N° d’ordre : ....

Université Mohamed Boudiaf - m’sila

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET D’INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

Thèse

Présentée pour l’obtention du diplôme de Doctorat en sciences

Spécialité: Mathématiques

Option: Analyse fonctionnelle

Par :

Amar BELACEL

(Thème)

Opérateurs sommants et factorisation par les espaces de Köthe

Soutenue publiquement le: 05.03.2015 devant le jury composé de :

L. Mezrag	Professeur	U.M.B. - M’sila	Président
D. Achour	Professeur	U.M.B. - M’sila	Rapporteur
F. Bedouhene	Professeur	U.M.M.- Tizi ouzou	Examinateur
M. Hafayed	M.C.A.	U.M.K.- Biskra	Examinateur
M. L. Leghmizi	M.C.A.	U.Y. F. - Médéa	Examinateur

Année 2014/2015

Table des matières

0.1 Remerciements

Je ne peux commencer et finir ce travail sans remercier au préalable le détenteur du savoir, en l'occurrence le tout puissant ALLAH.

Je tiens en premier lieu à témoigner ma profonde gratitude envers mon directeur de thèse **Dahmane ACHOUR,** Professeur à l'Université de M'sila, pour la qualité de son encadrement. Sa grande disponibilité, ses encouragements permanents, son exigence et ses conseils judicieux m'ont été très précieux pendant ces années.

Je suis très reconnaissant à **Lahcène MEZRAG,** Professeur à l'Université de M'sila, d'avoir accepté de rapporter cette thèse et d'être présent lors de la soutenance. A la suite de sa lecture attentive, ses remarques et conseils m'ont permis de préciser certains passages du texte. Je le remercie également parcequ'il était mon premier encadreur dans ce domaine de recherche depuis 2004, quand j'étais étudiant en magistère.

Je remercie très sincèrement les membres du jury **Fazia BEDOUHENE**, Professeur à l'Université de Tizi ouzou ; **Mokhtar HAFAYED**, Maître de conférences à l'Université de Biskra et **Mohamed Lamine LEGHMIZI**, Maître de conférences à l'Université de Médéa d'avoir accepté de juger mon travail.

Merci à Mr. **Farid NASHAT,** Professeur à l'Université de Ain chames, Cairo, Egypt et à Mr. **Erhan ÇALIŞKAN,** Professeur à l'Université de Yıldız, İstanbul, Turquie pour leurs aides lors de la préparation de ma thèse.

Enfin, à tous ceux que je n'ai pas pu citer et qui m'ont aidé de prés où de loin dans l'élaboration de ce travail, j'adresse mes remerciements les plus vifs.

0.2 Résumé

Cette thèse, qui concerne les espaces de Banach réticulé et la théorie des opérateurs, est divisée en trois parties. Dans la première partie, nous étudions la factorisation d'un opérateur sous linéaire qui prend ces valeurs dans un espace de Lebesgue, à travers un espace de Köthe, et le problème dual. Dans la deuxième partie, nous introduisons et étudions les opérateurs positifs fortement $(p;q)$-sommants. Parmi les résultats de cette recherche, nous présentons la relation entre ces derniers et les opérateurs positivement $(p;q)$-sommants et plus précisément, si $p=q$, nous prouvons de nouveaux théorèmes de Pietsch-type (Domination/Factorisation). Un nouveau théorème de factorisation pour la classe des opérateurs positivement p-sommants est montré. En outre, de nouveaux théorèmes de domination et factorisation pour les opérateurs positifs fortement p-sommants sont donnés. Comme application, certains résultats connus sur les opérateurs $(p;q)$-concaves de Banach réticulés peuvent être élevés à la classe des opérateurs $(q;p)$-convexes. Dans la troisième partie, nous introduisons l'idéal multilinéaire des opérateurs virtuellement $(r;r_1;...;r_n;s)$-nucléaires entre espaces de Banach, nous caractérisons ces opérateurs par la factorisation et nous montrons que, si les espaces X_k^* $(k=1,...,n)$ possèdent la propriété d'approximation λ-bornée ; le dual topologique de l'espace de tous les opérateurs virtuellement $(r;r_1,...,r_n;s)$-nucléaires de $X_1\times\cdots\times X_n$ dans Y s'identifier isométriquement à l'espace des opérateurs multilinéaires et multiple $(r';r'_1,...,r'_n;s')$-sommants et en particulier, le dual topologique de l'espace de tous les opérateurs $(r;r_1,...,r_n;s)$-nucléaires de $X_1\times\cdots\times X_n$ dans Y est isométriquement isomorphe à l'espace des opérateurs multilinéaires $(r';r'_1,...,r'_n;s')$-sommants.

Mots clés : Banach réticulé, Espaces de Köthe, Factorisation des opérateurs, Norme tensorielle, Opérateur non linéaire (sous linéaire, quasi linéaire, multilinéaire), Opérateur positivement (p,q)-sommant, Opérateur positif fortement (p,q)-sommant, Opérateur multilinéaire nucléaire (multiple sommant), Théorème de Pietsch.

AMS Classification : [2010] 46A20, 46A32, 46B28, 46B42, 46B45, 47B10, 47H60.

0.3 Abstract

Title : Summing operators and factorization through Köthe spaces

This thesis, concerning Banach lattice spaces and operator theory, devided in three parts : In the first part, we study the factorization theorem, exactly factorization of sublinear operator from a Banach space into L_p by a Köthe space and also the dual problem. In the second part, we introduce and study the notion of positive strongly $(p;q)$-summing operator. Among other results, relationships between these operators and positive $(p;q)$-summing operators are shown. More precisely, if $p = q$ we prove new Pietsch-type theorems (both domination and factorization theorems). In particular, a new factorization theorem for the class of the positive p-summing operators is shown. Also, new domination and factorization theorems for positive strongly p-summing operators are given. As an application, it is also shown that certain known results on $(p;q)$-concave operators from Banach lattices can be lifted to a class of $(q;p)$-convex operators. In the third one, the space of multilinear mappings of virtually nuclear type $(r;r_1;...;r_n;s)$ between Banach spaces is introduced, some of its properties are described and its topological dual is characterized as a Banach space of multiple $(r';r'_1;...;r'_n;s')$-summing multilinear mappings and we conclure a same result between the topological dual of $(r;r_1;...;r_n;s)$-nuclear type operators and $(r';r'_1;...;r'_n;s')$-summing operators.

Key words and phrases : Banach lattice, Köthe space, Factorization of operators, Tensor norm, Nonlinear operator (sublinear quasilinear, multilinear), Positive (p,q)-summing operators, Positive strongly (p,q)-summing operators, nuclear multilinear operators (multiple summing), Pietsch-type theorem.

AMS Classification : [2010] 46A20, 46A32, 46B28, 46B42, 46B45, 47B10, 47H60.

0.4 Notation

p^*	L'exposant conjugué de p $\left(\text{i.e., } \frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1\right)$.
B_X	Boule unité fermée de l'espace X.
$B\left(B_{X^*}\right)$	σ-algèbre (tribu) de Borel engendrée par X^*.
$\mathbb{K}$	Corps des scalaires réels ou complexes.
$\sigma\left(X^*, X\right)$	Topologie faible-$*$ définie sur X^*.
$L_0\left(\Omega, \Sigma, \mu\right)$	Espace des classes d'équivalences des fcts mesurables sur Ω.
$X\left(\Omega, \Sigma, \mu\right)$	Espace de Köthe.
$l_p \otimes_\varepsilon X$	Le produit tensoriel injectif de l_p par X.
$l_p \otimes_\pi X$	Le produit tensoriel projectif de l_p par X.
$C\left(K\right)$	Espace des fcts continues sur un compact K à valeurs réelles.
$l_p\left(X\right)$	Espace des suites $\left(x_i\right)_{i=1}^{+\infty} \in X$ absolument p-sommables.
$\mathcal{L}\left(X, Y\right)$	Espace des opérateurs linéaires continus de X dans Y.
$\Pi_p\left(X, Y\right)$	Espace des opérateurs p-sommants de X dans Y.
$\mathcal{N}_p\left(X, Y\right)$	Espace des opérateurs p-nucléaires de X dans Y.
$\mathcal{D}_p\left(X, Y\right)$	Espace des opérateurs fortement p-sommants de X dans Y.
$\mathcal{L}\left({}^nX, Y\right)$	Espace des opérateurs n-linéaires continus de ${}^nX$ dans Y.
$\mathcal{L}_{as}^{(r;r_1,...,r_n;s)}\left(E_1, ..., E_n; F\right)$	Espace des opérateurs n-linéaires $\left(r; r_1, ..., r_n; s\right)$-sommants.
$\mathcal{N}_{(r;r_1,...,r_n;s)}\left(E_1, ..., E_n; F\right)$	Espace des opérateurs n-linéaires $\left(r; r_1, ..., r_n; s\right)$-nucléaires.

0.5 Introduction

Dans cette introduction, j'aimerais présenter les résultats de mon travail tels qu'ils sont apparus au cours de ces années de recherche, en insistant sur les motivations et les liens qui les unissent. J'espère que cela permettra d'entrer plus facilement dans la thèse.

Comme nombreux problèmes en analyse commutatif passent par le principe de factorisation où les études consacrées à ce domaine ont donné lieu à une littérature riche et vaste [43, 44, 45, 48, 56, 57, 58].

En ce qui concerne la théorie des opérateurs sommants, le théorème de Domination-Factorisation de Pietsch est une pierre angulaire [2, 20, 49, 51, 53]. Le concept des opérateurs fortement p-sommants $(1 < p \leq \infty)$ a été introduit par Cohen [27] comme caractérisation des conjugués des opérateurs p^*-sommants.

Cette thèse porte sur l'introduction de nouveaux concepts de sommabilité des opérateurs linéaires et multilinéaires. Nous établiront, d'une part, le lien entre les différents types de sommabilité introduits, et d'autre part, nous étudions les problèmes de factorisation des opérateurs sous linéaires à valeurs dans L_p par des espaces de Köthe et leurs problèmes dual ; ces derniers consistent en la factorisation des opérateurs sous linéaire de L_p dans un espace de Banach réticulé par des espaces de Köthe.

Ce travail est divisé en quatre chapitres qui sont les suivants :

Dans le premier chapitre, nous donnons un aperçu général des différentes notions nécessaires pour la compréhension du contenu de cette thèse, notamment, les espaces réticulés (Banach réticulés), en particulier les espaces de Köthe (i.e., un espace de Banach réticulé concret), les opérateurs positifs, les opérateurs réguliers et les opérateurs (p, q)-convexes (resp. (p, q)-concaves).

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à $\mathcal{SL}(X, Y)$, l'ensemble des opérateurs sous linéaires bornés d'un espace de Banach X dans un espace de Banach réticulé Y. Dans [45, Theorem 3.2.], Mezrag et Tiaiba ont étudié sous quelques conditions la factorisation d'un opérateur sous linéaire T d'un espace de Banach X dans $L_p(\Omega, \mu)$ par l'espace $L_q(\Omega, \mu)$, $1 \leq p < q \leq \infty$. Nous avons remarqué, avec les mêmes conditions, la possibilité de factoriser T à travers un espace de Köthe ainsi que le problème dual (i.e., la factorisation des opérateurs sous linéaires de $L_q(\Omega, \mu)$ dans un espace de Banach réticulé Y par un espace de Köthe). Et comme conséquence nous montrons le fameux théorème de Grothendieck toujours dans le cas sous linéaire. i.e., Grothendieck a exposé le résultat suivant : Tout opérateur linéaire $u : L_p(\Omega_1, \lambda) \longrightarrow L_q(\Omega_2, \mu)$ avec $0 \leq q \leq 2 \leq p$ se factorise comme suit :

$$\begin{array}{ccc} L_p(\Omega_1, \lambda) & \xrightarrow{u} & L_q(\Omega_2, \mu) \\ u_\delta \downarrow & & \uparrow u_\beta \\ L_2(\Omega_1, \lambda) & \xrightarrow{v} & L_2(\Omega_2, \mu) \end{array}$$

où $\beta \in L_s(\Omega_1, \lambda)$ et $\delta \in L_r(\Omega_2, \mu)$, $\frac{1}{2} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p}, \frac{1}{q} = \frac{1}{s} + \frac{1}{2}$. De notre part, nous avons généralisé ce résultat aux opérateurs sous linéaires mais la factorisation est par des espaces de Köthe).

Dans le troisième chapitre, nous introduisons et étudions la notion des opérateurs positifs fortement $(p; q)$-sommants. Une de nos contributions à travers ce chapitre consiste à clarifier la relation entre ces opérateurs introduits et les opérateurs positivement $(p; q)$-sommants. Plus précisément, si $p = q$, voir [18, 62], nous prouvons un nouveau type du théorème de Pietsch (les deux, Théorèmes de domination et de factorisation). Nous prouvons en particulier un nouveau théorème de factorisation pour la classe des opérateurs positivement p-sommants et nous donnons aussi de nouveaux théorèmes de domination et factorisation pour les opérateurs positifs fortement p-sommants. Comme application, nous avons également montré que certains résultats connus sur les opérateurs $(p; q)$-concaves de Banach réticulés peuvent être généralisés à la classe des opérateurs $(q; p)$-convexes.

La notion de la nucléarité a été présentée au début des années 50. Inspiré par la théorie des distributions, Grothendieck a traité des produits tensoriels pour les espaces localement convexes et il a découvert une version abstraite du théorème de noyau de Schwartz. Ceci explique l'origine du terme nucléaire.

La généralisation est élémentaire dans certains idéaux multilinéaires, comme nous avons fait dans le quatrième chapitre, l'idéal des opérateurs multilinéaires virtuellement $(r; r_1, ..., r_n; s)$-nucléaires est présenté, certaines de ses propriétés sont décrites et son dual topologique est caractérisé par une autre méthode comme étant un espace de Banach des opérateurs multiple $(r'; r'_1, ..., r'_n; s')$-sommants. En particulier, le dual topologique de l'espace des opérateurs $(r; r_1, ..., r_n; s)$-nucléaires étudié par Cerna [23] est isométriquement isomorphe à l'espace des opérateurs $(r'; r'_1, ..., r'_n; s')$-sommants introduit par Achour [1].

Liste des Publications :

1. D. Achour, A. Belacel. *Domination and factorization theorems for positive strongly p-summing operators.* Positivity 18 (2014) 785-804
2. D. Achour, A. Belacel. *Virtually* $(r; r_1, ..., r_n; s)$*-nuclear multilinear operators, à apparaître dans "Journal of Extracta Mathematicae".*

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous donnons les notations, les résultats élémentaires et les outils que nous aurons à utiliser dans cette thèse. Nous y introduisons les espaces de Banach classiques et les espaces de Banach réticulé (en particulier les espaces de Köthe). Nous présentons les concepts des opérateurs positifs, opérateurs réguliers et les opérateurs (p,q)-convexes (resp. (p,q)-concaves).

1.1 Rappels sur les espaces de Banach classiques

Les espaces de suites

Tout d'abord nous noterons $\mathbb{S}$ l'ensemble de toutes les suites $x = (x_n)_n$ réelles ou complexes. L'ensemble $\mathbb{S}$ est un espace vectoriel lorsqu'il est muni de la loi d'addition

$$x + y = (x_n)_n + (y_n)_n = (x_n + y_n)_n$$

et de la loi

$$\lambda x = \lambda(x_n)_n = (\lambda x_n)_n \text{ où } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Soit p un nombre réel tel que $1 \leq p < +\infty$, le sous espace vectoriel de $\mathbb{S}$ formé des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty$ muni de la norme

$$\left\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_p = (\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

est un espace de Banach qu'on désigne par $l_p(\mathbb{N})$ ou tout simplement par l_p. Le sous espace de $\mathbb{S}$ formé des suites bornées muni de la norme

$$\left\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

est un espace de Banach noté $l_\infty(\mathbb{N})$ ou tout simplement l_∞. On notera $c_0(\mathbb{N})$ ou c_0 le sous espace fermé de l_∞ des suites qui convergent vers zéro.

Les espaces de fonctions continues
Soit K un espace topologique compact. On désigne par $\mathcal{C}(K)$ l'espace de Banach des fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme

$$\|f\|_K = \sup_{t\in K} |f(t)|.$$

Les espaces de fonctions intégrables
Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré, f une fonction Σ-mesurable. On définit

$$\begin{array}{lcll} \|f\|_p & = & \left(\int_\Omega |f(t)|^p \, d\mu(t)\right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < +\infty, \\ \|f\|_\infty & = & \inf\{a > 0; \mu(f^{-1}(\mathbb{R}/[-a,a])) = 0\} & \text{si } p = +\infty, \\ & = & \sup_{t\in\Omega} ess\,|f(t)|. & \end{array}$$

Pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace de Banach $L_p(\mu) = L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ représente l'espace de toutes les classes d'équivalence, modulo l'égalité presque partout, des fonctions Σ-mesurables telles que $\|f\|_p < +\infty$. Σ est la tribu de Lebesgue et μ la mesure de Lebesgue.

1.2 Dualité - Topologies faible et faible-$*$

On notera par X et Y deux espaces de Banach et la boule unité de X sera notée B_X. On désigne par X^* le dual topologique de X : l'espace des formes linéaires continues sur X muni de la norme duale

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{x \in B_X} |f(x)|.$$

Les éléments de X^* seront le plus généralement notés par x^*. Pour $x^* \in X^*$ et $x \in X$ on désignera souvent $\langle x^*, x \rangle$ au lieu de $x^*(x)$.

On note par X^{**} le bidual de X ($X^{**} = (X^*)^*$).

Soit $x \in X$, l'application $x^* \longrightarrow \langle x^*, x \rangle$ de X^* dans $\mathbb{R}$ est une forme linéaire continue sur X^*, donc un élément de X^{**}.

Dual d'un opérateur continu. Soit $T : X \longrightarrow Y$ une application linéaire qu'on appellera souvent opérateur. Si l'opérateur $T : X \longrightarrow Y$ est continu ($T \in \mathcal{L}(X, Y)$), on appelle adjoint ou dual de T l'unique application linéaire continue $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ telle que :

$$\langle T^*(y^*), x \rangle = \langle y^*, T(x) \rangle, \forall x \in X, \forall y^* \in Y^*.$$

Le dual de T^* soit $T^{**} : X^{**} \longrightarrow Y^{**}$ s'appelle le bidual de T.

On dira que deux espaces de Banach X, Y sont isomorphes ($X \sim Y$) si il existe un opérateur invertible T (dit isomorphisme) de X dans Y. Un opérateur linéaire continu $T : X \longrightarrow Y$ telle que $\|T(x)\| \geq c\|x\|$ pour quelques $c > 0$ et tout $x \in X$ est dit isomorphisme.

Une isométrie est un opérateur linéaire continu $I : X \longrightarrow Y$ telle que $\|I(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in X$. Deux espaces de Banach X, Y sont isométriques ($X \simeq Y$) si il existe une isométrie entre X et Y.

L'injection canonique $J_X : X \longrightarrow X^{**}$ qui à tout $x \in X$ associe $J_X(x)$ telle que

$$\langle J_X(x), x^* \rangle = \langle x^*, x \rangle, \forall x^* \in X^*$$

est une isométrie qui, en général, n'est pas surjective. A l'aide de J_X on peut toujours identifier X à un sous espace de X^{**}.

Topologies faible et faible-$*$

Si X un espace de Banach, sa *topologie faible* $\sigma(X, X^*)$, plus simplement notée w, est la topologie la moins fine pour laquelle toutes les formes linéaires continues (pour la norme) $\varphi \in X^*$ restent continues.

Sur le dual X^*, outre la topologie de la norme $\|.\|_{X^*}$ et la topologie faible $\sigma(X^*, X^{**})$, on peut définir la *topologie préfaible*, ou faible-$*$, notée aussi $\sigma(X^*, X)$ qui est la topologie la moins fine rendant continues toutes les applications linéaires $(\varphi_x)_{x\in X}$ où

$$\begin{array}{llll} \varphi_x : & X^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \xi & \longrightarrow & \varphi_x(\xi) = \xi(x). \end{array}$$

pour tout $x \in X$.

Théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki. La boule unité B_{X^*} de X^* munie de la topologie faible-$*$ est compacte.

1.3 Banach réticulés

Définition 1.3.1. Un ordre sur un ensemble non-vide M est la relation $\leq$ tels que pour tous $x, y, z \in M$ nous avons :
(1) $x \leq x$,
(2) $x \leq y$ et $y \leq x$ implique $x = y$,
(3) $x \leq y$ et $y \leq z$ implique $x \leq z$.

Nous utilisons $y \geq x$ comme synonyme de $x \leq y$. Si A est un sous-ensemble non-vide de M, alors x est un majorant de A si $a \leq x$ pour tout $a \in A$. Dans ce cas, on dit que A est majoré. on dit aussi que x est une borne supérieure "supremum", si pour tout autre majorant y, nous avons $x \leq y$. Les termes suivants minorant, borne inférieure "infimum" et minoré sont définis d'une manière analogue. L'ensemble qui est à la fois majoré et minoré est appelé ensemble borné pour l'ordre.

Un ensemble réticulé est un ensemble non vide M avec un ordre $\leq$ tel que chaque paire d'éléments $x, y \in M$ possède à la fois un supremum $x \vee y$ et un infimum $x \wedge y$. La borne supérieure d'un sous-ensemble A de M, s'il existe, est notée par l'une quelconque des notations $sup(A), \vee A,\ sup\{a : a \in A\}, \vee\{a : a \in A\}$ ou $\vee_{a\in A} a$.

Définition 1.3.2. Un espace vectoriel ordonné est un espace vectoriel réel E qui est aussi un espace ordonné où les structures linéaires et de l'ordre reliéent par les implications :
(1) Si $x, y, z \in E$ et $x \leq y$, alors $x + z \leq y + z$,
(2) Si $x, y \in E, x \leq y$ et $0 \leq \alpha \in \mathbb{R}$, alors $\alpha x \leq \alpha y$.

L'ensemble $E_+ = \{x \in E : x \geq 0\}$ que l'on appelle le cône positif dans E et ses éléments sont appelés positifs (au lieu de non-négatifs).

Un espace vectoriel ordonné qui est aussi un réticulé est un espace vectoriel réticulé. Comme 0 est un élément assez particulier d'un espace vectoriel, il ya quelques notations spéciales associées. La partie positive de x est $x^+ = x \vee 0$, alors que la partie négative (il est positif!) est $x^- = (-x) \vee 0$. Le module de x est $|x| = x \vee (-x)$. Nous disons que $x, y \in E$ sont disjoints, on écrit $x \perp y$, si $|x| \wedge |y| = 0$. Si $A \subset E$ alors $A^d = \{y : y \perp a, \forall a \in A\}$.

Remarque 1.3.3. Il est élémentaire, mais souvent utile, que x^+ et x^- sont disjoints et que $x = x^+ - x^-$ et $|x| = x^+ + x^-$.

Exemple 1.3.4. L'exemple le plus évident d'un vectoriel réticulé est les réels avec toutes les opérations habituelles. L'ordre standard sur $\mathbb{R}^n$ est $(x_1, x_2, ..., x_n) \leq (y_1, y_2, ..., y_n)$ c-à-d $x_k \leq y_k$ pour $k = 1, 2, ..., n$. Cet ordre rend $\mathbb{R}^n$ à un espace vectoriel réticulé dans lequel $(x_k) \vee (y_k) = (x_k \vee y_k)$ et $(x_k) \wedge (y_k) = (x_k \wedge y_k)$. Donc, $(x_k)^+ = (x_k^+), (x_k)^- = (x_k^-)$ et $|(x_k)| = (|x_k|)$.

Soient L un ensemble non vide et E l'espace de toutes les fonctions à valeurs réelles sur L ordonné par l'ordre ponctuelle $f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in L$. Nous avons donc un espace vectoriel ordonné. Il est clair que si f et g sont des fonctions à valeurs réelles sur L, alors même que les fonctions $\varphi(x) = f(x) \vee g(x)$ et $\psi(x) = f(x) \wedge g(x)$ pour tout $x \in L$ et il est clair que $\varphi = f \vee g$ et que $\psi = f \wedge g$, de telle sorte que E soit un espace vectoriel réticulé.

Définition 1.3.5. Un sous-ensemble A d'un réticulé M est un sous-réticulé si $x, y \in A$ implique que $x \vee y \in A$, où ces opérations sont calculés dans M. Un sous-réticulé d'un espace vectoriel réticulé est simplement un sous-espace vectoriel, qui est aussi un sous-réticulé.

Exemple 1.3.6. c_0 est un sous espace réticulé de l_∞.

Définition 1.3.7. L'idéal J dans un espace vectoriel réticulé E est un sous espace vectoriel tels que $y \in J, x \in E$ et $|x| \leq |y|$ ainsi implique que $x \in J$.

Exemple 1.3.8. Dans l_∞, c_0 est un idéal.

Définition 1.3.9. L'idéal principal dans E est un idéal J qui est engendré par un seul élément. i.e. il existe $e \in E_+$ tels que $J = \{x : |x| \leq ne$ pour quelque $n \in \mathbb{N}\} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} [-ne, ne]$, qui est souvent désigné par E_e. Il peut arriver qu'il y ait $e \in E$ tels que $E_e = E$, dont e est appelé une unité forte de l'ordre pour E.

Définition 1.3.10. Un espace normé réticulé est un espace normé qui est aussi réticulé avec $|x| \leq |y| \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|$. Un espace réticulé normé qui est aussi un espace de Banach est appelé un espace de Banach réticulé.

Exemple 1.3.11. Tous les espaces de Banach classiques, $l_\infty, c_0, C(K), L_p(\mu)$, sont des Banach réticulé pour leurs normes usuelles et l'ordre ponctuelle.

Le dual E^* de Banach réticulé E est complètement Banach réticulé muni par l'ordre naturel

$$x_1^* \leq x_2^* \Longleftrightarrow \langle x_1^*, x \rangle \leq \langle x_2^*, x \rangle \,, \forall x \in E_+ \tag{1.1}$$

L'injection canonique $J_E : E \longrightarrow E^{**}$ tel que $\langle J_E(x), x^* \rangle = \langle x, x^* \rangle$ est une isométrie de E dans un sous espace de E^{**} (voir [39, Proposition 1.a.2]). Si on considère E comme un sous réticulé de E^{**} nous trouvons pour $x_1, x_2 \in E$

$$x_1 \leq x_2 \Longleftrightarrow \langle x^*, x_1 \rangle \leq \langle x^*, x_2 \rangle \,, \forall x^* \in E_+^*. \tag{1.2}$$

où $\langle ., . \rangle$ est le crochet de dualité.

