(E(x,y), E(y,z)\right)$?

$E(x,y) \geq T\left(\inf_{i\in I} \overleftrightarrow{T}\left(f_i(x), f_i(y)\right), \inf_{i\in I} \overleftrightarrow{T}\left(f_i(y), f_i(z)\right)\right)$ d'après $(B\ 4)$:

$\left[T(\overrightarrow{T}(x,y), \overrightarrow{T}(y,z)) \leq \overrightarrow{T}(x,z)\right]$.

on a : $\forall i \in I : T\left(\inf \overleftrightarrow{T}\left(f_i(x), f_i(y)\right), \inf \overleftrightarrow{T}\left(f_i(y), f_i(z)\right)\right) \leq \overleftrightarrow{T}\left(f_i(x), f_i(z)\right)$.

$$\text{Car} \begin{cases} \inf \overleftrightarrow{T}\left(f_i(x), f_i(z)\right) \leq \overleftrightarrow{T}\left(f_i(x), f_i(y)\right) \\ \inf \overleftrightarrow{T}\left(f_i(y), f_i(z)\right) \leq \overleftrightarrow{T}\left(f_i(y), f_i(z)\right) \end{cases}$$

$\Rightarrow T\left(\inf \overleftrightarrow{T}\left(f_i(x), f_i(z)\right), \inf \overleftrightarrow{T}\left(f_i(y), f_i(z)\right)\right) \leq T\left(\overleftrightarrow{T}\left(f_i(x), f_i(y)\right), \overleftrightarrow{T}\left(f_i(y), f_i(z)\right)\right)$....(1) .

Et on a : $\forall i \in I : T\left(\overleftrightarrow{T}\left(f_i(x), f_i(y)\right), \overleftrightarrow{T}\left(f_i(y), f_i(z)\right)\right) \leq \overleftrightarrow{T}\left(f_i(x), f_i(z)\right)$....(2).

Alors $T\left(\overleftrightarrow{T}\left(f_i(x), f_i(y)\right), \overleftrightarrow{T}\left(f_i(y), f_i(z)\right)\right) \leq \overleftrightarrow{T}\left(f_i(x), f_i(z)\right)$.

$T\left(\inf_{i\in I} \overleftrightarrow{T}\left(f_i(x), f_i(y)\right), \inf_{i\in I} \overleftrightarrow{T}\left(f_i(y), f_i(z)\right)\right) \leq \overleftrightarrow{T}\left(f_i(x), f_i(z)\right), \forall i$.

Donc, $T\left(\inf_{i\in I} \overleftrightarrow{T}\left(f_i(x), f_i(y)\right), \inf_{i\in I} \overleftrightarrow{T}\left(f_i(y), f_i(z)\right)\right) \leq \inf_{i\in I} \overleftrightarrow{T}\left(f_i(x), f_i(z)\right)$ c'est-à-dire $T\left(E(x,y), E(y,z)\right) \leq E(x,y)$.

Donc E est T-équivalence.

$(i) \Rightarrow (ii)$?

E est une T-équivalence $\Rightarrow$ E est un T-préordre est d'après le théorème **3.7.7**, il existe une famille $(f_i)_{i\in I}$ de fonctions score de $X^2 \longrightarrow [0,1]$ tel que $E(x,y) = \inf_{i\in I} \overleftrightarrow{T}\left(f_i(x), f_i(y)\right)$.

---

[3] (La preuve de ce théorème est une contribution personnelle)

On va montrer que : $E(x,y) = \inf_{i\in I} \overleftrightarrow{T}(f_i(x), f_i(y))$.
Soient $x, y \in X$, d'après le théorème **3.7.7**, on a : $E(x,y) = \inf_{i\in I} \overrightarrow{T}(f_i(x), f_i(y))$,
alors $E(x,y) \geq \overrightarrow{T}(f_i(x), f_i(y))$ et $E(x,y) \geq \overrightarrow{T}(f_i(y), f_i(x)), \forall i \in I$.
Donc, $T(E(x,y), E(x,y)) \geq T\left(\overrightarrow{T}(f_i(x), f_i(y)), \overrightarrow{T}(f_i(y), f_i(x))\right), \forall i \in I$
Alors $E(x,y) \geq \inf_{i\in I} \overleftrightarrow{T}(f_i(x), f_i(y))$..........(1).
Il est reste à montrer que $\inf_{i\in I} \overleftrightarrow{T}(f_i(x), f_i(y)) \leq E(x,y)$?
On sait que $\inf_{i\in I} \overleftrightarrow{T}(f_i(x), f_i(y)) \leq \overleftrightarrow{T}(f_i(x), f_i(y)) \leq \overrightarrow{T}(f_i(x), f_i(y)), \forall i \in I$
alors $\inf_{i\in I} \overleftrightarrow{T}(f_i(x), f_i(y)) \leq \inf_{i\in I} \overrightarrow{T}(f_i(x), f_i(y)) = E(x,y)$.
D'où $\inf_{i\in I} \overleftrightarrow{T}(f_i(x), f_i(y)) \leq E(x,y)$..........(2).
De (1) et (2) on a : $E(x,y) = \inf_{i\in I} \overleftrightarrow{T}(f_i(x), f_i(y))$. $\square$

Finalement, le théorème suivant fournit une caractérisation unique des T-équivalences qui sont compatibles avec un ordre linéaire classique donné.

