



N° d'ordre:

UNIVERSITE * MOHAMED BOUDIAF * DE M'SILA

FACULTE / INSTITUT: DES SCIENCES ET DES SCIENCES DE L'INGENIEUR

MEMOIRE

Présentée pour l'obtention du diplôme de:

MAGISTER

Spécialité: Génie Mécanique.

Option: Energétique.

Par

SAFER NABIL BELKACEM

SUJET

**SIMULATION NUMERIQUE DE JETS
COMPRESSIBLE**

Soutenue publiquement le 06 /07/2005 Devant le jury composé de:

PR. R. ZEGADI	Prof	Président	Université de Sétif
Dr .M. SI-AMEUR	M.C	Directeur de la thèse	Université de Batna
Dr. B. BOUDRAH	M.C	Examineur	Université de M'sila
Dr. S. RAHAL	M.C	Examineur	Université de Batna

RESUME

Dans ce travail, nous avons utilise la simulation numérique pour étudier l'écoulement d'un jet compressible, libre et tridimensionnelle, par le modèle des grandes structures de turbulences, en utilisant, l'algorithme Monotone Integrated Large Eddy Simulation (M.I.L.E.S), pour analyser et comprendre les influences des paramètres du jet (le nombre de mach, rapport de pression et le nombre de Reynolds) sur les variables d'écoulements telles que la vitesse, la pression et la température. Nous avons abouti à des bons résultats compares aux résultats utilisant d'autre modèles de turbulence. Ces résultats sont représentes par des champs des contours et des profils des variables d'écoulements sur l'axe du jet.

ملخص

في هذا العمل قمت بدراسة تدفق حر ثلاثي الأبعاد و متغير الكثافة, مستعملا المتغيرات الكبرى للجريان بطريقة لوغاريتم (M.I.L.E.S). كذلك قمت بدراسة تأثير خصائص التدفق (عدد ماخ, نسبة الضغط و عدد رينولدز) على متغيرات الجريان من سرعة وضغط و حرارة. و لقد مثلنا النتائج المتحصل عليها بتمثيل بياني و تمثيل للمجالات التغير, و التي اطهرت نتائج حسنة مقارنة مع النتائج المتحصل عليها بطرق اخرى.

Abstract:

In this work, us before used the numerical simulation, to study a jet compressible free three-dimensional, by the model of large eddy simulation, have using, the algorithm monotone integrated large eddy simulation (M.I.L.E.S), to the us also to study, influences of parameters of the jet, number of mach, report of pressure and the number of Reynolds on variables of the flows as the speed, pressure and the temperature. We before succeeded have some good results compare to the results implanted on other model of turbulence, these results are represented by fields of contours, and variations of the flow variables on the axis of the jet.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer toute ma gratitude et ma reconnaissance à mon rapporteur, Dr SIAMEUR qui constamment veille, avec compétence et patience à ce que cette mémoire se déroule dans les meilleures conditions, et lui dire tout le plaisir que j'ai eu de travailler avec lui. Mes plus sincères remerciements s'adresse ensuite au Prof ZEGHADI qui m'a fait l'honneur de présider le jury.

Je remercie également les Dr BRAHIM BOUDRAH et le Dr S. RAHAL pour l'intérêt qu'ils ont voulu porter à ce travail en acceptant d'être membres de jury.

Je voudrais aussi remercier Monsieur CHAHAT pour avoir Accepté d'assister à la soutenance.

Un grand merci à ma famille pour son soutien constant et chaleureux pendant cette mémoire. Mes remerciements vont encore à tous mes amis qui m'ont donné l'aide pour finir ce travail.

Je remercie enfin toutes les personnes qui par un sourire ou une parole bienveillante.

SOMMAIRE

La liste des figures	i
Nomenclature	iv
INTRODUCTION GENERALE	1
CHAPITRE I : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE	3
I.1. Introduction à la turbulence	3
I.1.1. les échelles de la turbulence	4
I.2. les approches numériques de la turbulence	5
I.2.1. la simulation numérique directe	5
I.2.2. les méthodes statiques	6
I.2.3. la simulation des grandes structures de turbulence	7
I.3. les écoulements cisailles libres	7
I.3.1. les jets	8
I.4. le jet libre	9
I.4.1. les différentes zones du jet libre	10
I.4.2. analyse des instabilités	11
I.4.3. travaux antérieurs	14
I.5. les objectifs du travail	17
CHAPITRE II : LES MODELES DE GRANDES STRUCTURES DE TURBULENCE LARGE EDDY SIMULATION (L.E.S)	18
II.1. Introduction	18
II.2. Le concept de cascade d'énergie	19
II.3. Hypothèse de Kolmogorov	21
II.4. Le filtrage	22
II.4.1. le filtre passe bas	23
II.4.2. le filtre boîte "top hat"	24
II.4.3. le filtre gaussien	25
II.5. Le concept de filtrage	26
II.6. Les modèles de grandes structures de turbulence (L.E.S)	27
II.6.1. Concept de la viscosité turbulente	

dans les modèles (L.E.S)	27
II.6.1.1. le modèle de Smagorinsky classique	28
II.6.1.2. le modèle de Smagorinsky dynamique	29
II.6.2. hypothèse de similarité d'échelles	31
II.6.2.1. modèle de Bardina	32
II.6.2.2. le modèle de similarité d'échelles dynamiques	33
II.6.2.3. le modèle mixte	33
II.7. Modèles monotone integrated large eddy simulation (M.I.L.E.S)	34
II.7.1. Les algorithmes monotones	34
II.7.1.1. les propriétés fondamentales de la dynamique de fluide	35
II.7.2. Concepts et utilisation des algorithmes monotone	35
II.7.2.1. le Flux correcteur	35
II.7.2.1.1. le Flux correcteur de transport (FCT)	36
II.7.2.1.2. Totale variation Diminishing	37
II.7.2.1.3. le limiteur de la pente de flux	38
II.7.2.2. la méthode upwind	38
 CHAPITRE III: FORMULATION MATHÉMATIQUE	 39
III.1. Méthodologie	39
III.2. les hypothèses fondamentales et simplificatrices	39
III.3. les équations générales du problème étudié	40
III.4. Les conditions aux limites et initiales	43
III.5. Les équations du problème sous forme adimensionnelle	44
 CHAPITRE IV: LA MÉTHODES NUMÉRIQUE DE RÉOLUTION	 47
IV.1. Introduction	47
IV.2. Schémas splitting	48
IV.3. Résolution de l'équation d'advection	50
IV.3.1. problème de Riemann	52
IV.3.1.1 application du problème de Riemann dans l'équation d'Euler	55
IV.3.2. méthode parabolique PPM	57
IV.3.2.1 application de la méthode PPM dans l'équation d'Euler (advection)	65
IV.3.3. ROE SOLVEUR	67
IV.4. Condition du pas du temps	74
IV.5. Résolution de l'équation de la source	75
IV.6. Structure du code de calcul	77