1.4 Espaces de Köthe

Définitions et propriétés

On commence cette section par donner l'espace $L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ qui désigne l'espace des classes d'équivalences des fonctions mesurables sur Ω à valeurs réelles muni par la topologie de la convergence en mesure.
On dit qu'une suite $(f_n)_n$ est convergente en mesure vers une fonction f si,

$$\mu\left(\left\{\omega \in \Omega : \|f_n - f\|_\mu > \epsilon\right\}\right) \longrightarrow 0 \text{ pour tout } \epsilon > 0.$$

et

$$\|f\|_\mu = \inf\left\{\lambda > 0 : \mu\left(\{\omega \in \Omega : |f(\omega)| > \lambda\}\right) \leq \lambda\right\}.$$

Définition 1.4.1. Soit (Ω, Σ, μ) un espace mésuré complet σ-fini. Un espace de Banach $L \subset L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ des fonctions localement intégrables sur Ω à valeurs réelles, est un espace de Köthe si,
1) si $|f(\omega)| \leq |g(\omega)|$ p.p. avec $f \in L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ et $g \in L$, alors $f \in L$ et $\|f\|_L \leq \|g\|_L$.
2) pour chaque $A \in \Sigma$ avec $\mu(A) < \infty$ la fonction caractéristique χ_A de A appartient à L. (c.à.d. l'espace L contient toutes les fonctions caractéristiques de tout sous-ensemble mesurable A de Ω).

Propriétés 1.4.2. L'application $\|.\| : L_0(\mu) \longrightarrow [0, \infty]$ est de Köthe si :

$$\begin{array}{lll} i) & f \in L_0(\mu), & \Longrightarrow \ \|f\| = 0 \Longleftrightarrow f = 0, \\ ii) & f \in L_0(\mu) \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}, & \Longrightarrow \ \|\alpha f\| = |\alpha| \, \|f\|, \\ iii) & f, g \in L_0(\mu), & \Longrightarrow \ \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|, \\ iv) & f, g \in L_0(\mu), & \Longrightarrow \ |f| \leq |g| \Longrightarrow \|f\| \leq \|g\|, \\ v) & f_n, f \in L_0(\mu), & \Longrightarrow \ |f_n| \nearrow |f| \Longrightarrow \|f_n\| \longrightarrow \|f\|. \end{array}$$

Remarque 1.4.3. L'espace de Köthe donc, c'est l'espace $(L, \|.\|)$, où $\|.\|$ est l'application de Köthe, et

$$L = \{f \in L_0(\mu) : \|f\| < \infty\}.$$

L'hypothèse que toute $f \in L$ est localement intégrable implique, pour tout $A \in \Sigma$, l'opérateur

$$\Phi : f \longrightarrow \int_\Omega f(\omega)\chi_A(\omega)\, d\mu$$

est bien défini et en plus continu (i.e. $\Phi \in L^*$).

Exemple : les espaces $L_p(m), 1 \leq p < \infty$

Soient X un espace de Banach sur $\mathbb{K}$, (Ω, Σ) un espace mesurable et $m : \Sigma \longrightarrow X$ une mesure dénombrable additive vectorielle. Alors, pour tout $x^* \in X^*$, nous avons la mesure scalaire

$$\begin{array}{llll} \mu_{x^*} : & \Sigma & \longrightarrow & [0, +\infty) \\ & A & \longmapsto & \langle x^*, m(A) \rangle \end{array}$$

Nous la noterons $\langle x^*, m \rangle$ et sa variation $|\langle x^*, m \rangle|$. La semivariation de m est donnée par

$$\|m\|(A) = \sup\{|\langle x^*, m\rangle|(A) : x^* \in B_{X^*}, A \in \Sigma\}$$

où $\|m\|(\Omega)$ est fini. Si $\|m\|(A) = 0$, on dira que A est μ-nul. On dira que $\mu : \Sigma \longrightarrow [0, +\infty)$ est la mesure de Rybakov pour m. (Pour plus de détails consulter [31]).

Définition 1.4.4. Soient $1 \leq p < \infty$ et m une mesure dénombrable additive vectorielle. On dit que la fonction réelle mesurable f défini sur Ω est p-intégrable par rapport à m si $|f|^p$ est m-intégrable.

On peut définir une norme sur l'espace vectoriel des fonctions simples (plus précisément, classe d'équivalence des fonctions qui sont égales $\|m\|$-$p.p$) par :

$$\|f\|_{p,m} = \sup\left\{\left(\int_\Omega |f|^p \, d\,|\langle x^*, m\rangle|\right)^{1/p} : x^* \in B_{X^*}\right\}.$$

Cette norme est équivalente à la norme définie par :

$$|||f|||_{p,m} = \sup_{A\in\Sigma} \left\|\int_A |f|^p \, dm\right\|^{1/p}.$$

Définition 1.4.5. $L_p(m)$ désigne l'ensemble des (classes d'équivalences) des fonctions p-intégrables par rapport à m muni de la topologie donnée par $\|\cdot\|_{p,m}$.

Remarque 1.4.6. On remarque que, si $p > 1$, toute fonction de $L_p(m)$ appartient à $L_1(m)$. En effet, on définit pour la fonction $f \in L_p(m)$ l'ensemble $E(f) = \{\omega \in \Omega; |f(\omega)| \leq 1\}$. Il est clair que $\chi_{E(f)} \in L_1(m)$ et comme $|f|^p + \chi_{E(f)} \in L_1(m)$. Comme $|f| \leq |f|^p + \chi_{E(f)}$, ce qui implique que $f \in L_1(m)$ d'après la propriété lattice de $L_1(m)$.

Maintenant, on donne des résultats essentiels sur la structure lattice des espaces des fonctions p-intégrables par rapport à la mesure vectorielle.

Proposition 1.4.7 [58]. *Soient $p \geq 1$ et m une mesure vectorielle. Alors*
1) *$L_p(m)$ est un espace de Banach et l'espace vectoriel des (classes d'équivalences de) fonctions simples est dense dans $L_p(m)$.*
2) *Les espaces $L_p(m)$, $1 < p < \infty$ sont des espaces de Köthe.*

Démonstration. 2) Soit μ la mesure de Rybakov. On va démontrer que $L_p(m)$ est un espace de Köthe sur μ. Supposons que f est une fonction μ-mesurable et $g \in L_p(m)$ telles que $|f| \leq |g|$ μ-p.p. Alors $|g|^p \in L_1(m)$ et comme $|f|^p \leq |g|^p$, on obtient $|f|^p \in L_1(m)$. En plus,

$$\int_\Omega |f|^p \, d\left|\langle x^*, m\rangle\right| \leq \int_\Omega |g|^p \, d\left|\langle x^*, m\rangle\right|$$

pour tout $x^* \in X^*$, c'est-à-dire,

$$\|f\|_{p,m} \leq \|g\|_{p,m}.$$

Pour tout $A \in \Sigma$, nous avons $\chi_A \in L_p(m)$, et $\|\chi_A\|_{p,m}$ est équivalente à $\|m\|^p(A)$.

Dual d'un espace de Köthe

En général, toute fonction mesurable g sur Ω, telle que $fg \in L_1(\mu)$ pour toute $f \in X$, définie un élément x'_g dans X^* par,

$$x'_g(f) = \int_\Omega f(\omega)\, g(\omega)\, d\mu.$$

Définition 1.4.8. On définit l'espace dual d'un espace de Köthe L comme suit :

$$L' = \left\{ g \in L_0(\mu) \,/\, \|g\|_{L'} = \sup_{\|f\|_L \leq 1} \left| \int_\Omega fg d\mu \right| < \infty \right\}.$$

Proposition 1.4.9. *Soit L un espace de Köthe sur (Ω, Σ, μ). Alors :*
a) $(L', \|.\|_{L'})$ est un espace de Köthe sur (Ω, Σ, μ).
b) $\|f\|_L = \sup_{\|g\|_{L'} \leq 1} \left| \int_\Omega fg d\mu \right|$ pour tout $f \in L$.
c) L' est un idéal de L^*.
d) Tout espace de Köthe est σ-complet pour l'ordre.

Définition 1.4.10. Un espace de Köthe L est continu pour l'ordre si $f_n \in L$ avec $f_n \searrow 0$ p.p. Alors $\|f_n\| \searrow 0$.

Proposition 1.4.11 [39, Proposition 1.a.8]. *Soit X un espace de Banach. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes.*
(a) L'espace X est σ-complètement réticulé et σ-continu pour l'ordre.
(b) Toute suite bornée pour l'ordre et croissante dans X converge fortement.
(c) L'espace X est continu pour l'ordre.
(d) L'espace X est continu pour l'ordre et complètement réticulé.

Proposition 1.4.12. *Soit L un espace de Köthe alors,*
1)

$$(L \text{ est } \sigma\text{-continu pour l'ordre}) \Longleftrightarrow (L'(\mu) = L^*(\mu)).$$

2) *L' est un sous espace normant de L^* si et seulement si $(f_n)_{n\ \geq 1}$ et f sont des éléments positifs de L et $f_n(\omega) \nearrow f(\omega)$ p.p. on a $\|f_n\| \longrightarrow \|f\|$.*

Exemple 1.4.13. Un exemple typique d'un espace de Köthe L tels que $L^* \neq L'$, mais L' est normant, est $L_\infty(\mu)$.

Pour tout espace de Köthe L, on peut définir l'espace L'' (le bidual de Köthe).

Remarque 1.4.14. *L'espace $(L'', \|.\|_{L''})$ est un espace de Köthe (*voir [39, Proposition 1.2.2.2]).

Proposition 1.4.15. *Soit L un espace de Köthe. L'espace L coïncide avec L'' si :*

$$f_n(\omega) \nearrow f(\omega) \text{ p.p. } (f_n)_{n\geq 1} \subset L,\ f_n(\omega) \geq 0 \text{ p.p. et } \sup_n \|f_n\| < \infty \Longrightarrow f \in L$$
$$\text{et } \lim_n \|f_n\| = \|f\|.$$

Proposition 1.4.16. *Soit L un espace de Köthe alors,*

$$f_n(\omega) \longrightarrow f(\omega) \text{ p.p. } (f_n)_{n\geq 1} \subset L \text{ et } \sup_n \|f_n\| < \infty \Longrightarrow f \in L''.$$

Remarque 1.4.17. Tout espace de Köthe de fonctions est un Banach réticulé avec l'ordre ($f \geq 0$ si $f(w) \geq 0$ μ.*p.p.*). Pour des détailles plus sur les espaces de Köthe, le lecture intéressé pourra consulter [39].

1.5 Opérateurs réguliers

Il existe différentes catégories d'applications linéaires entre les espaces vectoriels réticulés qui sont naturelles à étudier.

Définition 1.5.1. Si E et F sont des espaces vectoriels réticulés,
(1) $T : E \to F$ est positif si $x \geq 0 \Rightarrow Tx \geq 0$. Les opérateurs positifs, $(T(E_+) \subset F_+)$, sont fermés par l'addition et la multiplication par des réels positifs mais pas sous la multiplication par réels négatifs. L'ensemble de tous ces opérateurs est noté $\mathcal{L}_+(E, F)$.

(2) L'espace engendré par les opérateurs positifs est l'espace vectoriel des opérateurs réguliers, noté $\mathcal{L}^r(E, F)$. Ceci est ordonné par la relation $S \geq T \Leftrightarrow S - T \in \mathcal{L}_+(E, F)$. Cette définition nous donne $\mathcal{L}^r_+(E, F) = \mathcal{L}_+(E, F)$.

Pour tout $T \in \mathcal{L}^r(E, F)$, la norme de T est :

$$\|T\|_r := \inf \{\|S\| : S \in \mathcal{L}_+(E, F), |T(x)| \leq S(x), x \in E_+\}.$$

Alors, $(\mathcal{L}^r(E, F), \|.\|_r)$ est un espace de Banach. Si $F = \mathbb{R}$, alors $\mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = \mathcal{L}^r(E, \mathbb{R})$ (Pour plus de détails voir [46, Section 1.3]).

(3) Les opérateurs bornés pour l'ordre sont ceux pour lesquels l'image de chaque sous ensemble borné pour l'ordre de E est un sous-ensemble borné pour l'ordre de F, lequel est indiqué par $L^b(E, F)$. Il est ordonné de la même manière que $\mathcal{L}^r(E, F)$.

Tout opérateur régulier doit être borné pour l'ordre, mais l'inverse est faux.
Ces formules T^+, T^- et $|T|$ sont connues comme les formules de Riesz-Kantorovich où $T^+ = T \vee 0, T^- = T \wedge 0$ et $|T| = T \vee (-T)$.

Ils existent certains types très particuliers de l'opérateur qui entrent en action dans ce domaine.

Théorème 1.5.2 [46, Proposition 1.3.5.]. *Si E est un Banach réticulé et F un espace normé réticulé alors tout opérateur régulier de E dans F est borné pour la norme.*

1.6 Opérateurs (q,p)-convexes et (p,q)-concaves

Soient E, F deux espaces de Banach réticulé et X, Y deux espaces de Banach.

Soient $y_1, ..., y_n$ dans E, nous utiliserons les notations suivantes : par le calcul fonctionnel de Krivine [35],

$(\sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \in E$ et

$$\begin{cases} (\sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|^p)^{\frac{1}{p}} = \sup \left\{ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i y_i : a_i \in \mathbb{R}, \sum\limits_{i=1}^{n} |a_i|^{p^*} \leq 1 \right\} \text{ pour } 1 \leq p < \infty, \\ (\sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|^p)^{\frac{1}{p}} = \sup\limits_{1 \leq i \leq n} |y_i| \text{ pour } p = \infty. \end{cases}$$

Définition 1.6.1

a) L'opérateur linéaire $T : X \longrightarrow F$ est (q,p)-convexe (i.e., $T \in \mathcal{C}_{(q,p)}^{vex}(X,F)$), si il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |T(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\| \leq M \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^q \right)^{\frac{1}{q}} ; 1 \leq q \leq p < \infty$$

et

$$\left\| \sup_{1 \leq i \leq n} |T(x_i)| \right\| \leq M \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|, \text{ si } p = q = \infty,$$

pour toute suite $(x_i)_{i=1}^{n} \subset X$. La plus petite constante M est notée par $\mathcal{C}_{(q,p)}^{vex}(T)$.

b) L'opérateur linéaire $T : E \longrightarrow Y$ est (p,q)-concave (i.e., $T \in \mathcal{C}_{(p,q)}^{cav}(E,Y)$), si il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq M \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\| ; \text{ si } 1 \leq q \leq p < \infty,$$

et

$$\max_{1 \leq i \leq n} \|T(x_i)\| \leq M \left\| \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i| \right\|, \text{ si } p = q = \infty,$$

pour toute suite $(x_i)_{i=1}^n \subset E$. La plus petite constante M est notée par $\mathcal{C}_{(p,q)}^{cav}(T)$.
Si $p = q$, on obtient les opérateurs p-convexes (resp. les opérateurs p-concaves).
c) Un espace de Banach X est p-convexe (resp. p-concave) si id_X est p-convexe (resp. p-concave).

Exemple 1.6.2. Tout espace de Banach est 1-convexe et ∞-concave. la p-convexité et la p-concavité pour $1 \le p \le \infty$ sont décroissante et croissante avec p, respectivement (voir [39]). Par exemple L_p pour $1 \le p < \infty$ est p-convexe et p-concave, et $\mathcal{C}_p^{cav}(L_p) = \mathcal{C}_p^{vex}(L_p) = 1$.

En utilisant certains espaces auxiliaires pour interpréter les deux notions p-concave et p-convexe.

Rappelons maintenant les définitions des espaces $c_0(X), l_p(X), 1 \le p \le \infty$. Ces espaces consistent par tous les suites $(x_i)_{i=1}^\infty$ des éléments de X tels que $(\|x_i\|)_{i=1}^\infty$ appartient à c_0, respectivement l_p.

Soit $\widetilde{F(l_p)}$ l'espace des suites $(x_i)_{i=1}^\infty$ des éléments de F où

$$\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{\widetilde{F(l_p)}} = \sup_n \left\| \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\| ; \text{ si } 1 \le p < \infty$$

et

$$\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{\widetilde{F(l_\infty)}} = \sup_n \left\| \sup_{1 \le i \le n} |x_i| \right\| ; \text{ si } p = \infty.$$

Le sous espace fermé de $\widetilde{F(l_p)}$, engendré par les suites $(x_i)_{i=1}^\infty$ qui sont éventuellement 0, est noté par $F(l_p)$. $F(l_\infty)$ est un sous espace de $\widetilde{F(l_\infty)}$, on peut le noter par $F(c_0)$.

L'opérateur T de X dans F est (q,p)-convexe, $1 \le q \le p \le \infty$, si et seulement si l'application $T_1 : l_q(X) \longrightarrow F(l_p)$, défini par $T_1((x_i)_{i=1}^\infty) = (T(x_i))_{i=1}^\infty$, est bornée, avec $\|T_1\| = \mathcal{C}_{(q,p)}^{vex}(T)$. L'opérateur T est ∞-convexe si et seulement si T_1 est borné de $c_0(X)$ dans $F(c_0)$. De la même façon, on dit qu'un opérateur $T : F \longrightarrow X$ est (p,q)-concave, $1 \le q \le p \le \infty$, si et seulement si l'application $T_2 : F(l_q) \longrightarrow l_p(X)$, définie par $T_2((x_i)_{i=1}^\infty) =$

$(T(x_i))_{i=1}^{\infty}$, est bornée, en plus $\|T_2\| = \mathcal{C}_{(p,q)}^{cav}(T)$. On remarque que si T est (p,q)-concave alors on peut définir T_2 comme une application de $\widetilde{F(l_q)}$ dans $l_p(X)$.

Théorème 1.6.3 [30, Théorème 16.21]. *Soient* $1 \leq q \leq p \leq +\infty$.
i) L'opérateur $T : X \longrightarrow F$ *est dans* $\mathcal{C}_{(q,p)}^{vex}(X;F)$ *si et seulement si* $T^* \in \mathcal{C}_{(q^*,p^*)}^{cav}(F^*;X^*)$.
ii) L'opérateur $S : E \longrightarrow Y$ *appartient à* $\mathcal{C}_{(p,q)}^{cav}(E;Y)$ *si et seulement si* $S^* \in \mathcal{C}_{(p^*,q^*)}^{vex}(Y^*;E^*)$.

Corollaire 1.6.4. $T \in \mathcal{C}_{(q,p)}^{vex}(X;F)$ *si et seulement si* $T^{**} \in \mathcal{C}_{(q,p)}^{vex}(X^{**};F^{**})$.

Chapitre 2

Factorisation des opérateurs sous-linéaires à travers un espace de Köthe

Ce chapitre sera consacré à l'étude de la factorisation des opérateurs sous linéaires à travers un espace de Köthe, pour cela le lecteur intéressé pourra consulter [14, 39, 59]. Nombreux problèmes en analyse commutatif passent par le principe de factorisation. Les études consacrées à ce domaine ont donné lieu à une littérature vaste et riche qu'on citera au fur et à mesure dans notre travail.

Dans sa thèse [43], Maurey a donné une condition nécessaire et suffisante pour que l'opérateur $u : X \longrightarrow L_p(\Omega, \mu)$; (Ω, μ) un espace mesuré quelconque ; admette la factorisation

$$X \quad \xrightarrow{\widetilde{u}} \quad L_q(\Omega, \mu) \quad \xrightarrow{T_g} \quad L_p(\Omega, \mu)$$

où $\widetilde{u}$ est un opérateur linéaire continu et T_g l'opérateur de multiplication par une fonction $g \in L_s(\Omega, \mu)$ et p, q, s tels que $0 < p \leq q \leq \infty$ avec $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Il a traité aussi le problème dual (i.e., la factorisation des opérateurs linéaires de $L_s(\Omega, \mu)$ dans un espace de Banach Y par $L_q(\Omega, \mu)$, pour $1 \leq q < s < \infty$.

Grothendieck a établi dans [60, Lecture 13, p60] que tout opérateur linéaire continu $L_p(\Omega_1, \lambda) \longrightarrow L_q(\Omega_2, \mu)$ admet la factorisation

$$\begin{array}{ccc} L_p(\Omega_1, \lambda) & \xrightarrow{u} & L_q(\Omega_2, \mu) \\ u_\delta \downarrow & & \uparrow u_\beta \\ L_2(\Omega_1, \lambda) & \xrightarrow{v} & L_2(\Omega_2, \mu) \end{array}$$

où $\beta \in L_s(\Omega_1, \lambda), \delta \in L_r(\Omega_2, \mu)$ et $\frac{1}{2} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p}, \frac{1}{q} = \frac{1}{s} + \frac{1}{2}$.

Dans [56] Reisner a étudié la factorisation d'un opérateur de multiplication

$$T_g : L_q(\Omega, \mu) \quad \longrightarrow \quad L_p(\Omega, \mu)$$

par un espace de Köthe L, tels que $1 \leq p < q \leq \infty$ et $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$.

Dans [32, Theorem 4.2] García-Cuerva et Rubio de Francia ont traité aussi la généralisation du théorème de factorisation de Maurey aux cas des opérateurs quasi linéaires. Par une toute autre méthode, Mezrag et Tiaiba dans [45] ont généralisé ce type de factorisations aux opérateurs sous linéaires. Dans le même cercle d'idées, on essaiera dans ce chapitre de généraliser les théorèmes de factorisation de Maurey et le théorème de Grothendieck aux cas des opérateurs sous linéaires qui se factorisent par un espace de Köthe.

2.1 Les opérateurs sous-linéaires

On donne un aperçu général sur les opérateurs sous linéaires et quelques propriétés utiles. Pour plus de détails sur les opérateurs sous linéaires nous renvoyons le lecteur aux références [2, 7, 8, 12].

Définition 2.1.1. Soit T une application d'un espace de Banach X dans un espace de Banach réticulé E. On dira que T est sous linéaire si, pour tous $x, y \in X$ et $\lambda \in \mathbb{R}^+$ on a :

$$\begin{cases} \text{a- } T(\lambda x) = \lambda T(x) & \text{(positivement homogène),} \\ \text{b- } T(x+y) \leq T(x) + T(y) & \text{(sous-additive).} \end{cases}$$

Rappelons aussi qu'un opérateur est quasi linéaire si

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+,\ \forall x \in X & |T(\lambda x)| & = & |\lambda| \, |T(x)| \, . \\ \text{(ii)} \quad \forall x \in X,\ \forall y \in X & |T(x+y)| & \leq & |T(x)| + |T(y)| \, . \end{cases}$$

Notons que si T est quasi linéaire alors $|T|$ est sous linéaire.

On pose

$$L(X, Y) = \{\textit{l'ensemble des opérateurs linéaires } u : X \longrightarrow Y, Y \text{ Banach}\}$$

et

$$SL(X, E) = \{\textit{l'ensemble des opérateurs sous-linéaires } T : X \longrightarrow E\}$$

qu'on le munit de l'ordre induit par E

$$T_1 \leq T_2 \Longleftrightarrow T_1(x) \leq T_2(x), \quad \forall x \in X. \tag{2.1}$$

On note

$$\nabla T = \{u \in L(X,Y) : u \leq T \text{ (i.e., } \forall x \in X,\ u(x) \leq T(x)\}.$$

Comme conséquence immédiate

$$u \leq T \Longleftrightarrow -T(-x) \leq u(x) \leq T(x), \quad \forall x \in X.$$

Remarque 2.1.2. La somme de deux opérateurs sous linéaires est un opérateur sous linéaire et la multiplication par un nombre positif donne aussi un opérateur sous linéaire.

Proposition 2.1.3. *Soit T un opérateur sous linéaire d'un espace de Banach X dans un espace de Banach réticulé E. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(1) *T continu,*
(2) *T continu en 0,*
(3) *Il existe $C > 0$ tel que $\forall x \in X, \|T(x)\| \leq C\|x\|$.*
Dans ce cas, on dira que T est borné et on pose

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \left\{ \|T(x)\| : \|x\|_{B_X} = 1 \right\}.$$

On note

$$\mathcal{L}(X,Y) = \{\text{l'ensemble des opérateurs linéaires bornés } T : X \longrightarrow Y\}$$

où Y est un espace de Banach, et

$$\mathcal{SL}(X,E) = \{\text{l'ensemble des opérateurs sous linéaires bornés } T : X \longrightarrow E\}.$$

Si X est réticulé, on dira qu'un opérateur linéaire $u : X \to E$ est positive sii $u(x) \geq 0, \quad \forall x \geq 0$.

Remarque 2.1.4. Tout opérateur linéaire positive est croissant. Et réciproquement.

Théorème 2.1.5. (Théorème de composition). *Soient X, Y, E et F des espaces vectoriels dont E, F réticulés.*
a) Soient u dans $\mathcal{L}(X,Y)$ et T dans $\mathcal{SL}(Y,F)$. Alors,

$$T \circ u \in \mathcal{SL}(X,F);$$

b) Soient T dans $\mathcal{SL}(X,E)$ et u dans $\mathcal{L}(E,F)$ croissant. Alors,

$$u \circ T \in \mathcal{SL}(X,F).$$

2.2 Factorisation d'un opérateur sous-linéaire par un espace de Köthe

La factorisation d'un opérateur (sous-) linéaire est largement étudiée dans la littérature, nous citons à titre d'exemple les références [45, 55, 56, 57]. Dans cette même direction, nous nous allons présenter un résultat de factorisation d'un opérateur sous linéaire à travers un espace de Köthe. Ce résultat généralise celui établi par Mezrag-Tiaiba qui en lui même constitue une extension du travail de Maurey. A présent, nous allons donner la définition d'un opérateur sous linéaire factorisable à droite (et à gauche) à travers un espace de Köthe.

Définition 2.2.1
a) On dit qu'un opérateur sous linéaire continu $T : X \longrightarrow E$ est factorisable à droite par un espace de Köthe si il existe un espace de Köthe L, un opérateur sous linéaire $S : X \longrightarrow L$ et un opérateur linéaire positif $v : L \longrightarrow E$ tels que $T = v \circ S$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & E \\ & S \searrow & \uparrow v \\ & & L \end{array}$$

Pour un tel T, on pose :

$$\rho(T) = \inf \{\|S\| \, \|v\| \, ; T = v \circ S, \text{ avec } S : X \longrightarrow L, v : L \longrightarrow E, L \text{ Köthe}\} .$$

b) On dit qu'un opérateur sous linéaire continu $T : X \longrightarrow E$ est factorisable à gauche par un espace de Köthe si il existe un espace de Köthe L, un opérateur linéaire $w : X \longrightarrow L$ et un opérateur sous linéaire $R : L \longrightarrow E$ tels que $T = R \circ w$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & E \\ & w \searrow & \uparrow R \\ & & L \end{array}$$

Pour un tel T, on pose :

$$\rho(T) = \inf \{\|R\| \, \|w\| \, ; T = R \circ w, \text{ avec } w : X \longrightarrow L, R : L \longrightarrow E, L \text{ Köthe}\} .$$

Le théorème suivant dû à [56, Theorem 1, p. 241], nous sera très utile pour la suite.

