

UNIVERSITÉ DE M'SILA
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT DES MATHÉMATIQUES

Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Domaine: Mathématiques et Informatiques

Filière: Mathématiques

Option: Mathématiques Appliquées et discrètes

Par

RANIA M'HAMDIA

THÈME

SUR LES Solution d'équation intégrale de Volterra de première espèce

Soutenu le : ../0./ 2016

Devant le jury composé de :

- 1).....
- 2).....
- 3).....

Dirigé par:

*Mr.*ZIANE BARAHIM

Année: **2015/2016**

Remerciements

C'est au bon DIEU tout puissant que je dois tous mes absolus remerciements pour m'avoir donné de la santé, la force, la volonté et surtout la patience tout au long du chemin de mes études et l'exécution de ce mémoire.

Au terme de ce travail de mémoire de Master, les mots justes sont difficiles à trouver pour exprimer mes vifs remerciements.

*J'ai l'honneur et le plaisir de présenter ma profonde gratitude et mes sincères remerciements à mon encadreur **Mr LAKHALI**, pour sa précieuse aide, ses orientations et le temps qu'elle m'a accordé pour mon encadrement.*

Je remercie également tous ceux qui ont contribué de prêt ou de loin à la réalisation de mon mémoire.

Dédicaces

*Comment je vous remercie de superbe soutien que vous m'avez donné tout au long de ma vie, il me fait un immense plaisir d'être, mon **Papa**, il suffit seulement que je m'en regarde en soit et penser à votre affection, votre sacrifice et vos inappréciables prières. Que **DIEU** me donne la force que je puisse vous rendre la moindre de vos faveurs.*

Et je dédie ce modeste travail accompagné d'un profond amour :

*A celle qui m'a arrosé de tendresse et d'espairs, à la source d'amour incessible, ma chère **mère**.*

*« Que **DIEU** vous garde ».*

A mes chères soeurs

A mes très chères copines

Enfin, merci à tous ceux qui ont rendu possible ce travail.

NOTATIONS

$w(x)$ fonction de pondération

P_n polynômes orthogonaux

H_n polynômes d'Hermite

$k(x, y)$ Noyau de l'équation intégrale

φ la fonction inconnue

$\tilde{\varphi}$ la solution approchée

$C(\Omega)$ l'espace des fonctions continues

A opérateur linéaire borné

$(A\varphi)$ opérateur intégral

Table des matières

Introduction	2
1 Concepts de base	3
1.1 Notions d'analyse fonctionnelle	3
1.1.1 Espace normé	3
1.1.2 Espace de Banach	4
1.1.3 Espace L_p	5
1.1.4 Espace de hilbert	6
1.2 Opérateurs	7
1.2.1 Linéarité des opérateurs	7
1.2.2 Continuité des opérateurs linéaires	7
1.2.3 Opérateurs compact	7
1.3 Opérateur intégrale	8
1.3.1 Opérateur intégrale compact	8
1.4 Théorème de weierstrass:	9
2 Classification des équations intégrales	10
2.1 Équations intégrales de Volterra:	10
2.2 Équation intégrale de Fredholm	12
2.3 Équation intégrale de Volterra-fredholm	13
2.4 Équation intégrale singulier	13
2.5 Liaison entre les équations différentielles linéaires et les équations intégrales de Volterra	14

2.6	L'équation linéaire de Volterra du second type	15
2.6.1	Existence et l'unicité de la solution	16
3	Polynômes orthogonaux et les résultats d'approximation	18
3.1	Polynômes orthogonaux	18
3.1.1	Structure de $\mathbb{R}_n[x]$:	18
3.1.2	Existence et unicité	19
3.2	Zéros de polynômes orthogonaux	21
3.3	Calcul des zéros des polynômes orthogonaux	22
3.4	Quadrature de Gauss	23
3.5	Polynômes d' hermite	24
3.6	Fonction d'Hermite	27
3.7	La quadrature de Gauss -Hermite	28
3.8	Calcul des noeuds et des poids	28
3.9	La méthode de collocation	29
4	Application numérique	31
4.0.1	Exemple 1:	32
4.0.2	Exemple 2:	32
	Conclusion générale	35
	Bibliographie	36

Introduction

Dans cette dernière décennie, les équations intégrales ont attiré l'attention de plusieurs chercheurs scientifiques en math comme en physique.

Ceci est grâce de à l'utilisation très large de ce type d'équations dans presque tous les domaines scientifiques, economics,.....ect.

Les principaux fondateurs de la théorie d'équations intégrales sont Vito Volterra (1860,1940), et Ivar Fredholm (1866-1927), ainsi que David Hilbert (1862-1943) et Erhard Schmidt (b.1876).

De nombreux problèmes physique sont modelisés par les équations intégrales, notamment la théorie du potentiel, des problèmes de Dirichlet, electrostatics,.....ect.

Certaines méthodes numérique disponibles pour résoudre l'équation intégrale ont été développées par de nombreuses recherches très récemment la méthode de quadrature de Gauss, la méthode de quadrature de Simpson, la méthode de Galerkin on utilise les polynômes de Chebyshev,.....

Dans ce travail certaines méthodes d'analyse ont été utilisées pour résoudre l'équation intégrale de Volterra de deuxième type ces méthodes sont: la méthode de collocation qui utilise les polynômes d'Hermite et la méthode de quadrature de Gauss Hermite

Ce mémoire est organisé comme suit:

On a commencé par une introduction sur l'analyse fonctionnelle et quelques propriétés de base dans le premier chapitre.

Le deuxième chapitre présente une introduction sur les équations intégrales en particulier les équations intégrales de Volterra de seconde type.

Le troisième chapitre présente les polynômes d'Hermite, la méthode quadrature de et la Gauss-Hermite méthode de collocation.