CHAPITRE V : RESULTATS ET DISCUSSIONS	79
V.1. Présentation des résultats	79
V.2. L'influence du nombre de mach	80
V.2.1. Champs de pression	81
V.2.2. Champs de température	81
V.2.3. Champs de vitesse	82
V.3. L'influence du nombre de Reynolds	93
V.3.1. Champs de vitesse, pression, et température	93
V.4. L'influence du rapport de pression	104
V.4.1. Champs de pressions	104
V.4.2. Champs de température	104
V.4.3. Champs de vitesse	105
V.5. Validation du code	116
CONCLUSION GENERALE	120
BIBLIOGRAPHIE	122

LISTE DES FIGURES

Figure (I-1): visualisation expérimentale d'un jet rond de transition au turbulent

Figure (I-2): schéma illustrant les différentes régions du jet libre

Figure (I-3): mise en évidence des zones du jet selon P. SCHASSING

Figure (I-4a): schémas de développement d'écoulement a la sortie du jet

Figure (I-4b): illustration de l'instabilité de kelvin Helmholtz

Figure (II-1): les zones de spectre d'énergie turbulent

Figure (II-2): les modes de simulation numériques des échelles de la turbulence

Figure (II-3a): représentation spectrale de filtre passe bas dans l'espace physique

Figure (II-3b): représentation spectrale de filtre passe bas dans l'espace de Fourier

Figure (II-4a): représentation spectrale de filtre TOP HAT dans l'espace physique

Figure (II-4b): représentation spectrale de filtre TOP HAT dans l'espace Fourier

Figure (II-5a): représentation spectrale de filtre gaussien dans l'espace physique

Figure (II-5b): représentation spectrale de filtre gaussien dans l'espace Fourier

Figure (III-1): la configuration étudié

Figure (IV-1): représentation de la propagation des vitesses d'ondes dans le plan $x-t$

Figure (IV-2): schéma PPM au temps t

Figure (IV-3): schéma PPM au temps $t + \Delta t$

Figure (V-1): Champs de pressions, pour des nombres de Mach a) $M=1$, b) $M=1.4$, c) $M=1.6$,
d) $M=2$

Figure (V-2): Champs de pressions sur un plan, pour des nombres de Mach a) $M=1$, b) $M=1.4$,
c) $M=1.6$, d) $M=2$

Figure (V-3): Profils de variation de pressions, pour des nombres de Mach: a) $M=1$, b) $M=1.4$
c) $M=1.6$, d) $M=2$

Figure (V-4): Champs de vitesses, pour des nombres de Mach: a) $M=1$, b) $M=1.4$, c) $M=1.6$
d) $M=2$

Figure (V-5): Champs de vitesses sur un plan, pour des nombres de Mach a) $M=1$, b) $M=1.4$
c) $M=1.6$, d) $M=2$

Figure (V-6): Profils de vitesses pour des nombres de Mach a) $M=1$, b) $M=1.4$, c) $M=1.6$, d) $M=2$

Figure (V-7): Champ de températures, pour des nombres de Mach: a) $M=1$, b) $M=1.4$, c) $M=1.6$,
d) $M=2$

Figure (V-8): Champ de températures sur un plan, pour des nombres de Mach: a) $M=1$, b) $M=1.4$
c) $M=1.6$, d) $M=2$

Figure (V-9): Profils de températures pour des nombres de Mach a) $M=1$, b) $M=1.4$, c) $M=1.6$
d) $M=2$

Figure (V-10): Profils comparatifs des variables: a) pression, b) température, c) vitesse
Pour des nombres de Mach $M=1, 1.4, 1.6, 2.0$

Figure (V-11): Champs de pressions, pour des nombres de Reynolds a) $Re=2.10^3$, b) $Re=10^4$,
c) $Re=10^5$

Figure (V-12): Champs de pressions sur un plan, pour des nombres de Reynolds a) $Re=2.10^3$,
b) $Re=10^4$, c) $Re=10^5$

Figure (V-13): Profils de variation de pressions, pour des nombres de Reynolds a) $Re=2.10^3$,
b) $Re=10^4$, c) $Re=10^5$

Figure (V-14): Champs de températures, pour des nombres de Reynolds a) $Re=2.10^3$, b) $Re=10^4$,
c) $Re=10^5$

Figure (V-15): Champs de températures sur un plan, pour des nombres de Reynolds a) $Re=2.10^3$,
b) $Re=10^4$, c) $Re=10^5$

Figure (V-16): Profils de variation de températures, pour des nombres de Reynolds a) $Re=2.10^3$,
b) $Re=10^4$, c) $Re=10^5$

Figure (V-17): Champs de vitesses, pour des nombres de Reynolds a) $Re=2.10^3$, b) $Re=10^4$,
c) $Re=10^5$

Figure (V-18): Champs de vitesses sur un plan, pour des nombres de Reynolds a) $Re=2.10^3$,
b) $Re=10^4$, c) $Re=10^5$

Figure (V-19): Profils de variation de vitesses, pour des nombres de Reynolds a) $Re=2.10^3$,
b) $Re=10^4$, c) $Re=10^5$

Figure (V-20): Profils comparatifs des variables: a) pression, b) température, c) vitesse
Pour des nombres de Reynolds a) $Re=2.10^3$, b) $Re=10^4$, c) $Re=10^5$