Soit L un espace de Köthe sur un espace mesuré σ-fini (Ω, Σ, μ).

Théorème 2.2.2 (Théorème de factorisation de Reisner). *Soient* $1 \leq p < q \leq \infty$ *et* s *défini par* $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. *$L$ est p-convexe et q-concave si, et seulement si, il existe $K > 0$ de sorte que pour tout $g \in L_s(\mu)$ l'opérateur de multiplication T_g(*i.e., $T_g(f) = gf$*) admet une factorisation comme composition de deux opérateurs de multiplication T_{h_2} et T_{h_1} de la forme*

$$\begin{array}{ccc} L_q(\Omega,\mu) & \xrightarrow{T_g} & L_p(\Omega,\mu) \\ T_{h_1} \searrow & & \uparrow T_{h_2} \\ & & L \end{array}$$

avec $\|T_{h_2}\| \|T_{h_1}\| \leq K$. En plus, si $\mathcal{C}_p^{cav}(L)$ et $\mathcal{C}_p^{vex}(L)$ sont donnés, nous pouvons choisir $K = (1+\epsilon)\mathcal{C}_p^{cav}(L)\mathcal{C}_p^{vex}(L)$ avec arbitrairement petit $\epsilon > 0$. Si, d'autre part, K est donné alors $\mathcal{C}_p^{cav}(L)\mathcal{C}_p^{vex}(L) \leq K^2$.

Le théorème suivant a été démontré dans [45]. (Nous référons à Achour-Mezrag [12] pour les définitions de la convexité et de la concavité).

Théorème 2.2.3. *Soient X un espace de Banach, (Ω, μ) un espace mesuré, T un opérateur sous-linéaire continu de X dans $L_p(\Omega, \mu)$ et $1 \leq p < q < \infty$ tels que $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes.*
1) Il existe une constante positive finie C telle que pour toute suite finie $(x_i)_{i=1}^n$ dans X, on a, T est q-convexe.
2) Il existe une fonction g dans $B^+_{L_s(\Omega,\mu)}$, telle que pour tout x dans X, on a

$$\left(\int_\Omega \left|\frac{T(x)}{g}\right|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\|x\|_X.$$

3) Ils existent une fonction g dans $B^+_{L_s(\Omega,\mu)}$ et S un opérateur sous-linéaire continu de X dans $L_q(\Omega,\mu)$, tels que $\|S\| \leq C$ et $T = T_g \circ S$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & L_p(\Omega,\mu) \\ S \searrow & & \uparrow T_g \\ & & L_q(\Omega,\mu) \end{array}$$

Nous allons donner des conditions pour qu'un opérateur sous linéaire borné $T : X \longrightarrow L_p$ se factorise par un espace de Köthe.

Proposition 2.2.4. *Soient X un espace de Banach, L un espace de Köthe sur un espace mesuré σ-fini (Ω, Σ, μ) et T un opérateur sous linéaire continu de X dans $L_p(\Omega, \mu)$, $1 \leq p < q < \infty$ tels que $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Nous avons :*

Les deux conditions suivantes :
(1) T est q-convexe ;
(2) L est q-convexe et p-concave ;
impliquent l'existence d'une fonction $h \in B^{+}_{L_s(\Omega,\mu)}$ et un opérateur sous linéaire continu R de X dans L, tels que $\|R\| \leq C$ et $T = T_h \circ R$, c-à-d

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & L_p(\Omega, \mu) \\ & R \searrow & \uparrow T_h \\ & & L \end{array}$$

Démonstration. On fait la démonstration en deux étapes :
La première étape. Comme T est q-convexe, on a pour toute suite $(x_i)_{i=1}^{n}$ dans X,

$$\left(\int_{\Omega} (\sum_{i=1}^{n} |T(x_i)|^q)^{\frac{p}{q}} d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq C (\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_X^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Donc d'après le Théorème 2.2.3, T se factorise à travers $L_q(\Omega, \mu)$ comme suit :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & L_p(\Omega, \mu) \\ & S \searrow & T_g \uparrow \\ & & L_q(\Omega, \mu) \end{array}$$

Où
S : Opérateur sous linéaire de X dans $L_q(\Omega, \mu)$.
T_g : Opérateur de multiplication de $L_q(\Omega, \mu)$ dans $L_p(\Omega, \mu)$.

La deuxième étape. Suivant le Théorème 2.2.2, tout opérateur de multiplication de $L_q(\Omega, \mu)$ dans $L_p(\Omega, \mu)$ se factorise à travers un espace de Köthe L,

$$\begin{tikzcd} L_q(\Omega,\mu) \arrow[rr, "T_g"] \arrow[dr, "T_{h_1}"'] & & L_p(\Omega,\mu) \\ & L \arrow[ur, "T_{h_2}"'] & \end{tikzcd}$$

tel que T_{h_1} et T_{h_2} sont des opérateurs de multiplication.

Maintenant, si on combine les deux diagrammes précédents, on trouve

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "R"'] & & L_p(\Omega,\mu) \\ & L \arrow[ur, "T_h"'] & \end{tikzcd}$$

Où
$R = T_{h_1} \circ S$: opérateur sous linéaire de X dans L.
$T_h = T_{h_2}$: opérateur de multiplication de L dans $L_p(\Omega, \mu)$.

Ce qui achève la démonstration. ■

Question 1 : Si on remplace l'espace de Lebesgue $L_p(\Omega, \mu)$ par l'espace $L_p(m)$, on ne sait pas si le problème de factorisation étudié au Théorème 2.2.3 et à la Proposition 2.2.4 reste vrai ou non ?

Question 2 : Quelles sont les conditions pour lesquelles l'implication inverse dans la Proposition 2.2.4 est vrai ?

2.3 Problème dual

Nous allons étudier le problème dual de la factorisation qui consiste à donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un opérateur sous linéaire borné $T : L_q(\Omega, \mu) \longrightarrow E$ se factorise par $L_p(\Omega, \mu)$. Ce résultat généralise un travail se trouvant dans [32, p. 552] qui concerne les opérateurs quasi-linéaires (qui sont des opérateurs homogènes et sous additifs en valeurs absolus). Pour la démonstration, on adaptera les mêmes idées que celles de [32, Theorem 4.5].

Soient X un espace normé, f une fonction de X dans $]-\infty, +\infty]$. On dira que f est semi-continue inférieurement (s.c.i) si $epi(f)$ est fermé dans $X \times \mathbb{R}$. Où

$$epi(f) = \{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R}, \quad f(x) \leq \lambda\}.$$

Lemme 2.3.1 [32, Lemma 3.2 p.543]. *Soient A et B deux ensembles convexes d'un espace vectoriel normé, et supposons B compact (pour la topologie donnée sur B). Si l'opérateur $\phi : A \times B \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ satisfait :*
i) $\phi(.,b)$ est concave sur A pour tout $b \in B$,
ii) $\phi(a,.)$ est convexe sur B pour tout $a \in A$,
iii) $\phi(a,.)$ est semi continue inférieurement sur B pour tout $a \in A$. Alors on a :

$$\min_{b\in B} \sup_{a\in A} \phi(a,b) = \sup_{a\in A} \min_{b\in B} \phi(a,b).$$

Théorème 2.3.2. *Soit $T : L_q(\Omega,\mu) \longrightarrow E$ un opérateur sous linéaire borné. Si $1 \leq p < q < \infty$ et $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(1) *T admet la factorisation*

$$\begin{array}{ccc} L_q(\Omega,\mu) & \xrightarrow{T} & E \\ T_g \searrow & & \nearrow S \\ & L_p(\Omega,\mu) & \end{array}$$

avec $g \in B^{+}_{L_r(\Omega,\mu)}$ et $\|S\| \leq C$.

(2) *Il existe une fonction mesurable $w > 0$ p.p. telle que : $\|w\|_{\frac{r}{p}} \leq 1$ et*

$$\|Tf\|_E^p \leq C^p \int |f(x)|^p \, w(x)\, dx, \text{ pour toute } f \in L_q(\mu).$$

(3) *T est p-concave.*

Démonstration. (1) $\Longleftrightarrow$ (2) Il suffit de prendre $w(x) = (g(x))^p$.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Se trouve directement par l'inégalité de Hölder.

Pour prouver (3) $\Longrightarrow$ (2) en utilisant le Lemme 2.3.1. Soit $\alpha = \frac{q}{p} > 1$, donc $\alpha^* = \frac{r}{p}$.
Définissons deux ensembles convexes :

$$\begin{array}{rcl} A & = & \left\{ a = \sum_{i=1}^{n} |f_i|^p : f_i \in L_q(\mu), \sum_{i=1}^{n} \|Tf_i\|^p \leq 1 \right\} \\ B & = & \left\{ b \in L_{\alpha^*}(\mu) : b(x) \geq 0; \|b\|_{\alpha^*} \leq 1 \right\} \end{array}$$

et l'opérateur bilinéaire $\phi(a,b)$ dans $A \times B$ comme suit

$$\phi(a,b) = -\int a(x)b(x)d\mu(x) = -\int \sum_{i=1}^{n} |f_i(x)|^p \, b(x)d\mu(x).$$

On remarque que ϕ est semi continu inférieurement sur B, donc nous pouvons utiliser l'identité

$$\min_{b\in B} \sup_{a\in A} \phi(a,b) = \sup_{a\in A} \min_{b\in B} \phi(a,b) = \sup_{a\in A} (-\|a\|_{\frac{q}{p}}).$$

Alors, il existe $b \in B$ telle que, pour tout $a = \sum_{i=1}^{n} |f_i|^p \in A$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \|Tf_i\|_E^p \le C^p \|a\|_{\frac{q}{p}} \le -C^p \phi(a,b).$$

Ce qui implique, en particulier, que (2) est vérifiée, avec $w(x) = b(x)$, pour tout f telle que $\|Tf\|_E \le 1$, et par homogénéité, on peut trouver le même résultat pour $f \in L_p(\mu)$ arbitraire. ■

Maintenant, j'étudie la factorisation d'un opérateur sous linéaire à travers un espace de Köthe.

Proposition 2.3.3. *Soient E un espace de Banach réticulé, L un espace de Köthe sur un espace mesuré σ-fini (Ω, Σ, μ), T un opérateur sous linéaire continu de $L_q(\Omega,\mu)$ dans E, $1 \le p < q \le \infty$ telle que $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Nous avons :*

Les deux conditions suivantes :
(1) T est p-concave.
(2) L est q-convexe et p-concave.
impliquent l'existence d'une fonction $h \in B^+_{L_s(\Omega,\mu)}$ et un opérateur sous linéaire continu R de L dans E, tels que $\|R\| \le C$ et $T = R \circ T_h$, c-à-d

$$\begin{array}{ccc} L_q(\Omega,\mu) & \xrightarrow{T} & E \\ T_h \searrow & & \nearrow R \\ & L & \end{array}$$

Démonstration. La preuve sera faite en deux pas :

Le premier pas. Comme T est p-concave. Donc d'après le Théorème 2.3.2, T se factorise à travers $L_p(\Omega,\mu)$ comme suit :

$$\begin{array}{ccc} L_q(\Omega,\mu) & \underrightarrow{T} & E \\ T_g \searrow & & \nearrow S \\ & L_p(\Omega,\mu) & \end{array}$$

S : Opérateur sous linéaire de $L_p(\Omega,\mu)$ dans E.
T_g : Opérateur de multiplication de $L_q(\Omega,\mu)$ dans $L_p(\Omega,\mu)$.

Le deuxième pas. Suivant le Théorème 2.2.2, tout opérateur de multiplication de $L_q(\Omega,\mu)$ dans $L_p(\Omega,\mu)$ se factorise à travers un espace de Köthe L,

$$\begin{array}{ccc} L_q(\Omega,\mu) & \underrightarrow{T_g} & L_p(\Omega,\mu) \\ T_{h_1} \searrow & & T_{h_2} \nearrow \\ & L & \end{array}$$

tels que T_{h_1} et T_{h_2} sont des opérateurs de multiplication.

La combinaison des deux diagrammes précédents nous fournit :

$$\begin{array}{ccc} L_q(\Omega,\mu) & \underrightarrow{T} & E \\ T_h \searrow & & \nearrow R \\ & L & \end{array}$$

tels que

$R = S \circ T_{h_2}$: opérateur sous linéaire de L dans E.
$T_h = T_{h_1}$: opérateur de multiplication de $L_q(\mu)$ dans L.

Ce qui nous donne le résultat souhaité. ■

Question 3 : Si on remplace l'espace de Lebesgue $L_q(\Omega,\mu)$ par l'espace $L_p(m)$, on ne sait pas si le problème de factorisation étudié dans la Proposition 2.3.3 et le Théorème 2.3.2 reste vrai ou non ?

Question 4 : Quelles sont les conditions pour lesquelles l'implication inverse dans la Proposition 2.3.3 est juste ?

2.4 Application : extension du théorème de factorisation de Grothendieck

Dans ce paragraphe nous allons généraliser le théorème de factorisation des opérateurs linéaires d'un L_p à valeurs dans L_q qui ont été fait par Grothendieck [60, Lecture 13, p60], aux opérateurs sous linéaires.

Maintenant, nous exposons le théorème de Grothendieck.

Théorème 2.4.1. *Supposons que $0 \leq q \leq 2 \leq p$ et que $u : L_p(\Omega_1, \lambda) \longrightarrow L_q(\Omega_2, \mu)$ est un opérateur linéaire continu. Nous définissons r et s par les relations $\frac{1}{2} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p}, \frac{1}{q} = \frac{1}{s} + \frac{1}{2}$. Alors, ils existent deux fonctions $\beta \in L_s(\Omega_1, \lambda), \delta \in L_r(\Omega_2, \mu)$ et un opérateur linéaire $v : L_2(\Omega_1, \lambda) \longrightarrow L_2(\Omega_2, \mu)$, tels que le diagramme suivant soit commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} L_p(\Omega_1, \lambda) & \xrightarrow{u} & L_q(\Omega_2, \mu) \\ u_\delta \downarrow & & \uparrow u_\beta \\ L_2(\Omega_1, \lambda) & \xrightarrow{v} & L_2(\Omega_2, \mu) \end{array}$$

Le théorème suivant généralise le Théorème précédent aux opérateurs sous linéaire comme suit :

Théorème 2.4.2. *Supposons que $1 \leq q \leq 2 \leq p$ et que $T : L_p(\Omega_1, \lambda) \longrightarrow L_q(\Omega_2, \mu)$ est un opérateur sous linéaire continu. Nous définissons r et s par les relations $\frac{1}{2} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p}, \frac{1}{q} = \frac{1}{s} + \frac{1}{2}$. Alors, ils existent deux fonctions positives $\beta \in L_s(\Omega_1, \lambda), \delta \in L_r(\Omega_2, \mu)$, deux espaces de Köthe L et K et un opérateur sous linéaire $S : L \longrightarrow K$ tels que le diagramme suivant soit commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} L_p(\Omega_1, \lambda) & \xrightarrow{T} & L_q(\Omega_2, \mu) \\ T_\delta \downarrow & & \uparrow T_\beta \\ L & \xrightarrow{S} & K \end{array}$$

Démonstration. D'une part, Comme T est 2-convexe, alors d'après le Théorème 2.2.3, T se factorise par $L_2(\Omega_2, \mu)$ c-à-d, il existe une fonction $g \in B^+_{L_s(\Omega_1,\lambda)}, \frac{1}{q} = \frac{1}{s} + \frac{1}{2}$, et un opérateur sous linéaire S_1 de $L_p(\Omega_1, \lambda)$ dans $L_2(\Omega_2, \mu)$, tels que $T = T_g \circ S_1$ c-à-d

$$\begin{array}{ccccc} L_p(\Omega_1, \lambda) & & \xrightarrow{T} & & L_q(\Omega_2, \mu) \\ & S_1 \searrow & & \nearrow T_g & \\ & & L_2(\Omega_2, \mu) & & \end{array}$$

et d'autre part, puisque $p \geq 2$ et $\frac{1}{r} = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$, S_1 est 2-concave ($L_2(\Omega_2, \mu)$ est 2-concave) et suivant le Théorème 2.3.2, S_1 admet la factorisation suivante :

$$\begin{tikzcd} L_p(\Omega_1, \lambda) \arrow[rr, "S_1"] \arrow[dr, "T_h"'] & & L_2(\Omega_2, \mu) \\ & L_2(\Omega_1, \lambda) \arrow[ur, "S_2"'] & \end{tikzcd}$$

avec $h \in B^+_{L_r(\Omega_1,\lambda)}$ et $\|S_2\| \leq C$.
Alors, on obtient le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} L_p\left(\Omega_1, \lambda\right) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "T_h"'] & L_q\left(\Omega_2, \mu\right) \\ L_2\left(\Omega_1, \lambda\right) \arrow[r, "S_2"] & L_2\left(\Omega_2, \mu\right) \arrow[u, "T_g"'] \end{tikzcd}$$

et si on applique le Théorème 2.2.2 sur les opérateurs de multiplication T_h et T_g, on trouve :

$$\begin{tikzcd} & L_p\left(\Omega_1, \lambda\right) \arrow[r, "T"] \arrow[dl, "T_{h_1}"'] & L_q\left(\Omega_2, \mu\right) & \\ L \arrow[dr, "T_{h_2}"'] & & & K \arrow[ul, "T_{g_2}"'] \\ & L_2\left(\Omega_1, \lambda\right) \arrow[r, "S_2"] & L_2\left(\Omega_2, \mu\right) \arrow[ur, "T_{g_1}"'] & \end{tikzcd}$$

Il suffit de prendre $T_\delta = T_{h_1}, T_\beta = T_{g_2}$ et $S = T_{g_1} \circ S_2 \circ T_{h_2}$.
Ce qui fallait démontrer.

Chapitre 3

Théorèmes de domination et factorisation pour les opérateurs positifs fortement p-sommants

L'idéal $\mathcal{D}_p$ des opérateurs fortement p-sommants $(1 < p \leq \infty)$ est défini par Cohen [27] pour caractériser le dual d'un opérateur p^*-sommant. Cet idéal a été étendu au cas des opérateurs linéaires fortement (p,q)-sommants par Apiola [15].

Soient $1 < q \leq p \leq \infty$. On dit que l'opérateur $T : X \longrightarrow Y$ est fortement (p,q)-sommants ($T \in \mathcal{D}_{p,q}(X,Y)$ ou $T \in \mathcal{D}_p(X,Y)$ si $p = q$) si il existe une constante positive C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_n \in X$ et $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle T(x_i), y_i^* \rangle| \leq C(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_X^q)^{\frac{1}{q}} \sup_{\varphi \in B_{Y^{**}}} (\sum_{i=1}^{n} |\varphi(y_i^*)|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}}, \tag{3.1}$$

la plus petite constante C vérifie (3.1), notée $d_{p,q}(T)$, est dite la norme fortement (p,q)-sommant sur l'espace $\mathcal{D}_{p,q}(X;Y)$ de tous les opérateurs fortement (p,q)-sommants de X dans Y qui définis un espace de Banach. Pour $p = q = 1$, on a $\mathcal{D}_{1,1}(X;Y) = \mathcal{L}(X;Y)$. Il est connu que :

$$\mathcal{D}_{p,q}(X;Y) = \Pi^{dual}_{q^*,p^*}(X;Y) = \{T \in \mathcal{L}(X;Y) : T^* \in \Pi_{q^*,p^*}(Y^*;X^*)\}.$$

Où $\Pi_{p,q}$ est l'idéal des opérateurs (p,q)-sommants ($\Pi_p(X;Y)$ si $p = q$, l'idéal des opérateurs p-sommants) voir par exemple [29, 30].

Dans l'article [17] le concept des opérateurs positivement (p,q)-sommants a été étudié, où nous trouvons quelques propriétés géométriques des espaces de Banach et des théorèmes classiques démontrés en utilisant l'espace des opérateurs positivement sommants. Pour plus des détails concernant les opérateurs positivement sommants, ses développements et ses applications, voir [18, 37, 62].

Dans ce chapitre nous introduisons et étudions la notion des opérateurs positifs fortement (p,q)-sommants. Une de nos contributions consiste à mettre en évidence la relation entre ces opérateurs et les opérateurs positivement (p,q)-sommants. Plus précisément, si $p = q$ nous prouvons un nouveau type du théorème de Pietsch (les deux, Théorèmes de domination et de factorisation). En particulier, un nouveau théorème de factorisation pour la classe des opérateurs positivement p-sommants par un sous espace de Köthe est prouvé. Aussi, des nouveaux théorèmes de domination et factorisation sont donnés pour les opérateurs positifs fortement p-sommants. Comme application, nous avons également montré que certains résultats connus sur les opérateurs $(p;q)$-concaves de Banach réticulés peuvent être généralisés à la classe des opérateurs $(q;p)$-convexes. Ces résultats se trouvent dans [3].

3.1 Les espaces $l^n_{p,|weak|}(E)$

Soient X un espace de Banach et $1 \leq p \leq +\infty$, nous notons par $l^n_p(X)$, l'espace de toutes les suites $(x_i)^n_{i=1}$ dans X avec la norme

$$\|(x_i)^n_{i=1}\|_p := (\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p_X)^{\frac{1}{p}},$$

et $l^n_{p,weak}(X)$ l'espace de toutes les suites $(x_i)^n_{i=1}$ avec la norme

$$w_p((x_i)^n_{i=1}) := \sup_{\xi \in B_{X^*}} (\sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, \xi\rangle|^p)^{\frac{1}{p}},$$

$l^n_{p,weak}(X)$ est un espace de Banach avec la norme w_p (voir [27, 34]). L'espace

$$(c_0)_{weak}(X) := \{(x_n) : x_n \in X \text{ et } \langle x_n, \xi\rangle \in c_0, \forall \xi \in X^*\}$$

est un sous espace fermé de $l^n_{\infty,weak}(X)$ (voir [27, 34]). On sait que $l^n_{p,weak}(X)$ est isométriquement isomorphe à $\mathcal{L}(l^n_{p^*}; X)$ pour $1 < p \leq \infty$ et pour $p = 1$, $l^n_{1,weak}(X)$ est isométriquement isomorphe à $\mathcal{L}(c_0; X)$.

En remplaçant X par un espace de Banach réticulé E, et on définit

$$\begin{cases} l^n_{p,|weak|}(E) := \left\{(x_i)^n_{i=1} : (|x_i|)^n_{i=1} \in l^n_{p,weak}(E)\right\}; \\ (c_0)_{|weak|}(E) := \{(x_i)^n_{i=1} : (|x_i|)^n_{i=1} \in (c_0)_{weak}(E)\}; \end{cases}$$

et

$$\|(x_i)^n_{i=1}\|_{l^n_{p,|weak|}(E)} = w_p((|x_i|)^n_{i=1}). \tag{3.2}$$

Pour plus de détails voir [21, 36].
En plus, si $B^+_{E^*} = \{\xi \in B_{E^*} : \xi \geq 0\}$ est notée la boule d'unité dans $B_{E^*} \cap E^*_+$, puisque $|\langle |x_i|, \xi\rangle| \leq \langle |x_i|, |\xi|\rangle$ on a

$$\begin{cases} \|(x_i)^n_{i=1}\|_{l^n_{1,|weak|}(E)} = \sup\limits_{\xi \in B^+_{E^*}} \sum\limits_{i=1}^n \langle |x_i|, \xi\rangle = \left\|\sum\limits_{i=1}^n |x_i|\right\|_E; \\ \|(x_i)^n_{i=1}\|_{l^n_{p,|weak|}(E)} = \sup\limits_{\xi \in B^+_{E^*}} \left(\sum\limits_{i=1}^n \langle |x_i|, \xi\rangle^p\right)^{\frac{1}{p}}, \ 1 < p < \infty; \\ \|(x_i)^n_{i=1}\|_{l^n_{\infty,|weak|}(E)} = \sup\limits_{\xi \in B^+_{E^*}} \sup\limits_{1 \leq i \leq n} \langle |x_i|, \xi\rangle. \end{cases} \tag{3.3}$$

Si $x_1, ..., x_n \geq 0$; on a

$$\|(x_i)^n_{i=1}\|_{l^n_{p,|weak|}(E)} := \sup_{\xi \in B^+_{E^*}} \left(\sum_{i=1}^n \langle x_i, \xi\rangle^p\right)^{\frac{1}{p}} = w_p\left((x_i)^n_{i=1}\right). \tag{3.4}$$

$l^n_{p,|weak|}(E)$ est un espace de Banach réticulé avec l'ordre induit par l'ordre ponctuelle sur $E^{\mathbb{N}}$. En effet si $(x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n \in l^n_{p,|weak|}(E)$. Alors, pour tout i,

$$x_i \leq x_i \vee y_i \leq |x_i| \vee |y_i| \leq |x_i| + |y_i|$$

Donc,

$$0 \leq x_i \vee y_i - x_i \leq |x_i| \vee |y_i| - x_i \leq |x_i| + |y_i| - x_i$$

et

$$|x_i \vee y_i - x_i| \leq 2\,|x_i| + |y_i|\,.$$

Alors pour tout i et $\xi \in E^*$, on obtient :

$$|\langle |x_i \vee y_i - x_i|\,, \xi\rangle| \leq |\langle 2\,|x_i| + |y_i|\,, \xi\rangle| \leq 2\,|\langle |x_i|\,, \xi\rangle| + |\langle |y_i|\,, \xi\rangle|\,.$$

Ce qui implique que $(x_i \vee y_i - x_i)_i \in l^n_{p,|weak|}(E)$ et enfin $(x_i \vee y_i)_i \in l^n_{p,|weak|}(E)$; Alors $l^n_{p,|weak|}(E)$ est un espace vectoriel réticulé. Il est facile de montrer qu'il est un espace normé réticulé et complet, donc $l^n_{p,|weak|}(E)$ est un Banach réticulé. Et en plus on a (voir [36, Theorem 7.8]).

(a) L'espace de Banach réticulé $l^n_{p,|weak|}(E)$ est isométriquement isomorphe à $\mathcal{L}^r(l^n_{p^*}; E)$ pour $1 < p \leq \infty$ et $l^n_{1,|weak|}(E)$ est isométriquement isomorphe à $\mathcal{L}^r(c_0; E)$.

(b) L'espace de Banach réticulé $l^n_{p,|weak|}(E^*)$ est isométriquement isomorphe à $\mathcal{L}^r(E; l^n_p)$ pour $1 < p \leq \infty$ et $(c_0)_{|weak|}(E^*)$ est isométriquement isomorphe à $\mathcal{L}^r(E; c_0)$.

La généralisation suivante des opérateurs (p, q)-sommants est introduit par Blasco (voir [17]).