Théorème 4.2.4 [4] *On considère une ordre linéaire classique $\leq$ sur X et une relation floue $E : X^2 \longrightarrow [0,1]$, alors deux les conditions suivantes sont équivalentes.*
(i) E est une relation T-équivalence compatible avec $\leq$.
(ii) Il existe une famille non vide de fonctions $(f_i)_{i\in I}$ de $X \longrightarrow [0,1]$ non-décroissantes au sens de $\leq$ telle que la représentation (4.3) soit vérifiée, c'est-à-dire :

$$\forall x, y, z \in X : x \leq y \Rightarrow f_i(x) \leq f_i(y).$$

Preuve. $(i) \Rightarrow (ii)$? Etant donné une relation T-équivalence E compatible avec $\leq$, on peut appliquer le théorème **4.2.2** et définir un T-ordre faible R comme dans équation (4.2)
Alors, le lemme **3.6.2** garanti que R peut être représente comme $R(x,y) = \inf_{z\in X} \overleftrightarrow{T}(R(z,x), R(z,y))$ et comme est un T-préordre faible.
On a : pour tout $x, y \in X : R(x,y) = 1$ ou $R(y,x) = 1$, et nous pouvons conclure que :

$E(x,y) = \min(R(x,y), R(y,x))$. Par conséquent, nous obtenons :

$E(x,y) = \min(R(x,y), R(y,x)) = \min\left(\inf_{z\in X} \overleftrightarrow{T}(R(z,x), R(z,y)), \inf_{z\in X} \overleftrightarrow{T}(R(z,y), R(z,x))\right).$

$E(x,y) = \inf_{z\in X}\left(\min\left(\overleftrightarrow{T}(R(z,x), R(z,y)), \overleftrightarrow{T}(R(z,y), R(z,x))\right)\right).$

$E(x,y) \overset{B\ 3}{=} \inf_{z\in X}\left(\overleftrightarrow{T}(R(z,x), R(z,y))\right).$

Comme $\leq$ est une sous-relation du noyau de R d'après le lemme **3.7.8** touts les après ensembles (aftersets) $R(z,.)$ sont non-décroissants au sens à $\leq$, donc si on prend, $I = x$, $f_z(x) = R(z,x)$ pour tout $x, y \in X$, nous aurons alors fondé une famille de fonctions non-décroissantes telle que la représentation(4.3) soit vérifiée.

$(ii) \Rightarrow (i)$? On a : $E(x,y) = \inf_{z\in X}\left(\overleftrightarrow{T}(R(f_i(x), f_i(y)), R(f_i(y), f_i(x)))\right).$

On veut montrer que E est compatible avec $\leq$. D'après le théorème **4.2.3** on a :

E est une relation T-équivalence. Il reste à montrer que E est compatible avec $\leq$.

Soient $x, y \in X$ tel que $x \leq y \leq z$.

On veut montrer que $E(x,z) \leq \min(E(x,y), E(y,z))$.

On a : $f_i(x) \leq f_i(y)$ et $f_i(y) \leq f_i(z)$ et $f_i(x) \leq f_i(z), \forall i \in I$ car f_i est non-décroissante et d'après (B 5), on a :

$$\begin{aligned}
E(x,z) &= \inf_{i\in I} \overleftrightarrow{T}(f_i(x), f_i(z)) &&= \inf_{i\in I} \overrightarrow{T}(f_i(z), f_i(x)),\\
E(x,y) &= \inf_{i\in I} \overleftrightarrow{T}(f_i(x), f_i(y)) &&= \inf_{i\in I} \overrightarrow{T}(f_i(y), f_i(x)),\\
E(y,z) &= \inf_{i\in I} \overleftrightarrow{T}(f_i(y), f_i(z)) &&= \inf_{i\in I} \overrightarrow{T}(f_i(z), f_i(y)).
\end{aligned}$$

Et on sait que :

$$f_i(x) \leq f_i(y) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{T}(f_i(x), f_i(z)) \leq \overrightarrow{T}(f_i(y), f_i(z)), \forall i$$

$$\overrightarrow{T}(f_i(y), f_i(x)) \geq \min\left(\overrightarrow{T}(f_i(y), f_i(z)), \overrightarrow{T}(f_i(z), f_i(x))\right) \geq \overrightarrow{T}(f_i(z), f_i(x)), \forall i.$$

$$\overrightarrow{T}(f_i(y), f_i(x)) \geq \overrightarrow{T}(f_i(z), f_i(x)) \Rightarrow \inf_{i\in I} \overrightarrow{T}(f_i(y), f_i(x)) \geq \inf_{i\in I} \overrightarrow{T}(f_i(z), f_i(x))$$

$$\Rightarrow E(y,x) \geq E(z,x) \Rightarrow E(x,y) \geq E(x,z)$$

$$T\left(\overrightarrow{T}(\alpha,\gamma), \overrightarrow{T}(\gamma,\beta)\right) \geq \overrightarrow{T}(\alpha,\beta).$$

De la même façon on montre que $E(y,z) \geq E(x,z)$.