Figure (V-21): Champs de pressions, pour des rapport de pression a) $\frac{p_1}{p_2}=1.6$, b) $\frac{p_1}{p_2}=1.8$, c) $\frac{p_1}{p_2}=2$,
d) $\frac{p_1}{p_2}=3$

Figure (V-22): Champs de pressions sur un plan, pour des rapport de pression a) $\frac{P_1}{P_2}=1.6$

b) $\frac{P_1}{P_2}=1.8$, c) $\frac{P_1}{P_2}=2$, d) $\frac{P_1}{P_2}=3$

Figure (V-23): Profils de variation de pressions, pour des rapport de pression a) $\frac{P_1}{P_2}=1.6$, b) $\frac{P_1}{P_2}=1.8$

c) $\frac{P_1}{P_2}=2$, d) $\frac{P_1}{P_2}=3$

Figure (V-24): Champs de températures, pour des rapport de pression a) $\frac{P_1}{P_2}=1.6$, b) $\frac{P_1}{P_2}=1.8$

c) $\frac{P_1}{P_2}=2$, d) $\frac{P_1}{P_2}=3$

Figure (V-25): Champs de pressions sur un plan, pour des rapport de pression a) $\frac{P_1}{P_2}=1.6$, b) $\frac{P_1}{P_2}=1.8$

c) $\frac{P_1}{P_2}=2$, d) $\frac{P_1}{P_2}=3$

Figure (V-26): Profils de variation de températures, pour des rapport de pression a) $\frac{P_1}{P_2}=1.6$

b) $\frac{P_1}{P_2}=1.8$, c) $\frac{P_1}{P_2}=2$, d) $\frac{P_1}{P_2}=3$

Figure (V-27): Champs de vitesses sur un plan, pour des rapport de pression a) $\frac{P_1}{P_2}=1.6$, b) $\frac{P_1}{P_2}=1.8$

c) $\frac{P_1}{P_2}=2$, d) $\frac{P_1}{P_2}=3$

Figure (V-28): Champs de vitesses sur un plan, pour des rapport de pression a) $\frac{P_1}{P_2}=1.6$, b) $\frac{P_1}{P_2}=1.8$

c) $\frac{P_1}{P_2}=2$, d) $\frac{P_1}{P_2}=3$

Figure (V-29): Profils de variation de vitesses, pour des rapport de pression a) $\frac{P_1}{P_2}=1.6$, b) $\frac{P_1}{P_2}=1.8$

c) $\frac{P_1}{P_2}=2$, d) $\frac{P_1}{P_2}=3$

Figure (V-30): Profils comparatifs des variables: a) pression, b) température, c) vitesse

Pour des rapports de pression a) $\frac{P_1}{P_2}=1.6$, b) $\frac{P_1}{P_2}=1.8$ c) $\frac{P_1}{P_2}=2$, d) $\frac{P_1}{P_2}=3$

Figure (V-31): profils de la variation du taux de détente du jet en fonction du nombre de Mach

Figure (V-32): profil comparatif du taux de détente de nos résultats avec les résultats de ZAMAN

Figure (V-33): profil comparatif de variation de la vitesse longitudinale avec les résultat expérimentaux

Figure (V-34): profil comparatif de la variation de la longueur du cône avec le nombre de Mach

NOMENCLATURE

p	La pression
T	La température
Y	L'espèce
u	La composante de la vitesse sur la direction x
v	La composante de la vitesse sur la direction y
w	La composante de la vitesse sur la direction z
(x, y, z)	Les cordonne cartésiennes
t	Le temps
Pr	Le nombre de PRANDT
Re	Le nombre de Reynolds
SC	Le nombre de SCHMIT
e	L'énergie totale par unité de volume
D	La diffusivité massique
R	La chaleur spécifique massique
M	La masse molaire
C_p	La chaleur spécifique à pression constante
C_v	La chaleur spécifique à pression constante
U_0	La vitesse à la sortie de l'orifice du jet
U_2	La vitesse du fluide enveloppant le jet
D_0	Le diamètre de l'orifice du jet
M_0	Le nombre de mach a la sortie d l'orifice du jet
x_i Ou \hat{x}	Notation pour (x, y, z)
u_i Ou \hat{u}	Notation pour (u, v, w)
r	La direction radiale dans les cordonnées cylindriques
R_0	Le rayon de l'orifice du jet
L_x	La longueur de la boite de calcul sur la direction x

L_y	La longueur de la boite de calcul sur la direction y
L_z	La longueur de la boite de calcul sur la direction z
h	Enthalpie totale par unité de masse
$U(\mathbf{x}, t)$	Les vecteurs des variables conservatives
$F_j(U(x, t))$	Les flux d'advection sur les directions cartésiennes (x, y, z)
$S(u(x, t))$	Les termes de source sur les directions cartésiennes (x, y, z)
L_j	Les opérateurs de l'équation d'advection dans les coordonnées cartésiennes (x, y, z)
U_{init}^n	La condition initiale
Δt	Le pas du temps
n	Nombre du pas de temps
I	Nombre de cellule sur la direction x dans coordonne cartésiennes
J	Nombre de cellule sur la direction y dans coordonne cartésiennes
K	Nombre de cellule sur la direction z dans coordonne cartésiennes
$F' = A$	La matrice jacobienne de l'équation d'Euler
U	Les variables d'écoulement conservatives
V	Les variables d'écoulement primitives
W	Les variables caractéristiques d'écoulement
G	La matrice des vecteurs propres droite
G^{-1}	La matrice des vecteurs propres gauche
$R^{(k)}$	Les vecteurs propres droites
R_k	Les vecteurs propres gauches
e_k	Les variables caractéristiques
c	La vitesse du son
k_0	Coefficient constant
a	La vitesse d'onde
$f_{I+\frac{1}{2},R}^V(V_I(x), a)$	La fonction d'interpolation moyenne des variables primitives
Z	Le Paramètre vecteur
\bar{Z}	Le Vecteur moyen arithmétique
B	La matrice qui relie les variables conservatives au paramètre vecteur Z
C	La matrice qui relie les flux au paramètre vecteur Z