3.2 Opérateurs positivement (p,q)-sommants

Définition 3.2.1. Soient $1 \leq q, p < \infty$. On dit que l'opérateur $T : E \longrightarrow X$ est positivement (p,q)-sommant s'il existe une constante positive $C < +\infty$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute $(x_i)_{i=1}^n \subset E_+$, on a

$$\left\| (T(x_i))_{i=1}^n \right\|_p \leq C w_q \left((x_i)_{i=1}^n \right) = C \sup_{\xi \in B_{E^*}^+} \left(\sum_{i=1}^n \langle x_i, \xi \rangle^q \right)^{\frac{1}{q}}. \qquad (3.5)$$

pour $q < p = \infty$,

$$\sup_{1 \leq i \leq n} \| T(x_i) \| \leq C w_q \left((x_i)_{i=1}^n \right).$$

Nous noterons par $\Lambda_{p,q}(E,X)$, l'espace des opérateurs positivement (p,q)-sommants de E dans X (ou $\mathcal{S}_p(E,X)$ si $p = q$, l'espace des opérateurs positivement p-sommants), qui devient un espace de Banach avec la norme

$$\pi_{p,q}^+(T) = \inf \{ C \text{ vérifiant l'inégalité } (3.5) \}.$$

Nous avons $\Lambda_{\infty,q}(E,X) = \mathcal{L}(E,X)$ pour tout $1 \leq q < \infty$.

Proposition 3.2.2. *Soient $1 \leq p, q < \infty$. Soient E et F deux espaces de Banach réticulés et X un espace de Banach.*
1) $T \in \mathcal{L}(E,X)$, *alors $T \in \Lambda_{p,q}(E,X)$ si, et seulement s'il existe une constante $K > 0$ telle que l'inégalité*

$$\left\| (T(x_i))_{i=1}^n \right\|_p \leq K \left\| (x_i) \right\|_{l^n_{q,|weak|}(E)}$$

est vérifiée pour tous $x_1, ..., x_n \in E$.
2) Propriété d'idéal. *Soient $T \in \Lambda_{p,q}(E,X)$ et $v \in \mathcal{L}^r(F,E)$. Alors la composition $T \circ v$ est un opérateur positivement (p,q)-sommant de F dans X.*
3) *Pour tout $T \in \mathcal{L}(E,X)$ et pour toute constante $C > 0$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*i*) *$T \in \Lambda_{p,q}(E,X)$ avec $\pi_{p,q}^+(T) \leq C$.*

(*ii*) *Pour tout $v \in \mathcal{L}^r\left(l_{q^*}^n, E\right)$ (ou $v \in \mathcal{L}^r(c_0, E)$ si $q = 1$), $T \circ v$ est positivement (p,q)-sommant et $\pi_{p,q}^+(T \circ v) \leq 2C \|v\|_r$.*

Démonstration. (1) il suffit d'utiliser les égalités (3.2) et (3.3).

(2) Soit $0 \leq x_1, ..., x_n \in F$.

$$\|Tv(x_i)\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} \|T(v^+(x_i) - v^-(x_i))\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \|T(v^+(x_i))\|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} \|T(v^-(x_i))\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \pi^+_{p,q}(T) \sup_{\xi \in B^+_{E^*}} \left(\sum_{i=1}^{n} \langle v^+(x_i), \xi\rangle^q\right)^{\frac{1}{q}} + \pi^+_{p,q}(T) \sup_{\xi \in B^+_{E^*}} \left(\sum_{i=1}^{n} \langle v^-(x_i), \xi\rangle^q\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq 2\pi^+_{p,q}(T) \sup_{\xi \in B^+_{E^*}} \left(\sum_{i=1}^{n} \langle |v|(x_i), \xi\rangle^q\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq 2\pi^+_{p,q}(T) \||v|\| \sup_{\xi \in B^+_{E^*}} \left(\sum_{i=1}^{n} \left\langle x_i, \frac{|v|^*}{\||v|^*\|}(\xi)\right\rangle^q\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq 2\pi^+_{p,q}(T) \|v\|_r \sup_{\varphi \in B^+_{E^*}} \left(\sum_{i=1}^{n} \langle x_i, \varphi\rangle^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Donc $Tv \in \Lambda_{p,q}(F, X)$ et $\pi^+_{p,q}(Tv) \leq 2\pi^+_{p,q}(T) \|v\|_r$.

(3) est une conséquence immédiate des (2) et la condition (a). ■

Par l'utilisation de (3.5) avec $x_i = n^{\frac{-1}{p}} x$ où $x > 0$, nous voyons bientôt que le seul opérateur (p, q)-sommant si $p < q$ est l'opérateur nul (voir [17, Proposition 1]).

Le théorème de domination de Pietsch est vrai pour les opérateurs de la classe $\mathcal{S}_p, p < \infty$.

Théorème 3.2.3 [62]. *Soit $T \in \mathcal{L}(E, X)$. T est un opérateur positivement p-sommant (i.e., $T \in \mathcal{S}_p(E, X)$) si, et seulement s'il existe une probabilité μ sur l'ensemble $K = B^+_{E^*}$, muni par la topologie faible-$*$, et une constante positive C telle que*

$$\|T(x)\| \leq C \left(\int_K \langle x, x^*\rangle^p \, d\mu(x^*)\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.6}$$

pour tout $x \in E_+$. En plus, dans ce cas

$$\pi^+_p(T) = \inf\{C \text{ vérifiant l'inégalité } (3.6)\}.$$

On aura besoin à la proposition suivante qui caractérise les opérateurs positivement p-sommants.

Proposition 3.2.4. *Soit $T \in \mathcal{L}(E, X)$. Alors T est un opérateur positivement p-sommant si, et seulement si il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|T(x)\| \leq C \left(\int_K \langle |x|, x^* \rangle^p \, d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.7}$$

pour tout $x \in E$.

Démonstration. Soit $x \in E$, par la Remarque 1.3.3., nous avons,

$$\begin{array}{rcl} \|T(x)\| & = & \|T(x^+ - x^-)\| \\ & \leq & \|T(x^+)\| + \|T(x^-)\| \\ & \leq & C \left(\int_K \langle x^+, x^* \rangle^p \, d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{p}} + C \left(\int_K \langle x^-, x^* \rangle^p \, d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq & 2C \left(\int_K \langle |x|, x^* \rangle^p \, d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{p}}. \end{array}$$

Inversement, il suffit d'appliquer le Théorème 3.2.3 à $x \in E_+$. ■

3.3 Factorisation des opérateurs positivement p-sommants

Maintenant nous donnons le théorème de factorisation de Pietsch pour les opérateurs positivement p-sommants.

Dans ce qui suit, on va introduire un nouvel espace des fonctions. Soient $x, y \in E$ et $\mu \in \mathcal{M}\left(B_{E^*}^+\right)$, nous définissons la relation d'équivalence $\sim$ par :

$$x \sim y \Longleftrightarrow \langle |x - y|, . \rangle = 0 \ \mu\text{-p.p.}$$

On note i_E l'injection $E \longrightarrow \mathcal{C}\left(B_{E^*}^+\right)$ définie par $i_E(x) = \langle x, . \rangle$. L'application i_E est une injection isomorphique. Si $x \geq 0$, on a

$$\|x\|_E = \|\langle x, . \rangle\|_{\mathcal{C}(B_{E^*}^+)}.$$

Supposons x non positif, on a

$$\begin{aligned}\|\langle x, .\rangle\|_{\mathcal{C}(B^+_{E^*})} &= \sup_{\varphi\in B^+_{E^*}} |\langle x,\varphi\rangle| \\ &\le \|x\|_E \\ &= \sup_{x^*\in B_{E^*}} |\langle x, x^{*+} - x^{*-}\rangle| \\ &\le 2\sup_{\xi\in B^+_{E^*}} |\langle x,\xi\rangle| \\ &= 2\,\|\langle x, .\rangle\|_{\mathcal{C}(B^+_{E^*})}.\end{aligned}$$

Donc

$$\|\langle x, .\rangle\|_{\mathcal{C}(B^+_{E^*})} \le \|x\|_E \le 2\,\|\langle x, .\rangle\|_{\mathcal{C}(B^+_{E^*})}.$$

Pour $f \in i_E(E) \subset \mathcal{C}\left(B^+_{E^*}\right)$, nous définissons la semi norme

$$|||f||| = \inf\left\{\left(\int_{B^+_{E^*}} \langle |z|, .\rangle^p \, d\mu(.)\right)^{\frac{1}{p}} : \langle |z-f|, .\rangle = 0 \ \mu\text{-}p.p.\right\}.$$

Soit $\mathcal{R} = \{f \in i_E(E), |||f||| = 0\} \subset i_E(E)$. Nous écrivons $L^p_0(\mu)$ la complété de l'espace quotient $i_E(E)/\mathcal{R}$ avec la norme

$$\|[f]\| = |||f|||,$$

où $[f]$ est la classe d'équivalence de $f \in i_E(E)$; on remarque que

$$|||g||| = |||f|||, \forall g \in [f].$$

D'après [22], les espaces définis de cette manière, sont utilisés pour caractériser la norme des sous espaces incluent dans $L^p(m)$ (voir [58] pour $p > 1$ et [28] pour $p = 1$).

Lemme 3.3.1. *L'opérateur* $J_{p,0} \circ i_E : E \longrightarrow i_E(E) \longrightarrow L^p_0(\mu)$ *est positivement p-sommant et* $\pi^+_p(J_{p,0} \circ i_E) \le 1$.

Démonstration. Soit $x_1, ..., x_n \in E$. On a

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^n \|J_{p,0}\circ i_E(x_i)\|^p_{L^p_0(\mu)}\right)^{\frac{1}{p}} &\le \left(\sum_{i=1}^n \int_{B^+_{E^*}} \langle |x_i|, \varphi\rangle^p \, d\mu(\varphi)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{B^+_{E^*}} \sum_{i=1}^n \langle |x_i|, \varphi\rangle^p \, d\mu(\varphi)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le \|(x_i)_{i=1}^n\|_{l^n_{p,|weak|}(E)}.\end{aligned}$$

Alors $J_{p,0} \circ i_E \in \mathcal{S}_p\left(E, L_0^p(\mu)\right)$ et $\pi_p^+\left(J_{p,0} \circ i_E\right) \leq 1.$ $\blacksquare$

Théorème 3.3.2. *Pour tout opérateur $T : E \longrightarrow Y$, les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) T est positivement p-sommant.
(ii) Il existe une probabilité de Borel régulière μ sur $B_{E^*}^+$, un espace de Banach $L_0^p(\mu)$ et un opérateur $u : L_0^p(\mu) \longrightarrow Y$ tels que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} E & \stackrel{T}{\longrightarrow} & Y \\ i_E \downarrow & & \uparrow u \\ i_E(E) & \stackrel{J_{p,0}}{\longrightarrow} & L_0^p(\mu) \\ \cap & & \\ \mathcal{C}\left(B_{E^*}^+\right) & & \end{array}$$

Démonstration. $(i) \Longrightarrow (ii)$. Si T est positivement p-sommant, la proposition précédente de domination de Pietsch implique l'existence d'une probabilité de Borel régulière μ sur $B_{E^*}^+$ telle que, pour tout $x \in E$

$$\|T(x)\| \leq \pi_p^+(T)\left(\int_{B_{E^*}^+} \langle |x|, \varphi\rangle^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

De sorte que

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &\leq \pi_p^+(T)\left\|[\langle x, .\rangle]\right\|_{L_0^p(\mu)} \\ &= \pi_p^+(T)\left\|J_{p,0} \circ i_E(x)\right\|_{L_0^p(\mu)}. \end{aligned}$$

Si on note le rang du $J_{p,0} \circ i_E$ par S. Par définition $\overline{S} = L_0^p(\mu)$, l'application $S \longrightarrow Y : J_{p,0} \circ i_E(x) \longmapsto T(x)$ est bien défini. Il est continu pour la topologie de $L_0^p(\mu)$ avec norme $\leq \pi_p^+(T)$, puisque

$$\|T(x)\| \leq \pi_p^+(T)\left\|J_{p,0} \circ i_E(x)\right\|_{L_0^p(\mu)}, \forall x \in E.$$

Alors l'extension naturelle de notre application à $L_0^p(\mu)$ est l'opérateur demandé u.

$(ii) \Longrightarrow (i)$ Comme $T = u \circ J_{p,0} \circ i_E$, du Lemme 3.3.1. et de la propriété d'idéal, on déduit que l'opérateur T est positivement p-sommant et $\pi_p^+(T) \leq \|u\| \pi_p^+\left(J_{p,0} \circ i_E\right) \leq \|u\|.$ $\blacksquare$

Dans tout ce qui suit, X notera un espace de Banach et F un Banach réticulé.

3.4 Opérateurs positifs fortement (p, q)-sommants

Nous introduisons certaine classe des opérateurs de X dans F ce qui étroitement liés aux opérateurs fortement (p, q)-sommants définis par Apiola [15]. Ces opérateurs sont appelés positifs fortement (p, q)-sommants.

Définition 3.4.1. Soit $1 \leq q, p \leq +\infty$. L'opérateur $T : X \longrightarrow F$ est positif fortement (p, q)-sommant (notation $T \in \mathcal{D}^+_{p,q}(X, F)$ ou $T \in \mathcal{D}^+_p(X, F)$ si $p = q$), s'il existe une constante positive C telle que pour tous $n \in \mathbb{N}$; $x_1, ..., x_n \in X$ et $y^*_1, ..., y^*_n \in F^*$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle T(x_i), y^*_i \rangle| \leq C \left\| (x_i)^n_{i=1} \right\|_q \left\| (y^*_i)^n_{i=1} \right\|_{l^n_{p^*,|weak|}(F^*)}. \tag{3.8}$$

Notons $d^+_{p,q}(T)$ la petite constante C vérifiant l'inégalité (3.8). On a $\mathcal{D}^+_1(X, F) = \mathcal{L}(X, F)$.

Remarque 3.4.2. Soit $T \in \mathcal{L}(X, F)$. Alors T est positif fortement (p, q)-sommant si, et seulement si, il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle T(x_i), y^*_i \rangle| \leq K \left\| (x_i)^n_{i=1} \right\|_q w_{p^*}\left((y^*_i)^n_{i=1}\right)$$

pour tout $x_1, ..., x_n \in X$ et $0 \leq y^*_1, ..., y^*_n \in F^*$.

En effet, pour le sens direct, il suffit d'utiliser l'égalité

$$\left\| (y^*_i)^n_{i=1} \right\|_{l^n_{p^*,|weak|}(F^*)} = w_{p^*}\left((y^*_i)^n_{i=1}\right).$$

pour l'autre sens, soient $n \in \mathbb{N}$; $x_1, ..., x_n \in X$ et $y^*_1, ..., y^*_n \in F^*$. Nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left|\left\langle T\left(x_i\right),y_i^*\right\rangle\right| &= \sum_{i=1}^{n}\left|\left\langle T\left(x_i\right),y_i^{*+}-y_i^{*-}\right\rangle\right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}\left|\left\langle T\left(x_i\right),y_i^{*+}\right\rangle\right|+\sum_{i=1}^{n}\left|\left\langle T\left(x_i\right),y_i^{*-}\right\rangle\right| \\ &\leq K\left\|\left(x_i\right)_{i=1}^{n}\right\|_q\left(w_{p^*}(y_i^{*+})_{i=1}^{n}\right)+\left(w_{p^*}(y_i^{*-})_{i=1}^{n}\right) \\ &\leq C\left\|\left(x_i\right)_{i=1}^{n}\right\|_q w_{p^*}((|y_i^*|)_{i=1}^{n}) \\ &= C\left\|\left(x_i\right)_{i=1}^{n}\right\|_q\left\|(y_i^*)_{i=1}^{n}\right\|_{l^n_{p^*,|weak|}(F^*)}. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Proposition 3.4.3. *Soient $q_1 \leq q_2, p_1 \leq p_2$. Alors*

$$\mathcal{D}^+_{p_1,q_2}\left(X,F\right)\subset\mathcal{D}^+_{p_2,q_1}\left(X,F\right).$$

Démonstration. Soit $T\in\mathcal{D}^+_{p_1,q_2}\left(X,F\right)$; pour tous $x_1,...,x_n\in X$ et $y_1^*,...,y_n^*\in F^*$ nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left|\left\langle T\left(x_i\right),y_i^*\right\rangle\right| &\leq d^+_{p_1,q_2}\left(T\right)\left\|\left(x_i\right)_{i=1}^{n}\right\|_{q_2}\left\|(y_i^*)_{i=1}^{n}\right\|_{l^n_{p_1^*,|weak|}(F^*)} \\ &\leq d^+_{p_1,q_2}\left(T\right)\left\|\left(x_i\right)_{i=1}^{n}\right\|_{q_1}\left\|(y_i^*)_{i=1}^{n}\right\|_{l^n_{p_2^*,|weak|}(F^*)}.\end{aligned}$$

Donc, $T\in\mathcal{D}^+_{p_2,q_1}\left(X,F\right)$ et $d^+_{p_2,q_1}\left(T\right)\leq d^+_{p_1,q_2}\left(T\right)$. $\blacksquare$

Proposition 3.4.4. *Soient X,Y deux espaces de Banach et E,F deux Banach réticulés. On considère $T\in\mathcal{L}\left(Y,E\right)$, S un opérateur positif dans $\mathcal{L}\left(E,F\right)$ et R dans $\mathcal{L}\left(X,Y\right)$. Si $T\in\mathcal{D}^+_{p,q}\left(Y,E\right)$, alors $STR\in\mathcal{D}^+_{p,q}\left(X,F\right)$ et $d^+_{p,q}\left(STR\right)\leq\left\|S\right\|d^+_{p,q}\left(T\right)\left\|R\right\|$.*

Démonstration. Soient $0\leq z_1^*,...,z_n^*$ dans F^* et $x_1,...,x_n\in X$. Comme $T\in\mathcal{D}^+_{p,q}\left(Y,E\right)$ et $S^*\left(z_i^*\right)\geq 0$ $\left(1\leq i\leq n\right)$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left|\left\langle STR\left(x_i\right),z_i^*\right\rangle\right| &\leq \sum_{i=1}^{n}\left|\left\langle T\left(R\left(x_i\right)\right),S^*\left(z_i^*\right)\right\rangle\right| \\ &\leq d^+_{p,q}\left(T\right)\left\|\left(R\left(x_i\right)\right)_{i=1}^{n}\right\|_q\sup_{\eta\in B^+_{E^{**}}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left\langle S^*\left(z_i^*\right),\eta\right\rangle^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq d^+_{p,q}\left(T\right)\left\|R\right\|\left\|S\right\|\left\|\left(x_i\right)_{i=1}^{n}\right\|_q\sup_{\eta\in B^+_{E^{**}}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left\langle z_i^*,\frac{S^{**}(\eta)}{\left\|S^{**}\right\|}\right\rangle^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq d^+_{p,q}\left(T\right)\left\|R\right\|\left\|S\right\|\left\|\left(x_i\right)_{i=1}^{n}\right\|_q\sup_{\psi\in B^+_{F^{**}}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left\langle z_i^*,\psi\right\rangle^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}.\end{aligned}$$

Donc, d'après la Remarque **3.4.2**, on conclut que $STR \in \mathcal{D}_{p,q}^{+}(X,F)$ et $d_{p,q}^{+}(STR) \leq \|S\| \, d_{p,q}^{+}(T) \|R\|$. ■.

Le résultat principal de ce paragraphe est le théorème 3.4.6. Pour la démonstration, nous utiliserons le Théorème suivant :

Théorème 3.4.5 (voir [62])
Supposons $T \in \mathcal{L}(F,X)$. Alors, $T \in \Lambda_{p,q}(F,X)$ si et seulement si $T^{**} \in \Lambda_{p,q}(F^{**},X^{**})$. De plus, $\pi_{p,q}^{+}(T) = \pi_{p,q}^{+}(T^{**})$.

Théorème 3.4.6. *Soient $1 \leq q \leq p \leq \infty$.*
i) $T \in \mathcal{L}(F,X)$ est positivement (p,q)-sommant si, et seulement si T^{*} est positif fortement (q^{*},p^{*})-sommant.
ii) $T \in \mathcal{L}(X,F)$ est positif fortement (p,q)-sommant si, et seulement si T^{*} est positivement (q^{*},p^{*})-sommant.

Démonstration

i) Soit $T \in \Lambda_{p,q}(F,X)$, on montre que $T^{*} \in \mathcal{D}_{q^{*},p^{*}}^{+}(X^{*},F^{*})$.
Pour tous $n \in \mathbb{N}$, $(y_i^{**})_{i=1}^{n} \subset F^{**}$ et $(x_i^{*})_{i=1}^{n} \subset X^{*}$; on a,

$$\begin{array}{lcl} \sum\limits_{i=1}^{n} \left|\left\langle T^{*}(x_i^{*}), y_i^{**}\right\rangle\right| & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \left|\left\langle x_i^{*}, T^{**}(y_i^{**})\right\rangle\right| \\ & \leq & \sum\limits_{i=1}^{n} \left\|T^{**}(y_i^{**})\right\| \left\|x_i^{*}\right\| \\ \text{(Inég. Hölder)} & \leq & \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \left\|T^{**}(y_i^{**})\right\|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \left\|x_i^{*}\right\|^{p^{*}}\right)^{\frac{1}{p^{*}}} \\ \text{(Prop 3.2.2)} & \leq & \pi_{p,q}^{+}(T) \sup\limits_{\xi \in B_{F^{***}}^{+}} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \left\langle |y_i^{**}|, \xi\right\rangle^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \left\|x_i^{*}\right\|^{p^{*}}\right)^{\frac{1}{p^{*}}}. \end{array}$$

Donc,

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle T^{*}x_i^{*}, y_i^{**}\right\rangle\right| \leq \pi_{p,q}^{+}(T) \sup_{\xi \in B_{F^{***}}^{+}} \left(\sum_{i=1}^{n} \left\langle |y_i^{**}|, \xi\right\rangle^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{n} \left\|x_i^{*}\right\|^{p^{*}}\right)^{\frac{1}{p^{*}}}.$$

Alors,

$$T^{*} \in \mathcal{D}_{q^{*},p^{*}}^{+}(X^{*},F^{*}) \text{ et } d_{q^{*},p^{*}}^{+}(T^{*}) \leq \pi_{p,q}^{+}(T). \qquad (1)$$

Réciproquement, Supposons que $T^{*} \in \mathcal{D}_{q^{*},p^{*}}^{+}(X^{*},F^{*})$ et nous montrons que $T \in \Lambda_{p,q}(F,X)$. Soient $n \in \mathbb{N}$, $(x_i^{*})_{i=1}^{n} \subset X^{*}$ et $(y_i)_{i=1}^{n} \subset F$; on a,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{n}\langle T(y_i),x_i^*\rangle\right| &\leq \sum_{i=1}^{n}|\langle y_i,T^*(x_i^*)\rangle| \\ &\leq d^+_{q^*,p^*}(T^*)\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i^*\|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}\sup_{\xi\in B^+_{F^*}}\left(\sum_{i=1}^{n}\langle|y_i|,\xi\rangle^q\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Alors,

$$\sup_{\|(x_i^*)\|_{p^*}\leq 1}\left|\sum_{i=1}^{n}\langle T(y_i),x_i^*\rangle\right|\leq d^+_{q^*,p^*}(T^*)\sup_{\xi\in B^+_{F^*}}\left(\sum_{i=1}^{n}|\langle|y_i|,\xi\rangle|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Donc,

$$\|T(y_i)_{i=1}^n\|_p\leq d^+_{q^*,p^*}(T^*)\sup_{\xi\in B^+_{F^*}}\left(\sum_{i=1}^{n}|\langle|y_i|,\xi\rangle|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Finalement,

$$T\in\Lambda_{p,q}(F,X) \text{ et } d^+_{q^*,p^*}(T^*)\geq\pi^+_{p,q}(T). \qquad (2)$$

Des inégalités (1) et (2), nous concluons que : $d^+_{q^*,p^*}(T^*)=\pi^+_{p,q}(T)$.

ii) Il est clair.

Ce qui complète la démonstration. ■

Corollaire 3.4.7

1) *Si $p<q$, et T est positif fortement (p,q)-sommant, alors $T=0$.*
2) $\mathcal{D}^+_{p,1}(X,F)=\mathcal{L}(X,F)$ *pour tout* $1<p\leq\infty$.
3) $T\in\mathcal{D}^+_{p,q}(X,F)$ *si et seulement si* $T^{**}\in\mathcal{D}^+_{p,q}(X^{**},F^{**})$.

Proposition 3.4.8. *Pour* $1\leq q\leq p\leq+\infty$.

$$\mathcal{D}_{p,q}(X,F)\subset\mathcal{D}^+_{p,q}(X,F).$$

Démonstration. Si $T\in\mathcal{D}_{p,q}(X,F)$ par [15] l'opérateur $T^*\in\Lambda_{q^*,p^*}(F^*,X^*)$. D'après la Proposition 3 dans [17] nous avons $T^*\in\Lambda_{q^*,p^*}(F^*,X^*)$. Par le Théorème 3.4.6, on trouve $T\in\mathcal{D}^+_{p,q}(X,F)$. ■

Remarque 3.4.9. En général, l'inclusion est stricte. l'exemple suivant justifie ça. De [62] l'identité définit de $L^2(0,1)$ dans $L^1(0,1)$ est un opérateur positivement $(2,2)$-sommant mais, il n'est pas absolument $(2,2)$-sommant ; donc suivant le Théorème 3.4.6 et [27, Thorème 2.2.2], on a $I^*\in\mathcal{D}^+_{2,2}(L^\infty(0,1),L^2(0,1))$ et $I^*\notin\mathcal{D}_{2,2}(L^\infty(0,1),L^2(0,1))$.

3.5 Représentation tensorielle

Labuschagne dans [37, Théorème 5.2.] a démontré que, les opérateurs positivement p-sommants présentés dans [18] peuvent être décrits en termes de produit tensoriel convenable. Notre but est de représenter $\mathcal{D}_p^+(X, F)$ par un produit tensoriel.

Si E est un Banach réticulé et X un espace de Banach, alors la M-norme sur $X \otimes E$ est donnée par

$$\|u\|_M = \inf \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \, |y_i| \right\| ; u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \right\}$$

avec $x_1, ..., x_n \in X$ et $y_1, ..., y_n \in E$. La M-norme est une norme raisonnable sur $X \otimes E$ (voir [25, Theorem 1.4]) qui est égale à la m-norme de Schaefer sur $X \otimes E$ (voir [59]).

La transposée de la M-norme est :

$$\|u\|_{{}^tM} = \inf \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, \|y_i\| \right\| ; u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \right\}$$

où $x_1, ..., x_n \in E$ et $y_1, ..., y_n \in X$. Qui est une l-norme de Schaefer sur $E \otimes X$.