Donc $E(x,z) \leq \min(E(x,y), E(y,z))$. □

On note que le théorème **4.2.4** reste valide si on remplace (non-décroissante) dans (ii) par non-croissante.

4.3 Constructions basées sur une pseudo-métrique

[4] Nous avons noté au-dessus de ce théorème 4.2.4 est seulement un peu d'aide pour déployer de nouvelles constructions. Par conséquent, nous aimerons changer maintenant notre point de vue et tourner à la correspondance célèbre entre pseudo-métrique et T-équivalences, que nous pouvons combiner avec le théorème 4.2.2 pour accomplir de nouvelles et pratiquement faisables constructions de T-ordre faibles. Cette correspondance tient seulement pour les t-normes archimédiennes continues, donc, dans cette section, nous nous restreignons à cette classe de t-normes.

Le résultat de la représentation fondamentale suivante est connue pour les t-normes archimédiennes continues [13] [15] [19] une opération binaire sur l'intervalle unité $T : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ est une t-norme archimédienne continue si, et seulement si, il existe une fonction continue, strictement décroissante $t : [0,1] \longrightarrow [0,+\infty]$ avec $t(1) = 0$ appelé générateur additif tel que pour tout $x, y \in [0,1]$, telle que la relation suivantes : $T(x,y) = t^{-1}(\min(t(x) + t(y), t(0)))$.soit vérifiée.

Le générateur t est déterminé uniquement à une constante multiplicative positive près. Juste pour clarifier la notation, une application $d : X^2 \longrightarrow [0,+\infty]$ est appelé une pseudo -métrique sur X si elle vérifiée les propriétés suivantes pour tout $x, y, z \in X$:

1. $d(x,x) = 0$ (homogénéité).
2. $d(x,y) = d(y,x)$ (symétrie).
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (inégalité du triangle).

Le théorème suivant fournit un simple, cependant fondamental, correspondance entre pseudo-métrique et relations d'équivalence floues au sens d'une t-norme archimédienne continue et qui seront essentiels dans ce chapitre.

Théorème 4.3.1 [4] *On considère une t-norme archimédienne continue T, avec un générateur additif t.*

1. *Pour toute pseudo-métrique $d : X^2 \longrightarrow [0, +\infty]$ l'application*

$$E_d(x, y) = t^{-1}(\min(d(x, y), t(0))) \tag{4.4}$$

Définit une T-équivalence sur X.

2. *Par la supposition que $E : X^2 \longrightarrow [0, 1]$ est une T-équivalence, on peut définir une pseudo-métrique d_E comme suit :*

$$d_E(x, y) = t(E(x, y)) \tag{4.5}$$

Preuve. [4] (1). Soit une pseudo-métrique, on veut montrer que :
$E_d(x, y) = t^{-1}(\min(d(x, y), t(0)))$ est une T-équivalence sur X.
La réflexivité.
Soit $x \in X$, on a :
$t^{-1}(\min(d(x, x), t(0))) = t^{-1}(\min(0, t(0))) = t^{-1}(\min(0, 1)) = t^{-1}(0) = 1.$
Donc, $E_d(x, x) = 1$, alors E_d est réflexive.
La symétrie.
Soient $x, y \in X,\ E_d(x, y) = t^{-1}(\min(d(x, y), t(0))) = t^{-1}(\min(d(y, x), t(0))) = E_d(y, x)$.
Donc, E_d est symétrique.
La T-transitivité.
Soient $x, y, z \in X$, on veut montrer que $E_d(x, z) \geq T(E_d(x, y), E_d(y, z))$.