a_{\max}^n	La vitesse d'onde maximale à l'interface $x_{I+\frac{1}{2}}$ au temps t^n
$V_{I+\frac{1}{2}}^-$	La valeur de la fonction d'interpolation moyenne de la cellule I au point $x_{I+\frac{1}{2}}$
$V_{I+\frac{1}{2}}^+$	La valeur de la fonction d'interpolation moyenne de la cellule $I + 1$ au point $x_{I+\frac{1}{2}}$
k	Nombre de vitesses d'ondes
k'	Nombre de point d'interpolation à l'interface $x_{I+\frac{1}{2}}$
$\bar{V}_{I+\frac{1}{2},L}$	La première estimation de la valeur gauche du problème de RIEMAN
$\bar{V}_{I+\frac{1}{2},R}$	La première estimation de la valeur droite du problème de RIEMAN
$V_{I+\frac{1}{2},L}^{(k)}$	La valeur de problème de RIEMAN gauche associée à chaque famille d'onde
$V_{I+\frac{1}{2},R}^{(k)}$	La valeur de problème de RIEMAN droite associée à chaque famille d'onde

SYMBOLES GRECS

r	La densité
l	Conductibilité thermique
g	Constant du gaz parfait
t_{ij} Ou \hat{t}	Le Tenseur de Reynolds
d_{ij}	Le Symbole de Kronecker
m	La Viscosité moléculaire
∇	Le gradient spatial
I	La matrice unitaire
Δ	La variation des variables d'écoulement entre les états gauches et droits
Δx_I	Le pas spatiale sur la direction x dans coordonne cartésiennes
z	Le maillage spatial adimensionnel sur la direction x dans coordonne cartésiennes.
V_I^n	La valeur moyenne des variables primitives
$V(x)$	La fonction d'interpolation des variables primitives

$V_I(x,t)$	La fonction d'interpolation des variables primitives, fonction du temps
$g(x)$	La fonction d'interpolation quadratique
$h^{(1)}, h^{(2)}, \bar{h}_I, h_I$	Constantes
e	Paramètre
dV_I	La pente moyenne de la fonction d'interpolation
$d_m V_I$	La pente moyenne minimale de la fonction d'interpolation
$d^2 V_I$	La pente moyenne de la fonction d'interpolation
a_1, a_2, a_3, a_4	Les coefficients du schéma de RUNGE KUTTA quatrième ordre
b_1, b_2, b_3, b_4	Les coefficients du schéma de RUNGE KUTTA quatrième ordre
y	L'opérateur de l'équation de la source
Λ	La matrice des valeurs propres

D'AUTRE SYMBOLES

$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$	Les dérivées partielles dans les coordonnées cartésiennes (x, y, z)
$\frac{\partial}{\partial t}$	Opérateur de dérivé partielle du temps
$()_0$	Notation les variables d'écoulements à la sortie de l'orifice du jet
$()^*$	Notation approximative
$()_{I \pm \frac{1}{2}}$	Notation des valeurs interfaciales
$()_L$	Notation gauche
$()_R$	Notation droite
$()_I$	Notation à gauche de l'interface de la cellule
$()_k$	Notation sur le nombre des vitesses d'ondes de l'équation d'Euler
$()^n$	Notation approximative
$naleat$	Le Nombre à génère
$rand$	Générateur aléatoire, qui varie entre 0.5 et -0.5
CFL	Courant Frederik LEWY

Introduction générale

Du fait de leur présence, dans un grand nombre de configurations industrielles, le jet présente une grande importance technologique qui détermine la nature du champ d'écoulement dans les turboréacteurs dont la conception dépend de l'efficacité du mélange formé par le jet et le fluide environnant.

Il est utile de rappeler que le comportement global du jet se caractérise par un fort cisaillement des vitesses moyennes qui provoque des instabilités du mode kelvin Helmholtz qui se développent en structures cohérentes de la turbulence.

L'étude du jet a fait l'objet d'intense recherches expérimentales, numériques et théoriques ces derniers années.

La simulation numérique est le procédé le plus utilisé et le moins coûteux, cependant le problème majeur réside dans la simulation des écoulements complexes instationnaires et dans le nombre de Reynolds est très élevé, ceci implique un coût de calcul en taille mémoire et en temps CPU trop important pour les niveaux actuels des ressources informatiques.

La méthode de simulation des grandes structures de turbulence (L.E.S) est une approche hybride entre la méthode de simulation directe (S.N.D) et la méthode de la moyenne de Reynolds des équations de Navier stockes (R.A.N.S). Ce type de simulation consiste à résoudre les équations de Navier stockes sur l'échelle de maille de calcul des variables d'écoulement global et modélise les effets des petites échelles inférieures à l'échelle de la maille par un modèle dit sous maille. Cette méthode est une nouvelle perspective pour la résolution du problème de turbulence, les résultats obtenus dans des travaux antérieurs par l'utilisation de cette méthode, nous ouvre une nouvelle perspective et nous donne une bonne motivation à son utilisation dans notre étude.

Dans ce travail, la simulation des grandes structures de turbulences (L.E.S) est bien adoptée sans le modèle sous maille, en utilisant un algorithme dit (M.I.L.E.S) "monotone integrated Large Eddy Simulation" dont le filtrage des petites structures de turbulence repose sur la discrétisation mathématique des équations différentielles du problème traité et en utilisant les propriétés

fondamentales du schéma numérique: (causalité, positivité, conservation, monotonie) en vue d'obtenir le flux correcteur de transport.

Dans ce travail, nous avons étudié un jet rond compressible tridimensionnel, injecté dans l'air libre. Le fluide du jet est assimilé à un gaz qui obéit à la loi du gaz parfait.

La simulation numérique a été faite pour étudier l'influence des paramètres du jet: nombre de Mach, le rapport de pression et le nombre de Reynolds, sur des champs hydrodynamiques et thermiques de l'écoulement.

Pour atteindre ces objectifs, nous sommes amenés à résoudre l'équation générale de NAVIER STOCKES.

La résolution numérique du problème traité s'appuie sur la combinaison de la résolution de l'équation d'advection (d'Euler) et la résolution de l'équation de la source d'une manière alternative, à l'aide de la méthode splitting deuxième ordre. La résolution de l'équation d'Euler est basée sur la méthode de godunov haut ordre (PPM,) qui nous permet d'obtenir les valeurs interfaciales. L'équation du terme source est résolue par le schéma de RUNG KUTTA de quatrième ordre dans le temps.