Le cône projectif sur le produit tensoriel $E \otimes F$ est défini par :

$$E_+ \otimes F_+ = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i : x_i \in E_+, y_i \in F_+, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Les normes M et ${}^tM$ ont la propriété que $E \widetilde{\otimes}_M F$ et $E \widetilde{\otimes}_{{}^tM} F$, si les équipé avec des normes respectives du fermeture du cône projectif $E \otimes F$, soient des espaces de Banach réticulé (voir [25, 36, 59]).

Le cône $\mathcal{C}$ dans $E \otimes F$ est dit cône raisonnable (cône tensoriel) dans $E \otimes F$ si $E_+ \otimes F_+ \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{C}_i(E, F)$, avec $\mathcal{C}_i(E, F)$ est le cône injectif

$$\mathcal{C}_i(E, F) = \left\{ u \in E \otimes F : 0 \leq x^* \otimes y^*(u), \forall (x^*, y^*) \in E_+^* \times F_+^* \right\}.$$

Si $\mathcal{C}$ est un cône raisonnable dans $E\otimes F$, alors la norme tensorielle raisonnable α sur $E\otimes F$ est dite la norme tensorielle raisonnable de l'ordre sur $(E\otimes F, \mathcal{C})$; pourvu que

i) $u, v \in E \otimes F$ avec $v \pm u \in \mathcal{C}$ implique $\alpha(u) \leq \alpha(v)$;

ii) Si $u \in E \otimes F$ et $\alpha(u) \leq 1$, alors il existe $v \in E \otimes F$ avec $v \pm u \in \mathcal{C}$ et $\alpha(v) < 1$.

Si α est une norme tensorielle raisonnable sur $E \otimes F$, $|\alpha|$ a été définie par

$$|\alpha|\,(u) = \inf\left\{\alpha(v) : v \in E_+ \otimes F_+ \text{ et } |u| \leq v\right\}, u \in E\overline{\otimes}F.$$

qui vérifie :

1) Pour $x \in E$ et $y \in F, |\alpha|\,(x \otimes y) \leq \|x\|\,\|y\|$,

2) Pour $x^* \in E^*$ et $y^* \in F^*, x^* \otimes y^* \in (E \otimes_{|\alpha|} F)^*$ et $\|x^* \otimes y^*\|_{|\alpha|} \leq \|x^*\|\,\|y^*\|$; c-à-d $|\alpha|$ est une norme tensorielle raisonnable positive sur $E \otimes F$ (pour des informations plus sur $|\alpha|$ voir [36]).

En utilisant pour $\mathcal{C}$ le cône injectif et la norme injective $\|.\|_\epsilon$. Labuschagne, dans [36], parle sur la norme injective raisonnable positive $\|.\|_{|\epsilon|}$ telle que

$$\|u\|_{|\epsilon|} = \inf\left\{\|v\|_\epsilon : v \in E \otimes F \text{ et } v \pm u \in \mathcal{C}_i\,(E, F)\right\}, u \in E \otimes F.$$

$E\widetilde{\otimes}_{|\epsilon|}F$ est un espace de Banach réticulé avec le cône positif de la $|\epsilon|$-fermeture du cône projectif $E_+ \otimes F_+$.

Définition 3.5.1 [37]
Soient X et Y deux espaces de Banach, γ et δ deux normes raisonnables sur $l^p \otimes X$ et $l^q \otimes Y$, respectivement. Soit $1 \leq p \leq \infty$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On définit

$$\|u\|_{(\gamma_p, \delta_q)} := \inf\left\{\|(x_i)\|_{l_p\otimes_\gamma X}\,\|(y_i)\|_{l_q\otimes_\delta Y} : u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\right\}$$

pour tout $u \in X \otimes Y$.

Théorème 3.5.2 [37, Théorèmes 4.4 et 5.2]
Soient E et F deux Banach réticulés, X, Y deux espaces de Banach, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ et $1 \leq p < \infty$. Alors,

1) $\|.\|_{\left(|\epsilon|_p, M_q\right)}$ *et* $\|.\|_{\left(|\epsilon|_p, {}^t M_q\right)}$ *sont deux normes raisonnables sur* $E \otimes F, E \otimes Y$ *respectivement.*
2) $\left(E \otimes_{\left(|\epsilon|_p, {}^t M_q\right)} X\right)^* = \mathcal{S}_p\left(E, X^*\right).$

Une conséquence immédiate du théorème précédent et le Théorème 3.4.6 est le suivant :

Corollaire 3.5.3. *Soient* X *un espace de Banach,* F *un Banach réticulé et* $1 < p \leq \infty$*. Alors,*

$$\mathcal{D}_p^+\left(X, F\right) = \left(F^* \otimes_{\left(|\epsilon|_{p^*}, {}^t M_p\right)} X\right)^*.$$

3.6 Théorèmes de domination et de factorisation de Pietsch

Nous pouvons écrire la version positive du théorème de domination de Pietsch pour les opérateurs fortement p-sommants.

Théorème 3.6.1 . (Théorème de domination)
L'opérateur $T \in \mathcal{L}\left(X, F\right)$ *est positif fortement* p*-sommant* $(1 < p \leq \infty)$*, si et seulement si il existe une positive constante* $C > 0$ *et une mesure de probabilité de Radon* μ *sur* $B_{F^{**}}^+$ *tels que pour tous* $x \in X$ *et* $y^* \in F^*$*, on a :*

$$\left|\left\langle T\left(x\right), y^*\right\rangle\right| \leq C \left\|x\right\| \Big(\int_{B_{F^{**}}^+} \left\langle \left|y^*\right|, \psi\right\rangle^{p^*} d\mu\Big)^{\frac{1}{p^*}}. \tag{3.9}$$

En plus, dans ce cas

$$d_p^+\left(T\right) = \inf\left\{C,\ \textit{vérifiant l'inégalité}\ (3.9)\right\}.$$

Démonstration.
Implication directe. Soit $T \in \mathcal{D}_{p,q}^+(X, F)$. En utilisant la Proposition 3.2.4 et puisque $T^* \in \mathcal{S}_{p^*}\left(F^*, X^*\right)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \left|\left\langle T\left(x\right), y^*\right\rangle\right| &= \left|\left\langle x, T^*(y^*)\right\rangle\right| \\ &\leq \|x\| \, \|T^*(y^*)\| \\ &\leq \pi_{p^*}\left(T^*\right) \|x\| \left(\int_{B_{F^{**}}^+} \left\langle \left|y^*\right|, \psi\right\rangle^{p^*} d\mu\right)^{\frac{1}{p^*}}. \end{aligned}$$

Implication indirecte. Soient $n \in \mathbb{N}, (y_i^*)_{i=1}^n \subset F^*, (x_i)_{i=1}^n \subset X$; on a :

$$|\langle T(x_i), y_i^* \rangle| \leq C \|x_i\| (\int_{B_{F^{**}}^+} \langle |y_i^*|, \psi \rangle^{p^*} d\mu)^{\frac{1}{p^*}};$$

pour tout i dans $\{1, ..., n\}$
par conséquent,

$$\begin{array}{lll} \sum\limits_{i=1}^n |\langle T(x_i), y_i^* \rangle| & \leq & C \sum\limits_{i=1}^n \|x_i\| (\int_{B_{F^{**}}^+} \langle |y_i^*|, \psi \rangle^{p^*} d\mu)^{\frac{1}{p^*}} \\ \text{Inég. Hölder} & \leq & C(\sum\limits_{i=1}^n \|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum\limits_{i=1}^n \int_{B_{F^{**}}^+} \langle |y_i^*|, \psi \rangle^{p^*} d\mu)^{\frac{1}{p^*}} \\ & \leq & C \|(x_i)_{i=1}^n\|_p \|(y_i^*)_{i=1}^n\|_{l_{p^*,|weak|}^n(F^*)}. \end{array}$$

Alors, $T \in \mathcal{D}_p^+(X, F)$. ■

Corollaire 3.6.2. *Si* $1 < p < q < \infty$, *alors* $\mathcal{D}_q^+(X, F) \subset \mathcal{D}_p^+(X, F)$.

En utilisant les Théorèmes 3.4.6 et 3.3.2 pour présenter le théorème de factorisation aux opérateurs positifs fortement p-sommants.

Théorème 3.6.3. (Théorème de factorisation de Pietsch) S*oient* $1 < p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$, X *un espace de Banach et* F *un Banach réticulé et* $T \in \mathcal{L}(X, F)$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) $T \in \mathcal{D}_p^+(X, F)$.
(ii) *Ils existent une mesure de probabilité de Borel* μ *sur* $B_{F^{**}}^+$, *un espace de Banach* $L_0^{p^*}(B_{F^{**}}^+, \mu)$ *et un opérateur linéaire continu* $v : X \longrightarrow \left(L_0^{p^*}(\mu)\right)^*$ *tels que*

$$k_F \circ T = i_{F^*}^* \circ J_{p^*,0}^* \circ v.$$

Démonstration. Pour la preuve, nous appliquons les mêmes techniques que dans la démonstration du Théorème 6.2 dans [6].

$(i) \Longrightarrow (ii)$ Soit $T \in \mathcal{D}_p^+(X, F)$. Par le Théorème 3.4.6, on a $T^* \in S_{p^*}(F^*, X^*)$ avec $d_p^+(T) = \pi_{p^*}^+(T^*)$. D'après le Théorème 3.3.2, on obtient la factorisation suivante

$$
\begin{array}{ccc}
F^* & \xrightarrow{T^*} & X^* \\
i_{F^*} \downarrow & & \uparrow u \\
i_{F^*}\left(F^*\right) & \xrightarrow{J_{p^*,0}} & L_0^{p^*}\left(B_{F^{**}}^+, \mu\right)
\end{array}
$$

donc par dualité, on trouve

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & F & & & \\
 & T \nearrow & & & & \searrow k_F & \\
X & \xrightarrow{k_X} & & X^{**} & & \xrightarrow{T^{**}} & F^{**} \\
 & v \searrow & & \downarrow u^* & & & \uparrow i_{F^*}^* \\
 & & & \left(L_0^{p^*}\left(\mu\right)\right)^* & & \xrightarrow{J_{p^*,0}^*} & \left(i_{F^*}\left(F^*\right)\right)^*
\end{array}
$$

où v est un opérateur linéaire défini comme suit

$$
\begin{aligned}
\left\langle v\left(x\right), J_{p^*,0} \circ i_{F^*}\left(y^*\right)\right\rangle &:= \left\langle u^* \circ k_X\left(x\right), J_{p^*,0} \circ i_{F^*}\left(y^*\right)\right\rangle \\
&= u\left(J_{p^*,0} \circ i_{F^*}\left(y^*\right)\right)\left(x\right).
\end{aligned}
$$

Pour tout $y^* \in F^*, x \in X$. L'application v est bien définie et continue puisque

$$
\begin{gathered}
\left|\left\langle v\left(x\right), J_{p^*,0} \circ i_{F^*}\left(y^*\right)\right\rangle\right| \leq \left\|J_{p^*,0} \circ i_{F^*}\left(y^*\right)\right\|_{L_0^{p^*}\left(\mu\right)} \left\|u\right\| \left\|x\right\|. \\
\sup\left\{\left|\left\langle v\left(x\right), J_{p^*,0} \circ i_{F^*}\left(y^*\right)\right\rangle\right|, \left\|J_{p^*,0} \circ i_{F^*}\left(y^*\right)\right\|_{L_0^{p^*}\left(\mu\right)} \leq 1\right\} \leq \left\|u\right\| \left\|x\right\|
\end{gathered}
$$

Donc

$$
\left\|v\left(x\right)\right\| \leq \left\|u\right\| \left\|x\right\| \text{ et } \left\|v\right\| \leq \left\|u\right\|.
$$

$(ii) \Longrightarrow (i)$ Soit $k_F \circ T = i_{F^*}^* \circ J_{p^*,0}^* \circ v = \left(J_{p^*,0} \circ i_{F^*}\right)^* \circ v$. L'application $J_{p^*,0} \circ i_{F^*}$ est positivement p^*-sommant, voir le Lemme 3.3.1. Alors $\left(J_{p^*,0} \circ i_{F^*}\right)^*$ est positif fortement p-sommant. Par conséquent, $\left(J_{p^*,0} \circ i_{F^*}\right)^* \circ v$ l'est aussi par la propriété d'idéal. Alors $T^* = v^* \circ \left(J_{p^*,0} \circ i_{F^*}\right)^{**} \circ k_{F^*} \in \mathcal{S}_{p^*}\left(F^*, X^*\right)$ car $k_F^* \circ k_{F^*} = id_{F^*}$.
Finalement,

$$
T \in \mathcal{D}_p^+\left(X, F\right). \qquad \blacksquare
$$

3.7 Applications

Si on combine nos résultats avec les techniques appliquées sur les opérateurs (p,q)-concaves (voir [30, 39]) nous montrerons que quelques résultats sur les opérateurs (q,p)-convexes, on peut les appliquer sur des cas généraux. Ces résultats donnent des relations entre les opérateurs (q,p)-convexes et les opérateurs positifs fortement (p,q)-sommants d'un espace de Banach dans un Banach réticulé.

Proposition 3.7.1. *Pour* $1 < q \leq p \leq +\infty$. Alors

$$\mathcal{D}^{+}_{p,q}(X,F) \subset \mathcal{C}^{vex}_{(q,p)}(X,F).$$

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{D}^{+}_{p,q}(X,F)$. Donc, $T^{*} \in \Lambda_{q^{*},p^{*}}(F^{*},X^{*})$. D'après [17, Proposition 3] et [30, théorème 16.21], on conclut que $T^{**} \in \mathcal{C}^{vex}_{(q,p)}(X^{**},F^{**})$. Alors, par le Corollaire 1.6.4, $T \in \mathcal{C}^{vex}_{(q,p)}(X,F)$. ■

Proposition 3.7.2. On a
(1) $\mathcal{D}^{+}_{\infty,q}(X,F) = \mathcal{C}^{vex}_{(q,\infty)}(X,F)$;
(2) $\mathcal{D}^{+}_{\infty,q}(X,F) \subset \mathcal{C}^{vex}_{(s,s)}(X,F)$ *pour tout* $s < q$.

Démonstration
(1) Ceci résulte de [17, Proposition 4], où il a prouvé que

$$\Lambda_{q^{*},1}(F^{*},X^{*}) = \mathcal{C}^{cav}_{(q^{*},1)}(F^{*},X^{*})$$

et des Théorème 3.4.6, Théorème 1.6.3 et le Corollaire 1.6.4.
(2) Utilisons les mêmes techniques. ■

Proposition 3.7.3
(1) $\mathcal{D}^{+}_{p,q}(X,c_0) = \mathcal{L}(X,c_0)$;
(2) $\mathcal{D}^{+}_{p,q}(X^{*},l_1) = \mathcal{C}^{vex}_{(q,p)}(X^{*},l_1)$.

Démonstration. Nous prouvons (1) seulement. On peut vérifier (2) comme (1).
Si T est dans $\mathcal{D}^{+}_{p,q}(X,c_0)$, alors T^{*} est dans $\Lambda_{q^{*},p^{*}}(c_0^{*},X^{*})\,(=\mathcal{L}(l_1,X^{*}))$ [17, Proposition 6]. Donc $T \in \mathcal{L}(X,c_0)$. ■

Pour K un espace compact, on note par $\mathcal{M}(K)$ l'espace des mesures régulières de Borel sur K. Le théorème suivant caractérise les opérateurs positifs fortement (p,q)-sommants.

Théorème 3.7.4
(1) $T \in \mathcal{C}^{vex}_{(q,p)}(X,F)$ *si et seulement si pour tout opérateur positif* S *dans* $\mathcal{L}(F,\mathcal{M}(K)), S \circ T \in \mathcal{D}^{+}_{p,q}(X,\mathcal{M}(K))$;
(2) $T \in \mathcal{D}^{+}_{\infty,q}(X,F)$ *si et seulement si pour tout opérateur* S *dans* $\mathcal{L}(F,l_1)$, $S \circ T \in \mathcal{D}^{+}_{\infty,q}(X,l_1)$;
(3) $T \in \mathcal{D}_{\infty,q}(X,F)$ *si et seulement si pour tout opérateur positif* S *dans* $\mathcal{L}(X,l_1), S \circ T \in \mathcal{D}_{\infty,q}(X,l_1)$.

Démonstration. On démontre seulement (1).
Implication directe. Si $T \in \mathcal{C}^{vex}_{(q,p)}(X,F)$ alors $T^* \in \mathcal{C}^{cav}_{(q^*,p^*)}(F^*,X^*)$. Pour tout opérateur positif S dans $\mathcal{L}(F,\mathcal{M}(K))$, la restriction à $\mathcal{C}(K)$ de l'opérateur $S^* : \mathcal{C}(K)^{**} \longrightarrow F^*$; est un opérateur positif et par [17, Proposition 5-c] nous avons

$$T^* \circ S^* = (S \circ T)^* \in \Lambda_{q^*,p^*}(\mathcal{C}(K), X^*)$$

donc, par le Théorème 3.4.6,

$$(S \circ T)^{**} \in \mathcal{D}^{+}_{p,q}(X^{**},\mathcal{M}(K)) ;$$

finalement, d'aprés le Corollaire 3.4.7 (3).

$$S \circ T \in \mathcal{D}^{+}_{p,q}(X,\mathcal{M}(K)) .$$

Implication indirecte. Pour tout opérateur positif S de $\mathcal{L}(F,\mathcal{M}(K))$, nous avons $S \circ T \in \mathcal{D}^{+}_{p,q}(X,\mathcal{M}(K))$.

Alors, d'après le Théorème 3.4.6,

$$T^* \circ \left(S^*/_{\mathcal{C}(K)}\right) \in \Lambda_{q^*,p^*}(\mathcal{C}(K), X^*)$$

et d'après [17, Proposition 5-c] on trouve

$$T^* \in \mathcal{C}^{cav}_{(q^*,p^*)}(F^*,X^*) ,$$

donc

$$T \in \mathcal{C}^{vex}_{(q,p)}(X, F). \qquad \blacksquare$$

Une immédiate conséquence du Théorème 3.7.4 est le suivant :

Corollaire 3.7.5. *F est p-convexe (i.e., $id_F \in \mathcal{C}^{vex}_{(p,p)}(F, F)$) si, et seulement si tout opérateur positif S est dans $\mathcal{D}^+_p(F, \mathcal{M}(K))$.*

Chapitre 4

Extension des opérateurs n-linéaires $(r; r_1, ..., r_n; s)$-nucléaires

Matos a introduit dans [41], la notion des opérateurs multilinéaires virtuellement $(r; r_1, ..., r_n)$-nucléaires de $X_1 \times \cdots \times X_n$ dans Y et il a démontré que, si les espaces X_k^* $(k = 1, ..., n)$ possèdent la propriété d'approximation λ-bornée avec $r, r_1, ..., r_n \in [1, +\infty[$; alors le dual topologique de l'espace de ces opérateurs est isométriquement isomorphe à l'espace de tous les opérateurs multiple $(r'; r'_1, ..., r'_n)$-sommants de $X_1^* \times \cdots \times X_n^*$ dans Y^* avec $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$ et $\frac{1}{r_k} + \frac{1}{r'_k} = 1$; $k = 1, ..., n$.

Cerna [23] a donné la définition des opérateurs multilinéaires $(r; r_1, ..., r_n; s)$-nucléaires, comme une généralisation naturelle du concept de l'opérateur (r, p, s)-nucléaire introduit par Lapresté (voir [38, 51]).

Motivé par ces résultats et idées, nous introduisons et étudions les opérateurs multilinéaires virtuellement $(r; r_1, ..., r_n; s)$-nucléaires et nous établirons le lien entre le dual topologique de cet espace et l'espace des opérateurs multilinéaires multiple $(r'; r'_1, ..., r'_n; s')$-sommants initiés par Pellegrino et al., ([16]) de $X_1^* \times \cdots \times X_n^*$ dans Y^*, pour r, r_k $k = 1, ..., n$ et $s \in [1, +\infty]$, sous les mêmes conditions données par Matos dans la référence précédente. En conséquence ; on obtient un résultat similaire entre le dual topologique de l'espace des opérateurs $(r; r_1, ..., r_n; s)$-nucléaires [24] et l'espace des opérateurs $(r'; r'_1, ..., r'_n; s')$-sommants introduit par Achour dans [1]. Ces résultats sont consignés dans la référence [4].

4.1 Espace des familles sommables

Si $r \in]0,+\infty[$, nous notons $l_r(Y,\mathbb{N}^n)$ ou $(l_r(\mathbb{N}^n)\,;$ si $Y=\mathbb{K})$ l'espace vectoriel de toutes les familles $(y_j)_{j\in\mathbb{N}^n}$ (un élément $j\in\mathbb{N}^n$ sera représenté par $(j_1,...,j_n)$ avec $j_l\in\mathbb{N}$ et $l=1,...,n)$ des éléments de Y telle que

$$\|(y_j)_{j\in\mathbb{N}^n}\|_r := (\sum_{j\in\mathbb{N}^n}\|y_j\|_Y^r)^{\frac{1}{r}} < \infty.$$

Nous observons que $\|.\|_r$ est une norme (r-norme, si $r<1$) sur $l_r(Y,\mathbb{N}^n)$. Nous notons $l_\infty(Y,\mathbb{N}^n)$ ou $(l_\infty(\mathbb{N}^n)\,;$ si $Y=\mathbb{K})$ l'espace de Banach de toutes les familles bornées $(y_j)_{j\in\mathbb{N}^n}$ des éléments de Y, sous la norme

$$\|(y_j)_{j\in\mathbb{N}^n}\|_\infty := \sup_{j\in\mathbb{N}^n}\|y_j\|.$$

le sous espace de Banach de $l_\infty(Y,\mathbb{N}^n)$ de la famille $(y_j)_{j\in\mathbb{N}^n}$ telle que

$$\lim_{j_k\to+\infty,k=1,...,n}\|y_j\| = 0$$

est noté par $c_0(Y,\mathbb{N}^n)$ ou $(c_0(\mathbb{N}^n)\,;$ si $Y=\mathbb{K})$.
Si $0<r\leq\infty$, nous écrivons $l_r^w(Y,\mathbb{N}^n)$ ou $(l_r^w(\mathbb{N}^n)\,;$ si $Y=\mathbb{K})$, pour l'espace de toutes les familles $(y_j)_{j\in\mathbb{N}^n}$ des éléments de Y avec la norme

$$\|(y_j)_{j\in\mathbb{N}^n}\|_{w,r} := \sup_{\|\psi\|_{Y^*}\leq 1}(\sum_{j\in\mathbb{N}^n}|\psi(y_j)|^r)^{\frac{1}{r}} = \sup_{\|\psi\|_{Y^*}\leq 1}\|(\psi(y_j))_{j\in\mathbb{N}^n}\|_r.$$

Pour $1\leq r<\infty$ et $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}^n}=(\varphi_{j_1...j_n})_{j\in\mathbb{N}^n}\in l_r^w(Y^*,\mathbb{N}^n)$, nous avons

$$\left\|(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}^n}\right\|_{w,r} := \sup_{\phi\in B_{Y^{**}}}(\sum_{j\in\mathbb{N}^n}\left|\phi(\varphi_j)\right|^r)^{\frac{1}{r}} = \sup_{y\in B_Y}\left\|\left(\varphi_j(y)\right)_{j\in\mathbb{N}^n}\right\|_r.$$

Nous considérons également les familles finies $(y_j)_{j\in\mathbb{N}_m^n}$ des éléments d'un espace de Banach. Ici $\mathbb{N}_m=\{1,...,m\}$ et nous appliquons le symbole $\|.\|_r$ à ces familles comme nous avons fait dans le cas infini. Si $n=1$, il est habituel d'omettre $\mathbb{N}^n$ dans toutes les notations précédentes et nous obtenons les espaces des suites classiques.

4.2 Idéal des opérateurs multilinéaires

Commençons par rappeler quelques notions de base et notations. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $X_1, ..., X_n, Y$ des espaces de Banach, dont les normes sont, respectivement, notées par :

$$\|.\|_1, ..., \|.\|_n, \|.\|_Y .$$

Définition 4.2.1. (Les opérateurs multilinéaires) Un opérateur $T : X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow Y$ est dit multilinéaire (n-linéaire) si pour tout $j = 1, ..., n$ et pour toute suite finie $(\alpha_i)_{i=1}^2 \subset K$, on a :

$$T(x^1, ..., \sum_{i=1}^{2} \alpha_i x_j^i, ..., x^n) = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i T(x^1, ..., x_j^i, ..., x^n)$$

C'est-à-dire T est multilinéaire si, et seulement si les opérateurs

$$x^j \in X_j \longmapsto T(x^1, ..., x^j, ..., x^n) \in Y$$

sont linéaires. On note $L(X_1, ..., X_n; Y)$ l'ensemble des opérateurs multilinéaires de $X_1 \times \cdots \times X_n$ dans Y.

Définition 4.2.2. L'opérateur n-linéaire $T : X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow Y$ est continu si il est continu comme une fonction entre deux espaces normés.

Proposition 4.2.3. *(Multilinéaire continu). Soit $T \in L(X_1, ..., X_n; Y)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes.*
(1) *L'opérateur T est continu.*
(2) *L'opérateur T est continu en $(0, \overset{n \text{ fois}}{\ldots}, 0)$.*
(3) *Il existe une constante $C > 0$ telle que $\|T(x^1, ..., x^n)\| \leq C \|x^1\|_1 \times \cdots \times \|x^n\|_n$ pour tout $(x^1, ..., x^n)$ dans $X_1 \times \cdots \times X_n$. Dans ce cas, on pose*

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{\|x^j\|_{X_j} \leq 1,\ j=1,...,n} \|T(x^1, ..., x^n)\| \\ &= \inf \{C;\ C \text{ vérifiant l'inégalité ci-dessus}\} . \end{aligned}$$

et on peut dire que T est borné. L'espace des opérateurs n-linéaires continus (ou bornés) de $X_1 \times \cdots \times X_n$ dans Y est un espace de Banach, on le note $\mathcal{L}(X_1, ..., X_n; Y)$. Si $Y = \mathbb{K}$, on écrit $\mathcal{L}(X_1, ..., X_n)$. Si $X_1 = \cdots = X_n = X$, on note simplement $\mathcal{L}(^n X; Y)$.

Opérateur de rang fini : Un opérateur multilinéaire $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_n; Y)$ est de rang fini s'il s'écrit comme une somme finie d'opérateurs de la forme

$$T : \left(x^1, ..., x^n\right) \to x_1^* \left(x^1\right) ... x_n^* \left(x^n\right) y,$$

où $x_k^* \in X_k^*$ $(1 \leq k \leq n)$ et $y \in Y$. L'espace des opérateurs n-linéaires de rang fini sera noté $\mathcal{L}_f(X_1, ..., X_n; Y)$.