[4] La preuve est une contribution personnelle.

$$\begin{aligned} T\left(E_d\left(x,y\right),E_d\left(y,z\right)\right) &= t^{-1}\left(\min\left(t\left(E_d\left(x,y\right)+t\left(E_d\left(y,z\right),t\left(0\right)\right)\right)\right)\right); \\ &= t^{-1}\left(\min\left(t\left(t^{-1}\left(\min\left(d\left(x,y\right),t\left(0\right)\right)\right)\right)+t\left(t^{-1}\left(\min\left(d\left(y,z\right),t\left(0\right)\right)\right)\right),t\left(0\right)\right)\right)\right) \\ &= t^{-1}\left(\min\left(\min\left(d\left(x,y\right),t\left(0\right)\right)\right)\right)+\left(\min\left(d\left(y,z\right),t\left(0\right)\right)\right)\right),t\left(0\right)\right). \end{aligned}$$

Si $d\left(x,y\right)\leq t\left(0\right)$ et $d\left(y,z\right)\leq t\left(0\right)$ on a :

$$\begin{aligned} T\left(E_d\left(x,y\right),E_d\left(y,z\right)\right) &= t^{-1}\left(\min(d\left(x,y\right))+d\left(y,z\right)),t\left(0\right)\right); \\ &\leq t^{-1}\left(\min(d\left(x,z\right)),t\left(0\right)\right)=E_d\left(x,z\right). \end{aligned}$$

Si $d\left(x,y\right)\geq t\left(0\right)$ et $d\left(y,z\right)\geq t\left(0\right)$ on a :

$$\begin{aligned} T\left(E_d\left(x,y\right),E_d\left(y,z\right)\right) &= t^{-1}\left(\min(t\left(0\right)+t\left(0\right),t\left(0\right)\right); \\ &= t^{-1}\left(t\left(0\right)\right); \\ &= 0\leq E_d\left(x,z\right). \end{aligned}$$

Si $d\left(x,y\right)\leq t\left(0\right)$ et $d\left(y,z\right)\geq t\left(0\right)$ c'est-à-dire $d\left(x,y\right)\leq t\left(0\right)\leq d\left(y,z\right)$ on a :

$$\begin{aligned} T\left(E_d\left(x,y\right),E_d\left(y,z\right)\right) &= t^{-1}\left(\min(d\left(x,y\right))+t\left(0\right)),t\left(0\right)\right); \\ &\leq t^{-1}\left(t\left(0\right)\right)=0\leq E_d\left(x,z\right). \end{aligned}$$

Si $d\left(x,y\right)\geq t\left(0\right)$ et $d\left(y,z\right)\leq t\left(0\right)$.

Donc, en tous les cas on a : $E_d\left(x,z\right)\geq T\left(E_d\left(x,y\right),E_d\left(y,z\right)\right)$ c'est-à-dire E_d est T-transitive.

Alors, E_d est une T-équivalence sur X.

(2) Si $E:X^2\longrightarrow[0,1]$ est une T-équivalence, on va montrer que $d_E\left(x,y\right)=t\left(E\left(x,y\right)\right)$, est un pseudo-métrique, on a : $d_E\left(x,x\right)=t\left(E\left(x,x\right)\right)=t\left(1\right)=0$.

$d_E\left(x,y\right)=t\left(E\left(x,y\right)\right)=t\left(E\left(y,x\right)\right)=d_E\left(y,x\right)$.

On va montrer que : $d_E\left(x,z\right)\leq d_E\left(x,y\right)+d_E\left(y,z\right)$?

On sait que : $\forall x,y,z\in X:E(x,z)\geq T\left(E(x,y),E(y,z)\right)$.

$$\begin{aligned} T\left(E(x,y),E(y,z)\right) &= t^{-1}\left(\min\left[t\left(E\left(x,y\right)\right)+t\left(E\left(y,z\right)\right),t\left(0\right)\right]\right); \\ &= t^{-1}\left(\min\left[E_d\left(x,y\right)+E_d\left(y,z\right),t\left(0\right)\right]\right)\leq E(x,z); \\ t\left(t^{-1}\left(\min\left[E_d\left(x,y\right)+E_d\left(y,z\right),t\left(0\right)\right]\right)\right) &\geq t\left(E(x,z)\right); \\ \min\left[E_d\left(x,y\right)+E_d\left(y,z\right),t\left(0\right)\right] &\geq E_d\left(x,z\right). \end{aligned}$$

Si $\min\left[E_d\left(x,y\right)+E_d\left(y,z\right),t\left(0\right)\right]=d_E\left(x,y\right)+d_E\left(y,z\right)$.

Alors $d_E\left(x,y\right)+d_E\left(y,z\right)\geq d_E\left(x,z\right)$.

Si $\min\left[E_d\left(x,y\right)+E_d\left(y,z\right),t\left(0\right)\right]=t\left(0\right)$.

Alors $d_E\left(x,y\right)+d_E\left(y,z\right)\geq t\left(0\right)\geq d_E\left(x,z\right)$.

Donc, $d_E(x,y) + d_E(y,z) \geq d_E(x,z)$.

Donc, dans tout les cas on a : $d_E(x,y) + d_E(y,z) \geq d_E(x,z)$.