En fin le quatrième chapitre on a traité les équations intégrales de Volterra analytiquement et numériquement par la méthode de collocation.

Chapitre 1

Concepts de base

1.1 Notions d'analyse fonctionnelle

1.1.1 Espace normé

Soit V un espace vectoriel complexe ; une norme en V est une fonction $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait aux trois conditions suivantes:

$$(i) \|v\| \geq 0; \forall v \in V; \text{et } \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0.$$

$$(ii) \|\alpha v\| = |\alpha| \|v\| ; \forall v \in V, \alpha \in \mathbb{C}$$

$$(iii) \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| ; \forall v, w \in V$$

-Un espace vectoriel muni d'une norme et appelé un espace vectoriel normé.

-Considérons une importante espace vectoriel normé constituent de fonctions:

(fonctions continues sur un intervalle borné)

Considérons un intervalle borné $[a, b] \subset \mathbb{R}$, et soit $C[a, b]$ désignent l'ensemble des fonctions continues:

$$\{C[a, b] := f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ est continue}\}$$

muni $C[a, b]$ avec les opérations naturelles d'addition et de multiplication par un scalaire.

Nous savons que chaque fonction f est borné et prend une valeur maximal ; soit

$$\|f\|_\infty := \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

La norme $\|\cdot\|_\infty$ est appelée la norme supremums.

nous avons donc $\|\cdot\|_\infty$ définie une norme dans $C[a, b]$; $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé.

1.1.2 Espace de Banach

Définition : (suite de Cauchy)

Soit V un espace vectoriel normé

Une suite $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ d'éléments en V est une de Cauchy si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\|v_k - v_l\| \leq \varepsilon, \forall k, l \geq n$$

en tout espace vectoriel normé une suite convergente est automatiquement une suite de Cauchy

Lemme : (les suites convergentes sont des suites de Cauchy)

Supposons que V est un espace vectoriel normé et que $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ est une suite convergente dans V , alors $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ est une suite de Cauchy.

Définition : (Espace de Banach)

Un espace vectoriel normé V avec la propriété que chaque suite de Cauchy dans V converge vers un certain $v \in V$ est appelé un espace de Banach.

Théorème : (Fonctions continues sur un interval borné)

L'espace vectoriel $C[a, b]$ est un Banach par rapport à la norme :

$$\|f\|_{\infty} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

1.1.3 Espace L_p

$]a, b[\subseteq \mathbb{R}$ un intervalle donné et tout $p \in [1, \infty[$

Nous pouvons considérer l'espace vectoriel:

$$L_p(a; b) = \left\{ f :]a, b[\rightarrow \mathbb{C}, \int_a^b |f(x)|^p dx < \infty \right\}$$

L'espace vectoriel $L_p(a; b)$ muni de la norme:

$$\|f\|_{L^p(a;b)} = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

est un espace de **Banach**.

• **norme maximale:**

$$\|f\|_{\infty} = \max_{x \in]a,b[} |f(x)|$$

• **la norme L_1 :**

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$$

• la norme euclidienne L_2 :

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

1.1.4 Espace de hilbert

• **Produit scalaire:**

On appelle produit scalaire sur un espace vectoriel \mathbf{E} réel ou complexe une fonction $\langle f, g \rangle$ définie sur $\mathbf{E} \times \mathbf{E}$ dans $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} possédant les propriétés suivantes:

- $\langle f, f \rangle \geq 0$
- $\langle \lambda f, g \rangle = \lambda \langle f, g \rangle$
- $\langle f, \lambda g \rangle = \bar{\lambda} \langle f, g \rangle$
- $\langle f, g + h \rangle = \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle$
- $\langle f, f \rangle = 0 \iff f = 0$
- $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$

• **Espace euclidien (préhilbertien) :**

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est dit espace euclidien ou préhilbertien, on peut lui introduire une norme définie par:

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

On remarque que toutes les propriétés de la norme sont vérifiées, due la notion du produit scalaire sauf peut être l'inégalité triangulaire où en doit faire intervenir l'inégalité de **cauchy-schwartz** :

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|$$

•Espace de hilbert:

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, qui est un espace de Banach par rapport à la norme $\|f\| = \sqrt{\langle f; f \rangle}$ est appelé un espace de Hilbert.

1.2 Opérateurs**1.2.1 Linéarité des opérateurs**

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur A défini sur E dans F est dite linéaire s'il vérifie les conditions suivantes:

1. Pour toutes φ_1 et $\varphi_2 \in E$, $A(\varphi_1 + \varphi_2) = A(\varphi_1) + A(\varphi_2)$
2. Pour toute $\varphi_1 \in E$, $\lambda \in K = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, $A(\lambda\varphi_1) = \lambda A(\varphi_1)$

1.2.2 Continuité des opérateurs linéaires

Un opérateur linéaire A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F est dite continu au point x_0 de G si pour toute suite x_n de G converge vers x_0 , la suite $A(x_n)$ converge vers $A(x_0)$ c'est à dire:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n) = A(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = A(x_0)$$

Remarque: L'opérateur linéaire A est dit continu sur G , s'il est continu en chaque point de l'ensemble G .

1.2.3 Opérateurs compact

Théorème 1 (Arzela-Ascoli) :

Un ensemble G de $C(\Omega)$ avec Ω est compact est relativement compact si

- G est borné: $\forall \varphi \in G, \forall x \in \Omega$

$$\exists M > 0 : |\varphi(x)| < M.$$

• G est équicontinue: $\forall x, y \in \Omega; \forall \varphi \in G; \forall \varepsilon > 0$

$$\exists \delta > 0, |x - y| < \delta \implies |\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon.$$

Théorème 2:

Soit A un opérateur linéaire d'un espace normé E dans un espace normé F . A est dit opérateur compact si pour tout ensemble borné $\Omega \subset E$, $A(\Omega)$ est relativement compact i.e $\overline{A(\Omega)}$ est compact.