Définition 4.2.4. [52] (Idéal des opérateurs multilinéaires)
Un idéal des opérateurs multilinéaires (ou multi-idéal) est la classe $\mathcal{M}$ des opérateurs multilinéaires bornés entre des espaces de Banach tels que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $X_1, ..., X_n$ et Y des espaces de Banach, l'ensemble

$$\mathcal{M}(X_1, ..., X_n; Y) := \mathcal{L}(X_1, ..., X_n; Y) \cap \mathcal{M}$$

satisfait :
(i) $\mathcal{M}(X_1, ..., X_n; Y)$ est un sous espace de $\mathcal{L}(X_1, ..., X_n; Y)$ qui contient les opérateurs n-linéaires de rang finis.
(ii) Propriété d'idéal : Si $T \in \mathcal{M}(G_1, ..., G_n; Y)$, $A_j \in \mathcal{L}(X_j, G_j)$ avec $j = 1, ..., n$ et $v \in \mathcal{L}(Y, F)$, alors $v \circ T \circ (A_1, ..., A_n) \in \mathcal{M}(X_1, ..., X_n; F)$.
Si $\|.\|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^+$ satisfait :
(i′) $(\mathcal{M}(X_1, ..., X_n; Y), \|.\|_{\mathcal{M}})$ est un espace normé (Banach),
(ii″) $\|T^n : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K} : T^n\left(x^1, ..., x^n\right) = x^1 ... x^n\|_{\mathcal{M}} = 1$ quelque soit n,
(iii‴) Si $T \in \mathcal{M}(G_1, ..., G_n; Y), A_j \in \mathcal{L}(X_j, G_j)$ avec $j = 1, ..., n$ et $v \in \mathcal{L}(Y, F)$, alors,

$$\|v \circ T \circ (A_1, ..., A_n)\|_{\mathcal{M}} \leq \|v\| \, \|T\|_{\mathcal{M}} \, \|A_1\| \cdots \|A_n\| .$$

Donc $(\mathcal{M}, \|.\|_{\mathcal{M}})$ s'appelle idéal normé (de Banach) des opérateurs multilinéaires.
On définit

$$\mathcal{M}^{\mathbb{K}} := \{\mathcal{M}(X_1, ..., X_n; \mathbb{K}) : n \in \mathbb{N} \text{ et } X_1, ..., X_n \text{ sont des espaces de Banach}\},$$

on dit que $\mathcal{M}^{\mathbb{K}}$ est un idéal des formes multilinéaires.

Exemple 1. (l'idéal $\mathcal{L}_N$) [40]
L'opérateur $T \in \mathcal{L}\left(X_1, ..., X_n; Y\right)$ est de type $(r; r_1, ..., r_n)$-nucléaire si il existe $(\lambda_i)_{i=1}^{\infty} \in l_r$ ($\in c_0$, si $r = \infty$), $(y_i)_{i=1}^{\infty} \in l_\infty\left(Y\right)$ et $\left(\phi_i^k\right)_{i=1}^{\infty} \in l_{r_k'}\left(X_k^*\right), k = 1, ..., n$ telle que

$$T(x^1, ..., x^n) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \phi_i^1 \left(x^1\right) ... \phi_i^n \left(x^n\right) y_i. \tag{4.1}$$

L'espace vectoriel de ces opérateurs est noté par $\mathcal{L}_N^{(r;r_1,...,r_n)}(X_1, ..., X_n; Y)$ et c'est un idéal muni par la t_n-norme,

$$\|T\|_{\mathcal{N}(r;r_1,...,r_n)} = \inf \|(\lambda_i)_{i=1}^{\infty}\|_r \|(\lambda_i)_{i=1}^{\infty}\|_{\infty} \prod_{i=1}^{n} \left\|(\phi_i^k)_{i=1}^{\infty}\right\|_{w,r_k'},$$

où l'infimum se porte sur toutes les représentations possibles de T comme décrit dans (4.1) tels que

$$\tfrac{1}{t} = \tfrac{1}{r} + \tfrac{1}{r_1'} + \cdots + \tfrac{1}{r_n'};\ t \in (0, 1].$$

Exemple 2. (l'idéal $\mathcal{L}_{as}$) [1]
Pour $0 < r, r_1, ..., r_n < \infty, 0 < s \leq \infty$, avec $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_n} + \frac{1}{s}$, l'opérateur $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_n; Y)$ est un $(r; r_1, ..., r_n; s)$-sommant s'il existe une constante $C > 0$ tels que pour tous $x_1^j, ..., x_m^j \in X_j$, $(1 \leq j \leq n)$, et tous $y_1^*, ..., y_m^* \in Y^*$, nous avons

$$\left\|(\langle T\left(x_i^1, ..., x_i^n\right), y_i^*\rangle)_{i=1}^m\right\|_r \leq C \prod_{j=1}^{n} \left\|(x_i^j)_{i=1}^m\right\|_{w,r_j} \|(y_i^*)_{i=1}^m\|_{w,s}.$$

L'espace vectoriel de ces opérateurs est noté $\mathcal{L}_{as}^{(r;r_1,...,r_n;s)}(X_1, ..., X_n; Y)$ et la plus petite C, qui vérifiée l'inégalité précédente par $\pi_{(r;r_1,...,r_n;s)}^n(T)$, définit une norme ($r$-norme si $r < 1$) sur $\mathcal{L}_{as}^{(r;r_1,...,r_n;s)}(X_1, ..., X_n; Y)$.

4.3 Produit tensoriel

On peut construire un produit tensoriel $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$ des espaces $X_1, ..., X_n$ par des éléments de l'espace $(L(X_1, ..., X_n; Y))^*$. Pour $x^j \in X_j (j = 1, ..., n)$, on définit l'opérateur linéaire

$$x^1 \otimes \cdots \otimes x^n : L(X_1, ..., X_n) \longrightarrow \mathbb{K},$$

par

$$x^1 \otimes \cdots \otimes x^n(\phi) := \phi(x^1, ..., x^n),$$

pour toute forme linéaire ϕ sur $X_1 \times \cdots \times X_n$. Le fonctionnel $x^1 \otimes \cdots \otimes x^n$ est un tenseur élémentaire.

Définition 4.3.1. Le sous-espace de $L(X_1, ..., X_n)^*$ engendré par une collection des tenseurs élémentaires $\{x^1 \otimes \cdots \otimes x^n, x^j \in X_j (j = 1, ..., n)\}$, est un produit tensoriel $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$ des espaces $X_1, ..., X_n$.
Les éléments de cet espace sont appelés tenseurs. Donc, un tenseur type $u \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$ s'écrit sous la forme

$$u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^n, \tag{4.2}$$

où $(\lambda_i)_{i=1}^m \subset \mathbb{K}, (x_i^j)_{i=1}^m \subset X_j (j = 1, ..., n)$ et $m \in \mathbb{N}$ est arbitraire.

Proposition 4.3.2. (**Unicité du produit tensoriel**). *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $X_1, ..., X_n$ des espaces vectoriels. Supposons qu'il existe un espace vectoriel W et un opérateur multilinéaire $S : X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow W$ avec la propriété suivante, pour chaque espace vectoriel Y et tout opérateur multilinéaire T de $X_1 \times \cdots \times X_n$ dans Y, il existe un seul opérateur linéaire $u : W \longrightarrow Y$ tel que $T = u \circ S$. Alors, il existe un isomorphisme $\Phi : X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \longrightarrow W$ telle que*

$$\Phi(x^1 \otimes \cdots \otimes x^n) = S(x^1, ..., x^n),$$

pour tout $x^j \in X_j (j = 1, ..., n)$.

Maintenant, nous introduisons le produit tensoriel des opérateurs linéaires.

Proposition 4.3.3. *Soient $s_j : X_j \longrightarrow Y_j (j = 1, ..., n)$ des opérateurs linéaires entre des espaces vectoriels. Alors il existe un seul opérateur linéaire*

$$s : X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \longrightarrow Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_n,$$

telle que

$$s(x^1 \otimes \cdots \otimes x^n) = s_1(x^1) \otimes \cdots \otimes s_n(x^n).$$

On note par $(X_1 \otimes_\alpha \cdots \otimes_\alpha X_n)$ le produit tensoriel $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$ avec une norme α. Sa complété, notée $X_1 \widehat{\otimes}_\alpha \cdots \widehat{\otimes}_\alpha X_n$.

Définition 4.3.4 [54]. Soient $X_j (j = 1, ..., n)$ des espaces normés sur le même corps. On dira qu'une norme α sur $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$ est une norme raisonnable si α satisfait les conditions suivantes :
1) Pour chaque $x^j \in X_j (j = 1, ..., n)$,

$$\alpha(x^1 \otimes \cdots \otimes x^n) \leq \|x^1\| \cdots \|x^n\| .$$

2) Pour chaque $\varphi^j \in X_j^* (j = 1, ..., n)$ le fonctionnel $\varphi^1 \otimes \cdots \otimes \varphi^n$ sur $X_1 \otimes_\alpha \cdots \otimes_\alpha X_n$ est continu et

$$\|\varphi^1 \otimes \cdots \otimes \varphi^n\| \leq \|\varphi^1\| \cdots \|\varphi^n\| .$$

Définition 4.3.5. (**Produit tensoriel injectif**).
Soient $X_1, ..., X_n$ des espaces normés sur $\mathbb{K}$. La norme injective sur $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$ est définie par

$$\epsilon(u) = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^{m} \varphi^1(x_i^1) ... \varphi^n(x_i^n) \right| , \varphi^j \in B_{X_j^*} (j = 1, ..., n) \right\} ,$$

où $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^n$ est une représentation quelconque de $u \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$.

Nous notons par $X_1 \otimes_\epsilon \cdots \otimes_\epsilon X_n$ le produit tensoriel $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$ avec la norme injective. Sa complété, notée $X_1 \widehat{\otimes}_\epsilon \cdots \widehat{\otimes}_\epsilon X_n$, est dite le produit tensoriel injectif de $X_1, ..., X_n$.

Proposition 4.3.6. *Soient $X_1, ..., X_n$ des espaces normés sur $\mathbb{K}$.*
(1) $\epsilon(x^1 \otimes \cdots \otimes x^n) = \|x^1\| \cdots \|x^n\|$ pour chaque $x^j \in X_j (j = 1, ..., n)$
(2) Si $\varphi^j \in X_j^* (j = 1, ..., n)$ alors $\varphi^1 \otimes \cdots \otimes \varphi^n$ est un fonctionnel continu sur $X_1 \otimes_\epsilon \cdots \otimes_\epsilon X_n$ avec la norme

$$\left\|\varphi^1 \otimes \cdots \otimes \varphi^n\right\| = \left\|\varphi^1\right\| \cdots \left\|\varphi^n\right\| .$$

Il est clair que la norme injective est une norme tensorielle.

4.4 Caractérisation des opérateurs multilinéaires $(r; r_1, ..., r_n; s)$-sommants

Achour et Dahia ont introduit dans [5] une norme tensorielle raisonnable sur le produit tensoriel algébrique $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \otimes Y$ et ils ont montré que son dual topologique muni de cette norme s'identifie isométriquement à l'espace des opérateurs multilinéaires $(r; r_1, ..., r_n; s)$-sommants.

Dans ce paragraphe nous montrons que si les espaces X_k^* $(k = 1, ..., n)$ possèdent la propriété d'approximation λ-bornée ; alors le dual topologique de l'espace de tous les opérateurs $(r; r_1, ..., r_n; s)$-nucléaires de $X_1 \times \cdots \times X_n$ dans Y est isométriquement isomorphe à l'espace des opérateurs multilinéaires $(r'; r'_1, ..., r'_n; s')$-sommants.

Soient X_k $(k = 1, ..., n)$ et Y des espaces de Banach, u un élément de $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \otimes Y$. On considère

$$\rho_{(r;r_1,...,r_n;s)}(u) = \inf \left\{ \|(\lambda_i)_{i=1}^m\|_r \prod_{k=1}^n \left\|(x_k^i)_{i=1}^m\right\|_{w,r_k} \|(y_i)_{i=1}^m\|_{w,s} \right\}$$

où l'infimum se porte sur toutes les représentations de u tel que $u = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_1^i \otimes \cdots \otimes x_n^i \otimes y_i$ avec $\lambda_i \in \mathbb{K}, x_k^i \in X_i, y_k \in Y, i = 1, ..., m, k = 1, ..., n$ et $n, m \in \mathbb{N}$.

Proposition 4.4.1 [5]
Pour tout n-uple tels que $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_n} + \frac{1}{s}$ *et* $0 < r \leq 1$. *Alors,* $\rho_{(r;r_1,...,r_n;s)}$ *est une r-norme tensorielle sur* $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \otimes Y$.

Dans le cas contraire, $r > 1$, $\rho_{(r;r_1,...,r_n;s)}$ est identiquement nulle.

Démonstration. Soit u_1, u_2 deux éléments de $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \otimes Y$, nous pouvons écrire,

$$u_j = \sum_{i=1}^m \lambda_{j,i} x_{j,1}^i \otimes \cdots \otimes x_{j,n}^i \otimes y_{j,i};\ j = 1, 2.$$

Premièrement, on démontre que

$$\rho_{(r;r_1,...,r_n;s)}(u_1 + u_2) \leq \left(\rho^r_{(r;r_1,...,r_n;s)}(u_1) + \rho^r_{(r;r_1,...,r_n;s)}(u_2)\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Pour tout $\epsilon > 0$. Nous avons pour tout j dans $\{1, 2\}$

$$\begin{aligned}
\left\|\left(x_{i,j}^k\right)_{i=1}^m\right\|_{w,r_k} &\leq \left(\rho^r_{(r;r_1,...,r_n;s)}(u_j) + \epsilon\right)^{\frac{1}{r_k}};\ k \in \{1, ..., n\},\\
\left\|(y_{i,j})_{i=1}^m\right\|_{w,s} &\leq \left(\rho^r_{(r;r_1,...,r_n;s)}(u_j) + \epsilon\right)^{\frac{1}{s}},\\
\left\|(\lambda_{i,j})_{i=1}^m\right\|_r &\leq \left(\rho^r_{(r;r_1,...,r_n;s)}(u_j) + \epsilon\right)^{\frac{1}{r}},
\end{aligned}$$

par conséquent,

$$\left\|\left(x_{i,j}^k\right)_{i,j}\right\|_{w,r_k} \leq \left(\rho^r_{(r;r_1,...,r_n;s)}(u_1) + \rho^r_{(r;r_1,...,r_n;s)}(u_2) + \epsilon\right)^{\frac{1}{r_k}}; \ k \in \{1, ..., n\},$$

$$\left\|(y_{i,j})_{i,j}\right\|_{w,s} \leq \left(\rho^r_{(r;r_1,...,r_n;s)}(u_1) + \rho^r_{(r;r_1,...,r_n;s)}(u_2) + \epsilon\right)^{\frac{1}{s}},$$

$$\left\|(\lambda_{i,j})_{i,j}\right\|_{r} \leq \left(\rho^r_{(r;r_1,...,r_n;s)}(u_1) + \rho^r_{(r;r_1,...,r_n;s)}(u_2) + \epsilon\right)^{\frac{1}{r}},$$

alors

$$\left\|(\lambda_{i,j})_{i,j}\right\|_{r} \prod_{k=1}^{n} \left\|\left(x_{i,j}^k\right)_{i,j}\right\|_{w,r_k} \left\|(y_{i,j})_{i,j}\right\|_{w,s} \leq \left(\rho^r_{(r;r_1,...,r_n;s)}(u_1) + \rho^r_{(r;r_1,...,r_n;s)}(u_2) + \epsilon\right)^{\frac{1}{r}},$$

donc

$$\rho_{(r;r_1,...,r_n;s)}(u_1 + u_2) \leq \left(\rho^r_{(r;r_1,...,r_n;s)}(u_1) + \rho^r_{(r;r_1,...,r_n;s)}(u_2)\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Il est facile de remarquer que, $\rho_{(r;r_1,...,r_n;s)}$ est positivement homogène.
Pour $u = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^n \otimes y_i$ et $u' = \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j x_j'^1 \otimes \cdots \otimes x_j'^n \otimes y_j'$, on a

$$\begin{aligned} |\langle u, u' \rangle| &= \left| \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \prod_{k=1}^{n} \left\langle x_i^k, x_j'^k \right\rangle \left\langle y_i, y_j' \right\rangle \right| \\ &\leq \left| \sum_{i,j} |\lambda_i|^r |\lambda_j|^r \prod_{k=1}^{n} \left|\left\langle x_i^k, x_j'^k \right\rangle\right|^r \left|\left\langle y_i, y_j' \right\rangle\right|^r \right|^{\frac{1}{r}}. \end{aligned}$$

Donc, par l'inégalité généralisée de Hölder, on écrit

$$|\langle u, u' \rangle| \leq \prod_{k=1}^{n} \left\|\left(\left\langle x_i^k, x_j'^k \right\rangle\right)_{i,j}\right\|_{w,r_k} \left\|\left(\left\langle y_i, y_j' \right\rangle\right)_{i,j}\right\|_{w,s} \left\|\left(\lambda_i \lambda_j'\right)_{i,j}\right\|_{r}$$

i.e.

$$|\langle u, u' \rangle| \leq \rho_{(r;r_1,...,r_n;s)}(u) \cdot \rho_{(r;r_1,...,r_n;s)}(u') .$$

Ainsi, $\rho_{(r;r_1,...,r_n;s)}(u) = 0$ implique $u = 0$. ■

Proposition 4.4.2. $\rho_{(r;r_1,...,r_n;s)}$ *est une norme tensorielle raisonnable et* $\epsilon \leq \rho_{(r;r_1,...,r_n;s)}$, *où* ϵ *est la norme injective sur* $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \otimes Y$.

Démonstration. Si $u = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^n \otimes y_i$
nous avons

$$\begin{aligned} \epsilon(u) &= \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \phi_1(x_i^1)...\phi_n(x_i^n)\psi(y_i) \right| ; \phi_j \in B_{X_j^*}, \psi \in B_{Y^*} \right\} \\ &\leq \|(\lambda_i)_{i=1}^m\|_{r^*} \sup_{\phi_j \in B_{X_j^*}, \psi \in B_{Y^*}} \left\| (\phi_1(x_i^1)...\phi_n(x_i^n)\psi(y_i)_{i=1}^m \right\|_r \\ &\leq \|(\lambda_i)_{i=1}^m\|_{r^*} \prod_{j=1}^{n} \left\| \left(x_i^j\right)_{i=1}^m \right\|_{w,r_j} \|(y_i)_{i=1}^m\|_{w,s} . \end{aligned}$$

par conséquent $\epsilon(u) \leq \rho_{(r;r_1,...,r_n;s)}(u)$.
Il est facile de vérifier que

$$\rho_{(r;r_1,...,r_n;s)}(u) \leq \|x^1\| \, \|x^2\| \cdots \|x^n\|$$

pour tous $x^j \in X_j, j = 1, ..., n$ et $y \in Y$.
Maintenant, on prouve que

$$\|\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n \otimes \psi(u)\| \leq \|\phi_1\| \cdots \|\phi_n\| \, \|\psi\| .$$

Soient $x^j \in X_j,\ j = 1, ..., n$ et $y \in Y$. Si $\phi_j (\neq 0) \in X_j^*,\ \psi \in Y^*$ et $u = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^n \otimes y_i$,
alors, il suffit d'appliquer l'inégalité de Hölder pour trouver,

$|\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n \otimes \psi(u)|$
$= \left| \phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n \otimes \psi \left(\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^n \otimes y_i \right) \right|$
$\leq \sum\limits_{i=1}^{m} |\lambda_i \phi_1(x_i^1) \cdots \phi_n(x_i^n) \psi(y_i)| .$

Par conséquent,

$\|\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n \otimes \psi(u)\|$

$$\leq \|\phi_1\| \cdots \|\phi_n\| \|\psi\| \left\|(\lambda_i \frac{\phi_1(x_i^1)}{\|\phi_1\|} \cdots \frac{\phi_n(x_i^n)}{\|\phi_n\|} \frac{\psi(y_i)}{\|\psi\|})_{i=1}^m\right\|$$

$$\leq \|\phi_1\| \cdots \|\phi_n\| \|\psi\| \left\|(\lambda_i \frac{\phi_1(x_i^1)}{\|\phi_1\|} \cdots \frac{\phi_n(x_i^n)}{\|\phi_n\|} \frac{\psi(y_i)}{\|\psi\|})_{i=1}^m\right\|_r$$

($\Longrightarrow$ Suivant l'inégalité de Hölder généralisée)

$$\leq \|\phi_1\| \cdots \|\phi_n\| \|\psi\| \|(\lambda_i)_{i=1}^m\|_{r^*} \prod_{k=1}^n \left\|(x_k^i)_{i=1}^m\right\|_{w,r_k} \|(y_i)_{i=1}^m\|_{w,s}.$$

On obtient

$$\|\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n \otimes \psi\| \leq \|\phi_1\| \cdots \|\phi_n\| \|\psi\|.$$

Finalement, $\rho_{(r;r_1,...,r_n;s)}$ est une norme tensorielle raisonnable. ■

Théorème 4.4.3 [5, Theorem 3]
Soient $X_1, ..., X_n$ des espaces de Banach. Alors, pour tout espace de Banach Y, l'espace $\mathcal{L}_{as}^{(r;r_1,...,r_n;s)}(X_1, ..., X_n; Y^*)$ muni par $\pi^m_{(r;r_1,...,r_n;s)}$ est isométriquement isomorphe à $(X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \otimes Y, \rho_{(r;r_1,...,r_n;s)})^*$ par l'application $T \to \Psi_T$, où $\Psi_T(x^1 \otimes \cdots \otimes x^n \otimes y) = T(x^1, ..., x^n)(y)$, pour tout $x^j \in X_j,\ j = 1, ..., n, y \in Y$.

Démonstration. Il suffit de démontrer que l'application est surjective. Soit $\psi \in (X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \otimes Y, \rho_{(r;r_1,...,r_m;s)})^*$ et considèrons l'application n-linéaire $T_\psi \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_n; Y^*)$, définie par $T_\psi(x^1, ..., x^n)(y) = \psi(x^1 \otimes \cdots \otimes x^n \otimes y)$. considèrons $x_i^j \in X_j, j = 1, ..., n; i = 1, ..., m$ et $y_i \in Y^{**}$. Pour $\lambda_i \in \mathbb{K}$, avec $|\lambda_i| = 1$, nous avons

$$\left\|(\langle T_\psi(x_i^1, ..., x_i^n), y_i\rangle)_{i=1}^m\right\|_r^r = \sum_{i=1}^m |\psi(x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^n \otimes y_i)|^r$$

$$= \left|\sum_{i=1}^m |\psi(x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^n \otimes y_i)|^{r-1} \lambda_i \psi(x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^n \otimes y_i)\right|$$

$$= \left|\psi\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i |\psi(x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^n \otimes y_i)|^{r-1} x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^n \otimes y_i\right)\right|$$

$$\leq \|\psi\| \rho_{(r;r_1,...,r_m;s)}\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i |\psi(x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^n \otimes y_i)|^{r-1} (x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^n \otimes y_i)\right)$$

$$\leq \left\|\left(\lambda_i |\psi(x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^n \otimes y_i)|^{r-1}\right)_{i=1}^m\right\|_{r^*} \prod_{j=1}^n \left\|(x_i^j)_{i=1}^m\right\|_{w,r_j} \|(y_i)_{i=1}^m\|_{w,s}$$

$$= \left\|(\langle T_\psi(x_i^1, ..., x_i^n), y_i\rangle)_{i=1}^m\right\|_r^{\frac{r}{r^*}} \prod_{j=1}^n \left\|(x_i^j)_{i=1}^m\right\|_{w,r_j} \|(y_i)_{i=1}^m\|_{w,s}$$

Comme $r - \frac{r}{r^*} = 1$, nous obtenons

$$\left\|(\langle T_\psi(x_i^1, ..., x_i^n), y_i\rangle)_{i=1}^m\right\|_r \leq \|\psi\| \prod_{j=1}^n \left\|(x_i^j)_{i=1}^m\right\|_{w,r_j} \|(y_i)_{i=1}^m\|_{w,s},$$

Ce qui montre que $T_\psi \in \mathcal{L}_{as}^{(r;r_1,...,r_n;s)}(X_1, ..., X_n; Y^*)$ et $\pi^n_{(r;r_1,...,r_n;s)}(T_\psi) \leq \|\psi\|$.

Inversement, si T est $(r; r_1, ..., r_n; s)$-sommant de $X_1 \times \cdots \times X_n$ dans Y^*, nous définissons un fonctionnel sur $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \otimes Y$ par

$$\psi_T(u) = \sum_{i=1}^m \lambda_i T(x_i^1, ..., x_i^n)(y_i),$$

pour $u = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^n \otimes y_i$
par l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\begin{aligned}|\psi_T(u)| &\leq \|(\lambda_i)_{i=1}^m\|_{r^*} \left(\sum_{i=1}^m |T\langle(x_i^1, ..., x_i^n); y_i\rangle|^r\right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq \pi^n_{(r;r_1,...,r_n;s)}(T) \|(\lambda_i)_{i=1}^m\|_{r^*} \prod_{j=1}^n \left\|\left(x_i^j\right)_{i=1}^m\right\|_{w,r_j} \|(y_i)_{i=1}^m\|_{w,s}.\end{aligned}$$

Alors, ψ_T est $\rho_{(r;r_1,...,r_n;s)}$-continu et $\|\psi_T\| \leq \pi^n_{(r;r_1,...,r_n;s)}(T)$. ■

Nous avons besoin à la définition des opérateurs multilinéaires $(r; r_1, ..., r_n; s)$-nucléaires. L'idéal de ces opérateurs est introduit par Cerna [23, 24].

Définition 4.4.4. Pour $0 < r \leq \infty, 1 \leq s, r_1, ..., r_n \leq \infty$, tels que $1 \leq \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1'} + \cdots + \frac{1}{r_n'} + \frac{1}{s'}$. $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_n; Y)$ est de type $(r; r_1, ..., r_n; s)$-nucléaire s'il écrit sous la forme

$$T = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j \phi_j^1 \times \cdots \times \phi_j^n b_j, \tag{4.3}$$

avec $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l_r$ si $r < \infty$, ou $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}} \in c_0$ si $r = +\infty$, $(\phi_i^k)_{i=1}^\infty \in l^w_{r_k'}(X_k^*)$ pour $k = 1, ..., n$ et $(b_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^w_{s'}(Y)$. Où $\mathcal{N}_{(r;r_1,...,r_n;s)}(X_1, ..., X_n; Y)$ note l'espace vectoriel de ces opérateurs. On considère

$$N_{(r;r_1,...,r_n;s)}(T) = \inf \|(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}\|_r \|(b_j)_{j\in\mathbb{N}}\|_{w,s'} \prod_{k=1}^n \left\|\left(\phi_j^k\right)_{j=1}^\infty\right\|_{w,r_k'},$$

l'infimum se porte sur toutes les représentations possibles de T comme dans (4.3), on obtient une t_n-norme, $\frac{1}{t_n} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1'} + \cdots + \frac{1}{r_n'} + \frac{1}{s'}$, sur $\mathcal{N}_{(r;r_1,...,r_n;s)}(X_1, ..., X_n; Y)$.