Alors d_E est une pseudo-métrique. $\square$

Définition 4.3.2 [4] *Soit $\leq$ un ordre classique sur X, et soit $d : X^2 \longrightarrow [0,+\infty]$ une pseudo-métrique. On dit que d est compatible avec $\leq$ si, l'inégalité suivante est vérifiée pour tout chaine à trois éléments $x \leq y \leq z$ dans X : $d(x,z) \geq \max[d(x,y), d(y,z)]$.*

Maintenant nous établissons le lien entre le théorème **4.3.1** et la notion de compatibilité.

lemme 4.3.3 [4] *Soit T une t-norme archimédienne continue avec un générateur additif t et soit $\leq$ une relation d'ordre classique sur X.*

1. *On considère une pseudo-métrique $d : X^2 \longrightarrow [0,+\infty]$. Si d est compatible avec $\leq$, alors on peut déduire une relation d'équivalence floue E_d définie comme dans l'équation* (4.4). $E_d(x,y) = t^{-1}(\min(d(x,y), t(0)))$ *et qui soit compatible avec $\leq$.*
2. *On considère la relation d'équivalence floue $E : X^2 \longrightarrow [0,+1]$.*

   Si E est compatible avec $\leq$, alors sa pseudo-métrique induite d_E définie comme suit $d_E(x,y) = t(E(x,y))$ est aussi compatible avec $\leq$.

Preuve. [5] (1) On a : $d : X^2 \longrightarrow [0,+\infty]$ et $E_d(x,y) = t^{-1}(\min(d(x,y), t(0)))$ et on sait d'après le théorème **4.3.1** que E_d est une T-équivalence, il reste à montrer que E_d compatible avec $\leq$ c'est-à-dire pour tout $x,y,z \in X$, tel que $x \leq y \leq z$, on a : $E_d(x,z) \leq \max[E_d(x,y), E_d(y,z)]$.

On sait que d est compatible avec $\leq$ alors,

[5] La preuve est une contribution personnelle.

$d(x,z) \geq \max[d(x,y), d(y,z)] \Rightarrow d(x,z) \geq d(x,y)$ et $d(x,z) \geq d(y,z)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \min[d(x,z), t(0)] \geq \min[d(x,y), t(0)]; \\ \min[d(x,z), t(0)] \geq \min[d(y,z), t(0)]. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_d(x,z) = t^{-1}[\min[d(x,z), t(0)]] \leq t^{-1}[\min[d(x,y), t(0)]] = E_d(x,y); \\ E_d(x,z) = t^{-1}[\min[d(x,z), t(0)]] \leq t^{-1}[\min[d(y,z), t(0)]] = E_d(y,z). \end{cases}$$

$\Rightarrow E_d(x,z) \leq \min[E_d(x,y), E_d(y,z)]$.

(ce qu'il faut démontrer).

(2). $E : X^2 \longrightarrow [0,1]$ une relation T-équivalence compatible avec $\leq$ et

$d_E(x,y) = t(E(x,y))$.

D'après le théorème **4.3.1** d_E est une pseudo-métrique, il reste montre que d_E est compatible avec $\leq$.

Soient $x, y, z \in X$ tel que $x \leq y \leq z$, on a :

$$\begin{aligned} E(x,z) &\leq \min[E(x,y), E(y,z)], \\ &\Rightarrow \begin{cases} E(x,z) \leq E(x,y), \\ E(x,z) \leq E(y,z). \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} t(E(x,z)) \geq t(E(x,y)), \\ t(E(x,z)) \geq t(E(y,z)). \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } t(E(x,z)) \geq \max[t(E(x,y)), t(E(y,z))].$$
$$E_d(x,z) \leq \max[E_d(x,y), E_d(y,z)].$$

(ce qu'il faut démontrer). □

Exemple 4.3.4 Il est facile de voir que $d(x,y) = |x-y|$, est un métrique dans l'ensemble des nombre réels $X = \mathbb{R}$, de plus il est compatible avec l'ordre naturel $\leq$, on note que $t_p(x)$ =-ln x est un générateur additif pour toute t-norme T_p.

Dinverse $t_p^{-1}(x) = e^{-x}$, et que $t_l(x) = 1$-x et lui même, l'inverse du générateur additif de T_l (t-norme de Łukasiewicz) de théorème 4.2.2 et le lemme 4.3.3 entraîne que :

$$R_{16}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y; \\ \exp(-\min(|x-y|, \infty)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$R_{16}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \leq y; \\ \exp(-|x-y|) & \text{si} \quad y \leq x. \end{cases}$$

$$R_{16}(x,y)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad x\leq y;\\ \exp(y-x) & \text{si} \quad y\leq x.\end{cases}$$

Si $x\leq y$ on a : $R_{16}(x,y)=1=\min(1,\exp(y-x))$ car $\exp(y-x)\geq 1$.