Autrement dit A est dit compact si pour toute suite bornée $\{\varphi_n\}$ de E , la suite $\{A\varphi_n\}$ contient une sous suite convergente dans F .

1.3 Opérateur intégrale

Soit Ω un ensemble compact de \mathbb{R}^n , k une fonction continue de $\Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

l'opérateur linéaire A définie comme suit:

$$A : \varphi \in C(\Omega) \rightarrow A\varphi \in C(\Omega)$$

$$(A\varphi)(x) = \int_a^b k(x, y) \varphi(y) dy$$

est appelé opérateur intégrale à noyau continu $k(x, y)$, cet opérateur est borné ,la norme de A donnée par

$$\|A\|_\infty = \max_{x \in \Omega} \int_\Omega |k(x, y)| dy$$

1.3.1 Opérateur intégrale compact

Théorème:

L'opérateur intégral A de $C(\Omega)$ dans $C(\Omega)$ à noyau continu est un opérateur compact.

Preuve: voir[3]

1.4 Théorème de weierstrass:

Pour toute fonction f continue à support compact sur \mathbb{R} il existe une suite de fonctions entières qui tend vers f uniformément sur \mathbb{R} .

En particulier, il existe une suite de fonctions polynomiales qui tend vers f uniformément sur tout compact.

Chapitre 2

Classification des équations intégrales

Une équation intégrale peut être classée comme une équation intégrale linéaire ou non-linéaire comme nous l'avons vu dans l'équation différentielle ordinaire et partielle peut être équivalente représentée par l'équation intégrale .Donc, il y a une bonne relation entre ces deux équations.

Les équations intégrales les plus fréquemment utilisées se répartissent en deux grandes classes, à savoir **volterra** et **fredholm** équations intégrales , bien sûr, nous avons les classer comme des problèmes ,nous rencontrons les équations singulières ,en particulier les quatres types sont donnés ci-dessous:

- équations intégrales de Volterra
- équations intégrales de Fredholm
- équations intégrales Singulier
- équations Volterra-Fredholm

2.1 Équations intégrales de Volterra:

La forme la plus standard de volterra linéaires équations intégrales est :

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)u(t)dt \quad (2.1)$$

où les limites des intégrales sont fonction de x et la fonction inconnue $u(x)$ apparaît sous le signe d'intégrale $\varphi(x) = 1$, l'équation (2.1) devient simplement

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)u(t) \quad (2.2)$$

et cette équation est connue comme équation intégrale de volterra de deuxième type; si $\phi(x) = 0$ alors l'équation(2.2) devient:

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)u(t)dt = 0 \quad (2.3)$$

qui est connu comme l'équation de volterra du premier type

Exemple: Équation intégrale de Volterra de premier type:

$$xe^{-x} = \int_0^x e^{t-x}u(t)dt \quad (2.1.1)$$

et

$$5x^2 + x^3 = \int_0^x (5 + 3x - 3t) u(t)dt \quad (2.1.2)$$

Équation intégrale de Volterra de deuxième type:

$$u(x) = 1 - \int_0^x u(t) dt \quad (2.1.3)$$

et

$$u(x) = x - \int_0^x (x - t) u(t) dt \quad (2.1.4)$$

Remarque: Les équations intégrales de Volterra interviennent dans des problèmes de physiques où il existe une direction privilégiée de variation de la variable indépendante (par exemple du temps, de l'énergie)

2.2 Équation intégrale de Fredholm

La forme la plus standard de Fredholm linéaires équations intégrales est:

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt \quad (2.8)$$

où les limites des intégrales sont fixées, et la fonction inconnue $u(x)$ apparaît sous le signe d'intégrale $\phi(x) = 1$, l'équation devient simplement

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt \quad (2.9)$$

$\phi(x) = 0$ alors l'équation devient

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt = 0 \quad (2.10)$$

qui est connu comme l'équation de Fredholm du premier type.

Exemple:

$$\frac{\sin x - x \cos x}{x} = \int_0^1 \sin(xt) u(t) dt$$

et

$$u(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x-t) u(t) dt$$

2.3 Équation intégrale de Volterra-fredholm

Les Volterra-fredholm équations intégrales apparaissent dans littérature sous la forme:

$$u(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t) u(t) dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x, t) u(t) dt \quad (2.11)$$

Exemple:

$$u(x) = 6x + 3x^2 + 2 - \int_0^x xu(t) dt - \int_0^1 tu(t) dt$$

2.4 Équation intégrale singulier

Équation intégrale de Volterra de premier type est:

$$f(x) = \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} k(x, t) u(t) dt \quad (2.12)$$

ou de second type

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} k(x, t) u(t) dt \quad (2.13)$$

sont appeles singulier si l'une des limites de l'intégration ou les deux sont infinis.

On outre; les deux équations précédentes sont singuliers si le nayau $k(x, t)$ devient non bornné en un ou plusieurs points dans l'intervalle d'intégration.

2.5 Liaison entre les équations différentielles linéaires et les équations intégrales de Volterra

La résolution de l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x) y = F(x) \quad (2.14)$$

à coefficients continus $a_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) avec les conditions initiales :

$$y(0) = c(0), y'(0) = c_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = c_{n-1} \quad (2.15)$$

Peut être ramené à la résolution d'une équation intégrale de Volterra de seconde espèce.

Illustrons notre affirmation sur l'exemple différentielle du second ordre

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + \dots + a_2(x) y = F(x) \quad (*)$$

$$y(0) = c(0), y'(0) = c \quad (**)$$

posons

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \varphi(x) \quad (2.16)$$

d'où, vu les conditions initiales (**), on obtient successivement

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(t) dt + c_1, \quad y = \int_0^x (x-t) \varphi(t) dt + c_1 x + c_0 \quad (2.17)$$

Nous avons utilisé la formule:

$$\underbrace{\int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x dx \dots \int_{x_0}^x f(x) dx}_{n \text{ fois}} = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-z)^{n-1} f(z) dz$$

Compte tenu de (2.16), (2.17) mettons l'équation différentielle (*) sous la forme:

$$\varphi(x) + \int_0^x a_1(x) \varphi(t) dt + c_1 a_1(x) + \int_0^x a_2(x)(x-t)\varphi(t)dt + c_1 x a_2(x) + c_0 a_2(x) = F(x)$$

où

$$\varphi(x) + \int_0^x [a_1(x) + a_2(x)(x-t)] \varphi(t)dt = F(x) - c_1 a_1(x) - c_1 x a_2(x) - c_0 a_2(x) \quad (2.18)$$

posant

$$k(x, t) = - [a_1(x) + a_2(x)(x-t)] \quad (2.19)$$

$$f(x) = F(x) - c_1 a_1(x) - c_1 x a_2(x) - c_0 a_2(x) \quad (2.20)$$

nous ramenons l'équation (2.18) à la forme suivante:

$$f(x) + \int_0^x k(x, t)u(t)dt = 0 \quad (2.21)$$

i.e nous obtenons une équation intégrale de volterra de seconde type.

L'unicité de la solution (2.21) résulte de l'existence et de l'unicité de la solution de **pb de cauchy** (*) and (**) pour l'équation différentielle linéaire à coefficients continus dans un voisinage du point $x=0$.

Inversement ;en résolvant l'équation intégrale (2.21) avec k et f définis par les formules (2.19), (2.20), puis portant $\varphi(x)$ obtenue dans la dernière équation (2.17); nous obtenons la solution de (*) vérifiant les conditions initiales (**)

2.6 L'équation linéaire de Volterra du second type

La forme la plus standard de l'équations intégrales de Volterra du second type est:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t)u(t) \quad (2.22)$$

2.6.1 Existence et l'unicité de la solution

L'approche classique de prouver l'existence et l'unicité de la solution de

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)u(t)dt$$

est la méthode d'approximation successive ,aussi appelée la méthode de picard,cela consiste à l'itération simple

$$u_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)u_{n-1}(t) \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.23)$$

avec $u_0(x) = f(x)$

pour la facilité de manipulation ,il est commode d'introduire

$$\varphi_n(x) = u_n(x) - u_{n-1}(x) \quad n = 1, 2, \dots$$

avec $\varphi_0(x) = u(x)$

en soustrayant de (2.23) la même équation avec n remplacé par $n - 1$, on voit que

$$\varphi_n(x) = \int_0^x k(x,t)\varphi_{n-1}(t) \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.24)$$

aussi de (2.24)

$$u_n(x) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(x) \quad (2.25)$$

Le premier théorème utilise cette itération pour prouver l'existence et l'unicité de la solution dans des conditions très restrictives, à savoir que $k(x,t)$ et $f(x)$ sont continues

Théorème 1 : Si $k(x, t)$ est continue dans $0 \leq t \leq T$ et $f(x)$ est continue $0 \leq x \leq T$ alors l'équation intégrale

2.1 possède une solution unique continue dans $0 \leq t \leq T$

Théorème 2 : Supposer que :

- $f(x)$ est continue dans $0 \leq x \leq T$
- Pour chaque fonction continue h et tout $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq x$ les intégrales

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} k(x, t)h(t)dt$$

et

$$\int_0^t k(x, t)h(t)dt$$

sont continues on fonction de x

- $k(x, t)$ est absolument intégrable par rapport à t pour tout $0 \leq x \leq T$
- Il existe des points $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \dots < T_N = T$ tels que , pour tout i est pour tout $T_i < x < T_{i+1}$

$$\int_{T_i}^{\min(t, t_{i+1})} |k(x, t)| dt \leq \alpha \leq 1$$

où α est indépendant de x et i .

- pour chaque $0 \leq x \leq T$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_x^{x+\delta} |k(x + \delta, t)| dt = 0$$

Alors 2.1 a une solution unique continue pour tout $0 \leq x \leq T$.

Chapitre 3

Polynômes orthogonaux et les résultats d'approximation

3.1 Polynômes orthogonaux

Les polynômes orthogonaux jouent le rôle le plus important dans la méthode spectrale, il est donc nécessaire de disposer d'une étude approfondie de leurs propriétés pertinentes, notre point de départ est la génération de polynômes orthogonaux, ce qui conduit à des formules très utiles telles la formule de christoffel -darboux, nous examinons ensuite quelques résultats sur les zéros de polynômes orthogonaux et présentons des algorithmes efficaces pour leurs calculs, nous consacrons également plusieurs sections de discuter de certains sujets importants tels formules gauss-quadrature, transformées discrètes, et les techniques de différenciation spectrales.

3.1.1 Structure de $\mathbb{R}_n[x]$:

Définition:

On note $\mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels, et de degré au plus n ; $\mathbb{R}_n[x]$ possède une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension finis.

La structure d'espace vectoriel découle de la définition des polynômes de degrés au plus n est de degré base de $\mathbb{R}_n[x]$.

3.1.2 Existence et unicité

Étant donné un intervalle ouvert $I :=]a, b[$ ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$) et une fonction de pondération générique telle que :

$$w(x) > 0, \forall x \in I \text{ et } w \in L^1(I) \quad (3.1)$$

Deux fonctions f et g sont dits orthogonaux entre eux dans $L_w^2(I)$ ou orthogonale par rapport à w si

$$(f \cdot g)_w := \int_a^b f(x)g(x)w(x) = 0$$

Les polynômes algébriques de degré n est désignent par:

$$p_n(x) = k_n x^n + k_{n-1} x^{n-1} + k_{n-2} x^{n-2} + k_{n-3} x^{n-3} + \dots + k_1 x + k_0 \quad k_n \neq 0 \quad (3.2)$$

où $\{k_i\}$ sont des constantes réelles et k_n est le plus grand coefficient de p_n .

Une suite de polynômes $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ avec $\deg(p_n) = n$ est dite orthogonale dans $L_w^2(a, b)$ si

$$(p_n, p_m) = \int_a^b p_n(x)p_m(x)w(x) = \gamma_n \delta_{mn} \quad (3.3)$$

où la constante $\gamma_n = \|p_n\|_w^2$ est égale à zéro et δ_{mn} est le delta kronecker.

Tout au long de cette section $\{p_n\}$ désigne une suite de polynômes orthogonale par rapport à la fonction de pondération w et p_n est de degré n .

Désignons par p_n l'ensemble des polynômes algébriques de degré $\leq n$:

$$p_n := \text{span} \{1, x, x^2, \dots, x^n\} \quad (3.4)$$

par un argument de dimension

$$p_n := \{p_0, p_1, \dots, p_n\} \quad (3.5)$$

Une conséquence directe est la suivante:

Lemme : p_{n+1} est orthogonale à n'importe quel polynôme $q \in p_n$

Théorème : Pour toute fonction de pondération donné positif $w \in L^1(I)$ il existe une suite unique de monique polynômes orthogonaux $\{p_n^-\}$ avec degré $\{p_n^-\} = n$ qui peut être construit comme suit :

$$\begin{aligned} p_0^- &= 1 \\ p_1^- &= x - \alpha \\ p_{n+1}^- &= (x - \alpha_n) p_n^- - \beta_n p_{n-1}^- \quad n \geq 1 \end{aligned} \quad (3.7)$$

où

$$\alpha_n = \frac{(x p_n^-, p_n^-)_w}{\|p_n^-\|_w^2} \quad n \geq 0 \quad (3.8a)$$

$$\beta_n = \frac{\|p_n^-\|_w^2}{\|p_{n-1}^-\|_w^2} \quad n \geq 1 \quad (3.8b)$$

Corollaire : Soit $\{p_n\}$ une suite des polynômes orthogonaux avec $k_n \neq 0$, alors on a:

$$p_{n+1} = (a_n x - b_n) p_n - c_n p_{n-1}, \quad n \geq 0, \quad (3.9)$$

avec $p_{-1} := 0$, $p_0 = k_0$ et

$$\begin{cases} a_n = \frac{k_{n+1}}{k_n} \\ b_n = \frac{k_{n+1}}{k_n} \frac{(xp_n, p_n)_w}{\|p_n\|_w^2} \\ c_n = \frac{k_{n-1}k_{n+1}}{k_n^2} \frac{\|p_n\|_w^2}{\|p_{n-1}\|_w^2} \end{cases} \quad (3.10)$$

Corollaire : Soit $\{k_n \neq 0\}$ une suite de nombre réels , les trois relations de récurrence (3.9;3.10) génère une séquence de polynômes vérifiant les propriétés :

- Le premier coefficientde p_n est k_n et $\deg(p_n) = n$
- $\{p_n\}$ sont orthogonaux par rapport à la fonction de poids $w(x)$
- La norme L_W^2 de p_n est donnée par:

$$\gamma_n = \|p_n\|_w^2 = \left(\frac{a_0}{a_n} \right) c_1 c_2 \dots c_n \gamma_0 \quad ; n \geq 0$$

où

$$\gamma_0 = k_0^2 \int_a^b w(x) dx$$

3.2 Zéros de polynômes orthogonaux

Zéros de polynômes orthogonaux jouent un rôle fondamentale dans les méthodes spectrales. Par exemple ils sont choisis comme les noueds de quadratures de gauss et utilisées pour générer des grilles de calcul pour les méthodes spectrales .Par consequent; il est utile de conduire leurs propriétés essentielles .

Encore une fois; soit $\{p_n\}$ une séquence de polynômes orthogonaux par rapport à la fonction de pondération $w(x)$ dans (a, b) .

Le premier résultat important sur les zéros de polynômes orthogonaux et le suivant:

Théorème : Les zéros de p_{n+1} sont toutes réelles ,simples et se situent dans l'intervalle (a, b) .

Plus précisément soit x_j^0 une première approximation de la x_j de $p_{n+1}(x)$. Ensuite on peut construire un schéma itératif en forme générale:

$$\begin{cases} x_j^{k+1} = x_j^k + D(x_j^k), 0 \leq j \leq n, k \geq 0 \\ \{x_j^0\}_{j=0}^n \text{ donnée une règle détermination} \end{cases}$$

3.4 Quadrature de Gauss

Nous discutons maintenant la relation entre polynômes orthogonaux et formule d'intégration de gauss. Le mécanisme de quadrature de gauss est de rechercher la meilleure approximation numérique d'une intégrale en sélectionnant des noeuds optimales au cours de laquelle l'intégrale est évalué; il appartient à la famille des quadratures numérique:

$$\int_a^b f(x) w(x) dx = \sum_{j=0}^N f(x_j) w_j + E_N[f] \quad (*)$$

où $\{x_j, w_j\}_{j=0}^N$ sont les noeuds en quadrature et le poids et $E_N\{f\}$ est l'erreur de quadrature. nous disons que la formule de quadrature est exacte pour f .

En générale pour tous les N noeuds distincts $\{x_j\}_{j=0}^N \subseteq (a, b)$, le degré de précision de (*) est situés entre N et $2N + 1$; Par ailleurs si les noeuds $\{x_k\}_{k=0}^N$ sont choisis comme des zéros des polynômes p_{N+1} orthogonales par rapport à w . Cette règle bénéficie de degré maximum de précision $2N + 1$.

une telle règle est connue comme la quadrature de gauss.

Théorème:(Quadrature de Gauss) Soit $\{x_j\}_{j=0}^N$ l'ensemble des zéros des polynômes orthogonaux p_{n+1} . Alors il existe un ensemble unique de pondération en quadrature $\{w_j\}_{j=0}^N$ de telle sorte que:

$$\int_a^b p(x) w(x) dx = \sum_{j=0}^N p(x_j) w_j \quad ; \forall p \in p_{2N+1}$$

Les coefficients de pondération en quadrature sont tous positifs est donné par :

$$w_j = \frac{k_{N+1}}{k_N} \frac{\|p_N\|_w^2}{p_N(x_j) p'_{N+1}(x_j)}, \quad 0 \leq j \leq N$$

où k_j est le premier coefficient de polynome p_j .

3.5 Polynômes d'hermite

Nous présentons dans cette section des propriétés de base des polynômes d'hermite, quadrature de gauss et interpolation associée ; techniques de différenciation discrètes

Propriétés de base

Polynômes d'hermite: Les polynômes d'hermite définissent sur tout la ligne $R =]-\infty, +\infty[$ sont orthogonales par rapport à la fonction de poids $w(x) = e^{-x^2}$ tel que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) H_n(x) w(x) dx = \gamma_n \delta_{mn} \quad , \gamma_n = \sqrt{\pi} 2^n n!$$

Les polynômes d'hermite satisfont à la relation de récurrence à trois terme :

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \quad n \geq 1$$

et les premiers membres sont :

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$

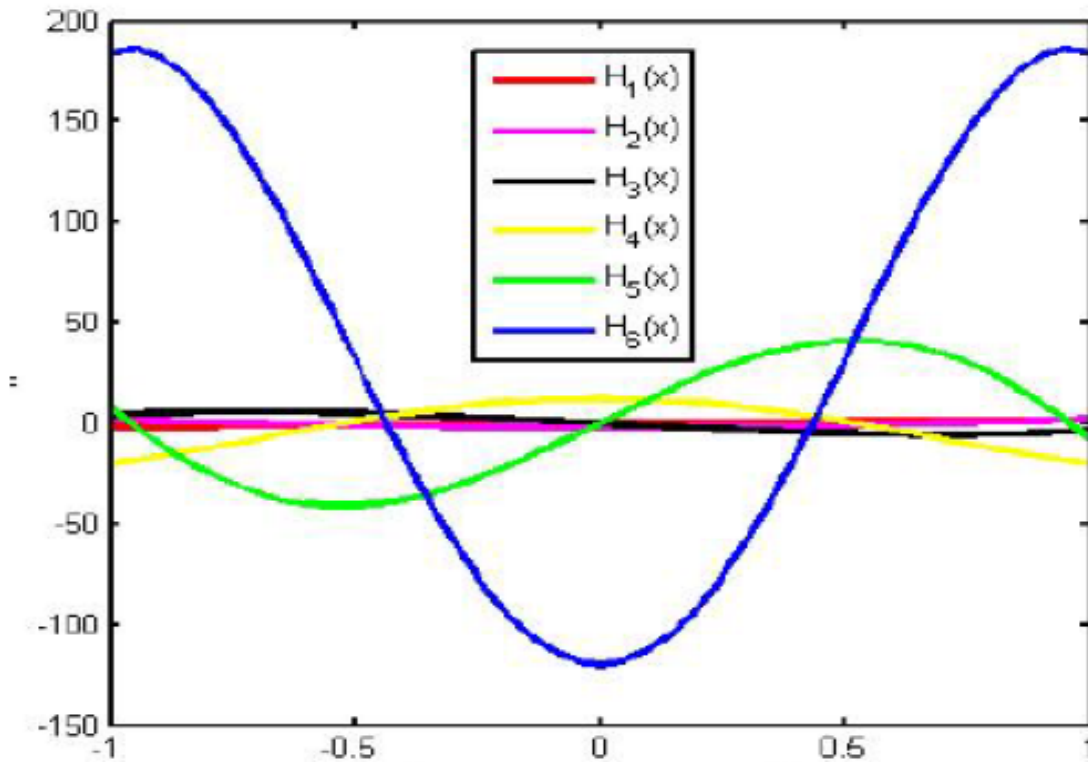


Figure 3.5.1 : Les six premiers polynômes d'hermite

Un vérifié par induction que le premier coefficient de $H_n(x)$ est 2^n

Les polynômes d'hermite ont une relation étroite avec les polynômes de **Laguerre** généralisé

$$H_{2n}(x) = (-1)^n 2^{2n} n! L_n^{(-\frac{1}{2})}(x^2)$$

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n 2^{2n+1} n! x L_n^{(-\frac{1}{2})}(x^2)$$

Par conséquent, $H_n(x)$ est impair (pair) pour tout n impair(pair) tel que

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$$

de plus

$$H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}; \quad H_{2n+1}(0) = 0$$

Les polynômes d'hermite satisfont l'équation de **strum-liouville** :

$$e^{x^2} \left(e^{-x^2} H_n'(x) \right)' + \lambda_n H_n(x) = 0 \quad \lambda_n = 2n$$

ou de manière équivalente:

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + \lambda_n H_n(x) = 0$$

Comme dans le cas des polynômes de **Laguerre** la valeur propre λ_n croit linéairement par rapport à n .

La formule de **Rodrigues** des polynômes d'hermite prend la forme:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left\{ e^{-x^2} \right\}$$

et nous avons l'expression explicite:

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k n!}{k! (n-2k)!} (2x)^{n-2k}$$

La borne supérieure suivante peut être trouvée dans **Abramowitz et stegum 1964**

$$|H_n(x)| \leq c 2^{\frac{n}{2}} \sqrt{n!} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad c \simeq 1.086435$$

Les polynômes d'hermite satisfont:

$$H'_n(x) = \lambda_n H_{n-1}(x) \quad n \geq 1$$

Par conséquent, pour toute $k \in \mathbb{N}$, $\{H_n^{(k)}(x)\}_{n=k}^{\infty}$ sont orthogonaux par rapport à la même fonction de pondération e^{-x^2} , en particulier, nous avons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H'_n(x) H'_m(x) e^{-x^2} dx = \lambda_n \gamma_n \delta_{mn}$$

une autre relation de récurrence:

$$H'_n(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x) \quad n \geq 1$$

3.6 Fonction d'Hermite

Les polynômes d'hermite ne sont pas très utiles dans la pratique en raison de leur mauvais comportement à l'infini, par conséquent on considère les fonctions d'hermite définies par :

$$\hat{H}_n(x) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{2^n n!}} e^{-x^2/2} H_n(x) \quad , \quad n \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

qui sont normalisées de telle sorte que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{H}_n(x) \hat{H}_m(x) dx = \delta_{mn}$$

par la relation de récurrence à trois termes nous obtenons :

dont les entrées sont :

$$a_j = 0; 0 \leq j \leq N$$

$$b_j = \frac{j}{2}, 1 \leq j \leq N$$

Les coefficients de pondération en quadrature $\{w_j\}_{j=0}^N$ peuvent être calculés à partir de la première composante des vecteurs propres orthonormés de A_{N+1} , ou la formule poids .

Toutefois en raison de la croissance rapide des polynômes d'Hermite , cette dernière approche est instable pour un grand N .

3.9 La méthode de collocation

La méthode de collocation permet de trouver une solution approchée de l'équation:

$$A\varphi = f$$

dans un sous- espace de dimension finis.

En exigeant que l'équation est satisfaite dans un nombre finis de points que l'on appelle de colocalisation.

Pour être plus précise; soit $Y = C(G)$ et $A : X \rightarrow Y$ est un opérateur linéaire borné.

Soit $X_n \subset X$ et $Y_n \subset Y$ désignent une séquence de sous-espaces avec $\dim X_n = \dim Y_n = n$; choisissez n points x_1, x_2, \dots, x_n de G , alors la méthode de collocation se rapproche la solution de $A\varphi = f$ par un élément $\varphi_n \in X_n$ satisfaisant :

$$(A\varphi_n)(x_j) = f(x_j)$$

Nous allons d'abord considérer la méthode de collocation pour les équations intégrales de second type

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_G k(x, t) u(t)$$

avec noyau continue ou faiblement singulier; si nous utilisons les polynômes orthogonaux on écrit:

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^n \gamma_k p_k$$

tel que $\gamma_j = \varphi_n(x_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$ et le système $u(x) = f(x) + \lambda \int_G k(x, t) u(t)$ devient:

$$\gamma_j - \sum_{k=1}^N \gamma_k \lambda \int_G k(x_j, t) p_k(t) dt = f(x_j) \quad , j = 0, 1, \dots, n$$

Chapitre 4

Application numérique

Notre objective est de trouver la solution approchée à la solution exacte de l'équation de Volterra en utilisant les polynômes d'Hermite.

Soit

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x, y)\varphi(y)dy = f(x) \quad a \leq x \leq b$$

Tous d'abord ,on pose

$$\varphi(x) \simeq \sum_{i=0}^N \alpha_i H_i(x)$$

$$\sum_{i=0}^N \alpha_i H_i(x) - \lambda \int_a^x K(x, y) \sum_{i=0}^N \alpha_i H_i(y) dy = f(x) \quad a \leq x \leq b$$

Pour déterminer les inconnus α_i , on applique la méthode de **collocation** on points $\{x_j\}_{j=0}^N$ tel que les x_j sont les zéros de polynômes d'Hermite de degré N , on obtient

$$\sum_{i=0}^N \alpha_i H_i(x_j) - \lambda \int_a^{x_j} K(x_j, y) \sum_{i=0}^N \alpha_i H_i(y) dy = f(x_j) \quad a \leq x \leq b$$

$$\sum_{i=0}^N \alpha_i K_{i,j} = F_j ; i, j = 0, 1, \dots, N$$

Où

$$K_{i,j} = H_i(x_j) - \lambda \int_a^{x_j} K(x_j, y) H_i(y) dy.$$

$$F_j = f(x_j).$$

Cet algorithme nous donne des bons résultats, ce que nous montrent les exemples suivants:

4.0.1 Exemple 1:

Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte

Soit l'équation intégrale:

$$\varphi(x) - \int_0^x \varphi(y) dy = 1$$

avec la solution exacte est donnée par

$$\varphi(x) = e^x$$

x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
-1	0.367879441171442	0.36787943921441	1.957031980914792e-009
-0.5	0.606530659712633	0.606530649612533	1.010009997859385e-008
0	1	0.9999999989789	1.021099982345675e-009
0.5	1.648721270700128	1.648721370701028	1.000009000051705e-007
1	2.718281828459046	2.718281827448046	1.011000172468357e-009
1.5	4.481689070338065	4.481688071238065	9.991000000653116e-007

Tableau 1: comparaison entre solution exacte et approchée

4.0.2 Exemple 2:

Soit l'équation intégrale

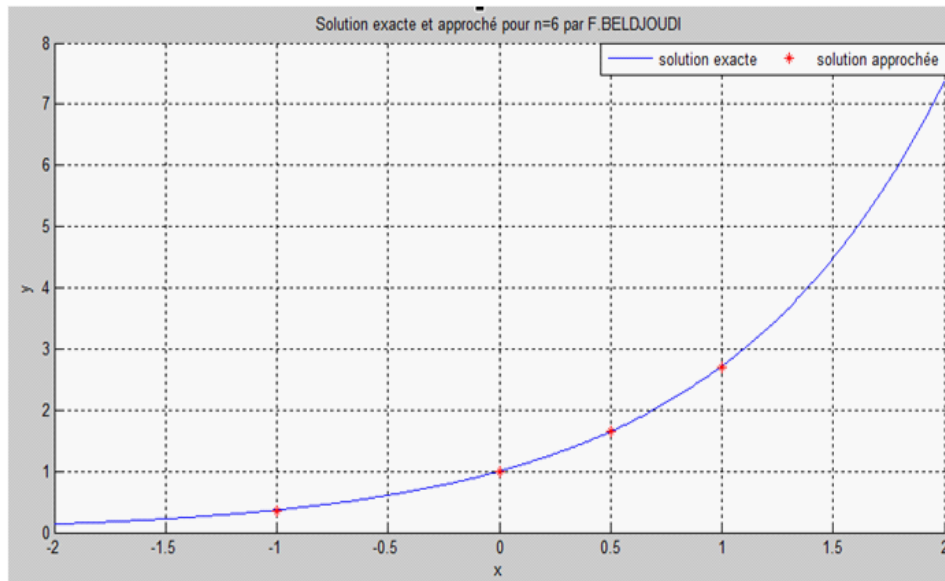


Figure 4.0.1 : Solution exacte et approchée pour n=6

$$\varphi(x) - \int_0^x xy\varphi(y)dy = x$$

avec la solution exacte est donnée par

$$\varphi(x) = xe^{\frac{x^3}{3}}$$

x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
-1	0.214959393172137	-0.6621233333333334	0.877082726505471
-0.5	0.287756837132741	-0.513190598958333	0.800947436091074
0.1	0.300100016668519	0.089269178151666	0.210830838516852
0.5	0.302712186532160	0.210875928106666	0.091836258425494
1	0.302712186532160	0.319198679615000	0.016486493082840
1.5	0.312764071556997	0.478053932291667	0.165289860734669

Tableau 2: comparaison entre solution exacte et approchée

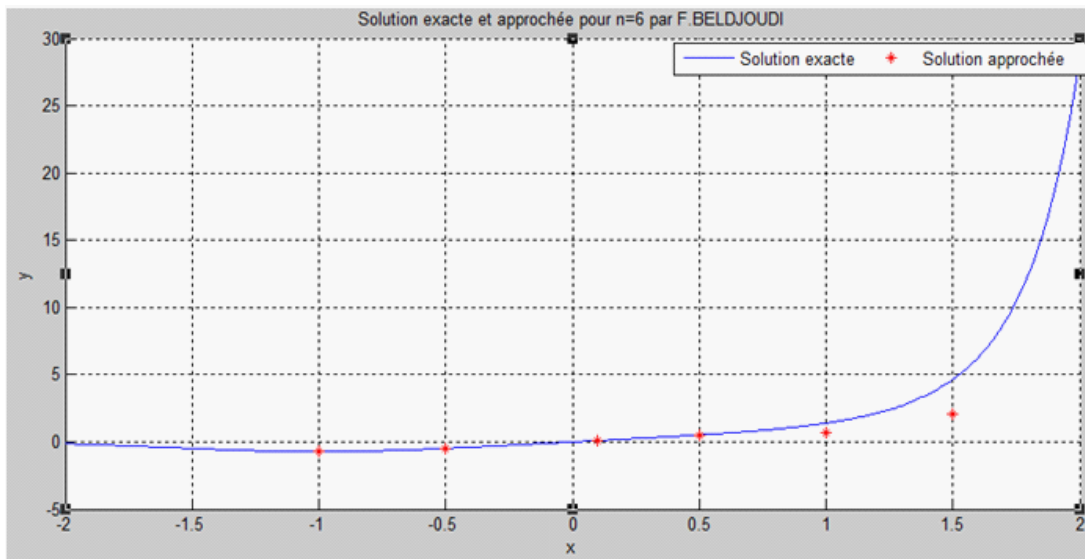


Figure 4.0.2 : Solution exacte et approchée pour n=6

Conclusion

Parmi toutes les méthodes de projection, la méthode de collocation est la méthode la plus simple à mettre en oeuvre. Dans ce mémoire, on a traité numériquement l'équation intégrale de Volterra par une méthode spectrale (dite; spectral Hermite collocation method). Afin de trouver une approximation à la solution exacte, on a utilisé les polynômes d'hermite comme base dans l'espace de projection (l'espace des polynômes d'hermite) i.e.

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{i=0}^N \alpha_i h_i(x)$$

pour approcher la solution de l'équation de Volterra. L'intégrale qui figure dans l'équation doit être calculé par les quadratures de Gauss-Hermite, pour qu'on puisse avoir une bonne précision. Malheureusement, ce n'été pas le cas. On a pas trouvé le changement de variable pour appliquer cette formule quadrature. Toutefois, une formule de quadrature simple a été utilisée pour vérifier numériquement la méthode. C'est la vérité.

Bibliographie

- [1] J.SHEN,T.TANG,L.LIAN:*Spectral method*;Springer-Verlag Berlin heidelberg,2011
- [2] P.LINZ:*Analytical and Numerical methods for Volterra equations* :Siam philadelphia,1985
- [3] M.NADIR:*cours d'analyse fonctionelle*
- [4] O.CHERISTENSEN:*Functions,Spaces,and Expansians*,Springer Science .Business Media,LLC 2010
- [5] M.RAHMAN:*integral equations and their applications* ,Wit press,2007
- [6] M.KRASNOV:*Problem and exercises in integral equation* ,Moscow,1971
- [7] A.MAJID WAZWAZ:*Linear and non linear integral equations*,Springer ,2011
- [8] F.JOHN, J.E.MARSDEN,L.SIROVISH:*Linear integral equations* ,Springer,1989
- [9] B.DAYA REDDY:*Introductory functional analysis*; springer, 1998