Nous donnons la définition de la propriété d'approximation λ-bornée (λ-PAB).

Soit $\lambda \geq 1$. Rappelons qu'un espace de Banach X ayant la propriété d'approximation λ-bornée (λ-PAB), soit donné l'ensemble compact $K \subset X$ et $\epsilon > 0$. Alors, il existe un opérateur de rang fini $T \in \mathcal{L}_f(X, X)$ tel que $\|T\| \leq \lambda$ et $\|Tx - x\| < \epsilon$ pour tout $x \in K$.

Proposition 4.4.5. *Si $X_1^*, ..., X_n^*$ possèdent la propriété d'approximation λ-bornée, alors l'espace*

$$\mathcal{N}_{(r;r_1,...,r_n;s)}(X_1, ..., X_n; Y)$$

et la complété de

$$\left(X_1^* \otimes \cdots \otimes X_n^* \otimes Y, \rho_{\left(r';r_1',...,r_n';s'\right)}\right)$$

sont isométriques, où r, r_k et $s \in [1, +\infty]$, $k = 1, ..., n$.

Résultat principal

Ici, en combinant la Proposition 4.4.5 et le Théorème 4.4.3, nous obtenons notre théorème.

Théorème 4.4.6. *Si $X_1^*, ..., X_n^*$ possèdent la propriété d'approximation bornée, alors*

$$\left(\mathcal{N}_{(r;r_1,...,r_n;s)}(X_1, ..., X_n; Y)\right)^*$$

est isométriquement isomorphe à

$$\mathcal{L}_{as}^{(r';r_1',...,r_n';s')}(X_1^*, ..., X_n^*; Y^*),$$

pour r, r_k et $s \in [1, +\infty]$, $k = 1, ..., n$ par l'application $\mathcal{B}_\Psi$ définie comme suit :

$$\mathcal{B}_\Psi(\Phi_1, ..., \Phi_n)(b) := \Psi(\Phi_1 \times \cdots \times \Phi_n b),$$

où Ψ appartient au dual topologique de $\mathcal{N}_{(r;r_1,...,r_n;s)}(X_1, ..., X_n; Y)$, $\Phi_k \in X_k^*, k = 1, ..., n$ et $b \in Y$.

4.5 Les opérateurs n-linéaires virtuellement $(r; r_1, ..., r_n; s)$-nucléaires

On commencera par rappeler les définitions des opérateurs virtuellement $(r; r_1, ..., r_n)$-nucléaires et les opérateurs multiple $(r; r_1, ..., r_n; s)$-sommants.

Définition 4.5.1 [41]. Soient $r \in]0, +\infty], r_1, ..., r_n \in [1, +\infty]$, avec $r \leq r_k, k = 1, ..., n$. L'opérateur $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_n; Y)$ est virtually $(r; r_1, ..., r_n)$-nucléaire s'il existe une représentation de la forme

$$T = \sum_{j \in \mathbb{N}^n} \lambda_j \phi^1_{j_1} \times \cdots \times \phi^n_{j_n} b_j, \tag{4.4}$$

avec $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}^n} \in l_r(\mathbb{N}^n)$ si $r < \infty$, ou $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}^n} \in c_0(\mathbb{N}^n)$ si $r = +\infty$, $\left(\phi^k_i\right)_{i=1}^{\infty} \in l^w_{r'_k}(X^*_k)$, pour $k = 1, ..., n$ et $(b_j)_{j \in \mathbb{N}^n} \in l_\infty(Y; \mathbb{N}^n)$.
L'espace vectoriel de tous ces opérateurs est noté $\mathcal{L}^{(r;r_1,...,r_n)}_{VN}(X_1, ..., X_n; Y)$ et on le munit par la t_n-norme avec $\frac{1}{t_n} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'_1} + \cdots + \frac{1}{r'_n}$,

$$\|T\|_{VN,(r;r_1,...,r_n)} = \inf \|(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}^n}\|_r \|(b_j)_{j \in \mathbb{N}^n}\|_\infty \prod_{k=1}^{n} \left\|\left(\phi^k_i\right)_{i=1}^{\infty}\right\|_{w,r'_k},$$

où l'infimum se porte sur toutes les représentations possibles de T comme décrit dans (4.4).

Définition 4.5.2 [16]
Soient $r, r_1, ..., r_n, s \in [1, +\infty[$, avec $r \geq r_k, k = 1, ..., n$ tels que $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_n} + \frac{1}{s}$, l'opérateur $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_n; Y)$ est multiple $(r; r_1, ..., r_n; s)$-sommant si il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\left\|(T(x^1_{j_1}, ..., x^n_{j_n}))_{j \in \mathbb{N}^n_m}\right\|_r \leq C \prod_{k=1}^{n} \left\|\left(x^k_i\right)_{i=1}^{n}\right\|_{w,r_k} \left\|(y^*_j)_{j \in \mathbb{N}^n_m}\right\|_{w,s} \tag{4.5}$$

pour tous $x^k_i \in X_k, k = 1, ..., n$ et $(y^*_j)_{j \in \mathbb{N}^n_m} \in l^w_s(Y^*, \mathbb{N}^n_m)$.
On notera $\mathcal{L}^{(r;r_1,...,r_n;s)}_{mas}(X_1, ..., X_n; Y)$ l'espace vectoriel de tous ces opérateurs et la plus petite C satisfisant (4.5) par $\|T\|_{mas(r;r_1,...,r_n;s)}$, qui définie une norme (r-norme, si $r < 1$) sur $\mathcal{L}^{(r;r_1,...,r_n;s)}_{mas}(X_1, ..., X_n; Y)$.

On remarque que, si on prend $s = \infty$ dans la définition précédente, on obtient la définition de l'espace des opérateurs multilinéaires (fully) multiple $(r; r_1, ..., r_n)$-sommants présentés dans [41].

Nous introduisons la généralisation suivante de la classe d'opérateurs $(r; r_1, ..., r_n; s)$-nucléaires.
Soient $r \in \left]0, +\infty\right], r_1, ..., r_n; s \in [1, +\infty]$, avec $r \leq r_k, k = 1, ..., n$. On considère

$$\tfrac{1}{t_n} = \tfrac{1}{r} + \tfrac{1}{r_1'} + \cdots + \tfrac{1}{r_n'} + \tfrac{1}{s'}.$$

où $t_n \in \left]0, 1\right]$.

Définition 4.5.3. L'opérateur $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_n; Y)$ est virtuellement $(r; r_1, ..., r_n; s)$-nucléaire s'ils existent $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}^n} \in l_r(\mathbb{N}^n)$ si $r < \infty$, ou $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}^n} \in c_0(\mathbb{N}^n)$ si $r = +\infty$, $\left(\phi_i^k\right)_{i=1}^{\infty} \in l_{r_k'}^w(X_k^*)$, pour $k = 1, ..., n$ et $(b_j)_{j\in\mathbb{N}^n} \in l_{s'}^w(Y; \mathbb{N}^n)$ telle que

$$T = \sum_{j\in\mathbb{N}^n} \lambda_j \phi_{j_1}^1 \times \cdots \times \phi_{j_n}^n b_j. \tag{4.6}$$

L'espace vectoriel de tous ces opérateurs est noté $\mathcal{L}_{VN}^{(r;r_1,...,r_n;s)}(X_1, ..., X_n; Y)$ et on le munit par la t_n-norme

$$\|T\|_{VN,(r;r_1,...,r_n;s)} = \inf \|(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}^n}\|_r \|(b_j)_{j\in\mathbb{N}^n}\|_{w,s'} \prod_{k=1}^{n} \left\|\left(\phi_i^k\right)_{i=1}^{\infty}\right\|_{w,r_k'},$$

où l'infimum se porte sur toutes les représentations possibles de T comme décrit dans (4.6).

Remarques 4.5.4
(a) Nous avons $\mathcal{L}_{N}^{(r;r_1,...,r_n;s)}(X_1, ..., X_n; Y) \subset \mathcal{L}_{VN}^{(r;r_1,...,r_n;s)}(X_1, ..., X_n; Y)$ et

$$\|T\| \leq \|T\|_{VN,(r;r_1,...,r_n;s)} \leq \|T\|_{N,(r;r_1,...,r_n;s)},$$

pour chaque T de type $(r; r_1, ..., r_n; s)$-nucléaire.
(b) L'espace vectoriel des opérateurs multilinéaires continus de type finis $\mathcal{L}_f(X_1, ..., X_n; Y)$ est dense dans $\mathcal{L}_{VN}^{(r;r_1,...,r_n;s)}(X_1, ..., X_n; Y)$.

Proposition 4.5.5. *Si $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}^n} \in l_r(\mathbb{N}^n)$ si $r < \infty$, ou $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}^n} \in c_0(\mathbb{N}^n)$ si $r = +\infty$. Alors, l'application multilinéaire $\mathcal{D}_{(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}^n}}$ définit sur $l_{r_1'} \times \cdots \times l_{r_n'}$ dans $l_1(\mathbb{N}^n)$ par :*

$$\mathcal{D}_{(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}^n}}((\xi^1_{j_1})^{\infty}_{j_1=1}, ..., (\xi^n_{j_n})^{\infty}_{j_1=1}) = (\lambda_j \xi^1_{j_1} ... \xi^n_{j_n})_{j\in\mathbb{N}^n}$$

est virtuellement $(r; r_1, ..., r_n; s)$*-nucléaire et*

$$\left\|\mathcal{D}_{(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}^n}}\right\|_{VN,(r;r_1,...,r_n;s)} \leq \|(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}^n}\|_r .$$

Démonstration. Par la définition de l'opérateur diagonale, on a $\mathcal{D}_{(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}^n}}((\xi^1_{j_1})^{\infty}_{j_1=1}, ..., (\xi^n_{j_n})^{\infty}_{j_n=1}) = (\lambda_j \xi^1_{j_1} ... \xi^n_{j_n})_{j\in\mathbb{N}^n} = \sum\limits_{j\in\mathbb{N}^n} \lambda_j \pi^1_{j_1}((\xi^1_{j_1})_{j_1}) \times \cdots \times \pi^n_{j_n}((\xi^n_{j_n})_{j_n}) \otimes e_j$.
Alors,

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{D}_{(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}^n}}\right\|_{VN,(r;r_1,...,r_n;s)} &= \inf \|(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}^n}\|_r \prod_{k=1}^{n} \left\|(\pi^k_{j_n})^{\infty}_{j_n=1}\right\|_{w,r'_k} \\ &= \inf \|(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}^n}\|_r ;\end{aligned}$$

car

$$\left\|(\pi^k_{j_n})^{\infty}_{j_n=1}\right\|_{w,r'_k} = \sup_{\|\xi_k\|=1, \xi_k\in l_{r'_k}} \left(\sum_{j_k=1}^{+\infty} \left|\left\langle \xi_k, \pi^k_{j_k}\right\rangle\right|^{r'_k}\right)^{\frac{1}{r'_k}} = \sup_{\|\xi_k\|=1, \xi_k\in l_{r'_k}} \left(\sum_{j_k=1}^{+\infty} \left\|\xi^k_{j_k}\right\|^{r'_k}\right)^{\frac{1}{r'_k}} =$$

1. ■

Nous exposons la propriété d'idéal pour ces opérateurs.

Proposition 4.5.6. *Soit* $T \in \mathcal{L}^{(r;r_1,...,r_n;s)}_{VN}(X_1, ..., X_n; Y)$.
Si $S_k \in \mathcal{L}(E_k, X_k)$, $k = 1, ..., n$ *et* $R \in \mathcal{L}(Y, Y_0)$; *alors*

$$R \circ T \circ (S_1, ..., S_n) \in \mathcal{L}^{(r;r_1,...,r_n;s)}_{VN}(E_1, ..., E_n; Y_0)$$

et

$$\|R \circ T \circ (S_1, ..., S_n)\|_{VN,(r;r_1,...,r_n;s)} \leq \|R\| \, \|T\|_{VN,(r;r_1,...,r_n;s)} \prod_{k=1}^{n} \|S_k\| .$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. On pose

$$T = \sum_{j\in\mathbb{N}^n} \lambda_j \phi^1_{j_1} \times \cdots \times \phi^n_{j_n} b_j,$$

et

$$\left\{ \|(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}^n}\|_r \|(b_j)_{j\in\mathbb{N}^n}\|_{w,s} \prod_{k=1}^{n} \left\| \left(\phi_i^k\right)_{i=1}^{\infty} \right\|_{w,r'_k} \right\} \leq (1+\epsilon) \|T\|_{VN,(r;r_1,...,r_n;s)}$$

donc,

$$\begin{aligned} R\circ T\circ(S_1,...,S_n)(u_1,...,u_n) &= R\circ T\left(S_1(u_1),...,S_n(u_n)\right) \\ &= R\left(\sum_{j\in\mathbb{N}^n} \lambda_j \phi_{j_1}^1\left(S_1(u_1)\right)\cdots\phi_{j_n}^n\left(S_n(u_n)\right) b_j\right) \\ &= \left(\sum_{j\in\mathbb{N}^n} \lambda_j \phi_{j_1}^1\left(S_1(u_1)\right)\cdots\phi_{j_n}^n\left(S_n(u_n)\right) R(b_j)\right) \\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}^n} \lambda_j S'_1(\phi_{j_1}^1)(u_1)\cdots S'_n(\phi_{j_n}^n)(u_n) R(b_j) \end{aligned}$$

et,

$$\left\{ \|\lambda_j\|_r \prod_{k=1}^{n} \left\|S'_k(\phi_{j_k}^k)\right\|_{w,r_k} \|R(b_j)\|_{w,s} \right\} =$$

$$\begin{aligned} &= \|\lambda_j\|_r \prod_{k=1}^{n} \sup_{\|u_k\|\leq 1} \left(\sum_{j_k=1}^{\infty} \left|\left\langle S'_k(\phi_{j_k}^k), u_j\right\rangle\right|^{r_k} \right)^{\frac{1}{r_k}} \sup_{\|l\|\leq 1} \left(\sum_{j\in\mathbb{N}^n} \left|\left\langle R(b_j), l\right\rangle\right|^s \right)^{\frac{1}{s}} \\ &= \|\lambda_j\|_r \prod_{k=1}^{n} \sup_{\|u_k\|\leq 1} \left(\sum_{j_k=1}^{\infty} \left|\left\langle \phi_{j_k}^k, S_k(u_j)\right\rangle\right|^{r_k} \right)^{\frac{1}{r_k}} \sup_{\|l\|\leq 1} \left(\sum_{j\in\mathbb{N}^n} \left|\left\langle b_j, R'(l)\right\rangle\right|^s \right)^{\frac{1}{s}} \\ &= \|\lambda_j\|_r \prod_{k=1}^{n} \|S_k\| \prod_{k=1}^{n} \sup_{\|u_k\|\leq 1} \left(\sum_{j_k=1}^{\infty} \left|\left\langle \phi_{j_k}^k, \frac{S_k(u_j)}{\|S_k\|}\right\rangle\right|^{r_k} \right)^{\frac{1}{r_k}} \|R\| \sup_{\|f\|\leq 1} \left(\sum_{j\in\mathbb{N}^n} \left|\left\langle b_j, f\right\rangle\right|^s \right)^{\frac{1}{s}} \\ &= \|\lambda_j\|_r \prod_{k=1}^{n} \|S_k\| \prod_{k=1}^{n} \sup_{\|v_k\|\leq 1} \left(\sum_{j_k=1}^{\infty} \left|\left\langle \phi_{j_k}^k, v_k\right\rangle\right|^{r_k} \right)^{\frac{1}{r_k}} \|R\| \sup_{\|f\|\leq 1} \left(\sum_{j\in\mathbb{N}^n} \left|\left\langle b_j, f\right\rangle\right|^s \right)^{\frac{1}{s}} \\ &= (1+\epsilon)\|R\|\|T\|_{VN,(r;r_1,...,r_n;s)} \prod_{k=1}^{n} \|S_k\|. \end{aligned}$$

Alors

$$R\circ T\circ(S_1,...,S_n) \in \mathcal{L}_{VN}^{(r;r_1,...,r_n;s)}(E_1,...,E_n;Y_0)$$

et

$$\|R\circ T\circ(S_1,...,S_n)\|_{VN,(r;r_1,...,r_n;s)} \leq \|R\|\|T\|_{VN,(r;r_1,...,r_n;s)} \prod_{k=1}^{n} \|S_k\|. \qquad \blacksquare$$

On va caractériser les opérateurs virtuellement $(r; r_1, ..., r_n; s)$-nucléaires.

Proposition 4.5.7. *Pour $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_n; Y)$, les conditions suivantes sont équivalentes :*
(1) T est virtuellement $(r; r_1, ..., r_n; s)$-nucléaire.
(2) Il existent $A_k \in \mathcal{L}\left(X_k; l_{r'_k}\right)$, $k = 1, ..., n$, $B \in \mathcal{L}(l_1(\mathbb{N}^n); Y)$ et $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}^n} \in l_r(\mathbb{N}^n)$
telle que

$$T = B \circ \mathcal{D}_{(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}^n}} \circ (A_1, ..., A_n).$$

Dans ce cas

$$\|T\|_{VN,(r;r_1,...,r_n;s)} \leq \inf \|B\| \, \|(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}^n}\|_r \prod_{k=1}^{n} \|A_k\|.$$

où l'infimum se porte sur toutes les factorisations possibles.

Démonstration. Il est clair que (2) implique (1) par les Propositions 4.5.5 et 4.5.6.
Afin de montrer que (1) implique (2), nous considérons une représentation de T comme dans (4.6) et nous définissons

$$\begin{array}{rll} A_k(x) = \left(\phi_i^k(x)\right)_{i=1}^{\infty} & \forall x \in X_k, \; k = 1, ..., n, \\ B((\xi_j)_{j\in\mathbb{N}^n}) = \sum\limits_{j\in\mathbb{N}^n} \xi_j b_j & \forall (\xi_j)_{j\in\mathbb{N}^n} \in l_1(\mathbb{N}^n). & \blacksquare \end{array}$$

4.6 Dual topologique de l'espace des opérateurs n-linéaires virtuellement $(r; r_1, ..., r_n; s)$-nucléaires

Remarque 4.6.1. Par définition, pour chaque T de $\mathcal{L}_f(X_1, ..., X_n; Y)$ admet la représentation finie suivante :

$$T = \sum_{j\in\mathbb{N}_m^n} \lambda_j \phi_{j_1}^1 \times \cdots \times \phi_{j_n}^n b_j,$$

Il est clair que nous ayons une t_n-norme sur $\mathcal{L}_f(X_1, ..., X_n; Y)$ définie par

$$\|T\|_{VN_f,(r;r_1,...,r_n;s)} = \inf \left\|(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}_m^n}\right\|_r \left\|(b_j)_{j\in\mathbb{N}_m^n}\right\|_{w,s'} \prod_{k=1}^{n} \left\|\left(\phi_i^k\right)_{i=1}^m\right\|_{w,r_k'},$$

où l'infimum se porte sur toutes les factorisations possibles de T. Il est évident que

$$\|T\|_{VN,(r;r_1,...,r_n;s)} \leq \|T\|_{VN_f,(r;r_1,...,r_n;s)},$$

pour chaque $T \in \mathcal{L}_f(X_1, ..., X_n; Y)$. Nous voulons connaître des cas où l'égalité est vérifiée pour ces t_n-normes.

Pour la démonstration de la proposition suivante, nous allons appliquer les mêmes techniques appliquées par Mario Matos dans [41, Proposition 4.6.].

Proposition 4.6.2. *Si les espaces $X_1, ..., X_n$ sont de dimension fini, alors :*

$$\|T\|_{VN_f,(r;r_1,...,r_n;s)} \leq \|T\|_{VN,(r;r_1,...,r_n;s)},$$

pour tout $T \in \mathcal{L}_f(X_1, ..., X_n; Y)$.

Démonstration. Dans ce cas $\mathcal{L}(X_1, ..., X_n; Y) = \mathcal{L}_f(X_1, ..., X_n; Y)$ est complet pour les deux t_n-normes. Donc, par le théorème de l'application ouverte ces deux t_n-normes sont équivalentes et il existe $C > 0$, telle que

$$\|T\|_{VN_f,(r;r_1,...,r_n;s)} \leq C\,\|T\|_{VN,(r;r_1,...,r_n;s)},$$

pour tout $T \in \mathcal{L}_f(X_1, ..., X_n; Y)$. Pour chaque $\epsilon > 0$, nous choisissons une représentation

$$T = \sum_{j\in\mathbb{N}^n} \lambda_j \phi_{j_1}^1 \times \cdots \times \phi_{j_n}^n b_j$$

telle que

$$\|(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}^n}\|_r \|(b_j)_{j\in\mathbb{N}^n}\|_{w,s'} \prod_{k=1}^{n} \left\|\left(\phi_i^k\right)_{i=1}^\infty\right\|_{w,r_k'} \leq (1+\epsilon)\,\|T\|_{VN,(r;r_1,...,r_n;s)}.$$

on peut écrire

$$\left(\|T\|_{VN_f,(r;r_1,...,r_n;s)}\right)^{t_n} \leq \left(\left\|\sum_{j\in\mathbb{N}_m^n} \lambda_j \phi_{j_1}^1 \times \cdots \times \phi_{j_n}^n b_j\right\|_{VN_f,(r;r_1,...,r_n;s)}\right)^{t_n}$$

$$+\left(\left\|\sum_{j\in\mathbb{N}^n/\mathbb{N}^n_m} \lambda_j \phi^1_{j_1} \times \cdots \times \phi^n_{j_n} b_j\right\|_{VN_f,(r;r_1,...,r_n;s)}\right)^{t_n}$$
$$\leq (1+\epsilon)^{t_n}\left(\|T\|_{VN,(r;r_1,...,r_n;s)}\right)^{t_n} +$$
$$+C^{t_n}\left(\left\|\sum_{j\in\mathbb{N}^n/\mathbb{N}^n_m} \lambda_j \phi^1_{j_1} \times \cdots \times \phi^n_{j_n} b_j\right\|_{VN,(r;r_1,...,r_n;s)}\right)^{t_n}$$
$$\leq \left[(1+\epsilon)^{t_n} + \epsilon^{t_n}\right]\left(\|T\|_{VN,(r;r_1,...,r_n;s)}\right)^{t_n},$$

si m est assez grand. ■

Proposition 4.6.3. *Si* $T \in \mathcal{L}^{(r;r_1,...,r_n;s)}_{VN}(X_1, ..., X_n; Y)$ *et* $S_k \in \mathcal{L}_f(D_k, X_k)$, *pour* $k = 1, ..., n$, *alors :*

$$\|T\circ(S_1, ..., S_n)\|_{VN_f,(r;r_1,...,r_n;s)} \leq \|T\|_{VN,(r;r_1,...,r_n;s)} \prod_{k=1}^{n} \|S_k\|.$$

Démonstration. Si J_k est l'injection de $S_k(D_k)$ dans X_k, nous pouvons écrire $S_k = J_k \circ \widetilde{S}_k$, $(\widetilde{S}_k \in \mathcal{L}_f(D_k, S_k(D_k))$, avec $\left\|\widetilde{S}_k\right\| = \|S_k\|$. Par conséquent,

$$T\circ(J_1, ..., J_n) \in \mathcal{L}_f((S_1(D_1), ..., S_n(D_n)); Y).$$

Maintenant, on applique les Propositions 4.5.6 et 4.6.2 pour trouver le résultat demandé. ■

Soient $\lambda \geq 1$ et X un espace de Banach. Si Y est un espace de Banach et X^* possède λ-PAB. Alors, pour tout $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $\epsilon > 0$, il existe un opérateur $S \in \mathcal{L}_f(X, X)$ tel que $\|S\| \leq (1+\epsilon)\lambda$ et $T = TS$.

Nous appliquons les Propositions 4.5.6 et 4.5.7 afin de faire prouver le résultat.

Proposition 4.6.4. *Si les espaces* X^*_k $(k = 1, ..., n)$ *ont la propriété d'approximation* λ_k*-bornée, alors*

$$\|T\|_{VN,(r;r_1,...,r_n;s)} \geq \|T\|_{VN_f,(r;r_1,...,r_n;s)},$$

pour tout $T \in \mathcal{L}_f (X_1, ..., X_n; Y)$.

Démonstration. Nous considérons l'application

$$T_k \in \mathcal{L}(X_k; \mathcal{L}(X_1, ..., X_{k-1}, X_{k+1}, ..., X_n; Y))$$

définie par

$$T_k (x_k) \left(x^1, ..., x^{k-1}, x^{k+1}, ..., x^n\right) = T \left(x^1, ..., x^{k-1}, x^k, x^{k+1}, ..., x^n\right), \text{ pour } x^k \in X_k, k = 1, ..., n$$

Comme X_k^* possède la propriété λ_k-approximation pour quelque $\lambda_k > 0$, pour chaque $\epsilon > 0$, nous pouvons trouver $S_k \in \mathcal{L}_f (D_k, X_k)$, tels que $T_k = T_k \circ S_k$ et $\|S_k\| \leq (1 + \epsilon) \lambda_k$.
Par conséquent, pour tout $x^k \in X_k$, avec $k = 1, ..., n$ nous avons

$$T \left(x^1, ..., x^{k-1}, S_k \left(x^k\right), x^{k+1}, ..., x^n\right) = T \left(x^1, ..., x^{k-1}, x^k, x^{k+1}, ..., x^n\right).$$

Maintenant, nous pouvons écrire

$$T (x^1, ..., x^n) = T \circ (S_1, ..., S_n) (x^1, ..., x^n), \qquad \forall x^k \in X_k, \ k = 1, ..., n.$$

Ainsi, par la Proposition 4.5.7, nous avons

$$\begin{aligned} \|T\|_{VN_f,(r;r_1,...,r_n;s)} &= \|T \circ (S_1, ..., S_n)\|_{VN_f,(r;r_1,...,r_n;s)} \\ &\leq \|T\|_{VN,(r;r_1,...,r_n;s)} \prod_{k=1}^{n} \|S_k\| \\ &\leq \|T\|_{VN,(r;r_1,...,r_n;s)} (1 + \epsilon)^n \prod_{k=1}^{n} \lambda_k. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|T\|_{VN_f,(r;r_1,...,r_n;s)} \leq \left(\prod_{k=1}^{n} \lambda_k\right) \|T\|_{VN,(r;r_1,...,r_n;s)}.$$

Si on utilise les mêmes techniques que dans la Proposition 4.6.2, on obtient

$$\|T\|_{VN_f,(r;r_1,...,r_n;s)} \leq \|T\|_{VN,(r;r_1,...,r_n;s)}. \qquad \blacksquare$$

Pour les espaces de Banach avec la propriété d'approximation λ-bornée, on peut dire que la Proposition 4.6.5 c'est une généralisation d'un résultat obtenu par Cerna [24, Lemma 2.1.].

On donne une autre généralisation au [24, Lemma 2.1.] où les espaces X_k $(k = 1, ..., n)$ sont des espaces de Banach quelconques et $Y = \mathcal{L}_s(\Omega, \mu)$.

Proposition 4.6.5. *Soit l'opérateur* $T : X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow \mathcal{L}_s(\Omega, \mu)$ *défini par*

$$T(x_1, ..., x_n) = \sum_{j \in \mathbb{N}_m^n} \lambda_j \phi_{j_1}^1(x_1) \cdots \phi_{j_n}^n(x_n) b_j$$

où $\frac{1}{s} = \frac{1}{r_1'} + \cdots + \frac{1}{r_n'}$, *alors* $\|T\|_{VN_f,(\infty;r_1,...,r_n;s)} = \|T\|_{VN,(\infty;r_1,...,r_n;s)} = \|T\|$.

Démonstration. Il est clair que pour $\frac{1}{s} = \frac{1}{r_1'} + \cdots + \frac{1}{r_n'}$, nous avons

$$\|T\| \leq \|T\|_{VN,(\infty;r_1,...,r_n;s)} \leq \|T\|_{VN_f,(\infty;r_1,...,r_n;s)},$$

en plus

$$\|T\| \|x_1\| \cdots \|x_n\| \geq \left(\int_\Omega \left| \sum_{j \in \mathbb{N}_m^n} \lambda_j \phi_{j_1}^1(x_1) \cdots \phi_{j_n}^n(x_n) b_j(t) \right|^s d\mu(t) \right)^{1/s} \tag{4.7}$$

comme $\phi_{j_i}^i$ est surjectif, il existe $\xi_i \in X_i$ tel que $\phi_{j_i}^i(\xi_i) = M_i / 2^{j_i/r_i'}$ avec

$$M_i = \sup_{\|x_i\|_{X_i} \leq 1} \left(\sum_{j_i=1}^m \left| \left\langle \phi_{j_i}^i, x_i \right\rangle \right|^{r_i'} \right)^{1/r_i'},$$

on va prouver que $\|\xi_i\| \leq 1$ et $M_i < +\infty$ pour $i = 1, ..., n$. De la définition de M_i, i fixé et pour $\epsilon > 0$ on a

$$M_i \|\xi_i\| < (1 + \epsilon) \left(\sum_{j_i=1}^m M_i^{r_i'} / 2^{j_i} \right)^{1/r_i'}$$

ce qui implique

$$\|\xi_i\| < (1+\epsilon)\,, \text{ pour tout } \epsilon > 0.$$

Donc, si en remplaçant $\|\xi_i\| < 1$ dans l'équation (4.7) on trouve

$$\|T\| \geq \left(\int\limits_{\Omega} \left| \sum_{j\in\mathbb{N}_m^n} \lambda_j M_1/2^{j_1/r'_1} \cdots M_n/2^{j_n/r'_n} b_j\left(t\right) \right|^s d\mu(t)\right)^{1/s}, \text{ si}$$
$$k = \max\left\{j_1, ..., j_n\right\}$$

on obtient

$$\|T\| \geq \left(\int\limits_{\Omega} \left| \sum_{j\in\mathbb{N}_m^n} \lambda_j \frac{b_j\left(t\right)}{2^{k/s}} \right|^s d\mu(t)\right)^{1/s} \prod_{l=1}^{n} M_l. \tag{4.8}$$

Soit $z\left(t\right) := \sum\limits_{j\in\mathbb{N}_m^n} \lambda_j \frac{b_j(t)}{2^{k/s}}$, alors pour tout $s \geq 1$ on a

$$\left|\left\langle \varphi, z\right\rangle\right| = \left| \sum_{j\in\mathbb{N}_m^n} \lambda_j \left\langle \varphi, \frac{b_j}{2^{k/s}} \right\rangle \right| \leq \|\varphi\| \, \|z\|\,. \tag{4.9}$$

Par la renumérotation des indices finis multiples $j \in \mathbb{N}_m^n$, on réécrit la somme finie $z\left(t\right)$ comme suit :

$$z\left(t\right) = \sum_{k=1}^{f(m,n)} \tfrac{b_k}{2^{k/s}}.$$

En plus, soit $M := \underset{k\in\{1,...,f(m,n)\}-k_0}{span} \left\{\frac{b_k}{2^{k/s}}\right\}$ où k_0 est un nombre fixe appartient à $\{1, ..., f\left(m,n\right)\}$, et $f\left(m,n\right) \in \mathbb{N}$. Alors comme une conséquence du théorème de Hahn-Banach il existe φ telle que $\|\varphi\| = \frac{1}{d}$, $\langle\varphi, x\rangle = 0$ pour tout $x \in M$ et $\left\langle \varphi, \frac{b_{k_0}}{2^{k_0/s}}\right\rangle = 1$, avec $d = \inf\limits_{x\in M} \left\|x - \frac{b_{k_0}}{2^{k_0/s}}\right\|$ et on peut choisir λ_{k_0} telle que

$$\left|\lambda_{k_0}\right| = \max_{k=1,...,f(m,n)} \left|\lambda_k\right| = \left\|\left(\lambda_j\right)_{j\in\mathbb{N}^n}\right\|_{\infty}; \text{ où } j = \left(j_1, ..., j_n\right).$$

En tenant compte les relations précédentes dans l'équation (4.9) on peut obtenir,

$$\|z\| \geq |\lambda_{k_0}|\, d. \tag{4.10}$$

Comme $x := \sum\limits_{k=1, k\neq k_0}^{f(m,n)} \frac{-b_k}{2^{k/s}} \in M$, alors pour $\epsilon > 0$ donné, on a

$$(1+\epsilon)\, d > \left\| \sum_{k=1}^{f(m,n)} \frac{b_k}{2^{k/s}} \right\|.$$

Et de (4.10) on trouve

$$(1+\epsilon)\, \|z\| > \|(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}^n}\|_\infty \left\| \sum_{k=1}^{f(m,n)} \frac{b_k}{2^{k/s}} \right\|. \tag{4.11}$$

On sait que

$$\|(b_j)_{j\in\mathbb{N}^n}\|_{w,s'} = \sup_{\|\psi\|_s \leq 1} \left(\sum_{j\in\mathbb{N}_m^n} |\psi(b_j)|^{s'} \right)^{1/s'} = \sup_{a\in B_{l_s^{f(m,n)}}} \left\| \sum_{k=1}^{f(m,n)} a_k b_k \right\|,$$

on pose $a_k = \frac{1}{2^{k/s}}$ pour $k = 1, ..., f(m,n)$. Donnons $\widetilde{\epsilon} > 0$, on obtient

$$(1+\widetilde{\epsilon}) \left\| \sum_{k=1}^{f(m,n)} \frac{b_k}{2^{k/s}} \right\| \geq \|(b_j)_{j\in\mathbb{N}^n}\|_{w,s'}.$$

De la dernière relation et de l'équation (4.11) on écrit

$$(1+\epsilon)(1+\widetilde{\epsilon})\, \|z\| > \|(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}^n}\|_\infty \|(b_j)_{j\in\mathbb{N}^n}\|_{w,s'} \text{ pour tout } \epsilon \text{ et } \widetilde{\epsilon} > 0. \tag{4.12}$$

Alors, des relations (4.8) et (4.12) on trouve

$$\begin{aligned}\|T\| &\geq \|(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}^n}\|_\infty \|(b_j)_{j\in\mathbb{N}^n}\|_{w,s'} \prod_{l=1}^{n} M_l \\ &\geq \|T\|_{VN_f,(\infty;r_1,...,r_n;s)} . \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Dans la suite, on démontrera un nouveau résultat concernant la relation entre le dual topologique de l'espace des opérateurs multilinéaires virtuellement $(r; r_1, ..., r_n; s)$-nucléaires et l'espace des opérateurs multiple $(r'; r'_1, ..., r'_n; s')$-sommants.

Théorème 4.6.6. *Si les espaces X_k^* $(k = 1, ..., n)$ possèdent la propriété d'approximation λ-bornée, pour $1 \leq r, r_k < \infty$, $k = 1, ..., n$, alors, le dual topologique de $\mathcal{L}_{VN}^{(r;r_1,...,r_n;s)}(X_1, ..., X_n; Y)$ est isométriquement isomorphe à $\mathcal{L}_{mas}^{(r';r'_1,...,r'_n;s')}(X_1^*, ..., X_n^*; Y^*)$, par l'application $\mathcal{B}$ définie par*

$$\mathcal{B}(\Psi)\left(\phi^1, ..., \phi^n\right)(b) = \Psi\left(\phi^1 \times \cdots \times \phi^n b\right)$$

pour tout $b \in Y$, $\phi^k \in X_k^*, k = 1, ..., n$ et $\Psi \in (\mathcal{L}_{VN}^{(r;r_1,...,r_n;s)}(X_1, ..., X_n; Y))^*$.

Démonstration. On commence avec $\Psi \in (\mathcal{L}_{VN}^{(r;r_1,...,r_n;s)}(X_1, ..., X_n; Y))^*$. On va démontrer que $\mathcal{B}(\Psi) \in \mathcal{L}_{mas}^{(r';r'_1,...,r'_n;s')}(X_1^*, ..., X_n^*; Y^*)$. On considère $n \in \mathbb{N}$ et $\varphi_{j_k}^k \in X_k^*$, pour $k = 1, ..., n$ et $(b_j)_{j\in\mathbb{N}_m^n} \in l_{s'}^w(Y^*; \mathbb{N}_m^n)$. Il existe $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}_m^n} \in l_r(\mathbb{N}_m^n)$ telle que $\left\|(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}_m^n}\right\|_r = 1$ et

$$\left\|\left(\mathcal{B}(\Psi)\left(\varphi_{j_1}^1, ..., \varphi_{j_n}^n\right)(b_j)\right)_{j\in\mathbb{N}_m^n}\right\|_{r'} = \sum_{j\in\mathbb{N}_m^n} \lambda_j \left|\mathcal{B}(\Psi)(\varphi_{j_1}^1, ..., \varphi_{j_n}^n)(b_j)\right| = (i)$$

On peut trouver $\alpha_j, |\alpha_j| = 1, j \in \mathbb{N}_m^n$ telle que

$$(i) = \sum_{j\in\mathbb{N}_m^n} \lambda_j \left|\mathcal{B}(\Psi)(\varphi_{j_1}^1, ..., \varphi_{j_n}^n)(b_j)\right|.$$

alors,

$$(i) = \sum_{j\in\mathbb{N}_m^n} \lambda_j \alpha_j \mathcal{B}(\Psi)(\varphi_{j_1}^1, ..., \varphi_{j_n}^n)(b_j).$$

par la définition de $\mathcal{B}(\Psi)$ on écrit

$$(i) = \Psi(\sum_{j\in\mathbb{N}_m^n} \lambda_j \alpha_j \varphi_{j_1}^1 \times \cdots \times \varphi_{j_n}^n b_j).$$

par la continuité de Ψ on a

$$(i) \leq \|\Psi\| \left\|(\lambda_j \alpha_j)_{j\in\mathbb{N}_m^n}\right\|_r \prod_{k=1}^{n} \left\|\left(\varphi_{j_k}^k\right)_{j\in\mathbb{N}_m^n}\right\|_{w,r'_k} \left\|(b_j)_{j\in\mathbb{N}_m^n}\right\|_{w,s'}$$

$$= \|\Psi\| \prod_{k=1}^{n} \left\|(\varphi_{j_k}^k)_{j\in\mathbb{N}_m^n}\right\|_{w,r'_k} \left\|(b_j)_{j\in\mathbb{N}_m^n}\right\|_{w,s'}.$$

ceci démontre que $\mathcal{B}(\Psi) \in \mathcal{L}_{mas}^{(r';r'_1,...,r'_n;s')}(X_1^*, ..., X_n^*; Y^*)$ et

$$\|\mathcal{B}(\Psi)\|_{mas(r';r'_1,...,r'_n;s')} \leq \|\Psi\|.$$

On considère $T \in \mathcal{L}_{mas}^{(r';r'_1,...,r'_n;s')}(X_1^*, ..., X_n^*; Y^*)$ et on définit le fonctionnel Ψ_T sur l'espace $\left(\mathcal{L}_f(X_1, ..., X_n; Y), \|\cdot\|_{VN_{f,}(r;r_1,...,r_n;s)}\right)$ par

$$\Psi_T(S) = \sum_{j\in\mathbb{N}_m^n} \lambda_j T(\varphi_{j_1}^1, ..., \varphi_{j_n}^n)(b_j)$$

pour tout $S \in \mathcal{L}_f(X_1, ..., X_n; Y)$ de la forme

$$S = \sum_{j\in\mathbb{N}_m^n} \lambda_j \varphi_{j_1}^1 \times \cdots \times \varphi_{j_n}^n b_j.$$

Par l'inégalité de Hölder et comme T est un opérateur multiple $(r'; r'_1, ..., r'_n; s')$-sommant, on obtient,

$$|\Psi_T(S)| \leq \left\|(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}_m^n}\right\|_r \left\|(T(\varphi_{j_1}^1, ..., \varphi_{j_n}^n)(b_j))_{j\in\mathbb{N}_m^n}\right\|_{r'}$$

$$\leq \|T\|_{mas,(r';r'_1,...,r'_n;s')} \left\|(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}_m^n}\right\|_r \prod_{k=1}^{n} \left\|(\varphi_i^k)_{i=1}^m\right\|_{w,r'_k} \left\|(b_j)_{j\in\mathbb{N}_m^n}\right\|_{w,s'}.$$

ce qui montre que

$$|\Psi_T(S)| \leq \|T\|_{mas(r';r'_1,...,r'_n;s')} \|S\|_{VN_{f,}(r;r_1,...,r_n;s)}, \text{ pour tout } S \in \mathcal{L}_f(X_1, ..., X_n; Y).$$

On obtient, Ψ_T est continu sur $\mathcal{L}_f(X_1, ..., X_n; Y)$ pour $\|\cdot\|_{VN_{f,}(r;r_1,...,r_n;s)}$ $(= \|\cdot\|_{VN,(r;r_1,...,r_n;s)})$ et

$$\|\Psi_T\| \leq \|T\|_{mas,(r';r'_1,...,r'_n;s')}$$

par la densité de $\mathcal{L}_f(X_1, ..., X_n; Y)$ dans $\mathcal{L}_{VN}^{(r;r_1,...,r_n;s)}(X_1, ..., X_n; Y)$, on prolonge Ψ_T à un fonctionnel continu $\widetilde{\Psi}_T$ sur $\mathcal{L}_{VN}^{(r;r_1,...,r_n;s)}(X_1, ..., X_n; Y)$ par une maniére unique, avec

$$\left\| \widetilde{\Psi}_T \right\| \leq \|T\|_{mas,(r';r'_1,...,r'_n;s')} .$$

On note que $\mathcal{B}(\widetilde{\Psi}_T) = T$. ■

En particulier, si on remplace $\mathbb{N}^n$ par $\mathbb{N}$ dans les définitions convenables, on montre le résultat (1), déjà prouvé (Théorème 4.4.6), par une autre méthode et si on remplace s' par $+\infty$ on tronve (2).

Corollaire 4.6.7. *Si les espaces X_k^* $(k = 1, ..., n)$ possèdent la propriété d'approximation λ_k-bornée, alors*

(1) $\left(\mathcal{N}_{(r;r_1,...,r_n;s)}(X_1, ..., X_n; Y)\right)^*$ *est isométriquement isomorphe à l'espace* $\mathcal{L}_{as}^{(r';r'_1,...,r'_n;s')}(X_1^*, ..., X_n^*; Y^*)$, *pour* r, r_k *et* $s \in [1, +\infty]$, $k = 1, ..., n$ *par l'application* $\mathcal{B}_\Psi$ *donné comme suit :*

$$\mathcal{B}_\Psi (\Phi_1, ..., \Phi_n)(b) := \Psi (\Phi_1 \times \cdots \times \Phi_n b),$$

où $\Psi \in \left(\mathcal{N}_{(r;r_1,...,r_n;s)}(X_1, ..., X_n; Y)\right)^*, \Phi_k \in X_k^*,\ k = 1, ..., n$ *et* $b \in Y$.

(2) Le dual topologique de $\mathcal{L}_{VN}^{(r;r_1,...,r_n)}(X_1, ..., X_n; Y)$ *est isométriquement isomorphe à* $\mathcal{L}_{mas}^{(r';r'_1,...,r'_n)}(X_1^*, ..., X_n^*; Y^*)$.

Bibliographie

[1] D. Achour. Multilinear extensions of absolutely $(p; q; r)$-summing operators. Rend. Circ. Mat.60 (2011) 337-350.

[2] D. Achour. Factorisation des opérateurs sous linéaires et géométrie des espaces de Banach. Doctorat en Science 06/07/2005, Université de Batna.

[3] D. Achour and A. Belacel. Domination and factorization theorems for positive strongly p-summing operators. Positivity 18 (2014) 785-804

[4] D. Achour and A. Belacel. Virtually $(r; r_1, ..., r_m; s)$-nuclear multilinear operators. Soumis dans "Journal of Extracta Mathematicae"

[5] D. Achour and E. Dahia. Laprest́é Type $(n + 1)$-tensor norms and $(p; q; r)$-summing multilinear operators. ICM 2012, 11-14 March (2012), Al Ain (Proceeding).

[6] D. Achour, E. Dahia, P. Rueda and E.A. Sanchez Perez. Factorization of absolutely continuous polynomials. J. Math.Anal. Appl. 405, 1 (2013) 259-270.

[7] D. Achour et L. Mezrag. Factorisation des opérateurs sous-linéaires par $L_{p\infty}$ et L_{q1}. Ann. Sci. Math. Quebec 26 (2002) 109-121.

[8] D. Achour and L. Mezrag. Little Grothendieck's theorem for sublinear operators. J. Math. Anal. Appl. 296 (2004) 541-552.

[9] D. Achour and L. Mezrag. On the Cohen strongly p-summing multilinear operators. J. Math. Anal. Appl. 327(2007) 250-563.

[10] D. Achour, L. Mezrag and K. Saadi. On the Cohen p-nuclear sublinear operators. Journal of inequalities in pure and applied mathematics. 10, 2 (2009), Article 46, 13pp.

[11] D. Achour, L. Mezrag and A. Tiaiba. On the strongly p-summing sublinear operators. Taiwanese Journal of Mathematics. 11, 4 (2007) 959-973.

[12] D. Achour et L. Mezrag. Sur les opérateurs sous linéaires p-lattice sommants. Analele Universitatii Oradea. Fasc. Matematica, Tom XIV (2007) 237-250.

[13] R.L. Alencar. Multilinear mappings of nuclear and integral type. Proc. Amer. Math. Soc. 94, 1 (1985) 33-38.

[14] D. A. Charalambos and O. Burkinshaw. Positive Operators. Academic Press, INC. 1985.

[15] H. Apiola. Duality between spaces of p-summable sequences, (p, q)-summing operators and characterizations of nuclearity. Math. Ann. 219 (1976) 53-64.

[16] A.T. Bernardino, D. Pellegrino, J.B. Seoane-Sepulveda, M.L.V. Souza. Absolutely summing operators revisited : new directions in the nonlinear theory. arXiv :1109.4898 v2 [math :FA] 26 Dec 2011.

[17] O. Blasco. A class of operators from a Banach lattice into a Banach space. Collectanea mathematica Vol XXXVII, Fasciculo. 1 (1986) 13-22.

[18] O. Blasco. Positive p-summing Operators on L_p-spaces. Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 100. Number 2, june (1987).

[19] G. Botelho, E. Çalişkan and D. Pellegrino. On the representation of multi-ideals by tensor norms. arXiv :1006. 1560v1 (2010).

[20] G. Botelho, D. Pellegrino, P. Rueda. A unified Pietsch domination theorem. J. Math. Anal. Appl. 365 (2010) 269-276.

[21] Q. Bu, G. Buskes. The Radon-Nikodym property for tensor products of Banach lattices. Positivity 10(2), 365-390 (2006).

[22] J. Calabuig, J. Rodriguez and E.A. Sanchez Perez. Strongly embedded subspaces of p-convex Banach function spaces, Positivity 17 (2013) 775-791.

[23] B.M. Cerna. Operadores multilinears p-fatoraveis, Ph.D. Thesis 2005.

[24] B.M. Cerna. Some properties of multilinear operators nuclear type, International Journal of Pure and Applied Mathematics. v 56 No. 1 (2009) 143-154.

[25] J. Chaney. Banach lattices of compact maps. Math. Z. 129 (1972) 1–19.

[26] F. Cullender and C.A. Labuschagne. A note on the m-norm of Chaney-Schaefer. Quaestiones Mathematicae 30 (2007) 151–158.

[27] J. S. Cohen. Absolutely p-summing, p-Nuclear operators and Thier Conjugates. Math. Ann. 201, 177-200 (1973) Springer-Verlag 1973.

[28] G. P. Curbera. Banach space properties of L^1 of a vector measure. Proc. Am. Math. Soc. 123, (1995) 3797–3806.

[29] A. Defant and K. Floret. Tensor norms and operators ideals. North-Holland Mathematics Studies 176 (1993) .

[30] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge. Absolutely summing operators. Cambridge University Press, 1995.

[31] F. Galaz. The dual space of L^p of a vector measure. Positivity (2010) 14 : 715-729.

[32] J. Garcia-cuerva, J. L. Rubio de francia. Weighted Norm Inequalities and Related Topics . North-Holland-AMSTERDAM · Newyork · Oxford, Math. studies 116, 1985.

[33] A. Grothendieck. Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques. Bol. Soc. Mat. SaoPaulo8, 1-79 (1956) .

[34] H. Jarchow. Locally Convex Spaces. B.G. Teubner, Stuttgart (1981).

[35] J. L. Krivine. Théorèmes de factorisation dans les espaces réticulés. Séminaire Maurey-Schwartz $1973-1974$, exposés 22 et 23, École Polytechnique. Paris.

[36] C. C. A. Labuschagne. Riesz reasonable cross norms on tensor products of Banach lattices, Quaestiones Mathematicae 27 (2004) 243-266.

[37] C.C.A. Labuschagne. Preduals and nuclear operators associated with bounded, p-convex, p-concave and positive p-summing operators, Canad. J. Math 59, 3 (2007) 614-637.

[38] J. T. Lapresté. Opérateurs sommants et factorisations à travers les espaces L^p. Studia math., (57) 1 (1976) 47-83.

[39] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri. Classical Banach Spaces I and II. Springer-Verlag, Berlin (1996) .

[40] M. C. Matos. On multilinear mappings of nuclear type. Rev. math.. 6, 1, (1993) , 61-81.

[41] M. C. Matos. Fully absolutely summing and Hilbert-Schmidt multilinear mappings. Collect. Math. 54, 2 (2003) , 111-136.

[42] M. C. Matos. Absolutely summing mappings, nuclear mappings and convolution equation, Relatório 2005.

[43] B. Maurey. Théorèmes de factorisation pour les opérateurs linéaires à valeurs dans les espaces L_p. Astérisque 11 (1974) .

[44] L. Mezrag. Théorèmes de factorisation et de prolongement pour les opérateurs à valeurs dans les espaces L_p, pour $p < 1$. Comptes rendus Acad. Sci. Paris A. 300 (1985), 299-302.

[45] L. Mezrag and A. Tiaiba. On the sublinear operators factoring through L_p. Int. J. Math. Math. Sci. 50 (2004), 2695-2704.

[46] P. Meyer-Nieberg. Banach lattices. Universitext, Springer-Verlag, Berlin 1991.

[47] X. Mujica. Aplicações $\tau\,(p;q)$ sommantes e $\sigma\,(p)$-nucleares. Tese de Doutorado, UNICAMP (2006). 26.

[48] E. M. Nikishin. Resonance theorems and superlinear operators. Transl-of Cont. of Uspekhi, Mat. Nauk. XXV (6) Nov. Dec. (1970) .

[49] D. Pellegrino and J. Santos. A general Pietsch domination theorem". J. Math. Anal. Appl. 375 (2011) , 371-374.

[50] A. Pietsch. Absolut p-summierende abbildungen in normierten Räumen. Studia Math. 28, (1967) 333-353.

[51] A. Pietsch. Operator Ideals. VEB Deutscher Verlag der Wissensehaften. Berlin 1979.

[52] A. Pietsch. Ideals of multillinear functionals. Proc. II Intern. Conf. on Operator Algebras. Ideals and Theoretical Physics. Leipzig (1983) Teubner-Texte.

[53] D. Popa. Multilinear variants of Maurey and Pietsch theorems and applications. J. Math. Anal. Appl. 368 (2010) , 157-168.

[54] R. A. Ryan. Introduction to tensor products of Banach spaces. Springer Monogr. Math., springer, 2002.

[55] S. Reisner. Operators which factor through convex Banach lattices. Can. J. Math., Vol. XXXII, No. 6, 1980, pp. 1482-1500.

[56] S. Reisner. A factorization theorem in Banach lattices and its application to Lorentz spaces. Annales de l'institut Fourier, tome 31, $n^0 1$ (1981), p. 239-255.

[57] Y. Raynaud and P. Tradacete. Interpolation of Banach lattices and factorization of p-convex and q-concave operators. Integr. Equ. Oper. Theory 66 (2010), 79-112.

[58] E.A. Sanchez-Perez. Compactness arguments for spaces of p-integrable functions with respect to a vector measure and factorization of operatos through Lebesgue-Bochner spaces. Illinois Journal of Mathematics Volume 45, Number 3, Fall 2001, Pages 907-923.

[59] H. Schaefer. Banach lattices and positive operators. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New york 1974.

[60] L. Schwartz, P. R. Chernoff. Geometry and Probability in Banach spaces. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New york 1981.

[61] A. C. Zaanen. Introduction to operator theory in Riesz space. Springer-Verlag, 1997.

[62] O. I. Zhukova. On modifications of the classes of p-nuclear, p-summing and p-integral operators. Siberian Math. J., Vol. 30 No. 5, 1998.

Amar BELACEL
Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées (LMPA)
Université de Laghouat, Algérie

a.belacel@mail.lagh-univ.dz