Si $y\leq x$ on a $\exp(y-x)\leq 1$, donc $R_{16}(x,y)=\exp(y-x)=\min(1,\exp(y-x))$, alors $R_{16}(x,y)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad x\leq y;\\ \exp(y-x) & \text{si} \quad y\leq x.\end{cases}=\min(1,\exp(y-x))$ est un T_p ordre faible, d'après théorème 4.2.2 et 4.3.3 on a : R_{16} est un T_p-ordre faible.

$$R_{17}(x,y)=\begin{cases}1 & \text{si } x\leq y;\\ E(x,y) & \text{sinon.}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
E(x,y)&=t_l^{-1}(\min(d(x,y),t(0))),\\
E(x,y)&=t_l^{-1}(\min(|x-y|,1)),\\
E(x,y)&=1-\min(|x-y|,1),\\
E(x,y)&=1+\max(-|x-y|,-1),\\
E(x,y)&=\max(1-|x-y|,1-1),\\
E(x,y)&=\max(1-|x-y|,0),\\
E(x,y)&=\max(1-x+y,0).
\end{aligned}$$

Donc, $R_{17}(x,y)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad x\leq y;\\ \max(1-x+y,0) & \text{si} \quad y\leq x.\end{cases}$

Le lemme suivant démontre que la compatibilité d'une pseudo-métrique avec un ordre linéaire classique est conservée, même par transformation monotone du domaine sous-jacent.

lemme 4.3.5 [4] *On considère une pseudo-métrique* $d : X^2 \longrightarrow [0, +\infty]$, *qui est compatible avec un ordre linéaire classique* $\preccurlyeq$ *sur* X, *et une application monotone,* $\psi : X \longrightarrow X$. *Alors, l'application* $d^{\acute{}}(x, y) = d(\psi(x), \psi(y))$ *définit une pseudo-métrique sur* X *qui soit compatible avec* $\preccurlyeq$.

Preuve. (1) Si $x = y \Rightarrow \psi(x) = \psi(y)$, alors $d^{\acute{}}(x, x) = d(\psi(x), \psi(x)) = 0$, car ψ est une application.

2) $d^{\acute{}}(x, y) = d(\psi(x), \psi(y)) = d(\psi(y), \psi(x)) = d^{\acute{}}(y, x)$.

3) Soient $x, y, z \in X$.

$d^{\acute{}}(x, y) + d^{\acute{}}(y, z) = d(\psi(x), \psi(y)) + d(\psi(y), \psi(z)) \geq d(\psi(x), \psi(z)) = d^{\acute{}}(x, z)$.

D'où, $d^{\acute{}}$est une pseudo-métrique sur X.

Il reste à montrer que $d^{\acute{}}$est compatible avec $\preccurlyeq$ (on suppose que ψ est non-décroissante).

Soient $x, y, z \in X$, tel que $x \preccurlyeq y \preccurlyeq z \Rightarrow d^{\acute{}}(x, z) \geq \max(d^{\acute{}}(x, y), d^{\acute{}}(y, z))$.

On sait que $d(\psi(x), \psi(z)) \geq \max(d(\psi(x), \psi(y)), d(\psi(y), \psi(z)))$, alors par définition, on a, si ψ est non-décroissante, alors $x \preccurlyeq y \preccurlyeq z \Rightarrow \psi(x) \succcurlyeq \psi(y) \succcurlyeq \psi(z)$

$\Rightarrow \psi(z) \preccurlyeq \psi(y) \preccurlyeq \psi(x)$ et on a :

$$d(\psi(x), \psi(z)) = d(\psi(z), \psi(x)) \leq \max(d(\psi(z), \psi(y)), d(\psi(y), \psi(x))),$$

$$d(\psi(x), \psi(z)) = \max(d(\psi(x), \psi(y)), d(\psi(y), \psi(z))),$$

$$d(\psi(x), \psi(z)) = \max\left(d^{\acute{}}(x, y), d^{\acute{}}(y, z)\right). \quad \square$$

Théorème 4.3.6 [4] *On considère un ordre linaire classique* $\preccurlyeq$ *sur* X, *une pseudo-métrique* d *compatible avec* $\preccurlyeq$ *et une t-norme archimédienne continue* T *avec un générateur additif* t *et une fonction monotone* $\psi : X \longrightarrow X$, *alors*

$$R(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \preccurlyeq y; \\ t^{-1}(\min(d(\psi(x), \psi(y)), t(0))) & \text{sinon.} \end{cases}$$

est un T*-ordre faible.*

Preuve. [6] D'après le théorème **4.2.2**, on a :

$R(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \preccurlyeq y; \\ E(x,y) & \text{sinon.} \end{cases}$ est un ordre faible sur X, et d'après théorème **4.3.1** la relation $E(x,y) = t^{-1}(\min(d(x,y), t(0)))$ est une relation d'équivalence, et d'après lemme **4.3.3** E est compatible avec $\preccurlyeq$, et d'après le lemme **4.3.5**, on a :

$\acute{d'}(x,y) = d(\psi(x), \psi(y))$ est une pseudo-métrique qui est compatible avec $\preccurlyeq$.

Alors, $E(x,y) = t^{-1}(\min(d(x,y), t(0)))$ est une relation T-équivalence compatible avec $\preccurlyeq$ et d'après **4.2.2** on a, R est un T-ordre faible. $\square$

On suppose que notre domaine d'intérêt X est certains sous ensembles mesurables, des réels et soit $c : X \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ est une fonction de poids non négative, alors pour tout élément x_0 choisi de X, la fonction suivante est non-décroissante au sens de ordre linéaire naturel $\leq$.

$$\psi(x) = \int_{x_0}^{x} c(y)\, dy. \tag{4.6}$$

D'où, nous avons une méthode simple de construire une transformation monotone qui est interprétée facilement comme suit : le plus haut les valeurs de la fonction c autour de quelque point x, le plus des éléments autour de x devraient être distingués. Si, par exemple, $c(x) = 0$ dans quelque intervalle, alors nous ne distinguons pas entre ces valeurs. C'est évident qu'est un genre d'anti dérivative de la fonction poids c, alors que c peut être considéré également comme un genre de (dérivé généralisé) de ψ.

Exemple 4.3.7 [4] Considérons les deux fonctions de poids suivantes :

$c_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si} & x < 2; \\ 0 & \text{si} & x \in [2,3]; \\ 2 & \text{sinon.} & \end{cases}$, $c_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi/8}}.\exp(-8(x\text{-}2.5)^2)$.

Evidemment, c_1 est conçue pour ne pas faire toute différence entre deux valeurs de l'intervalle $[2,3]$ et peser des différences de valeurs au-dessus de 3 quatre fois aussi fortement que différences de valeurs au-dessous de 2.Autrement la fonction c_2 n'est évidemment rien, mais la fonction de la densité de la distribution normale ordinaire avec valeur moyenne

[6] La preuve est une contribution personnelle.

2.5 et d'écart-type 0.25 standard. En utilisant 4.6, nous pouvons définir deux fonctions en escalier ψ_1 et ψ_2 de c_1 et c_2, respectivement permettant pour définir les quatre ordres faibles flous (voir 4.3.4) :

$R_{18}(x,y) = min(1, exp(\psi_1(y)\text{-}\psi_1(x)))$,

$R_{19}(x,y) = min(1, exp(\psi_2(y)\text{-}\psi_2(x)))$,

$R_{20}(x,y) = min(1, max(1\text{-}\psi_1(x) + \psi_1(y), 0))$,

$R_{21}(x,y) = min(1, max(1\text{-}\psi_2(x) + \psi_2(y), 0))$.

C'est clair à partir des résultats au-dessus que R_{18} et R_{19} sont des T_P-Ordres faibles, pendant que R_{20} et R_{21} sont T_L-Ordres faibles.

Conclusion et perspectives

Il y a plusieurs possibilités de fuzzifier et examiner les relations d'ordre flous et posets flou. Il est clair que l'approche présenté ici est convient de l'approche du cutworthy[7]. En effet, nous avons établi un rapport entre les posets flous comme sous-ensembles flous de posets classiques et les ordres flous, afin que les coupes soient préservées. Par conséquent, dépendre de la situation concrète dans la quelle l'ordre flou paraît. Nous signalons l'importance des atomes dans le treillis engendrés par des atomes dans la représentation des ensembles flous par les coupes correspondants aux atomes. Dans ce travail nous avons mis en valeur plusieurs représentations d'ordres faibles flous, et la décomposition d'ordres faibles flous en ordres linéaires classiques et relations d'équivalence floues.

En fin plusieurs questions ouvertes restent à répondre, notamment en cas de relations n-aires, ou lorsque on change les conditions sur le treillis

[7]Les propriétés classiques fuzzifier sont préservées pour les coupes [21].

Bibliographie

[1] Bandler, W., Kohout L.J. : *Fuzzy relational products as a tool for analysis and synthesis of the behaviour of complex natural and artificial systems*, in : S.K.Wang, P.P. Chang (Eds.), Fuzzy Sets : Theory and Application to Policy Analysis and Information Systems, Plenum Press, NewYork, 1980, pp. 341–367.

[2] Bodenhofer, U. : *A similarity-based generalization of fuzzy orderings preserving the classical axioms*, Internat.J.Uncertainty Fuzziness Knowledge-Based Systems 8 (5) (2000) 593–610.

[3] Bodenhofer, U. : *representations and constructions of similarity-based fuzzy orderings*, Fuzzy Sets and Systems 137(1) (2003) 113–136.

[4] Bodenhofera, U. De Baets, B. Fodorc, J. : *A compendium of fuzzy weak orders :Representations and constructions*, Fuzzy Sets and Systems 158 (2007) 811 – 829.

[5] Cantor, G. : *Beitrage zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, Math. Ann. 46 (1895) 481–512.

[6] Caspard, N., Leclerc, B., Monjardet, B. : *Ensembles ordonnés finis concepts resultats et usages*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007.

[7] Davey, B.A., Pristley, H.A. : *Introduction to treillis and Order. Cambridge University Press*, Cambridge (1992).

[8] De Baets,B., Fodor,.J, Kerre,E.E. : *Gödel représentable fuzzy weak orders*, Internat. J. Uncertainty Fuzziness Knowledge-Based Systems 7 (2) (1999) 135–154.

[9] Fodor, J., Ovchinnikov, S.V. : *On aggregation of T -transitive fuzzy binary relations*, Fuzzy Sets and Systems 72 (1995)135–145.

[10] Fodor, J., Roubens, M. : *Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.

[11] Gottwald, S. : *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*, Vieweg, Braunschweig, 1993.

[12] Hajek, P. : *Metamathematics of Fuzzy Logic*, Trends in Logic, vol. 4, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.

[13] Klement, E.P., Mesiar,R., Pap, E. : *Triangular Norms*, Trends in Logic, vol. 8, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[14] Krantz, D.H., Luce, R.D., Suppes, P., Tversky .A : *Foundations of Measurement*, Academic Press, San Diego, CA,1971.

[15] Ling, C.H. : *Représentation of associative functions*, Publ. Math. Debrecen 12 (1965) 189–212.

[16] Ovchinnikov, S.V. : *An introduction to fuzzy relations*, in : D. Dubois, H. Prade (Eds.), *Fundamentals of Fuzzy Sets*, The Handbooks of Fuzzy Sets, vol. 7, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2000, pp 200.

[17] Roberts, F.S. : *Measurement Theory*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1979.

[18] Rosenstein, J.G. : *Linear Orderings*, Pure and Applied Mathematics, vol. 98, Academic Press, NewYork, 1982.

[19] Schweizer, B, Sklar, A. : *Probabilistic Metric Spaces*, North-Holland, Amsterdam, 1983.

[20] Šešelja, B., Tepavčević, A. : *Representing Ordered Structures by Fuzzy Sets.* An Overview, Fuzzy Sets and Systems 136, (2003) 21–39.

[21] Šešelja, B., Tepavčević, A. : *Fuzzy Ordering Relation and Fuzzy Poset*, A. Ghosh, R.K. De, and S.K. Pal (Eds.) : PReMI 2007, LNCS 4815, 2007, pp. 209–216.

[22] Šešelja, B., Tepavčević, A. : *Completion of Ordered Structures by Cuts of Fuzzy Sets*, An Overview. Fuzzy Sets and Systems (2003) 136, 1–19 .

[23] Szpilrajn, E. : *Sur l'extension de l'ordre partiel*, Fund. Math. 16 (1930) 386–389.

[24] Valverde, L. : *On the structure of F-indistinguishability operators*, Fuzzy Sets and Systems 17 (3) (1985) 313–328.

[25] Zadeh, L.A. : *Fuzzy sets*, Inform. Control 8 (1965) 338–353.

[26] Zadeh, L.A. : *Similarity relations and fuzzy orderings*, Inform. Sci. 3 (1971) 177–200.

ملخص المذكرة بالعربية

هذه المذكرة تعرض في جزئها الأول الربط بين علاقة الترتيب الضعيفة المعرفة علي مجموعة غير خالية X و مجموعة أجزاء مجموعة ضبابية من مجموعة مرتبة معرفة علي X (Fuzzy poset). وفي جزئها الثاني تعرض ثلاثة نتائج رئيسية لتمثيل، وكل منها طريقة للإنشاء:(1) . تمثيل مؤسس علي الدوال النتيجة. (2) . تمثيل مؤسس علي الاحتواء. (3). التمثيل بواسطة التفكيك إلي علاقات ترتيب كلي وعلاقات تكافؤ التي تسهل أيضا إنشاء مؤسسا علي أشباه مترية (Pseudo-métriques) .

Abstract

The first part of this work presents the connection between the fuzzy order relation (weak) on a nonempty set X and the set of the fuzzy parts of a partially ordered set on X (Fuzzy poset), as well as various properties of the cuts of structures (Lattice, complete lattice…) are proven. A representation of fuzzy sets by cuts corresponding to atoms in atomically generated lattices has also been given.

The second part of this work presents three fundamental representation and construction results: (i) score function-based representations, (ii) inclusion-based representations, (iii) representations by decomposition into crisp linear orders and fuzzy equivalence relations, which also facilitates a pseudo-metric-based construction.

Résume

La première partie de ce mémoire présente la connexion entre la relation d'ordre flou (faible) sur un ensemble non vide X et l'ensemble des parties floues d'un ensemble net partiellement ordonné sur X (Fuzzy poset), ainsi que plusieurs propriétés des coupes de structures (Treillis, treillis complet…) sont prouvées .

La deuxième partie de ce document présente trois résultats fondamentales de représentation et de construction : (i) Représentations basé sur la fonction score, (ii) Représentations basées sur inclusion, (iii) Représentations par décomposition, en ordres linéaires classiques et des relations floues d'équivalence. Ce qui facilite également une construction basé sur pseudo-métriques.