Le champ des variables d'écoulement (vitesse, pression et température) sont représentées à l'aide d'une visualisation couleur tridimensionnelle par le logiciel de TEC PLOT.

Le travail présenté dans cette mémoire est organisé en cinq chapitres:

Chapitre 1: aborde des généralités sur les écoulements du jet ainsi que les travaux antérieurs.

Les différents modèles de turbulence de (L.E.S) ainsi que l'algorithme monotone integrated large Eddy simulation utilise et les objectifs de ce travail, sont présentés dans le chapitre 2.

La formulation mathématique du problème physique traité est donnée au chapitre 3.

Le chapitre 4 aborde la méthode de résolution numérique des équations de Navier stockes compressibles.

Les résultats obtenus par le code de calcul avec et leurs interprétations sont présentés Dans le chapitre 5.

Chapitre I

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

I.1 Introduction à la turbulence

Les écoulements de fluides rencontrés dans la nature ou dans des processus industriels, sont en général instationnaires et turbulents, souvent couplés avec d'autres phénomènes physiques. La prise en considération de ces instationnarités et couplages est indispensable pour la compréhension et la prédiction de certains problèmes de la mécanique et de la physique, ce qui fait que l'étude de la turbulence est un problème majeur de la recherche actuelle.

L'intuition, nous permet de percevoir ce qui est la turbulence, mais il est difficile de lui donner une définition précise, à même de nous permettre de comprendre des phénomènes variés dans de différents domaines: hydrologiques, astrophysiques, météorologies.....etc.

La turbulence n'est pas une propriété du fluide comme la viscosité ou la conductibilité thermique par exemple, elle se produit lorsque le nombre de Reynolds représentatif de l'écoulement est suffisamment grand, elle est caractérisée par un nombre de propriétés physiques comme l'imprédictibilité, la capacité du mélange, la présence d'une large gamme d'échelles qui participent au mouvement voir [2].

Il n'existe pas une définition générale et précise de la turbulence en mécanique des fluides, mais on peut la caractériser par un certain nombre de propriétés physiques observables:

- Les variables physiques de l'écoulement (vitesse, pression) varient de façon aléatoire, ce qui rend impossible de décrire le mouvement turbulent, mais il est possible d'en faire une description statique en calculant par exemple les valeurs moyennes de ces variables.
- La présence des structures de tailles différentes qui interagissent entre elles.

- L'écoulement turbulent diffuse toute quantité comme par exemple la température et la quantité de mouvement.
- L'écoulement turbulent présente toujours des fluctuations du rotationnel de la vitesse.
- elle est un phénomène dissipatif dû à la présence de forts gradients de vitesse instantanés d'où le taux de déformation important contribuant à la conversion de l'énergie cinétique turbulente en chaleur.
- elle est un phénomène tridimensionnel qui est dû le plus souvent à l'augmentation du nombre de Reynolds.
- Elle est le caractère chaotique qui ne peut prédire l'évolution ultérieure dans le temps, même si l'écoulement est régi par des équations bien déterminées.
- Une petite variation dans les conditions initiales peut provoquer des variations importantes des variables. L'un des problèmes soulèves par l'apparition de la turbulence est la perte du déterminisme physique à l'échelle macroscopique

I.1.1 Les échelles de la turbulence

Un écoulement turbulent est la superposition de l'ensemble des structures d'échelles très variées. C'est le phénomène d'étirement tourbillonnaire qui contribue à la création des structures d'échelles de longueur de plus en plus petites, accompagné d'un transfert d'énergie cinétique dont le mécanisme est assez complexe. Au cours du processus, le nombre de Reynolds associé aux structures successives diminue jusqu'à l'ordre de l'unité, les effets visqueux deviennent prépondérants. Cependant, il existe une limite inférieure où la taille des structures turbulentes qui est liée à la viscosité correspond aux échelles dites dissipatives décrites par un échelle l_k et la vitesse caractéristique n_k , on déduit alors un temps caractéristique $t_k = \frac{l_k}{n_k}$, ou l_k est appelé l'échelle de Kolmogorov [1].

Les grosses structures correspondent à la dimension de la géométrie du système (échelle intégrale), les fluctuations turbulentes représentées par les grosses structures ayant des grandes longueurs d'ondes (basses fréquences) sont décrites par une vitesse typique et une échelle l appelée macro échelle, on peut par conséquent définir un temps caractéristique $t = \frac{l}{u}$.

Les grosses structures tirent leur énergie de l'écoulement moyen qui se caractérise par la vitesse U

Et une échelle typique L , on définit un temps caractéristique de l'écoulement moyen par $T = \frac{L}{U}$

Si: $t = T$, il y aura un transfert d'énergie important.

La description de la turbulence comme un processus ou l'énergie injectée aux grandes échelles est transférée aux échelles de plus en plus petites, jusqu'au niveau de l'échelle de Kolmogorov où elle est dissipée en chaleur, phénomène déjà observé dans des expériences antérieures.

I.2 Les approches numériques de la turbulence

La plupart des écoulements rencontrés dans le domaine de la pratique industrielle sont de nature turbulentes et beaucoup de phénomènes tels que le transfert de chaleur ou de masse, sont liés au mouvement du fluide, donc leur étude nécessite le calcul préalable de l'écoulement considéré.

On présente, ici quelques méthodes de prédétermination des variables d'écoulement turbulent

Voir [35].

I.2.1 La simulation numérique directe

Dans les équations de Navier stockes, le fluide est considéré comme un milieu continu par rapport à l'échelle moléculaire. Selon ce point de vue, on peut trouver les solutions des équations de Navier stockes par leurs résolutions sur toutes les échelles de l'écoulement: des échelles énergétiques aux échelles dissipatives. A partir de la loi de Kolmogorov, on peut montrer que le rapport entre l'échelle des grosses tourbillons et l'échelle de Kolmogorov est proportionnelle à $Re^{3/4}$, c'est-à-dire pour capturer toutes les échelles qui apparaissent dans l'écoulement turbulent, il faut utiliser une grille de calcul avec un nombre de points dans chaque direction de l'écoulement de l'espace, proportionnelle à $Re^{3/4}$ c'est à dire dans un écoulement tridimensionnelle le nombre de points sur une grille est de l'ordre de $Re^{9/4}$. On peut aussi montrer que le temps de calcul est proportionnel à $Re^{11/4}$. Ainsi, en regardant le coût de calcul en place mémoire et en temps CPU, on comprend bien que ce type de simulation est envisageable pour des écoulements relativement simples dans l'étude de la turbulence voir [46].

I.2.2 Les méthodes statiques

Dans un écoulement turbulent, on distingue trois classes d'échelles de mouvement : les mouvements d'ensembles (mouvement global de l'écoulement), mouvement d'agitation turbulent, mouvement d'agitation moléculaire. Une idée, qui peut être envisagée est de prédéterminer des paramètres statiques (à définir), des variables d'écoulement pour lesquelles il existe un déterminisme statique afin de résoudre les équations de la dynamique du fluide.

Il existe trois type de moyenne utilisées dans l'analyse statique des équations de Navier stockes.

- **Moyenne d'ensemble**

C'est la moyenne prise sur l'ensemble de toutes les réalisations possibles de l'écoulement turbulent, à tout moment et en tout point, elle est définie par:

$$\overline{f(\mathbf{x}, t)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f^{(i)}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{I-1})$$

N : Le nombre d'expérience indépendant sur le même écoulement.

Enregistre i^{eme} expérience de la valeur d'une même quantité à la même position et au bout du même temps.

La moyenne d'ensemble est également appelée moyenne de Reynolds.

Si: N tend vers l'infini, la moyenne d'ensemble tend vers la moyenne statique.

- **Moyenne temporelle**

La moyenne temporelle est définie pour une seule expérience, une seule quantité à une position fixe:

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\mathbf{x}, s) ds \quad (\text{I-2})$$

Cette définition est directement accessible lors de l'expérience.

- **Moyenne spatiale**

De façon similaire, on peut utiliser une moyenne spatiale par une réalisation quelconque du champs turbulent, elle est définie par:

$$\langle f(x, t) \rangle = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \iiint f(s, t) ds \quad (\text{I-3})$$

Cette moyenne n'a de sens que pour les écoulements homogènes en espace. Pour les champs inhomogènes, surtout pour la simulation des grandes structures, on utilise la moyenne spatiale filtre, définie par une convolution avec une atténuation (filtre) sur une largeur spatiale Δ autour de point x

$$\langle f(x,t) \rangle = \lim \frac{1}{V} \iiint G_{\Delta}(x-x') f(s',t) ds' \quad (I-4)$$

On procède ensuite à la résolution des équations moyennes obtenues, cependant, il faut comprendre qu'après le traitement statique, on a une perte d'information sur les équations, ce qui traduit que le système obtenu est ouvert. L'information perdue doit donc être reconstruite puis réintroduite dans le système à l'aide de schémas de fermeture convenables (modélisation du tenseur de Reynolds apparaît et qui est responsable de toutes les fluctuations dans l'écoulement), afin d'assurer la conservation fondamentale du modèle de Navier stockes, comme par exemple la non linéarité advectives-diffusion- dissipation, parmi les contraintes d'application de ces méthodes, on mentionne le fait qu'il accède au grandeur moyenne de l'écoulement.

I.2.3 La simulation des grandes structures de turbulence

Comme dans le cas précédent, en moyennant les équations de Navier stockes à l'aide de la moyenne spatiale filtre, on obtient un système ouvert pour les variables d'écoulement. Le tenseur de contrainte qui résulte de la non linéarité des équations de Navier stockes après avoir pris la moyenne à une expression analogue que celle obtenue en moyennant temporellement les équations, mais il ne modélise pas à la même physique. En fait, ce tenseur ne rend compte que des fluctuations à petite échelle, plus petite que la maille de calcul qu'on va choisir, en correspondance avec la largeur du filtre choisi, qui seront plus faciles à modéliser ayant un caractère universel. Les modèles de fermeture de cette méthode feront l'objet du chapitre suivant voir [30].

I.3 Les écoulements cisailés libres

Les écoulements cisailés turbulents sont divisés en deux catégorie: les écoulements dans les conduites (canaux, cavités) et les écoulement cisailés libres (couche de mélange, jet, sillage, couche limite). Cette classification est faite, car les structures et les propriétés des écoulements aux limites rigides et libres sont fondamentalement différentes, en plus de la rugosité de la paroi qui constitue un paramètre important dans l'étude de la turbulence dans les conduites.

La différence, entre les écoulements libres et les écoulements dans les conduites, vient du phénomène des fluctuations turbulentes. Pour les écoulements dans les conduites, ces fluctuations sont dues aux effets de la viscosité qui s'attaquent aux parois, alors que pour les écoulements libres elles sont issues d'une mince couche séparant la partie turbulente et la partie non turbulente.

Le résultat étant une limite irrégulière et instable, donc l'écoulement est caractérisé par des vitesses discontinues et instables voir [11].

I.3.1 Les jets

Le jet est un écoulement cisailé libre issu d'un orifice, dont l'écoulement contient des points d'inflexion du profil de vitesse, d'où la formation des vortex causée par l'instabilité non visqueuse de kelvin Helmholtz, exercée sur la distribution de la vorticité à travers le jet. Le problème principal de ce fait, les jets sont très sensibles aux conditions initiales et aux limites du domaine d'écoulement. Donc le comportement global du jet est dominé par la dynamique des structures tourbillonnaires. On trouve beaucoup de types et configurations des jets voir [10], [13], parmi eux:

- Les jets plan: l'écoulement est issu d'un orifice plan étroit et a seulement deux directions dominantes. Le problème alors peut être écrit dans les termes de deux directions cartésiennes (x, y) .

- Les Jets circulaires: Ces jets sont issus des orifices circulaires et annulaires. Le problème est traité généralement en 3D de préférence en coordonnées cylindriques (y, z, q) . Si les quantités d'écoulement sont indépendantes de la position angulaire, alors la ligne centre du jet est l'axe

De symétrie ($\frac{\partial}{\partial q} = 0$), la description sera en deux coordonnées (z, q) , Dans ce cas, l'écoulement du jet prend une forme conique.

- Jets libres: pas d'influence des murs sur les écoulements. L'écoulement provient d'un orifice et d'un fluide ambiant stagnant.

- Compound jets; C'est le même type de base du jet libre, sauf que le fluide de l'environnement est en mouvement parallèle à la direction du jet. L'écoulement parallèle doit avoir une petite vitesse qui est utile pour la stabilisation et la régulation des jets.

- Swirling jet; Ce sont des jets circulaires avec un mouvement circonférentiel au mouvement global: un mouvement spiral autour de l'axe principal de l'écoulement, les tourbillons rehaussent le mélange

qui est utile pour la stabilisation et la régulation du jet. Dans le cas des jets axisymétriques, Le mouvement angulaire est important.

I.4. le jet libre

La quantité de mouvement issue d'un orifice se meut dans un environnement sans obstacle et en détente dans l'espace libre, due aux forces extérieures. Ainsi cet écoulement est divisé en deux régions: la région rotationnelle (couche de cisaillement) et la région irrotationnelle (fluide ambiant) voir [17].

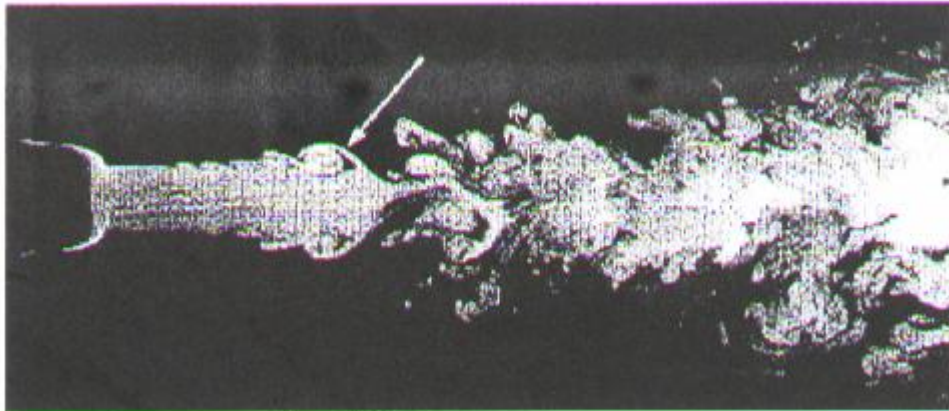


Figure (I-1) : Visualisation expérimental d'un jet rond de transition au turbulent.

· La région rotationnelle

C'est le régime central, dominé par l'augmentation radiale de la couche de cisaillement causée par la diffusion radiale de la quantité de mouvement où L'épaisseur radiale de cette couche de cisaillement est une couche limite d'épaisseur d . L'augmentation radiale est suivie par la diminution de la quantité de mouvement le long de l'axe du jet avec Les hauts gradients de vitesse suivis de tenseurs de contrainte de cisaillements élevés. Les gradients de vitesse sont assez faibles à l'extérieur de cette couche Voir [4], [7]. Un important mécanisme physique apparaît dans les jets ronds précisément dans la couche de cisaillement: c'est l'entraînement du fluide extérieur de la région irrotationnelle et la couche de cisaillement de la zone du cône, L'entraînement apparaît par deux différents mécanismes: La diffusion visqueuse et l'enroulement des structures dynamiques du jet. Ces deux mécanismes seront expliqués plus tard.

I.4.1 Les différentes zones du jet libre

Selon beaucoup d'auteurs voir [16], Les écoulements du jet sont formés de trois zones (Voir fig.I.2);

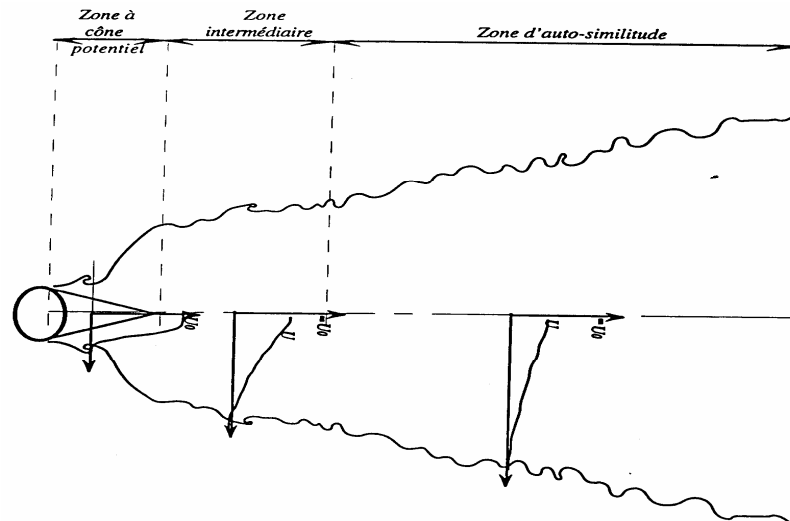


Figure (I-2) : schéma illustrant les différentes régions du jet libre.

- **La zone potentielle**

C'est une région très proche de la section de sortie du jet, l'évolution des profils de vitesse dans cette zone, montre l'existence d'une partie de l'écoulement sous forme de cône avec une vitesse longitudinale constante le long de l'axe du jet. Cette vitesse est égale à la vitesse de sortie U_0 , d'où l'appellation zone à cône potentiel. Ce dernier se trouve entre deux zones de mélange dans lesquelles la turbulence se développe au sommet de ce cône avant d'atteindre l'axe du jet.

- **Zone d'auto-similitude**

Très loin de la section de sortie du jet, cette zone est caractérisée par l'établissement d'une similitude des profils de vitesse, Celle-ci consiste à définir l'évolution globale de l'écoulement comme fonction d'une seule variable spatiale rationnelle moyenne. Le choix adéquat des paramètres caractéristiques de l'écoulement (vitesse, masse volumique, température, dimension du jet) est conditionné par L'analyse du comportement global des jets, qui suppose que l'échelle de longueur et de temps est construite respectivement à partir du rayon du jet à la sortie r_0 et du nombre de Reynolds de ce jet.

Des auteurs tels que THRING et NEWBY [22], ont montré qu'au delà d'une section du jet égale à $15r_0$, il suffit d'avoir un nombre de Reynolds à la sortie suffisamment grand pour assurer l'auto similitude. Le choix adéquat des variables adimensionnelles permet aussi de constater que l'évolution axiale des grandeurs dynamiques scalaires dépend uniquement du nombre de Reynolds minimal qui assure l'auto similitude. Il est possible de changer l'échelle de temps en faisant varier la vitesse du jet sans toutefois altérer son auto – similitude.

• Zone intermédiaire

Elle consiste en fait, à une zone de transition entre les deux précédentes. Par ailleurs, la délimitation de ces zones est uniquement liée aux conditions d'émission du jet. Certains auteurs partagent le jet en deux zones (zone à cône potentiel et zone d'écoulement pleinement développée) (voir fig. I.3) pour plus de détails [4].

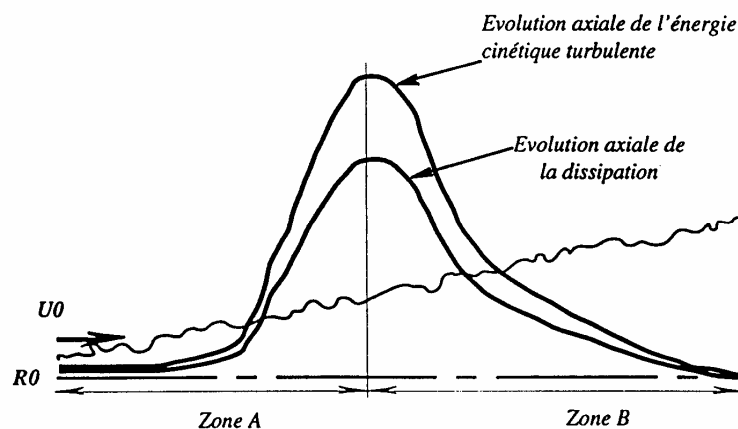


Figure (I-3) : mise en évidence des zones du jet selon p. chassaing

I.4.2 Analyse des instabilités

L'analyse détaillée des différentes zones qui composent le jet est intimement liée à la connaissance du phénomène de transition, du laminaire vers le turbulent. Si l'on part du principe que l'état turbulent est la conséquence directe du développement d'une perturbation (déstabilisante) dans un écoulement laminaire, il devient primordial de s'intéresser à l'origine ainsi qu'à l'évolution de ces instabilités qui s'opèrent dans de tel écoulement.

L'analyse des propriétés de la stabilité des jets est très importante, puis qu'elle permet de comprendre le phénomène de transition vers l'état turbulent et par la suite expliquer les phénomènes physiques qui s'y opèrent.

Dans le cas particulier, où l'écoulement est formé de deux fluides parallèles séparés par une interface plane et possédant des vitesses différentes, l'instabilité d'un tel écoulement se manifeste par la génération des structures en forme de vagues. En pratique, ce type de configuration se rencontre dans les océans ou encore dans des configurations industrielles, telles que les zones de mélange où il se produit un autre mode d'instabilités (dit KELVIN – HELMHOLTZ). Ce dernier mode, se résume par la présence d'une perturbation sur l'interface qui resserre les lignes de courant au dessus d'elle et les fait écarter au dessous. Le même phénomène se produit d'une façon inverse pour les lignes du courant du fluide situé au dessous de cette perturbation. Alors les lignes du courant qui se trouvent sur la face supérieure de cette perturbation voient leur vitesse accélérée et la pression diminuée, il en résulte ainsi une amplification de cette perturbation.

L'instabilité de KELVIN – HELMHOLTZ, se manifeste dans les écoulements à fort gradient de vitesse tels que les jets. Ce mode d'instabilité, se remarque par le cisaillement de l'épaisseur de la couche limite, lorsqu'on se déplace le long de l'axe de l'écoulement. Cette instabilité se manifeste de plus en plus, lorsque la vitesse radiale d'écoulement augmente au delà du bord d'attaque. Les paramètres qui permettent de contrôler cette instabilité sont résumés dans l'expression du nombre de REYNOLDS, construit à partir de l'épaisseur de la couche limite comme échelle de longueur. Le Nombre de Reynolds est le paramètre qui définit le mode d'instabilité. Pour plus détails

Voir [5], [11].

La figure (I-4), illustre le développement de l'instabilité de kelvin Helmholtz dans les jets. Le long de la direction radiale, le courant peut être divisé en trois régions: **le cône potentiel, la couche du cisaillement et l'écoulement de la région irrotationnelle**. A l'approche de l'axe central du jet, l'écoulement étant libre de l'influence de la viscosité, les vitesses longitudinales et radiales sont maintenues constantes, donc l'écoulement est potentiel et conserve sa vitesse d'écoulement d'entrée. L'existence des gradients de vitesse radiale donne naissance à la couche de cisaillement qui augmente radialement suite à la diffusion de la vitesse radiale, pendant que le débit massique de l'écoulement augmente aussi au fur et à mesure qu'on se déplace le long de l'axe du jet. Finalement, nous avons l'écoulement irrotationnelle de la région extérieur du jet. Cependant, l'instabilité des caractéristiques de l'écoulement dans la couche de cisaillement initiale dans un jet rond est très semblable à celle d'une couche de mélange.

Cette instabilité est appelée l'instabilité de " Kelvin Helmholtz". Sa naissance est due à la différence de vitesse à travers une couche de cisaillement mince. L'effet de cette petite instabilité (oscillation), dans l'écoulement global, peut être analysée par le point " A "; Le petit trouble réduit la région supérieure entre les courants naturels. Par continuité, quand le courant s'accélère et sa pression diminue, Une contrainte de traction se développe, s'exerçant sur l'écoulement global en augmentant cette oscillation plus loin le long des lignes du courant.

Le même mécanisme se produit dans la région au dessous du point " A ".

La vorticité est convectée plus loin par le courant moyen en augmentant la distance entre les crêtes de cette instabilité. Finalement, l'instabilité initiale s'enroule et forme des bagues dites "train primaire de KELVIN HELMHOLTZ". Dans la région de la couche de cisaillement initiale, