



# UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département De Mathématiques

## MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Master

Filière : *Mathématiques*

Option : *Géométrie des espaces de Banach et analyse Harmonique*

Par

*Kazoula Mebkhout*

Sujet

# Factorisation des opérateurs sous-linéaires par $L_p$ et par $L_{pq}$

Soutenu publiquement le 14 /06/2012 devant le jury composé de:

Mr: Dahmen ACHOUR  
Mr: Abdelmoumen TIAIBA  
Mr: Abed El-Kader GASMI

M.C.A  
M.C.A  
M.C.A

Univ. de M'sila  
Univ. de M'sila  
Univ. de M'sila

Président  
Rapporteur  
Examineurs

Promotion : 2011/2012

# Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur **A. Tiaiba** pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé. Je lui suis également reconnaissant pour la confiance qu'il m'a accordée. Il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.

J'exprime ici ma profonde gratitude à tous les professeurs de mon jury.

Je ne saurais oublier de remercier tous mes professeurs et toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Pour finir mes derniers mots des remerciements vont tout naturellement à ma famille et mes amis, en particulier mes parents pour leur soutien tout au long de mes études.

# NOTATIONS

- $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$  est un espace mesuré quelconque (sauf indication contraire).
- $\mathfrak{M}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{R})$  l'espace de toutes les mesures signées finies.
- $|x| = \sup \{x, -x\}$ .
- $X^+ = \{x \in X : x \geq 0\}$ .
- $\lambda_f = \{x \in \Omega : |f(x)| > s\}$  est la fonction de distribution.
- $f^* = \inf \{s > 0 : \lambda_f \leq t\}$  est la fonction de réarrangement décroissante.
- $L_p(\Omega, \mu)$  désigne l'espace de Lebesgue .
- $L_{pq}(\Omega, \mu)$  pour  $0 < p < \infty$  et  $0 < q \leq \infty$  l'espace de Lorentz.
- $L_p^w(\Omega, \mu)$  L'espace de Marcinkiewicz, pour  $0 < p \leq \infty$
- $B_{L^r(\Omega, \mu)}^+ = \{f \in L^r(\Omega, \mu) : \|f\|_{L^r} \leq 1\}$ .
- $L(X, Y) = \{T : X \longrightarrow Y \text{ opérateur linéaire}\}$ .
- $SL(X, Y) = \{T : X \longrightarrow Y \text{ opérateur sous-linéaires}\}$
- $SB(X, Y) = \{T : \longrightarrow Y \text{ sous-linéaires bornés}\}$
- $QL(X, Y) = \{\text{applications quasi-linéaires } T : X \longrightarrow Y\}$
- $T/X_0$  restriction de  $T$  à  $X_0$ .
- $\nabla T = \{ \text{l'ensemble des opérateurs linéaires inférieurs ou égales à } T \}$

# Résumé

Dans ce mémoire, on étudiera premièrement, la factorisation des opérateurs sous-linéaires bornés d'un espace de Banach  $X$  dans un l'espace  $L_p(\Omega, \mu)$  par  $L_q(\Omega, \mu)$ , ( avec  $(\Omega, \mu)$  d'un espace mesuré,  $0 < q \leq p \leq \infty$ ) de la forme,  $X \xrightarrow{\tilde{u}} L_q(\Omega, \mu) \xrightarrow{M_{g_u}} L_p(\Omega, \mu)$  où  $\tilde{u}$  est un opérateur linéaire borné et  $\|\tilde{u}\| \leq C$  tel que  $C$  une constante,  $M_{g_u}$  est l'opérateur borné de multiplication par la fonction mesurable  $g_u$  dans  $B_{\sharp}(\Omega, \mu)$  ( $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ )  $u \in \nabla T = \{u \in L(\Omega, \mu) : u \leq T \in SL(\Omega, \mu)\}$ . On traitera aussi la factorisation des opérateurs sous-linéaires de  $L_q$  dans  $X$  par  $L_p$ .

Deuxièmement, on étudiera la factorisation des opérateurs sous-linéaires bornés d'un espace de Banach  $L_r(\Omega, \mu)$  est complètement réticulé, par espace  $L_{p\infty}(\Omega, \nu)$ ,  $0 < r < p < \infty$ . de la forme  $X \xrightarrow{\tilde{T}} L_{p\infty}(\Omega, \nu) \xrightarrow{M} L_r(\Omega, \mu)$  où  $\tilde{T}$  est un opérateur sous-linéaire,  $M$  l'opérateur de multiplication par une fonction  $f^{\frac{1}{r}}$  dans  $L_r(\Omega, \mu)$  avec  $\nu = f\mu$ .

---

**AMS classification:** 46B40, 46B42, 47B60, 47B65.

**Mots clés:** Espace de Lorentz, espace réticulé, opérateur sous-linéaire, factorisation, estimation supérieure, opérateur sous-linéaire  $q$ -concave, opérateur sous-linéaire  $q$ -sommant.

---

# Abstract

In this work, first we will study, the factorization of the bounded sublinear operators of a Banach space  $X$  into  $L_p(\Omega, \mu)$  by  $L_q(\Omega, \mu)$ , (with  $(\Omega, \mu)$  of a measured space,  $0 < q \leq p \leq \infty$ ) of the form,  $X \xrightarrow{\tilde{u}} L_q(\Omega, \mu) \xrightarrow{M_{g_u}} L_p(\Omega, \mu)$  where  $\tilde{u}$  is a bounded linear operator and  $\|\tilde{u}\| \leq C$  a constant,  $M_{g_u}$  that is the bounded operator of multiplication by the measurable function  $g_u$  in  $B_{L_r^+(\Omega, \mu)}$  ( $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ ),  $u \in \nabla T = \{u \in L(\Omega, \mu) : u \leq T \in SL(\Omega, \mu)\}$ . Also we will treat the factorization of the sublinear operators  $L_q$  into  $X$  by  $L_p$ . Secondly we will study the factorization of the bounded sublinear operators, of a Banach space  $X$  into  $L_p(\Omega, \mu)$  is completely lattice space, by the space  $L_{p\infty}(\Omega, \mu)$ ,  $0 < r < p < \infty$ . Of the form  $X \xrightarrow{\tilde{T}} L_{p\infty}(\Omega, \nu) \xrightarrow{M} L_r(\Omega, \mu)$ , where  $\tilde{T}$  is a sublinear operator  $M$  the operator of multiplication by a function  $f^{\frac{1}{r}}$  in  $L_r(\Omega, \mu)$ , with  $\nu = f\mu$ .

---

**AMS classification:**[2000]46B42, 46B40, 47B460, 47B65.

**Key words:** Banach lattice, Factorization,  $q$ -convex operator, Space of Riesz, sublinearoperator.

---

# Table des matières

Introduction . . . . .	3
<b>1 Espace de Riesz et opérateurs non linéaires</b>	<b>6</b>
1.1 Espaces de Riesz . . . . .	7
1.1.1 Les quasi-Banach réels . . . . .	10
1.2 Caractérisation des opérateurs non linéaires . . . . .	11
1.2.1 Les opérateurs sous-linéaires . . . . .	11
1.2.2 Sous différentiel d'un opérateur sous-linéaire . . . . .	13
1.2.3 Les propriétés des opérateurs sous-linéaires . . . . .	14
1.3 Les opérateurs quasi- linéaires . . . . .	19
1.4 Extention du théorème de Hahn-Banach aux opérateurs sous-linéaires . .	21
1.5 Relation entre les opérateurs linéaires et sous-linéaire . . . . .	22
1.6 Rappel et théorèmes de bases . . . . .	24
<b>2 Factorisation des opérateurs sous linéaires par <math>L_p</math></b>	<b>28</b>
2.1 Les espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$ . . . . .	29
2.2 Opérateurs sous-linéaires $p$ -convexes, $q$ -concaves . . . . .	32
2.3 Factorisation des opérateurs sous-linéaires de $X$ dans $L_p$ par $L_q$ . . . . .	33
2.4 Factorisation des opérateurs sous-linéaires de $L_q$ dans $X$ par $L_p$ . . . . .	40
<b>3 Factorisation les opérateurs sous linéaires par les espaces <math>L_{pq}</math></b>	<b>44</b>
3.1 Les espaces de Lorentz $L_{pq}(\Omega)$ . . . . .	45

3.1.1	Les Fonctions de distribution et de réarrangement décroissant de $f$	45
3.1.2	L'espace de Lorentz . . . . .	47
3.1.3	Propriétés topologiques des espaces $L_{pq}$ . . . . .	48
3.1.4	Quelques propriétés pour $q = 1$ et $q = \infty$ . . . . .	49
3.2	Factorisation des opérateurs sous-linéaires par $L_{p\infty}$ . . . . .	50
3.2.1	Préliminaires . . . . .	50
3.2.2	Factorisation des opérateurs sous-linéaires par $L_{p\infty}$ . . . . .	52

# Introduction

Dans ce mémoire on ait également entrain de prendre en étude et en détaille les travaux de deux articles [MT04] et [AM02]; les deux documents s'intéressent à l'études de la généralisations des théorèmes de factorisations du cas linéaire au cas sous linéaire. Ce type de factorisation à l'origine d'abord de l'œuvre de Grothendieck [Gro56] où il a montré que tout opérateur linéaire continu d'un espace  $L_\infty(S, \lambda)$  dans un espace  $L_1(\Omega, \mu)$  admet la factorisation

$$L_\infty(S, \lambda) \xrightarrow{\tilde{u}} L_2(\Omega, \mu) \xrightarrow{T_g} L_1(\Omega, \mu).$$

Où  $\tilde{u}$  est un opérateur linéaire continu et  $T_g$  l'opérateur de multiplication par une fonction  $g \in L_2(\Omega, \mu)$ .

Dans le même cercle d'idées, E. M. Nikishin a montré dans [Nik70] que tout opérateur linéaire continu d'un espace de Banach  $X$  dans un espace  $L_0(\Omega, \mu)$  ( $(\Omega, \mu)$  espace de probabilité) admet la factorisation

$$X \xrightarrow{\tilde{u}} L_p(\Omega, \mu) \xrightarrow{T_g} L_0(\Omega, \mu).$$

Où  $\tilde{u}$  est un opérateur linéaire continu,  $T_g$  l'opérateur de multiplication par une fonction mesurable  $g$  et  $0 < p < 1$ .

Dans sa thèse [Mau74], B. Maurey a donné une condition nécessaire et suffisante pour que l'opérateur  $u : X \longrightarrow L_p(\Omega, \mu)$  ( $(\Omega, \mu)$  un espace mesuré quelconque) admette la factorisation

$$X \xrightarrow{\tilde{u}} L_q(\Omega, \mu) \xrightarrow{T_g} L_p(\Omega, \mu).$$

Où  $\tilde{u}$  est un opérateur linéaire continu,  $T_g$  l'opérateur linéaire de multiplication par une fonction  $g \in L_r(\Omega, \mu)$  et  $p, q, r$  tels que  $0 < p \leq q \leq \infty$  avec  $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{q}$ .

L. Mezrag a supprimé dans [Mez85] l'hypothèse d'approximation métrique sur l'espace  $X$  des théorèmes de B. Maurey et les a généralisé dans [Mez04] pour les opérateurs de cotypes finis.

Dans [Pis86], G. Pisier s'est attaqué à un problème plus général et a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un opérateur linéaire borné  $u : X \longrightarrow L_r(\Omega, \mu)$  ( $(\Omega, \mu)$  un espace mesuré quelconque) se factorise par  $L_{p\infty}(\Omega, \nu)$ ,  $0 < r < p < \infty$ . Il a traité aussi le problème dual (i.e., la factorisation des opérateurs linéaires de  $L_s(S, \lambda)$  dans un espace de Banach  $Y$  par  $L_{q1}(S, \nu)$ , pour  $1 \leq q < s < \infty$ ).

Dans [AM02] D. Achour et L. Mezrag ont généralisé les théorèmes de factorisations des opérateurs linéaires d'un Banach  $X$  à valeurs dans  $L_r$  par  $L_{p\infty}$  qui ont été fait par Pisier [Pis86], aux opérateurs sous-linéaires.

G. Pisier s'en est pris à un problème plus général dans [Pis86] et a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un opérateur  $u : X \longrightarrow L_r(\Omega, \mu)$  ( $(\Omega, \mu)$  un espace mesuré quelconque) se factorise par  $L_{p\infty}(\Omega, \nu)$ ,  $0 < r < p < \infty$ . Il a traité aussi le problème dual (i.e. la factorisation des opérateurs linéaires de  $L_s(S, \lambda)$  dans un espace de Banach  $Y$  par  $L_{q1}(S, \nu)$ , pour  $1 \leq q < s < \infty$ ).

On étudiera dans cet mémoire l'article la généralisation du théorème de factorisation de Maurey aux cas des opérateurs sous-linéaires. Par une toute autre méthode, A. Deffant dans [Def01] a généralisé ce type de factorisations aux opérateurs homogènes. Nous vous référons à [MT04] pour ce résultat. Donc, on étudiera l'équivalence suivante qui est notre résultat principal de cet papier est.

Soit  $0 < p \leq q \leq \infty$ . Soit  $T : X \longrightarrow L_p(\Omega, \mu)$  un opérateur sous-linéaire continu.

$$\forall u \in \nabla T, u \text{ se factorise par } L_q(\Omega, \mu) \iff T \text{ se factorise par } L_q(\Omega, \mu)$$

où  $\nabla T = \{\text{opérateurs linéaires } u : X \longrightarrow L_p(\Omega, \mu) \text{ tels que } u \leq T\}$ .

Ainsi on établira une condition nécessaire et suffisante pour que l'équivalence citée ci dessus aura une réponse positive. Autrement dit, nous démontrons que, si  $u$  est un opérateur linéaire  $q$ -convexe pour tout  $u$  dans  $\nabla T$  et  $C_{pq}(u)$  (la constante de la  $q$ -convexité de  $u$ ) est uniformément borné, l'équivalence comme mentionnée citée ci dessus sera vérifiée et ceci sous la supposition que l'ensemble  $\{g_u\}$  pour  $u$  dans  $\nabla T$  est latticiellement borné. Sans cette condition l'équivalence est fausse. Nous donnerons un contre exemple

pour montrer l'invalidité de cette équivalence. On termine ce chapitre par une étude du problème dual i.e., donner des conditions nécessaires et suffisantes de factorisation des opérateurs sous-linéaires continus d'un espace  $L_q(\Omega, \mu)$  dans un espace de Banach complètement réticulé  $X$  par  $L_p(\Omega, \mu)$  avec les mêmes conditions sur les nombres réels  $p, q$ .

Ce travail est divisé en trois chapitres.

Dans le premier chapitre en première sections on va voir comme rappel les espaces de Riesz et Banach quasi-réticulés. Dans la deuxième section on étudiera les opérateurs sous linéaires et quelques propriétés, puis l'extension du théorème Hahn-Banach aux opérateurs sous linéaires. la troisième section nous allons la définition d'opérateur quasi-linéaire après cela relation entre les opérateurs linéaires et les opérateurs sous-linéaires.

Les travaux du deuxième chapitre se situent dans le cadre du développement de quelques théorèmes de factorisations dans le cas sous linéaire. En effet Soient  $0 \leq p \leq q \leq +\infty$ . Soit  $T$  un opérateur sous-linéaire borné d'un espace de Banach  $X$  dans un  $L_p(\Omega, \mu)$  et soit  $\nabla T$  (l'ensemble des opérateurs linéaires inférieurs ou égales à  $T$ ). Dans cette section nous montrerons le suivre. Soit  $C$  une constante positive. Pour tout  $u$  dans  $\nabla T$ ,  $C_{pq} \leq C$  (i.e.,  $u$  admet la factorisation de la forme

$$X \xrightarrow{\tilde{u}} L_q(\Omega, \mu) \xrightarrow{M_{g_u}} L_p(\Omega, \mu)$$

où  $\tilde{u}$  est un opérateur linéaire borné et  $\|\tilde{u}\| \leq C$ ,  $M_{g_u}$  c'est l'opérateur borné de multiplication par  $M_{g_u}$  qui est dans  $B_{L_r^+(\Omega, \mu)}$   $\left(\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right)$ ,  $u = M_{g_u} \circ \tilde{u}$  et  $C_{pq}(u)$  est la constante de la  $q$ -convexité de  $u$ ) si et seulement si  $T$  admet la même factorisation. Tout ça, est sous la supposition que  $\{g_u\}_{u \in \nabla T}$  est latticiellement borné. Sans cette condition l'équivalence est généralement fausse.

Dans le troisième chapitre on va généraliser des théorèmes de factorisation dû à [Pis96] du cas linéaire pour les opérateurs sous-linéaires. Pour cela on utilisera la Proposition 3.2.5 qui suit dû à [BM01] et le théorème de Lebesgue-Radon-Nikodym et le fait que l'espace des mesures réelles soit un espace complètement réticulé.

# Chapitre 1

## Espace de Riesz et opérateurs non linéaires

Ce chapitre contient trois sections. La section concerne les espace de Riesz et Banach quasi-réticulés. Dans la deuxième section on étudiera les opérateurs sous linéaires et quelques propriétés, puis l'extension du théorème Hahn-Banach aux opérateurs sous linéaires. là dont la troisième section nous allons donner la définition d'opérateur quasi-linéaire après on citera la relation entre les opérateurs linéaires et les opérateurs sous-linéaires.

## 1.1 Espaces de Riesz

### Définition 1.1.1

Un espace vectoriel réel  $X$  est partiellement ordonné par un ordre partiel noté par  $\leq$  est un espace vectoriel ordonné (ou espace de Riesz) si

$x \leq y$  implique  $x + z \leq y + z$  pour tout  $z \in X$ ,

$x \geq 0$  implique  $\alpha x \geq 0$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ .

### Notation

Soit  $X$  un espace de Riesz.

1- On note par  $X^+ = \{x \in X : x \geq 0\}$ . Un élément  $x$  de  $X$  est positif si  $x \in X^+$ . ensemble  $X^+$  est appelé cône positif de  $X$ . Il vérifie les propriétés suivantes :

- a)  $x \in X^+, y \in X^+$  implique  $x + y \in X^+$ .
- b)  $x \in X^+$  implique  $\alpha x \in X^+$  pour tout réel  $\alpha \geq 0$ .
- c)  $x \in X^+, -x \in X^+$  implique  $x = 0$ .

2- La borne supérieure d'un ensemble à deux éléments est notée par  $\sup \{x, y\}$  et la borne inférieure à deux éléments est notée  $\inf \{x, y\}$ . pour tout  $x \in X$  on peut écrire  $x^+ = \sup \{x, 0\}, x^- = \inf \{x, 0\}$ , donc  $|x| = \sup \{x, -x\}$  dans ce cas  $x = x^+ - x^-$  et  $|x| = x^+ + x^-$  on a aussi

- a)  $0 \leq x^+ \leq |x|$  et  $0 \leq x^- \leq |x|$  d'où  $-x^- \leq x^- \leq x^+$ .
- b)  $x \leq y$  si et seulement si  $x^+ \leq y^+$  et  $y^- \leq x^-$ .
- c)  $\inf \{|x|, |y|\} = 0 \Leftrightarrow |x + y| = |x - y|$ .
- d)  $\sup \{|x|, |y|\} = \frac{1}{2} \{|x + y| + |x - y|\}$  et  $\sup \{|x|, |y|\} = \frac{1}{2} \{|x + y| - |x - y|\}$

### Définitions 1.1.2

Un sous ensemble  $A$  de  $X$  est dit borné pour l'ordre (ou simplement borné) s'il existe un élément  $y$  dans  $X$  tel que  $x \leq y$  pour tout  $x \in A$  dans ce cas  $y$  est appelé majorant de  $A$ .

### Définitions 1.1.3

Soit  $X$  un espace de Banach réel partiellement ordonné  $X$  est un espace réticulé (resp.

complètement réticulé) si,  $X$  est réticulé (resp. complètement réticulé) et

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in X \quad ||x|| = \|x\|, \\ \forall x, y \in X \quad |x| \leq |y| \implies \|x\| \leq \|y\|. \end{array} \right.$$

**Exemple 1.1.4**

L'espace vectoriel  $C(K)$  des fonctions définies et continues sur un compact  $K$  à valeurs réelles est un espace de Banach réticulé muni de l'ordre partiel défini par

$$f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \text{ pour tout } x \in K.$$

Dans ce cas :  $\sup(f, g)(x) = \max(f(x), g(x))$  et  $\inf(f, g)(x) = \min(f(x), g(x))$ .

L'espace  $L_p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) est un espace de Banach complètement réticulé.

**Définition 1.1.5** (Rappel sur les cônes)

Soit  $X$  un espace vectoriel réel. On dira que  $K$  est un cône dans  $X$  si,

$$\forall \lambda > 0 \quad \lambda K \subset K$$

— Si  $0 \in K$ , on dira que  $K$  est pointé.

— Si  $K$  ne contient pas de sous-espaces de dimensions un, on dira que  $K$  est un cône saillant.

— Si  $K$  est convexe, on dira que  $K$  est un cône convexe.

**Remarque 1.1.6**

Un ensemble  $K$  de  $X$  est convexe, si et seulement si  $\lambda K \subset K$  pour tout  $\lambda > 0$  et  $K + K \subset K$ . Dans ce cas le sous-espace engendré par  $K$  est le même que l'ensemble  $K - K$ . Si le cône  $K$  est convexe et pointé,  $K \cap (-K)$  est le plus grand sous espace contenu dans  $K$ . Le cône est convexe et saillant si  $K \cap (-K) = 0$ .

Soit  $X$  un espace partiellement ordonné, l'ensemble des éléments positifs  $K = \{x : x \in X, x \geq 0\}$

est un cône saillant, pointé et convexe.

Inversement, soit  $K$  un cône convexe d'un espace de Banach  $X$ . On définit un ordre partiel sur  $X$  comme suit :

$$\forall x, y \in X, \quad x \leq y \iff x - y \in K.$$

Muni de cet ordre  $X$  est partiellement ordonné.

On note en général,  $K$  par

$$X_+ = \{x \in X : x \geq 0\}.$$

### Notations.

Pour un élément  $x$  de  $X$  espace de Banach réticulé, on pose  $x_+ = x \vee 0$  et  $x_- = -(x \wedge 0)$ . Evidemment  $x = x_+ - x_-$  ( $X = K - K$ ).

### Remarques 1.1.7

1) Soit  $X$  un espace de Banach réticulé.  $X^*$  peut être équipé d'un ordre partiel en définissant  $X_+^*$  par

$$X_+^* = \{\xi \in X^* : \xi(x) = \langle \xi, x \rangle \geq 0, \forall x \in X_+\}.$$

2)  $X_+ - X_+ =$  le sous-espace de  $X$  engendré par  $X_+$ .

### Proposition 1.1.8 [LT96]

*Le dual  $X^*$  d'un espace de Banach réticulé  $X$  est un espace complètement réticulé muni l'ordre naturel*

$$x_1^* \leq x_2^* \iff \langle x_1^*, x \rangle \leq \langle x_2^*, x \rangle, \quad \forall x \in X^+$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  indique le crochet de dualité.

### Preuve.

Car le cône positif dans  $X^*$  est défini par

$$x^* \geq 0 \iff x^*(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \geq 0 \text{ dans } X.$$

Dans ce cas il est facile de vérifier que pour tout  $x^*, y^*$  dans  $X^*$  et pour tout  $x \geq 0$ , on a

$$(x^* \vee y^*)(x) = \sup \{x^*(u) + y^*(x - u) : 0 \leq u \leq x\}$$

et

$$(x^* \wedge y^*)(x) = \inf \{x^*(v) + y^*(x - v) : 0 \leq v \leq x\}.$$

Pour plus de détails voir [LT96 p. 3].

### 1.1.1 Les quasi-Banach réels

Dans cette section, nous donnons des définitions élémentaires et fondamentales propriétés sur le quasi - Banach

#### Définition .1.1.9

Une quasi-norme sur un espace vectoriel réel  $X$  est une fonction  $x \longrightarrow \|x\|$  de  $X$  dans  $\mathbb{R}^+$  qui vérifie

(a)  $\|x\| > 0$  pour tout  $x \neq 0$ .

(b)  $\|tx\| = |t| \|x\|$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et  $x \in X$ .

(c)  $\exists C_X \geq 1$  telle que  $\|x + y\| \leq C_X(\|x\| + \|y\|)$  pour tout  $x, y \in X$ .

La constante  $C_X$  est appelée le module de concavité de la quasi-norme  $\|\cdot\|$  (si  $=1$  c'est la définition de la norme habituelle).

Un quasi-Banach réel est un espace vectoriel réel maîtrisable et complet dont la topologie est donnée par une quasi-norme. Si, de plus  $X$  est réticulé (resp. complètement réticulé) et  $\|x\| \leq \|y\|$  quand  $|x| \leq |y|$ , on dira que  $X$  est un quasi-Banach réticulé (resp. quasi-Banach complètement réticulé). Notons que ceci implique que pour tout  $x \in X$  les éléments  $x$  et  $|x|$  ont la même quasi-norme. Pour plus de détails voir [Zaa97] et [LT96].

#### Remarque

Si (c) est remplacée par (c)'  $\|x + y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p$  pour tout  $x, y \in X$  et pour un  $p$  fixé dans  $]0, 1]$ , alors  $\|\cdot\|$  est dite une  $p$ -norme sur  $X$ . Notons que la 1-norme est la norme usuelle. Un espace de Banach quasi-normé est isomorphe à un espace de Banach si et seulement si, il est localement convexe. Tout  $p$ -normé est un espace quasi-normé avec  $C = 2^{\frac{1}{p}-1}$ . Aussi, pour tout quasi-Banach  $X$  il existe  $0 < p < 1$  et une équivalente  $p$ -norme satisfaisant

$$\|x + y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p$$

pour tout  $x, y \in X$ .

Si  $\|\cdot\|$  dénote la quasi-norme originale sur  $X$  avec la constante  $C$  dans l'inégalité quasi-triangulaire, alors la  $p$ -norme ( $C = 2^{\frac{1}{p}-1}$ ) peut être définie comme suit

$$\|x\| = \inf \left\{ \left( \sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} : n > 0, \quad x = \sum_{i=1}^n x_i \right\}.$$

Cette assertion est due à Aoki et Rolewicz (voir [KPR84]).

## 1.2 Caractérisation des opérateurs non linéaires

Dans cette section, nous allons donner les définitions (sous-linéaires et quasi linéaires) et Sous différentiel d'un opérateur sous-linéaire et quelques propriétés.

### 1.2.1 Les opérateurs sous-linéaires

**Définition 1.2.1** (*opérateur sous-linéaire*)

Soit  $T$  une application d'un espace de Banach  $X$  dans un espace réticulé  $Y$ . On dira que  $T$

est sous-linéaire si,  $\left\{ \begin{array}{ll} \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in X & T(\alpha x) = \alpha T(x) & \text{(i.e., positivement homogène),} \\ \forall x, y \in X & T(x + y) \leq T(x) + T(y). & \text{(i.e., sous-additive).} \end{array} \right.$

La somme de deux opérateurs sous-linéaires est un opérateur sous-linéaire et la multiplication par un nombre positif est aussi un opérateur sous-linéaire.

## Notation

$$\begin{aligned}L(X, Y) &= \{\text{applications linéaires } u : X \rightarrow Y\}, \\SL(X, Y) &= \{\text{applications sous-linéaires } T : X \rightarrow Y\},.\end{aligned}$$

On muni  $SL(X, Y)$  de l'ordre induit par

$$T_1 \leq T_2 \Leftrightarrow T_1(x) \leq T_2(x), \quad \forall x \in X. \quad (1.1)$$

Comme conséquence immédiate

$$u \leq T \Leftrightarrow -T(-x) \leq u(x) \leq T(x), \quad \forall x \in X \quad (1.2)$$

car

$$\begin{aligned}u \leq T &\Leftrightarrow u(x) \leq T(x), \quad \forall x \in X, \\&\Leftrightarrow u(-x) \leq T(-x), \quad \forall x \in X, \\&\Leftrightarrow -u(x) \leq T(-x), \quad \forall x \in X, \\&\Leftrightarrow u(x) \geq -T(-x), \quad \forall x \in X.\end{aligned}$$

### Définition 1.2.2

Soit  $T \in SL(X, Y)$ . On dira que  $T$  est symétrique si pour tout  $x$  dans  $X$ ,  $T(x) = T(-x)$  et si  $X$  est réticulé,  $T$  est croissant si pour tout  $x, y$  dans  $X$ .

$$x \leq y \implies T(x) \leq T(y).$$

### Remarque 1.2.3

1) Soit  $T$  un opérateur sous-linéaire symétrique entre espaces réticulés  $X$  et  $Y$ . Alors  $T \geq 0$ .

En effet, soit  $x$  dans  $X$

$$\begin{aligned} 0 &= T(x - x) \\ &\leq T(x) + T(-x) \\ &\leq T(x) + T(x) \\ &\leq 2T(x) \end{aligned}$$

(La réciproque est fausse même si  $T$  est croissant).

## 1.2.2 Sous différentiel d'un opérateur sous-linéaire

### Définition 1.2.4

Soient  $X, Y$  deux espaces vectoriels dont  $Y$  réticulé et  $T$  dans  $SL(X, Y)$ . On appelle sous différentiel de  $T$ , l'ensemble

$$\nabla T = \{u \in L(X, Y) : u \leq T \text{ (i.e, } \forall x \in X, u(x) \leq T(x))\}$$

### Théorème 1.2.5

Soit  $T$  un opérateur sous-linéaire entre  $X$  un espace de Banach et  $Y$  un espace de réticulé.

Alors,  $\nabla T$  est convexe.

#### Preuve.

Soient  $u_1, u_2 \in \nabla T$ ,  $\lambda \in [0, 1]$  et  $x \in X$ .

$$\begin{aligned} ((1 - \lambda)u_1 + \lambda u_2)(x) &= (1 - \lambda)u_1(x) + \lambda u_2(x) \\ &\leq (1 - \lambda)T(x) + \lambda T(x) \text{ (car } u(x) \leq T(x)) \\ &\leq T(x). \end{aligned}$$

D'où

$$((1 - \lambda)u_1 + \lambda u_2) \in \nabla T$$

Donc  $\nabla T$  est conexe.

### 1.2.3 Les propriétés des opérateurs sous-linéaires

Nous donnerons dans ce paragraphe quelques propriétés que nous aurons besoin pour le chapitre II et III

**Proposition 1.2.6**

Soient  $X, Y$  deux espaces vectoriels dont  $Y$  réticulé et  $T \in SL(X, Y)$ . Alors,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in X, \quad \lambda T(x) \leq T(\lambda x). \quad (1.3)$$

**Preuve.**

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ , et  $x \in X$ .

Si  $\lambda \geq 0$  on a

$$\lambda T(x) = T(\lambda x) \leq T(\lambda x),$$

Si  $\lambda \leq 0$ , on

$$\lambda T(x) = -(-T(x)) = -T(-\lambda x)$$

et

$$T(\lambda x - \lambda x) = 0 \leq T(\lambda x) + T(-\lambda x) \implies -T(-\lambda x) \leq T(\lambda x)$$

Finalement,

$$\lambda T(x) \leq T(\lambda x).$$

**Proposition 1.2.7**

Soient  $X, Y$  et  $Z$ , trois espaces vectoriels dont  $Y$  et  $Z$  réticulés

- a)  $\forall T(x) \in SL(X, Y)$  et  $\forall u(x) \in L(Y, Z)$  (positif)  $\implies u \circ T \in SL(X, Z)$ .
- b)  $\forall u(x) \in L(X, Y)$  et  $\forall T(x) \in SL(Y, Z) \implies T \circ u \in SL(X, Z)$ .
- c)  $\forall T(x) \in SL(X, Y)$  et  $\forall S(x) \in SL(X, Y)$  (croissant)  $\implies S \circ T \in SL(X, Z)$ .

**Preuve.**

Si  $u$  est opérateur linéaire et positif, alors  $u$  est croissant.

En effet, soit  $u$  un opérateur linéaire et positif,  $x, y \in X$  tel que  $x \geq y$ . On a

$$x - y \geq 0 \implies u(x - y) \geq 0$$

puisque

$$u(x - y) = u(x) - u(y) \geq 0 \implies u(x) \geq u(y).$$

Donc  $u$  est croissant.

a) Soient  $x, y \in X$ . Alors,

$$\begin{aligned} u \circ T(x + y) &= u(T(x + y)), \\ &\leq u(T(x) + T(y)) && \text{car } u \text{ positif} \\ &\leq u \circ T(x) + u \circ T(y). \end{aligned}$$

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  et  $x \in X$ .

$$\begin{aligned} u \circ T(\lambda x) &= u(T(\lambda x)) = u(\lambda T(x)), \\ &= \lambda(u \circ T)(x). \end{aligned}$$

Dans

$$u \circ T \in SL(X, Z).$$

b) Soient  $x, y \in X$

$$\begin{aligned} T \circ u(x + y) &= T(u(x + y)) \\ &= T(u(x) + u(y)) \\ &\leq T \circ u(x) + T \circ u(y) \end{aligned}$$

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  et  $x \in X$

$$T \circ u(\lambda x) = T(u(\lambda x)) = \lambda T \circ u(x)$$

Donc

$$T \circ u \in SL(X, Z).$$

c) Partiel que b).

**Proposition 1.2.8.**

Soit  $T$  un opérateur sous-linéaire d'un espace de Banach  $X$  dans un espace de Banach réticulé  $Y$ . Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1-  $T$  continu,

2-  $T$  continu en 0,

3- il existe  $C > 0$  telle que  $\forall x \in X, \|T(x)\| \leq C \|x\|$ .

Dans ce cas on dira que  $T$  est borné et on pose

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \{\|T(x)\| : \|x\|_{B_x} = 1\}.$$

**Preuve.**

1)  $\implies$  2). Evidente.

2)  $\implies$  1). Soit  $T$  un opérateur sous-linéaire continu en 0, donc

$$\exists \eta > 0 \forall x (\neq 0) \in X, \|x\| \leq \eta \implies \|T(x)\| \leq 1$$

Posant  $y = \frac{x}{\|x\|} \eta$ . Alors

$$\|T(y)\| \leq 1$$

donc

$$\|T(x)\| \leq \frac{1}{\eta} \|x\|$$

d'où 3).

3)  $\implies$  1) Supposons qu'il existe  $C > 0$  telle que

$$\forall x \in X, \|T(x)\| \leq C \|x\|.$$

Soit  $x_0$  dans  $X$ . On a

$$T(x) = T(x + x_0 - x_0) \leq T(x - x_0) + T(x_0) \implies T(x) - T(x_0) \leq T(x - x_0).$$

et

$$T(x_0) = T(x_0 + x - x) \leq T(x_0 - x) + T(x) \implies T(x_0) - T(x) \leq T(x_0 - x).$$

Donc pour tout  $x$  dans  $X$  on a

$$\begin{aligned} |T(x) - T(x_0)| &\leq \sup \{T(x - x_0), T(x_0 - x)\} \\ &\leq |T(x - x_0)| + |T(x_0 - x)| \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \|T(x) - T(x_0)\| &\leq \|T(x) - T(x_0)\| \\ &\leq \|T(x_0 + x)\| + \|T(x - x_0)\| \\ &\leq 2C \|x - x_0\|. \end{aligned}$$

Dans  $T$  est continu.

On note par

$$\begin{aligned} SB(X, Y) &= \{T : X \rightarrow Y \text{ sous-linéaires bornés}\}, \\ B(X, Y) &= \{T : X \rightarrow Y \text{ linéaires bornés}\}. \end{aligned}$$

### **Proposition 1.2.9**

*Soit  $T$  un opérateur sous-linéaire borné entre  $X$  un espace de Banach et  $Y$  un espace de Banach réticulé.*

1) *Pour tout  $x$  dans  $X$ , on pose*

$$\varphi(x) = \sup \{T(x), T(-x)\}.$$

Alors,  $\varphi$  est un opérateur sous linéaire symétrique. De plus,

$$|T| \leq \varphi \quad \text{et} \quad \|\varphi\| \leq \|T(x)\| + \|T(-x)\|.$$

2) Pour tout  $(\alpha_i)_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$ , on a

$$T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \varphi(x_i).$$

De plus

$$\left\| T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \right\| \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \|\varphi(x_i)\|.$$

**Preuve.**

1) Il est clair que  $\varphi$  est un opérateur sous-linéaire symétrique, donc positive.

Soit  $x$  dans  $X$ . On a,

$$\begin{aligned} |T(x)| &= \sup \{T(x), -T(x)\}, \\ &\leq \sup \{T(x), T(-x)\} = \varphi(x). \quad (\text{d'après (1.1)}) \end{aligned}$$

Concernant l'inégalité des normes on a

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &\leq \|\varphi(x)\| \\ &\leq \|\sup \{T(x), T(-x)\}\|, \\ &\leq \|T(x)\| + \|T(-x)\|. \end{aligned}$$

2) Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on écrit  $\alpha_i = \alpha_i^+ + \alpha_i^-$  tels que  $\alpha_i^+, \alpha_i^- \in \mathbb{R}^+$ , dans ce cas, on

a

$$\begin{aligned}
T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) &= T\left(\sum_{i=1}^n (\alpha_i^+ - \alpha_i^-) x_i\right), \\
&\leq T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^+ x_i\right) + T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^- (-x_i)\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^n \alpha_i^+ T(x_i) + \sum_{i=1}^n \alpha_i^- T(-x_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^n (\alpha_i^+ + \alpha_i^-) \sup\{T(x_i), T(-x_i)\} \\
&= \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \varphi(x_i).
\end{aligned}$$

D'autre, parte on a

$$-T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i (-x_i)\right) \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \varphi(x_i),$$

Donc

$$\left| T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \right| \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \varphi(x_i).$$

En prenant la norme des deux côtés, on obtient

$$\left\| T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \right\| \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \|\varphi(x_i)\|.$$

### 1.3 Les opérateurs quasi- linéaires

Dans cette section, nous allons donner la définition d'opérateur quasi-linéaire et quelques remarques sur cette classe d'opérateurs.

**Définition 1.3.1** (*opérateur quasi-linéaire*)

*Un opérateur  $T$  d'un espace de Banach  $X$  dans un Banach réticulé  $Y$  est dit quasi-linéaire si pour tout  $x, y$  dans  $X$  et  $\lambda$  dans  $\mathbb{R}$ , on a*

$$\begin{cases} \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in X & |T(\alpha x)| = |\alpha| |T(x)|, \\ \forall x, y \in X & |T(x + y)| \leq |T(x)| + |T(y)|. \end{cases}$$

On note par

$$QL(X, Y) = \{\text{applications quasi-linéaires } T : X \rightarrow Y\}.$$

### Exemple

Tout application linéaire est une application quasi linéaire.

#### Remarque 1.3.2

1) Soit  $T$  un opérateur quasi-linéaire. Si on pose  $\varphi(x) = |T(x)|$  alors  $\varphi$  est un opérateur sous -linéaire symétrique.

2) En général la somme de deux opérateurs quasi-linéaire n'est pas quasi-linéaire. Mais la multiplication par un scalaire est un quasi-linéaire.

#### Proposition 1.3.3

Soit  $T$  opérateur quasi-linéaire d'un espace de Banach  $X$  dans un espace de Banach complètement (quasi) réticulé  $Y$ . Alors, pour tout  $x$  dans  $X$  il existe  $u_x \in L(X, Y)$  tel que,  $|T(x)| = |u_x(x)|$ , (i.e, le sup atteint,  $|T(x)| = \sup \{|u_x(x)| : u_x \in L(X, Y), |u_x| \leq |T|\}$ ).

#### Preuve.

On a  $\varphi(x) = |T(x)|$  qu'est un opérateur sous-linéaire symétrique pour tout  $x$  dans  $X$  il existe  $u_x \in L(X, Y)$  tel que,  $|T(x)| = u_x(x)$ . On a aussi  $|T(-x)| = u_{-x}(-x)$  qui implique  $|T(x)| = -u_{-x}(x)$  par la symétrisation de  $\varphi$ . On déduire que

$$|T(x)| = \sup\{|u(x)| : u_x \in L(X, Y), |u_x| \leq |T|\}.$$

Remarquons que

$$\|T(x)\| = \sup_{u \in \nabla|T|} \|u(x)\|.$$

## 1.4 Extention du théorème de Hahn-Banach aux opérateurs sous-linéaires

Dans cette section Nous donnons le théorème de Hahn-Banach généralisé aux opérateurs sous-linéaires. Pour la démonstration on trouvera une dans [Zaa 97, p. 244].

**Théorème 1.4.1** (*théorème de Hahn-Banach*)

Soit  $X, Y$  deux espace vectoriel dont  $Y$  complètement réticulé,  $T \in SL(X, Y)$  et  $X_0$  un sous - espace vectoriel de  $X$ . Soit  $u$  dans  $L(X_0, Y)$  tel que  $u \leq T$ . Alors ,  $u$  se prolonge en un opérateur linéaire  $\tilde{u} \in L(X, Y)$  tel que  $\tilde{u} \leq T$ .

Comme corollaire immédiat.

**Corollaire 1.4.2**

Soient  $X, Y$  deux espaces vectoriels dont  $Y$  complètement réticulé. Soit  $T : X \rightarrow Y$  un opérateur sous-linéaire. Alors,

pour tout  $x$  dans  $X$  il existe  $u_x \in \nabla T$  tel que

$$T(x) = u_x(x) \quad (\text{ie., } T(x) = \sup_{u \in \nabla T(x)} u(x)). \quad (1.4)$$

**Preuve.**

Soit  $x$  dans  $X$ . On pose

$$\begin{aligned} u_x & : \mathbb{R}x \rightarrow Y \\ \lambda x & \longmapsto u_x(\lambda x) = \lambda T(x) \end{aligned}$$

L'opérateur  $u_x$  est linéaire sur  $X_0 = \mathbb{R}x$  et  $u_x(\lambda x) = \lambda T(x) \leq \lambda T(x)$  (Proposition 1.2.1) donc d'après le théorème de Hahn-Banach, il se prolonge en un opérateur noté encore  $u_x \in \nabla T$  et  $T(x) = u_x(x)$ .

**Remarque 1.4.3**

On note par  $\nabla T$  l'ensemble des opérateurs linéaires  $u : X \rightarrow Y$  tels que  $u(x) \leq T(x)$  pour tout  $x$  dans  $X$ . On a d'après ce qui précède que  $\nabla T$  est non vide si  $Y$  est un espace

complètement réticulé. Si  $Y$  est simplement un réticulé. Alors,  $\nabla T$  est en générale vide (voir [Lin92]).

**Proposition 1.4.4** [Palu80]

Soient  $X, Y$  deux espace vectoriel dont  $Y$  réticulé,  $T \in SL(X, Y)$  et  $X_0$  un sous espace vectorielle de  $X$ . Soit  $u$  dans  $L(X_0, Y)$  tel que  $u \leq T$ . Alors,

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \tilde{T} : X \rightarrow Y \text{ sous linéaire tel que ,} \\ \tilde{T}/X_0 = u \text{ et } \tilde{T} \leq T. \end{array} \right.$$

## 1.5 Rerlation enter les opérateurs linéaires et sous-linéaire

**Théorème 1.5.1**[MT04]

Soient  $X, Y$  deux espaces de Banach dont  $Y$  complètement réticulé et  $T : X \rightarrow Y$  un opérateur sous-linéaire continu. Alors,

a)  $\|T\| \leq \sup_{u \in \nabla T} \|u\| \leq 2 \|T\|$ .

b)  $\forall x \in X, \|T(x)\| \leq \sup_{u \in \nabla T} \|u(x)\| \leq \|T(x)\| + \|T(-x)\|$ .

**Preuve.**

a) Soit  $x$  dans  $X$  et  $u$  dans  $\nabla T$ . On a,

$$|u(x)| \leq \sup \{|T(x)|, |T(-x)|\}$$

ce qui donne

$$|u(x)| \leq |T(x)| + |T(-x)|.$$

donc

$$\|u\| \leq 2 \|T\|$$

et par conséquent

$$\sup_{u \in \nabla T} \|u\| \leq 2 \|T\|.$$

Dans l'autre sens et d'après le corollaire 1.4.2, on a

$$\forall x \in X \quad \exists u_x \in \nabla T \quad \text{tel que } T(x) = u_x(x).$$

D'où

$$\|T(x)\| = \|u_x(x)\| \leq \|u_x\| \|x\| \leq \sup_{u \in \nabla T} \|u\| \|x\|$$

et donc

$$\|T\| \leq \sup_{u \in \nabla T} \|u\|.$$

b) Soit  $x$  dans  $X$ . On a d'une part,

$$\|T(x)\| = \|u_x(x)\| \leq \sup_{u \in \nabla T} \|u(x)\|$$

et

$$\|T(-x)\| = \|u_{-x}(-x)\| \leq \sup_{u \in \nabla T} \|u(x)\|$$

d'où

$$\sup \{ \|T(x)\|, \|T(-x)\| \} \leq \sup_{u \in \nabla T} \|u(x)\|$$

et d'autre pater on a,

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \sup \{ |T(x)|, |T(-x)| \} \\ &\leq |T(x)| + |T(-x)| \end{aligned}$$

ce que implique

$$\begin{aligned} \|u(x)\| &\leq \| |T(x)| + |T(-x)| \| \\ &\leq \|T(x)\| + \|T(-x)\| \end{aligned}$$

d'où

$$\sup_{u \in \nabla T} \|u(x)\| \leq \|T(x)\| + \|T(-x)\|.$$

**Corollaire 1.5.2**

a) Soit  $T : X \longrightarrow Y$  est un opérateur sous-linéaire entre deux l'espaces de Banach et complètes (quasi-Banach), Alors les propriétés suivantes sont équivalentes

$$T \text{ est borné} \Leftrightarrow \forall u \in \nabla T, u \text{ est borné}$$

b) Aussi si  $T$  est symétrique, on a

$$\begin{cases} \|T(x)\| = \sup_{u \in \nabla T} \|u(x)\| \quad \forall x \in X, \\ \|T\| = \sup_{u \in \nabla T} \|u\| \end{cases} \quad (1.5)$$

## 1.6 Rappel et théorèmes de bases

**Définition 1.6.1**

Soient  $X$  un espace de Banach réticulé,  $f$  une fonction d'une partie  $A$  de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ , on dira que  $f$  est semi continue inférieurement (s.c.i) si  $\text{epi}(f)$  fermé (resp. semi continue supérieurement (s.c.s) si  $\text{epistrict}(f)$  ouvert). Où

$$\begin{aligned} \text{epi}(f) &= \{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R}, \quad f(x) \leq \lambda\} \\ \text{epistrict}(f) &= \{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R}, \quad f(x) < \lambda\}. \end{aligned}$$

**Définition 1.6.2**

Soit  $A$  une partie d'un espace de Banach  $X$ .  $A$  convexe si et seulement si  $\forall t \in [0, 1], f : (x, y) \longrightarrow tx + (1 - t)y$  est continue de  $X^2$  dans  $X$  ou  $f(A \times A) \subset A$ .

**Lemme 1.6.3** [Mau74]

Soit  $K$  un convexe compact d'un espace localement compact, convexe et séparé,  $\mathcal{K}$  un ensemble convexe de fonctions s.c.s sur  $K$  ne prenant pas la valeur  $+\infty$ . On suppose que

- a)  $\forall f \in \mathcal{K}, f$  est concave,
- b)  $\forall f \in \mathcal{K}, \exists x \in K, f(x) > 0$ .

Alors, il existe un point  $x_0 \in K$  tel que  $f(x_0) \geq 0, \forall f \in \mathcal{K}$ .

**Théorème 1.6.4** [Mau74]

Soient  $p, q, r$  trois nombres réels où  $0 < p \leq q \leq +\infty$  tels que  $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ ,  $(\Omega, \mu)$  un espace mesuré,  $I$  un ensemble d'indices  $\{f_i\}_{i \in I}$  une famille d'éléments de  $L_p(\Omega, \mu)$ .

Les conditions suivantes sont équivalentes.

- 1)  $\forall (\alpha_i) \in \mathbb{R}^{(I)}$

$$\left( \int_{\Omega} \left( \sum_{i \in I} |\alpha_i f_i(\omega)|^q \right)^{\frac{p}{q}} d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left( \sum_{i \in I} |\alpha_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

- 2) Il existe une fonction  $g$  telle que

$$\int_{\Omega} |g|^r d\mu(w) \leq 1$$

et

$$\forall i \in I, \int_{\Omega} \left| \frac{f_i}{g} \right|^q d\mu(w) \leq C$$

(avec la convention  $\frac{0}{0} = 0$ ).

**Remarque 1.6.5**

Supposons que la famille  $(f_i)_{i \in I}$  vérifie l'hypothèse

$$\sum_{i \in I} |\alpha_i|^q < +\infty \Rightarrow \int \left( \sum_{i \in I} |\alpha_i f_i(\omega)|^q \right)^{\frac{p}{q}} d\mu(\omega) < +\infty.$$

On a alors une application linéaire  $\alpha$  :

$$\begin{aligned} l_q(I) &\longrightarrow L_p(\Omega, \mu, l_q(I)) \\ (\alpha_i) &\longmapsto (\alpha_i f_i(\omega)). \end{aligned}$$

Qui est continu par le théorème du graphe fermé, il existe donc une constante  $C$  telle que

$$\left( \int_{\Omega} \left( \sum_{i \in I} |\alpha_i f_i(\omega)|^q \right)^{\frac{p}{q}} d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left( \sum_{i \in I} |\alpha_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Et on peut maintenant appliquer le théorème 1.6.4

Si on prendra pour ensemble d'indices  $I$  la boule unité de  $X$  et on posera  $f_x = u(x)$ , on déduit immédiatement de théorème 1.6.4 le théorème suivant qui consiste en la condition nécessaire et suffisante de la factorisation annoncée.

**Théorème 1.6.6** [Mau74]

Soient  $X$  un espace de Banach,  $(\Omega, \mu)$  un espace mesuré,  $u$  un opérateur linéaire de  $X$  dans  $L_p(\Omega, \mu)$ ,  $0 < p \leq q \leq \infty$  et  $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ . Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes.

**a)** Il existe une constante  $C$  positive finie telle que pour toute suite finie  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  dans  $X$ , on a

$$\left( \int_{\Omega} \left[ \sum_{1 \leq i \leq n} |u(x_i)|^q \right]^{\frac{p}{q}} d\mu(w) \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left[ \sum_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|_X^q \right]^{\frac{1}{q}}. \quad (1.6)$$

**b)** Il existe une fonction  $g$  dans  $B_{L_r(\Omega, \mu)}$  telle que pour tout  $x$  dans  $X$ , on a

$$\left( \int_{\Omega} \left| \frac{u(x)}{g} \right|^q d\mu(w) \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \|x\|_X.$$

**c)** Il existe une fonction  $g$  dans  $B_{L_r(\Omega, \mu)}$  et  $v \in L(X, L_q(\Omega, \mu))$ ,  $\|v\| \leq C$  telle que  $u = T_g o v$ .

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{u} & L_p(\Omega, \mu) \\
v \searrow & & \nearrow_{T_g} \\
& & L_q(\Omega, \mu) \quad .
\end{array}$$

**Corollaire 1.6.7** [Mau74]

Soient  $(\Phi, \lambda)$ ,  $(\Omega, \mu)$  deux espace mesurés quelconques,  $p, q$  deux nombres réels tels que  $0 < p \leq q \leq +\infty$ ,  $q \geq 1$ . Soit  $u : L_q(\Phi, \lambda) \longrightarrow L_p(\Omega, \mu)$  un opérateur linéaire continu et positif. Alors,  $u$  se factorise par  $L_q(\Omega, \mu)$ .

**Théorème 1.6.8** [Mau74]

Soient  $p, q, r \in \mathbb{R}$  tels que  $0 < p \leq q \leq +\infty$  et  $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ ,  $(\Omega, \mu)$  un espace mesuré,  $I$  un ensemble d'indices et  $\{f_i\}_{i \in I} \subset L_q(\Omega, \mu)$ . Alors, les conditions suivantes sont équivalentes.

1) Il existe une fonction mesurable  $g$  dans  $B_{L_r(\Omega, \mu)}$  telle que

$$\forall i \in I, \quad \int_{\Omega} |g f_i|^p(w) d\mu(w) \geq 1.$$

2) Pour toute  $\{\alpha_i\}_{i \in I}$  dans  $\mathbb{R}^{(I)}$  il existe une constante finie  $C$  telle que

$$\left( \sum_{i \in I} |\alpha_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left( \int_{\Omega} \left( \sum_{i \in I} |\alpha_i f_i(w)|^p \right)^{\frac{q}{p}} d\mu(w) \right)^{\frac{1}{q}}.$$

# Chapitre 2

## Factorisation des opérateurs sous linéaires par $L_p$

Les travaux de Cette première publication se situent dans le cadre du développement de quelques théorèmes de factorisations dans le cas sous linéaire. En effet Soient  $0 \leq p \leq q \leq +\infty$ . Soit  $T$  un opérateur sous-linéaire borné d'un espace de Banach  $X$  dans un  $L_p(\Omega, \mu)$  et soit  $\nabla T$  (l'ensemble des opérateurs linéaires inférieurs ou égales à  $T$ ). Dans cette section nous montrerons le suivre. Soit  $C$  une constante positive. Pour tout  $u$  dans  $\nabla T$ ,  $C_{pq} \leq C$  (i.e.,  $u$  admet la factorisation de la forme

$$X \xrightarrow{\tilde{u}} L_q(\Omega, \mu) \xrightarrow{M_{g_u}} L_p(\Omega, \mu)$$

où  $\tilde{u}$  est un opérateur linéaire borné et  $\|\tilde{u}\| \leq C$ ,  $M_{g_u}$  c'est l'opérateur borné de multiplication par  $M_{g_u}$  qui est dans  $B_{L_r^+(\Omega, \mu)}$   $\left(\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right)$ ,  $u = M_{g_u} \circ \tilde{u}$  et  $C_{pq}(u)$  est la constante de la  $q$ -convexité de  $u$  si et seulement si  $T$  admet la même factorisation. Tout ça, est sous la supposition que  $\{g_u\}_{u \in \nabla T}$  est latticiellement borné. Sans cette condition l'équivalence est généralement fausse.

## 2.1 Les espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$

Dans cette section nous allons donner quelques définitions et propriétés de bases qui concernant les espaces de Lebesgue  $L^p(\Omega)$ .

**Définition 2.1.1** (espace mesuré)

Soit  $(\Omega, M)$  un espace mesurable, muni d'une tribu  $M$  des parties de  $\Omega$ . On appelle mesure sur  $\Omega$  une application  $\mu : M \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$  vérifiant

1)  $\mu(\emptyset) = 0$

2)  $\mu$  est  $\sigma$ -additive c-à-d.  $(\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}}, \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \quad \forall i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset)$ .

**Définition 2.1.2**

Soit  $0 < p < \infty$ . Soient  $(\Omega, M, \mu)$  un espace mesuré et  $f$  est une fonction mesurable définie  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . On dite que La fonction  $f$  est  $p$ -intégrable si

$$\int |f|^p d\mu < \infty.$$

**Définition 2.1.3**

Soit  $p \in \mathbb{R}$  avec  $0 < p < \infty$ , on pose

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \quad f \text{ mesurable et } p\text{-intégrable}\}$$

on note

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.1}$$

**Définition 2.1.4**

On pose

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \quad f \text{ mesurable et } \exists \text{ une constante } C \text{ telle } |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{C; \quad |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}. \tag{2.2}$$

On vérifiera ultérieurement que  $\|\cdot\|_{L^p}$  est une norme.

**Remarque 2.1.5**

Si  $f \in L^\infty(\Omega)$  on a

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{p.p sur } \Omega$$

**Proposition 2.1.6** (Inégalité de Hölder)

Soient  $f \in L^p$  et  $g \in L^q$  avec  $1 \leq p \leq \infty$  alors  $fg \in L^1$  telle que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

**Preuve.**

La conclusion est évidente si  $p = 1$  ou  $p = \infty$ . supposons donc que  $1 < p < \infty$ . l'inégalité de Young

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

La démonstration cette inégalité est évidente : la fonction  $\log$  étant concave sur  $\mathbb{R}_+^*$  on a

$$\log\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \geq \log(ab)$$

donc

$$|f(x)||g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q \quad \text{p.p } x \in \Omega$$

il en résulte que  $fg \in L^1$  et que

$$\|fg\|_{L^1} \leq \frac{1}{p}\|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{q}\|g\|_{L^q}^q.$$

Remplaçant dans cette inégalité  $f$  par  $\lambda f$  ( $\lambda > 0$ ) il vient que

$$\|fg\|_{L^1} \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p}\|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{\lambda q}\|g\|_{L^q}^q.$$

On choisit  $\lambda = \|f\|_{L^p}^{-1} \|g\|_{L^q}^{\frac{q}{p}}$ . On obtient alors l'inégalité de Hölder.

**Proposition 2.1.7** (Inégalité de Hölder généralisée)

Soient  $f \in L^p$  et  $g \in L^q$ , avec  $1 \leq p, q, r \leq \infty$ . telle que  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$

$$\|fg\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}. \quad (2.3)$$

**Preuve.**

Soit  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$  ce implique  $1 = \frac{p}{r} + \frac{q}{r}$ , telle que  $\frac{p}{r} \geq 1$  et  $\frac{q}{r} \geq 1$ . D'après l'inégalité de Hölder alors

$$\int |fg|^r d\mu \leq \left( \int |f|^p d\mu \right)^{\frac{r}{p}} \left( \int |g|^q d\mu \right)^{\frac{r}{q}}$$

ce que donne

$$\|fg\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

**Proposition 2.1.8** (Inégalité de de Minkowski)

Soient  $f, g \in L^p$  avec  $1 \leq p \leq \infty$

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$$

**Preuve.**

Le cas  $p = 1$  immédiate. il reste donc de montrer le résultat pour  $p > 1$ . On peut supposer que  $\|f + g\|_{L^p} \neq 0$ . On remarque que

$$\|f + g\|_{L^p}^p = \int |f + g|^{p-1} |f + g| \leq \int |f + g|^{p-1} |f| + \int |f + g|^{p-1} |g|$$

Or  $|f + g|^{p-1} \in L^p$ . On peut donc appliquer l'inégalité de Hölder, elle donne

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{L^p}^p &\leq \|f + g\|_{L^p}^{p-1} \|f\|_{L^p} + \|f + g\|_{L^p}^{p-1} \|g\|_{L^p} \\ \|f + g\|_{L^p} &\leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}. \end{aligned}$$

**Théorème 2.1.9** (Fischer-Riesz)

$L^p$  est un espace de Banach pour tout  $1 \leq p \leq \infty$ .

## 2.2 Opérateurs sous-linéaires $p$ -convexes, $q$ -concaves

Dans cette section on donne la généralisation de la notion d'opérateurs  $p$ -convexes et  $q$ -concaves aux opérateurs sous-linéaires .

**Définition 2.2.1**

Soient  $E$  un espace de Banach arbitraire,  $X$  un espace de Banach réticulé et soit  $1 \leq p \leq \infty$ .

(i) Un opérateur sous-linéaire  $T : E \longrightarrow X$  dit  $p$ -convexe s'il existe une constante  $C$  telle que, pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$  les opérateurs

$$\begin{aligned} T_n X(E) &\longrightarrow X(l_p^n) \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto (T(x_1), \dots, T(x_n)) \end{aligned}$$

sont uniformément bornés par  $C$ .

(ii) Un opérateur sous-linéaire  $T : E \longrightarrow X$ , dont  $E$  réticulé est dit  $p$ -concave s'il existe une constante  $C$  telle que, pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$  les opérateurs

$$\begin{aligned} T_n X(l_p^n) &\longrightarrow l_p^n(Y) \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto (T(x_1), \dots, T(x_n)) \end{aligned}$$

sont uniformément bornés par  $C$ . La plus petite constante  $C$  vérifiant ces propriétés sera notée par  $C^p(T)$  et  $C_q(T)$  respectivement.

Un espace de Banach réticulé  $X$  est  $p$ -convexe (resp.  $p$ -concave) si  $id_x$  est  $p$ -convexe (resp.  $p$ -concave).

### Définition 2.2.2

Soient  $X$  un espace de Banach et  $0 < p < q \leq \infty$ .  $T$  un opérateur sous-linéaire  $T : X \longrightarrow L_p(\Omega, \mu)$  est dit  $p$ -convexe s'il existe une constante positive  $C$  telle que, pour tout  $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$  dans  $X$  on a

$$\begin{aligned} \left\| \left( \sum_{i=1}^n |T(x_i)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p} &\leq C \left( \sum_{i=1}^n \|x_i\|_X^q \right)^{\frac{1}{q}} && \text{si } 1 \leq q \leq \infty, \\ \left\| \sup_{1 \leq i \leq n} |T(x_i)| \right\|_{L^p} &\leq C \sup_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|_X && \text{si } p = \infty. \end{aligned} \quad (2.4)$$

La plus petite contante  $C$  vérifiant ces inégalités sera note  $C^p(T)$ .

### Remarque 2.2.3

Tout espace Banach est 1-convexe et  $\infty$ -concave. La  $p$ -convexité et la  $p$ -concave pour  $1 \leq p \leq \infty$  sont décroissante et croissante avec  $p$ , respectivement .Par exemple  $L_p$  pour  $1 \leq p \leq \infty$  est  $p$ -convexe et  $p$ -concave, et  $C^p(L_p) = C_q(L_p) = 1$ .

## 2.3 Factorisation des opérateurs sous-linéaires de $X$ dans $L_p$ par $L_q$

Cette section s'attaque à la factorisation des opérateurs sous-linéaires  $T$  dans  $SB(X, L^p(\Omega, \mu))$  par  $L^q(\Omega, \mu)$  où  $X$  un espace de Banach, et  $0 < p \leq \infty$  tel que  $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ .

### Théorème 2.3.1

Soient  $X$  un espace de Banach,  $(\Omega, \mu)$  un espace mesuré,  $T$  un opérateur sous-linéaire continu de  $X$  dans  $L^p(\Omega, \mu)$  et  $0 < p \leq q \leq \infty$  tel que  $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ . Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes

1-  $T$  est un opérateur sous-linéaire  $q$ -convexe et  $C_{pq} \leq C$ ,

$$\left( \int_{\Omega} \left[ \sum_{i=1}^n |T(x_i)|^q \right]^{\frac{q}{p}} d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left[ \sum_{i=1}^n \|x_i\|_X^q \right]^{\frac{1}{q}}$$

2- Il existe une fonction  $g$  dans  $B_{L^r(\Omega, \mu)}^+$ , telle que pour toute  $x$  dans  $X$ , on a

$$\left( \int_{\Omega} \left| \frac{T(x)}{g} \right|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \|x\|_x .$$

3- Il existe une fonction  $g$  dans  $B_{L^r(\Omega, \mu)}^+$  et  $S$  un opérateur sous-linéaire continu de  $X$  dans  $L^q(\Omega, \mu)$ , tels que  $\|S\| \leq C$  et  $T = T_g \circ S$ .

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & L_p(\Omega, \mu) \\ s \searrow & & \nearrow T_g \\ & L_q(\Omega, \mu) & . \end{array}$$

**Preuve.**

1)  $\implies$  2). Il suffit de prendre dans le théorème 1.6.4 l'ensemble  $\{\alpha_i = \|x_i\|_X\}_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$  où  $I = \{1, \dots, n\}$  et pour les  $\{f_i\}_{1 \leq i \leq n}$  dans  $L^p(\Omega, \mu)$  telles que  $f_i = T\left(\frac{x_i}{\|x_i\|_X}\right)$ . En effet

$$\begin{aligned} \left( \int_{\Omega} \left[ \sum_{i=1}^n |T(x_i)|^q \right]^{\frac{q}{p}} d\mu(w) \right)^{\frac{1}{p}} &= \left( \int_{\Omega} \left[ \sum_{i=1}^n \left\| \|x_i\|_X T\left(\frac{x_i}{\|x_i\|_X}\right) \right\|^q \right]^{\frac{q}{p}} d\mu(w) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C \left[ \sum_{i=1}^n \|x_i\|_X^q \right]^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

donc il existe  $g$  dans  $B_{L^r(\Omega, \mu)}^+$  telle que

$$\forall i \in I \left( \int_{\Omega} \left| \frac{T\left(\frac{x_i}{\|x_i\|_X}\right)}{g} \right|^q d\mu(w) \right)^{\frac{1}{q}} \leq C$$

ce qui implique que

$$\forall i \in I \left( \int_{\Omega} \left| \frac{T(x_i)}{g} \right|^q d\mu(w) \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \|x_i\|_X.$$

Et par conséquent pour tout  $x$  dans  $X$ , on aura

$$\forall i \in I \left( \int_{\Omega} \left| \frac{T(x)}{g} \right|^q d\mu(w) \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \|x\|_X.$$

2)  $\implies$  3) Il suffit la définition de  $S$  par  $S(x) = \frac{T(x)}{g}$ .

L'opérateur  $S$  est sous-linéaire. En effet, soit  $x, y$  dans  $X$

$$\begin{aligned} s(x+y) &= \frac{T(x+y)}{g} \\ &\leq \frac{T(x)}{g} + \frac{T(y)}{g} \\ &\leq S(x) + S(y). \end{aligned}$$

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} s(\lambda x) &= \frac{T(\lambda x)}{g} \\ &= \frac{\lambda T(x)}{g} \\ &= \lambda S(x) \end{aligned}$$

et on a bien que  $T = T_g \circ S$  et  $\|S\| = \left\| \frac{T}{g} \right\| \leq C$  (car  $T$  est continu).

3)  $\implies$  1) On utilisera l'inégalité de Hölder, avec  $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ . On obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^n |T(x_i)|^q \right)^{\frac{p}{q}} d\mu &= \left[ \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^n |g|^q \left| \frac{T(x_i)}{g} \right|^q \right)^{\frac{p}{q}} d\mu(w) \right] \\
&\leq \left( \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left| \frac{T(x_i)}{g} \right|^q d\mu(w) \right)^{\frac{p}{q}} \left( \int_{\Omega} (|g|^q)^{\frac{r}{q}} d\mu(w) \right)^{\frac{p}{r}} \\
&\leq \left( \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left| \frac{T(x_i)}{g} \right|^q d\mu(w) \right)^{\frac{p}{q}} \left( \int_{\Omega} |g|^r d\mu(w) \right)^{\frac{p}{r}} \\
&\leq C^p \left( \sum_{i=1}^n \|x_i\|_X^q \right)^{\frac{p}{q}}.
\end{aligned}$$

**Proposition 2.3.2**

Soient  $T_1, T_2$  deux opérateur sous-linéaire de  $X$  un espace de Banach dans  $Y$  un quasi-Banach réticulé. Si  $\forall x \in X, T_1 \leq T_2$  (au sens de(1.1) ). Alors, il existe une constante  $C_Y$  ne dépend que de  $Y$  telle que

$$i) |T_1(x)| \leq \sup \{ |T_2(x)|, |T_2(-x)| \}, \tag{2.5}$$

$$ii) \|T_1(x)\| \leq C_Y (\|T_2(x)\| + \|T_2(-x)\|) \tag{2.1}$$

**Preuve.**

i) Pour tout  $x$  dans  $X$ , on a

$$T_1(x) \leq T_2(x) \iff -T_1(x) \leq T_1(-x) \leq T_2(-x).$$

Ce qui entraîne que

$$|T_1(x)| \leq \sup \{ |T_1(x)|, |T_2(-x)| \}.$$

ii) On a

$$|T_1(x)| \leq |T_2(x)| + |T_2(-x)|,$$

donc

$$\begin{aligned} \|T_1(x)\| &\leq \|T_2(x)\| + \|T_2(-x)\| \\ &\leq C_Y (\|T_2(x)\| + \|T_2(-x)\|). \end{aligned}$$

( La constante  $C_Y$  apparait si  $Y$  est un quasi-Banach réticulé) d'où le résultat annoncé.

**Proposition 2.3.3.**

Soient  $X$  un espace de Banach,  $(\Omega, \mu)$  un espace mesuré,  $T_1, T_2$  deux opérateur sous-linéaire continus de  $X$  dans  $L^p(\Omega, \mu)$ , et  $0 < p \leq q \leq \infty$  tels que  $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ . Si  $T_2$  se factorise par  $L^q(\Omega, \mu)$ , et  $T_1(x) \leq T_2(x)$  pour tout  $x$  dans  $X$ , alors  $T_1$  se factorise par  $L^q(\Omega, \mu)$ .

**Preuve.**

Supposons que  $T_2$  se factorise par  $L^q(\Omega, \mu)$ . D'après le théorème 2.3.1 il existe une constante positive finie  $C_{pq}$  telle pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et toute suite finie  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  dans  $X$ , on a

$$\left( \int_{\Omega} \left[ \sum_{i=1}^n |T_2(x_i)|^q \right]^{\frac{p}{q}} d\mu(w) \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_{pq} \left[ \sum_{i=1}^n \|x_i\|_X^q \right]^{\frac{1}{q}}.$$

D'après la proposition 2.3.2, nous avons pour tout  $x$  dans  $X$

$$|T_1(x)| \leq |T_2(x)| + |T_2(-x)|, \quad \forall x \in X.$$

Alors nous avons clairement

$$\left( \sum_{i=1}^n |T_1(x_i)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C_q \left( \sum_{i=1}^n |T_2(x_i)|^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left( \sum_{i=1}^n |T_2(-x_i)|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Et par conséquent

$$\left\| \left( \sum_{i=1}^n |T_1(x_i)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p \leq C_q C_p \left( \left\| \left( \sum_{i=1}^n |T_2(x_i)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p + \left\| \left( \sum_{i=1}^n |T_2(-x_i)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p \right).$$

Finalement, et par séquent pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et toute suite finie  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  dans  $X$ , on

a

$$\left( \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^n |T_1(x_i)|^q \right)^{\frac{p}{q}} d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_1 \left[ \sum_{i=1}^n \|x_i\|_X^q \right]^{\frac{1}{q}}$$

où  $C_1 = 2C_{pq}(T_2)C_q C_p$  est une constante absolue dépendant que de  $p$  et ( $C_p = C_{L^p} = 2^{\frac{1}{p}-1}$  et  $C_q = C_{L^q} = 2^{\frac{1}{q-1}}$ ). D'après le théorème 2.3.1, on déduit que  $T_1$  se factorise par  $L^q(\Omega, \mu)$ .

Ce qui termine la démonstration.

#### Corollaire 2.3.4

Soient  $X$  un espace de Banach,  $(\Omega, \mu)$  un espace mesuré,  $T$  un opérateur sous-linéaire continu de  $X$  dans  $L^p(\Omega, \mu)$  et  $0 \leq p \leq q \leq \infty$ , tels que  $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ . se factorise par  $L^q(\Omega, \mu)$ , alors  $u$  se factorise par  $L^q(\Omega, \mu)$  pour tout  $u$  dans  $\nabla T$ .

#### Question :

Soient  $p, q, r$  tels que  $0 \leq p \leq q \leq \infty$  et  $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ . Soient  $X$  un espace de Banach,  $(\Omega, \mu)$  un espace arbitraire de mesure et  $T : X \longrightarrow L_p(\Omega, \mu)$  un opérateur sous-linéaire continu. Supposons que  $u$  se factorise par  $L^q(\Omega, \mu)$  dans le sens du théorème 1.6.7 pour tout  $u$  dans  $\nabla T$  Est-ce-que  $T$  se factorise par  $L^q(\Omega, \mu)$  ? Autrement dit est-ce-que la réciproque du corollaire 2.3.4 est vraie ?

Dans ce dernier théorème et avec la supposition que  $\{g_u\}_{u \in \nabla T}$  est latticiellement borné on donne une réponse positive.

#### Théorème 2.3.5

Soit  $T$  un opérateur sous-linéaire continu de  $X$  dans  $L_p(\Omega, \mu)$  qui est un quasi-Banach réticulé complet. Supposons qu'il existe une positive finie  $C$  telle que pour tout  $u$  dans  $\nabla T$ ,  $C_{pq} \leq C$  et  $\{g_u\}_{u \in \nabla T}$  est latticiellement borné dans  $L_r(\Omega, \mu)$  (i.e  $\exists g_0 \in L_r^+(\Omega, \mu) : \forall u \in \nabla T, g_u \leq g_0$ ). Donc,  $T$  se factorise par  $L_p(\Omega, \mu)$  (comme dans le théorème 2.3.1).

**Preuve.**

Il suffit de prendre  $\tilde{T}(x) = \frac{T(x)}{g}$  où  $g = \frac{g_0}{\|g_0\|}$ . Donc  $g_0$  est dans  $L_r^+(\Omega, \mu)$  est par la corollaire 1.4.2

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}(x)\| &= \left\| \frac{T(x)}{g} \right\| \\ &= \left\| \frac{u_x(x)}{g} \right\| \\ &\leq \|g_0\| \left\| \frac{u_x(x)}{g_0} \right\| \\ &\leq \|g_0\| \left\| \frac{u_x(x)}{g_{u_x}} \right\| \\ &\leq C \|g_0\|. \end{aligned}$$

Et cela complète la preuve.

**Remarque 2.3.6**

Sans la condition additionnelle, ce théorème n'est pas vrai en général. On va le montrer avec un contre exemple. Prenons comme espace mesuré  $(\Omega, \mu)$  le tors  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ , équipé de la mesure invariante  $d\theta$ . Soit  $X$  l'espace de Hilbert  $H = L_2(\Omega, \mu) = L_2(\mathbb{T})$ . Pour tout  $r$  tel que  $0 \leq r \leq \pi$  et pour toute  $f \in L_2(\mathbb{T})$ , on définit une fonction  $2\pi$ -périodique  $S_r f \geq 0$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S_r f(x) = \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} |f(y)|^2 dy.$$

On pose  $T_r f = \sqrt{S_r f}$ . pour tout  $x$ , l'expression  $(T_r f)(x)$  est la norme  $L_2$  de la fonction  $1(x-r, x+r)f$ . L'opérateur  $T_r$  est sous-linéaire et l'opérateur  $T$  défini par  $Tf = \sup \{T_r f : 0 < r < \pi\}$ , est aussi sous-linéaire de  $L_2(\Omega, \mu)$ .  $T_r f$  est racine quarré de la fonction maximale  $Mf^2$  (l'opérateur maximalde Hardy-Littlewood) de la fonction  $f^2 \in L_1$  faible, d'où  $Tf$  est dans  $L_2$  faible.

Considérons  $n$  dans  $\mathbb{N}$ . On peut partager  $\mathbb{T}$  à  $n$ -intervalle avec la même longueur et prenons  $x_1, \dots, x_n$  dans  $L_2(\Omega, \mu)$ , la fonction caractéristique. On a  $\|x_i\|^2 = 2\pi/n$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ , mais chaque fonction  $T(x_i)$  vaut au moins  $C/\sqrt{1+(i-j)}$  sur le support de

$x_i$  pour tout  $j = 1, \dots, n$  avec  $C = (4\pi)^{-1}$ , donc il résulte que

$$\int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^n |T(x_i)(w)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\mu(w) \geq C \sqrt{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}} \geq C \sqrt{\log n}$$

et  $\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 = 2\pi$ .

Mais d'après le petit théorème de Grothendieck [Pis86, Théorème 5.4.a], on a pour tout  $u$  dans  $\nabla T$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^n |u(x_i)(w)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\mu(w) &\leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \|u\| \left( \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2\sqrt{\frac{\pi}{2}} \|T\| \left( \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \text{(D'après le théorème 1.4.1)}$$

Comme conclusion nous avons  $C_{pq} \leq 2\sqrt{\frac{\pi}{2}} \|T\|$  et  $C_{pq}(T) = \infty$  pour  $p = 1$  et  $q = 2$ . On déduit que pour tout  $u$  dans  $\nabla T$ ,  $u$  se factorise par  $L_2(\Omega, \mu)$  mais  $T$  ne factorise pas par  $L_2(\Omega, \mu)$ .

## 2.4 Factorisation des opérateurs sous-linéaires de $L_q$ dans $X$ par $L_p$

### Théorème 2.4.1

Soient  $p, q$ , et  $r$  trois nombres réels tels que  $0 < p \leq q \leq +\infty$  et  $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ . Soient  $(\Omega, \mu)$  un espace mesuré,  $S_q$  un sous-espace fermé de  $L_q(\Omega, \mu)$ ,  $X$  un espace de Banach complètement réticulé,  $T$  un opérateur sous-linéaire borné de  $S_q$  dans  $X$  et  $C$  une constante positive finie. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes.

1) Il existe  $S_p$  un sous-espace fermé de  $L_p(\Omega, \mu)$  tel que  $T$  admet la factorisation suivante

$$\begin{array}{ccc}
S_q & \xrightarrow{u} & L_p(\Omega, \mu) \\
j_g \searrow & & \nearrow v \\
& S_q & .
\end{array}$$

- $v$  est opérateur sous-linéaire tel que  $\|v\| \leq C$ .
  - $g$  une fonction dans  $B_{L^r(\Omega, \mu)}^+$ .
  - $j_g$  est l'opérateur induit sur  $S_q$  par l'opérateur de multiplication  $T_g$
- 2) Pour toute suite finie  $\{f_i\}_{1 \leq i \leq n}$  dans  $S_q$ , on a

$$\left( \sum_{i=1}^n \|T(f_i)\|_X^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left( \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^n |f_i|^p \right)^{\frac{q}{p}} d\mu(w) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Preuve.**

1)  $\implies$  2). Résulte de l'inégalité de Hölder, en effet

$$\begin{aligned}
\left( \sum_{i=1}^n \|T(f_i)\|_X^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left( \sum_{i=1}^n \|vj_g(f_i)\|_X^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C \left( \sum_{i=1}^n \|vj_g(f_i)\|_{S_p}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C \left( \sum_{i=1}^n \|g(w) \cdot f_i(w)\|_{S_p}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C \left( \sum_{i=1}^n \|g(w)\|_{L^r} \|f_i(w)\|_{S_p}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C \left( \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^n |f_i|^p \right)^{\frac{q}{p}} d\mu(w) \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

2)  $\implies$  1). Siot  $\{\alpha_i\} \in \mathbb{R}^{(I)}$ . Ecrivons

$$\begin{aligned} |\alpha_i| &= \|T(f_i)\|_X \frac{|\alpha_i|}{\|T(f_i)\|_X} \\ &= \| |\alpha_i| T(f_i) \|_X \frac{1}{\|T(f_i)\|_X} \\ &= \frac{\| |\alpha_i| T(f_i) \|_X}{\|T(f_i)\|_X}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left( \sum_{i=1}^n \left\| T \left( \frac{|\alpha_i| |f_i|}{\|T(f_i)\|_X} \right) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C \left( \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{|\alpha_i| |f_i|}{\|T(f_i)\|_X} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} d\mu(w) \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (\text{D'après 2}) \end{aligned}$$

prenons  $F_i = \frac{|f_i|}{\|T(f_i)\|_X}$  dans  $L_q(\Omega, \mu)$  donc d'après le théorème 1.6.9

$$\exists g \in B_{L^r(\Omega, \mu)}^+ \text{ telle que } \int_{\Omega} |g F_i|^p d\mu(w) \geq 1$$

ce que implique

$$\int_{\Omega} \left| g \frac{|f_i|}{\|T(f_i)\|_X} \right|^p d\mu(w) \geq 1,$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |g f_i|^p d\mu(w) &\geq \|T(f_i)\|_X^p \\ \forall f \in S_q \quad \|T(f_i)\| &\leq \left( \int_{\Omega} |g f_i|^p d\mu(w) \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_g : L_q(\Omega, \mu) &\longrightarrow L_p(\Omega, \mu) \\ f &\longmapsto fg \end{aligned}$$

on a définissant  $v$  sur  $T_g(S_p)$  par  $v(fg) = T(f)$ , l'inégalité (2.6) implique que  $\|v\| \leq C$ .  
En prolongent  $v$  à  $S_p = \overline{T_g(S_p)}^{L_p}$  on aura le résultat et par conséquent la preuve.

## Chapitre 3

# Factorisation les opérateurs sous linéaires par les espaces $L_{pq}$

Ce chapitre contient deux sections. Dans la première section on va donner la définition des espaces de Lorentz avec quelques propriétés élémentaires, et dans la deuxième section on commence par des préliminaires concerne les théorèmes des factorisations dans le cas des opérateurs linéaires et quelques propriétés, après on va citer la généralisation de ces résultats de factorisations (Pisier) pour les opérateurs sous-linéaires.

## 3.1 Les espaces de Lorentz $L_{pq}(\Omega)$

Pour définir Les espace de Lorentz nous avons besoin les définitions de la fonction de distribution et la fonction de réarrangement décroissant de  $f$  et quelques propriétés pour utiliser dans ce chapitre.

### 3.1.1 Les Fonctions de distribution et de réarrangement décroissant de $f$

Pour toute fonction  $f$  de  $\Omega$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ , mesurable par rapport à la mesure de Lebesgue  $|\cdot|$ , finie presque partout, on rappelle la définition de la fonction de distribution  $\lambda_f$  et de la fonction de réarrangement décroissant de  $f^*$  de  $f$

#### Définition 3.1.1

Soient  $(\Omega, M, \mu)$  un espace mesuré et  $f$  est une fonction mesurable sur  $\Omega$ , pour tout  $y > 0$ . On définit

$$\lambda_f(s) = \mu \{x \in \Omega : |f(x)| > s\}$$

La fonction  $\lambda_f$  est appelé la fonction distribution de  $f$

#### Propriétés 3.1.2

- $\lambda_f$  est une fonction décroissante sur  $[0; \infty]$ .
- $\lambda_f$  est continue à droite.
- $\lambda_f$  dépend seulement de la valeur absolue de  $f$ .

#### Lemme 3.1.3

- i)  $\lambda_f(s) \leq s^{-p} \|f\|_{L_p(\Omega, \mu)}^p, \quad \forall f \in L_p(\Omega, \mu)$
- ii)  $\|f\|_{L_p(\Omega, \mu)}^p = p \int_0^\infty s^p \lambda_f(s) \frac{ds}{s}, \quad 1 \leq p < \infty, \forall f \in L_p(\Omega, \mu)$
- iii)  $\|f\|_{L_\infty(\Omega, \mu)} = \inf_0 \{s > 0 : \lambda_f(s) = 0\}.$

#### Preuve.

i) et iv) Sont évidentes.

ii) En intégrons l'inégalité

$$s^p \leq |f(x)|^p$$

sur l'ensemble

$$E = \{x : |f(x)| > s\}$$

on aura

$$\begin{aligned} s^p \lambda_f(s) &\leq \int_E |f(x)|^p d\mu(x) \\ &\leq \int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu(x) \\ &\leq \|f\|_{L_p(\Omega, \mu)}^p. \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} s^p \lambda_f(s) \frac{ds}{s} &= \int_{\Omega} \left\{ \int_0^{|f(x)|} s^{p-1} ds \right\} d\mu(x) \\ &= \frac{1}{p} \|f\|_{L_p}^p. \end{aligned}$$

### Définition 3.1.4

Le réarrangement décroissant de  $f$  est la fonction  $f^*$  définie par

$$f^*(t) = \inf \{y \geq 0 : \lambda_f(s) \leq t\}$$

### Propriétés 3.1.5

- 1)  $f^*(t) = \sup \{s > 0 : \lambda_f(s) > t\}$ .
- 2) Pour tout  $t > 0$  on a  $(f + g)^*(t) \leq f^*\left(\frac{t}{2}\right) + g^*\left(\frac{t}{2}\right)$ .
- 3) Le réarrangement décroissant de  $f$  est unique.
- 4) Pour  $0 < p < \infty$ , on a  $(|f|^p)^* = [f^*(t)]^p$ .
- 5) Pour toute fonction mesurable  $F : [0; \infty] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ , on a

$$\int_0^{+\infty} F(f^*(t)) dt = \int_{\Omega} F(|f(t)|) d\mu.$$

### Propriétés 3.1.6

- 1) La relation entre  $f^*(t)$  et  $\lambda_f(y)$  est donnée par l'équation suivante  
 $f^*(t) = m_{\lambda_f}(t)$ ,  $t \geq 0$  où  $m$  est la mesure de Lebesgue
- 2)  $f^*(\lambda_f(s)) \leq s$  avec  $\lambda_f(s) < \infty$ , et aussi  $\lambda_f(f^*(t)) \leq t$  avec  $f^*(t) < \infty$
- 3)  $f^*(t) > t$  si et seulement si  $\lambda_f(s) > t$ .
- 4)  $\lambda_f = \lambda_{f^*}$
- 5)  $f$  et  $f^*$  sont équimesurables, et ont la même distribution

$$\mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > s\}) = m(\{t > 0 : f^*(t) > s\})$$

Pour tout  $s \geq 0$  où  $m$  est la mesure de Lebesgue.

### **Théorème 3.1.7**

Soit  $0 < p < \infty$ . Pour tout  $f \in L^1$ , on a

$$\int_{\Omega} |f(t)|^p d\mu = \|f\|_p^p = \int_0^{\infty} t^{p-1} \lambda_f(s) dt = \int_0^{\infty} f^*(t)^p dt = \|f^*\|_p^p \quad (3.1)$$

et

$$\sup_t t \lambda_f(s)^{\frac{1}{p}} = \sup_t t^{\frac{1}{p}} f^*(t).$$

## **3.1.2 L'espace de Lorentz**

### **Définition 3.1.8**

Soient  $0 < p, q \leq \infty$  et  $f$  est une fonction mesurable sur  $\Omega$ . On définit  $\|f\|_{L_{pq}}$  par

$$\|f\|_{L_{pq}} = \begin{cases} \left( \frac{q}{p} \int_0^{\infty} \left[ t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}, & \text{si } 0 < p \leq \infty, 0 < q < \infty \\ \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t), & \text{si } 0 < p < \infty, q = \infty \end{cases}$$

Par convention on identifiera  $L_{\infty\infty}$  avec  $L_{\infty}$

L'espace Lorentz  $L_{pq}(\Omega)$  consiste en ces fonctions mesurables sur  $\Omega$  tel qui  $\|f\|_{L_{pq}} < \infty$ .

### **Remarque**

Si  $1 < p < \infty$ , on a  $L_{\infty q}(\Omega, \mu) = \{0\}$ .

### 3.1.3 Propriétés topologiques des espaces $L_{pq}$

1) Les espaces  $L_{pq}$  sont donc des espaces vectoriels et sont métrisables, complets et pour  $q < \infty$ , ils sont séparables.

2)  $\|\cdot\|_{L_{pq}}$  n'est pas une norme car elle ne satisfait pas l'inégalité triangulaire mais une quasi-norme et  $(L_{pq}(\Omega, \mu), \|\cdot\|_{L_{pq}})$  est un quasi-Banach.

3) La dualité des espaces de Lorentz  $L_{pq}(\Omega)$  et pour  $1 < p < \infty$ ,  $L_{p1}^* = L_{p\infty}$  aussi bien que  $L_{pq}^* = L_{p^*q^*}$  pour  $1 < p, q < \infty$  avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$  et  $\frac{1}{q} + \frac{1}{q^*} = 1$ .

#### Proposition 3.1.9

a) Pour  $p = q$ ,  $L_{pq}$  coïncide avec  $L_p$ , et on a aussi l'inclusion suivante  $L_{pq_1} \subset L_{pq_2}$  pour  $0 < q_1 \leq q_2 \leq \infty$ .

b) Pour  $q = \infty$ , l'espace de Lorentz  $L_{p\infty}$  Coïncide avec l'espace de Marcinkiewicz  $L_p^w$  défini de la façon suivante :

#### Définition 3.1.10 (L'espace de Marcinkiewicz)

L'espace de Marcinkiewicz  $L_p^w(\Omega, \mu)$  pour  $0 < p \leq \infty$  est composé des fonctions mesurables  $f$  pour lesquelles la quantité suivante est finie

$$\|f\|_{L_p^w} = \sup_{t>0} t (\mu \{x \in \Omega : |f(x)| > t\})^{\frac{1}{p}}.$$

En effet, pour tout  $t > 0$ , on a :

$$t^{\frac{1}{p}} f^*(t) = t^{\frac{1}{p}} \inf \{s > 0 : \lambda_f(s) \leq t\} \leq t^{\frac{1}{p}} \inf \left\{ s > 0 : \frac{\|f\|_{L_p^w}^p}{s^p} \leq t \right\} = \|f\|_{L_p^w},$$

et donc,  $L_p^w(\Omega, \mu) \subset L_{p\infty}(\Omega, \mu)$ .

Réciproquement, pour tout  $s > 0$

$$s (\lambda_f(s))^{\frac{1}{p}} = s (\lambda_{f^*}(s))^{\frac{1}{p}} \leq s \left( \mu \left\{ t > 0, \frac{\|f\|_{L_{p\infty}}^p}{t^{\frac{1}{p}}} > s \right\} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_{L_{p\infty}}.$$

Ainsi, les espaces  $L_p^w(\Omega, \mu)$  et  $L_{p\infty}(\Omega, \mu)$  sont bien égaux.

### Corollaire 3.1.11

Si  $1 < p \leq \infty$  et  $1 \leq q \leq \infty$ , on peut introduire une norme  $\|\cdot\|_{pq}$  sur  $L_{pq}$  qui satisfait

$$\|\cdot\|_{pq} \leq \|\cdot\|_{pq} \leq C_{pq} \|\cdot\|_{pq}$$

pour qui  $L_{pq}$  devient un espace de Banach (pour plus de détails, voir [Han67])

### 3.1.4 Quelques propriétés pour $q = 1$ et $q = \infty$

#### Propriété 3.1.12 [Pis86]

Pour tous  $p, r, s$  tels que  $0 < r < p \leq \infty$ , on a

1)  $L_{p\infty} \subset L_r$ .

2)  $L_s \subset L_{p1}$ .

De plus, pour toute  $f \in L_0(\mu)$

$$\|f\|_r \leq C(r, p) \|f\|_{p\infty}, \quad (3.2)$$

$$\|f\|_{p1} \leq C(s, p) \|f\|_s. \quad (3.3)$$

#### Propriété 3.1.13 [Pis86]

Soit  $(f_n)$  une suite dans  $L_0(\mu)$ . Pour tout  $0 < p < \infty$  et  $0 \leq q < \infty$ , on a

$$\|\sup |f_n|\|_{p\infty} \leq \left( \sum \|f_n\|_{p\infty}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (3.4)$$

$$\left( \sum \|f_n\|_{q1}^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left\| \sum |f_n| \right\|_{q1}. \quad (3.5)$$

De plus pour  $p < r$  et  $s < q$ , on a

$$\left\| \left( \sum |f_n|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{p\infty} \leq \left( \sum \|f_n\|_{p\infty}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.6)$$

$$\left( \sum \|f_n\|_{p1}^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left\| \sum |f_n| \right\|_{p1}.$$

## 3.2 Factorisation des opérateurs sous-linéaires par

$L_{p\infty}$

Dans cette section nous allons généraliser les théorèmes de factorisations des opérateurs linéaires d'un espace de Banach  $X$  à valeurs dans  $L_r$  par  $L_{p\infty}$  et de  $L_s$  dans  $Y$  espace de Banach complètement réticulé par  $L_{q1}$  qui ont été faits par Pisier [Pis86], aux opérateurs sous-linéaires. On commencera par Préliminaires concerne quelques propriétés qui nous seront utiles.

### 3.2.1 Préliminaires

Dans tous les sections suivantes, on note par  $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$  un espace mesuré quelconque,  $B_{L_1(\Omega, \mu)}^+$  l'ensemble des fonctions  $f$  dans  $L_1(\Omega, \mu)$  telles que  $f \geq 0$  et  $\int_{\Omega} f(w) d\mu(w) \leq 1$ . Soient  $f$  dans  $B_{L_1(\Omega, \mu)}^+$  et  $\nu = f\mu$  (i.e  $\forall E \in \mathcal{T}, \nu(E) = \int_E f(w) d\mu(w)$ ),  $\mathfrak{M}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{R})$  l'espace de toutes les mesures signées finies.

#### Rappel

Soient  $\alpha > 1$  et  $\{f_n\}_n$  une suite borée dans  $L_1(\Omega, \mu)$ . Supposons qu'il existe une constante  $C$  telle que pour tout suite finie  $\{\lambda_n\}_n$  de nombre réels, on a

$$\left\| \sup |\lambda_n f_n| \right\|_{L_1(\Omega, \mu)} \leq C \left( \sum |\lambda_n|^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (3.7)$$

Alors la suite  $\{f_n\}_n$  est uniformément intégrable.

#### Théorème 3.2.1 ([Pis86])

Soient  $0 < r \leq p < \infty$ . Soit  $I$  un ensemble d'indices et  $\{f_i\}_{i \in I}$  une famille dans  $L_r(\Omega, \mu)$ . Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.

$\mathcal{A}_1$ ) Il existe une constante  $C$  positive telle que pour toute suite  $\{\alpha_i\}_{i \in I}$  de nombres réels, on a

$$\left\| \sup_{i \in I} |\alpha_i f_i| \right\|_{L_r(\Omega, \mu)} \leq C \left( \sum_{i \in I} |\alpha_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$\mathcal{A}_2$ ) Il existe une constante  $\acute{C}$  positive et une fonction  $f$  dans  $B_{L_1(\Omega, \mu)}^+$  telles que pour tout  $E$  dans  $T$ , on a

$$\forall i \in I, \quad \|\mathbf{1}_E f_i\|_{L_r(\Omega, \mu)} \leq \acute{C} \nu(E)^{\frac{1}{r} - \frac{1}{p}}.$$

$\mathcal{A}_3$ ) Il existe une constante  $C'''$  positive et une fonction  $f$  dans  $B_{L_1(\Omega, \mu)}^+$  telles que  $\{w : f(w) = 0\} \subset \{w : f_i(w) = 0\}$  pour tout  $i$  dans  $I$  et

$$\forall i \in I, \quad \left\| f^{\frac{-1}{s}} \cdot f_i \right\|_{L_{p\infty}(\Omega, \nu)} \leq C'''.$$

### **Théorème 3.2.2 (Lebesgue-Radon-Nikodym)**

Soient  $\mu$  et  $\nu$  deux mesures positives sur  $(\Omega, T)$  telles que  $\mu$   $\sigma$ -finie. Il y a équivalence entre,

i)  $\forall A \in T, \quad \mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0,$

ii) Il existe  $f \in L_1(\Omega, T, \mu, \mathbb{R}^+)$  telles que  $\forall A \in T, \nu(A) = \int_A f d\mu$ . si  $\mu$  et  $\nu$  sont des mesures  $\sigma$ -finie, on prend  $f$  mesurable.

### **Proposition 3.2.3**

Soit  $I$  un ensemble d'indices et  $\{\nu_i\}_{i \in I}$  une famille dans  $M(\Omega, T, \mathbb{R}^+)$  vérifiant pour tout  $E$  dans  $T, \nu_i(E) = \int_A f_i d\mu$  ( $\mu$  une mesure  $\sigma$ -finie sur  $(\Omega, T,)$ ) avec  $f_i \in B_{L_1(\Omega, \mu)}^+$ . On pose pour tout  $E$  dans  $T$

$$\nu(E) = \sup_{i \in I} \nu_i(E).$$

Alors il existe  $f \in L_1(\Omega, T, \mu, \mathbb{R}^+)$  telle que  $\nu(E) = \int_A f d\mu$ .

### **Proposition 3.2.4 ([BM01])**

Soit  $X, Y, Z$  trois espaces de Banach dont  $Y$  réticulé;  $C$  une constante positive et  $T$  un opérateur sous-linéaire continu de  $X$  dans  $Y$ . Soit  $v : X \longrightarrow Z$  un opérateur linéaire injectif tel que

$$\|T(x)\| \leq C \|v(x)\|.$$

Alors, il existe  $\tilde{T} : \overline{v(X)} \longrightarrow Y$  sous-linéaire continu tel que

$$T = \tilde{T} \circ v \quad \text{et} \quad \|\tilde{T}\| \leq C.$$

### Définition 3.2.5

Soient  $X$  un espace de Banach réticulé et  $1 < p < \infty$ . On dira que  $X$  satisfait la  $p$ -estimation supérieure (resp. la  $p$ -estimation inférieure) s'il existe une constante positive  $M$ , telle que pour tout  $n$  et suite finie  $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$  dans  $X$  ( $\inf_{i \neq j} \{|x_i|, |x_j|\} = 0$ ), on a

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\| \leq M \left( \sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.10)$$

$$\text{(resp. } \left( \sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq M \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\| \text{)} \quad (3.11)$$

### Exemples

- 1)  $L_{p\infty}$  est un espace de Banach réticulé satisfaisant la  $p$ -estimation supérieure.
- 2)  $L_{p1}$  est un espace de Banach réticulé satisfaisant la  $p$ -estimation inférieure.

### Remarque

- 1) (3.10) vérifie que

$$\left\| \sup_{1 \leq i \leq n} x_i \right\| \leq M \left( \sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.12)$$

- 2) (3.11) vérifie que

$$\left( \sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq M \left\| \sum_{i=1}^n |x_i| \right\| \quad (3.13)$$

## 3.2.2 Factorisation des opérateurs sous-linéaires par $L_{p\infty}$

### Théorème 3.2.6

Soit  $0 < r < p < \infty$ ,  $X$  un espace de Banach et  $T$  un opérateur sous-linéaire continu de  $X$  dans  $L_r(\Omega, \mu)$ . Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.

- $B_1)$  Il existe une constante  $C$  positive telle que pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$  et  $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$  dans  $X$ ,

on a

$$\left\| \sup_{1 \leq i \leq n} |T(x_i)| \right\|_{L_r(\Omega, \mu)} \leq C \left( \sum_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$B_2$ ) Il existe une constante  $C'$  positive et une fonction  $f$  dans  $B_{L_1(\Omega, \mu)}^+$  telles que pour tout  $x$  dans  $X$  et  $E$  dans  $T$ , on a

$$\|\mathbf{1}_E T(x)\|_{L_r(\Omega, \mu)} \leq C' \|x\| \nu(E)^{\frac{1}{r} - \frac{1}{p}} \quad (\nu = f \cdot \mu)$$

$B_3$ ) Il existe une constante  $C''$  positive et une fonction  $f$  dans  $B_{L_1(\Omega, \mu)}^+$  telles que pour tout  $x$  dans  $X$ ,  $\{w : f(w) = 0\} \subset \{w : T(x)(w) = 0\}$  et

$$\left\| f^{\frac{-1}{r}} T(x) \right\|_{L_{p\infty}(\Omega, \nu)} \leq C'' \|x\| \quad (\nu = f \cdot \mu).$$

**Preuve.**

$B_1 \implies B_2$ . Il suffit prendre dans le Théorème 3.2.1  $\alpha_i = \|x_i\|$ . En effet,

$$\begin{aligned} \left\| \sup_{1 \leq i \leq n} |T(x_i)| \right\|_{L_r(\Omega, \mu)} &= \left\| \sup_{1 \leq i \leq n} \left\| \|x_i\| T\left(\frac{x_i}{\|x_i\|}\right) \right\| \right\|_{L_r(\Omega, \mu)} \\ &\leq C' \left( \sum_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

ce qui entraîne que pour tout  $x$  dans  $B_x$ , on a

$$\|\mathbf{1}_E T(x)\|_{L_r(\Omega, \mu)} \leq C' \nu(E)^{\frac{1}{r} - \frac{1}{p}}$$

et par conséquent pour tout  $x$  dans  $X$ , on aura

$$\|\mathbf{1}_E T(x)\|_{L_r(\Omega, \mu)} \leq C' \|x\| \nu(E)^{\frac{1}{r} - \frac{1}{p}}.$$

$B_2 \implies B_3$ . Soit  $x \in X$ . On a d'après la proposition 3.1.9 b

$$\left\| f^{\frac{-1}{r}} T(x) \right\|_{L_{p\infty}(\Omega, \nu)} = \sup_{t>0} \left( t^p \nu \left\{ w : |T(x)|(w) > f^{\frac{-1}{r}}(w)t \right\} \right)^{\frac{1}{p}},$$

en posant

$$E = \left\{ w : |T(x)|(w) > f^{\frac{-1}{r}}(w)t \right\}$$

on aura

$$\left\| f^{\frac{-1}{r}} T(x) \right\|_{L_{p\infty}(\Omega, \nu)} = \sup_{t>0} (t^p \nu(E))^{\frac{1}{p}}.$$

On a

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{1}_E f^{\frac{1}{r}} \right\|_{L_r(\Omega, \mu)} &= t \left( \int_E f(w) d\mu(w) \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq \left( \int_E |T(x)|^r d\mu(w) \right)^{\frac{1}{r}} \\ \text{(D'après } B_2) &\leq C' \|x\| \left( \int_E f(w) d\mu(w) \right)^{\frac{1}{r} - \frac{1}{p}} \\ &\leq C' \|x\| (\nu(E))^{\frac{1}{r} - \frac{1}{p}} \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} t &\leq C' \|x\| \left( \int_E f(w) d\mu(w) \right)^{-\frac{1}{p}} \\ &\leq C' \|x\| \nu(E)^{-\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

donc

$$\nu(E) \leq C'^p \|x\|^p t^{-p}$$

D'où

$$\left\| f^{\frac{1}{r}} T(x) \right\|_{L_{p\infty}(\Omega, \nu)} = \sup_{t>0} (t^p \nu(E))^{1/p} \leq C' \|x\|.$$

$B_3 \implies B_1$ . Soit  $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$  une suite finie dans  $X$ . L'inégalité

$$\left\| f^{\frac{1}{r}} T(x) \right\|_{L_{p\infty}(\Omega, \nu)} \leq C'' \|x\|$$

entraîne pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, n\}$

$$\left\| f^{\frac{1}{r}} T\left(\frac{x_i}{\|x_i\|}\right) \right\|_{L_{p\infty}(\Omega, \nu)} \leq C''$$

en prenant  $\alpha_i = \|x_i\|$ , on aura

$$\left\| \sup_{1 \leq i \leq n} \left\| \alpha_i T\left(\frac{x_i}{\|x_i\|}\right) \right\| \right\|_{L_r(\Omega, \mu)} \leq \left( \sum_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

D'où

$$\left\| \sup_{1 \leq i \leq n} |T(x_i)| \right\|_{L_r(\Omega, \mu)} \leq \left( \sum_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

**Remarque 3.2.7** *La factorisation proprement dite.*

Le théorème 3.2.6 donne des conditions nécessaires et suffisantes à la factorisation des opérateurs sous-linéaires continus  $T : X \longrightarrow L_r(\Omega, \mu)$ . Car en reformulant  $B_3$ ,  $T$  admet la factorisation suivante

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & L_r(\Omega, \mu) \\ \tilde{T} \downarrow & & \nearrow M \\ & & L_{p\infty}(\Omega, \nu) \end{array}$$

où

$M(g) = f^{\frac{1}{r}} g$ ,  $M$  : opérateur linéaire borné et positif,

$\tilde{T}(x) = f^{\frac{-1}{r}}T(x)$ ,  $\tilde{T}$  : opérateur sous-linéaire borné,

$T = M \circ \tilde{T}$  (la composée d'un opérateur linéaire positif et d'un opérateur sous-linéaire est un opérateur sous-linéaire (proposition 1.2.7)).

**Corollaire 3.2.8**

Soit  $1 < r < p < \infty$  et  $X$  un espace de Banach réticulé qui satisfait la  $p$ -estimation supérieure. Alors, tout opérateur sous-linéaire continu, symétrique et croissant  $T$  de  $X$  dans  $L_r(\Omega, \mu)$  se factorise par  $L_{p\infty}$ .

**Preuve.**

$$\begin{aligned} T(x) &= T(x_+ - x_-) \\ &\leq T(x_+) + T(-x_-) \\ &\leq T(x_+) + T(x_-) \text{ (car } T \text{ est symétrique)} \\ &\leq 2T(|x|) \text{ (car } T \text{ est croissant)} \end{aligned}$$

Pareil pour  $T(-x) \leq 2T(|x|)$ , et aussi  $\varphi(x) = \sup \{T(x), T(-x)\}$  on a

$$\varphi(x) \leq 2T(|x|)$$

et on aura d'après la proposition 1.2.9 (1)

$$|T(x)| \leq \varphi(x) \leq 2T(|x|).$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n} \subset X$ . Puisque  $T$  est symétrique et croissant, on a pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} |T(x_i)| &\leq 2T(|x_i|) \\ &\leq 2T(\sup |x_i|) \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} \left\| \sup_i |T(x_i)| \right\| &\leq 2 \left\| T(\sup_i |x_i|) \right\| \\ &\leq 2 \|T\| \left\| \sup_i |x_i| \right\| \\ &\leq 2M \|T\| \left\| \sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right\|^{\frac{1}{p}} \quad (\text{D'après (3.12)}) \end{aligned}$$

$M$  est la constante de la  $p$ -estimation supérieure.

Donc  $T$  vérifie la condition  $B_1$  du théorème 3.2.5 et par conséquent il se factorise par

$L_{p\infty}$ .

# Bibliographie

- [AM02] D. ACHOUR ET L. MEZRAG, Factorisations des opérateurs sous linéaires par  $L_{p\infty}$  et  $L_{q1}$ . Ann. Sci. Math. Quebec **26** (2002), 109-121.
- [AM04] D ACHOUR AND L MEZRAG, *Little Grothendieck's theorem for sublinear operators*. J. Math. Anal. Appl. **296** (2004), 541-552.
- [BM01] M. T. BELAIB & L. MEZRAG, *Sur les opérateurs sous-linéaires  $p$ -sommants*. Sci. Tech. **15** (2001), 7-11.
- [Ble92b] D. BLECHER. *The standard dual of an operator space*. Pacific J. Math. **153** (1992) 15- 30.
- [Def01] A. DEFANT, *Variants of the Maurey -Rosenthal theorem for quasi-Köthe function spaces*. Positivity, **5** (2001), 153-175.
- [DF93] A. DEFANT AND K. FLORET, *Tensor norms and operator ideals*. North-Holland Mathematics Studies, 1993.
- [ER91] E. EFFROS AND Z. J. RUAN. *A new approach to operator spaces*. Canadian Math. Bull. **34** (1991) 329-337.
- [ER93] E. EFFROS AND Z. J. RUAN. *On the abstract characterization of operator spaces*. Proc. Amer. Math. Soc. **119** (1993) 579-584.
- [Gro56] A. GROTHENDIECK, *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*. Bol. Soc. Mat. São Paulo **8** (1956), 1-79.
- [Hei80] S. HEINRICH, *Ultraproducts in Banach space theory*. J. für die reine und Angew. Math. **313** (1980), 72-104.

- [Hun67] R. A. HUNT, *On  $L_{pq}$  spaces*, Enseignement Math. **12** (1966), 249-276.
- [HON81] S. HEINRICH, G.H. OLSEN AND N.J. NIELSEN, *Order bounded operators and tensor products of Banach lattices*. Math Scand. **49** (1981), 99-127.
- [Jun96] M. JUNGE. *Factorization theory for spaces of operators*. Habilitationsschrift, Kiel University (Germany) (1996).
- [Kak41] S. KAKUTANI. *concrete representation of abstract  $L$  spaces and concrete representation of abstract  $M$  -spaces*, Annals of Math. **42** (1941) (p. 523-537) and (p. 944-1024).
- [Kal77] N. J. KALTON, *The convexity type of a quasi-Banach space*. Unpublished note, (1977).
- [Kri74] J. L. KRIVINE, *Théorèmes de factorisation dans les espaces réticulés*. Séminaire Maurey Schwartz 1973-1974, exposés **22** et **23**, Ecole Polytechnique, Paris.
- [KPR84] N. J. KALTON, N. T. PECK, AND J. W. ROBERTS, *An  $F$ -space sampler*. London Mathematical Society Lecture Notes Series, **89**, Cambridge University Press, Cambridge, (1984).
- [Lin92] Y. E. LINKE, *Linear operators without subdifferentials*. Sibirskii Matematicheskii Zhurnal, **32**(3) (1991), 219-221.
- [LJ80] D. R. LEWIS AND N. JÆGERMANN, *Banach lattice and unitary ideals*. J. Funct. Anal. (1980), 165-190.
- [LT96] J. LINDENSTRAUSS AND L. TZAFRIRI, *Classical Banach Spaces, I and II*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [Mau74] B. MAUREY, *Théorèmes de factorisation pour les opérateurs linéaires à valeurs dans les espaces  $L_p$* . Astérisque **11** (1974).
- [Mey91] P. MEYER-NIEBERG, *Banach lattices*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [Mez85] L. MEZRAG, *Théorèmes de factorisation et de prolongement pour les opérateurs à valeurs dans les espaces  $L_p$ , pour  $p < 1$* . Comptes Rendus Acad. Sci. Paris A. **300** (1985), 299-302.

- [Mez03] L. MEZRAG, *Espaces d'opérateurs et géométrie des espace de Banach*. Sétif 2003.
- [Mez04] L. MEZRAG, *Factorization of operator valued  $L_p$ , for  $0 \leq p < 1$* . Math. Nach. **266** (2004), 60-67.
- [MT04] L. MEZRAG AND A. TIAIBA, *On the sublinear operators factoring through  $L_p$* . Int. J. Math. Math. Sci. **50** (2004), 2695-2704.
- [Nie73] N.J. NIELSEN, *On Banach ideals determined by Banach lattices and their applications*. Dissertationes Math. **109** (1973), 1-62.
- [Nik70] E. M. NIKISHIN, *Resonance theorems and superlinear operators*. Transl-of Cont. of Uspekhi, Mat. Nauk . **XXV** (6) Nov. Dec. (1970).
- [Pal80] R. PALLU DE LA BARRIÈRE, *Convex analysis vector and set-valued measures*. Pub. Univ. Paris VI **33** (1980).
- [Pie78] A. PIETSCH, *Operator ideals*. North Holland, 1978.
- [Pis86] G. PISIER, *Factorization of operators throught  $L_{p\infty}$  or  $L_{p1}$  and non-commutative generalizations*. Math. Ann. **276** (1986), 105-136.
- [Sch74] H. H. SCHAEFFER. *Banach lattices and positive operators*, Springer-Verlag, Berlin and New York, (1974).
- [Woj91] P. WOJTASZCZYK, *Banach spaces for analysis*. Campridge University Press, 1991.
- [Yan79] L. P. YANOVSKII, *On summing and lattice summing operators and characterizations of AL-spaces* (in Russian). Sibirskii Mat. Zh. **20** (2) (1979), 401-408.
- [Zaa97] A. C. ZAAANEN, *Introduction to operator theory in Riesz space*. Springer-Verlag, 1997.

## المذكرة باللغة العربية

في هذه المذكرة قمنا بدراسة تفكيك المؤثرات تحت الخطية المستمرة من  $X$  *Banach*  $L_p(\Omega, \mu)$   $L_q(\Omega, \mu)$   $(0 < p \leq q \leq \infty)$  :

كما تطرقنا إلى تفكيك المؤثرات تحت الخطية  $X \xrightarrow{\tilde{u}} L_q(\Omega, \mu) \xrightarrow{M_{su}} L_p(\Omega, \mu)$

$L_p(\Omega, \mu)$   $X$   $L_q(\Omega, \mu)$

$L_{pq}(\Omega, \mu)$  *Lorentz* تحت الخطية المستمرة تفكيك

$(0 < p \leq q \leq \infty)$   $X \xrightarrow{\tilde{T}} L_{p\infty}(\Omega, \nu) \xrightarrow{M} L_r(\Omega, \mu)$  :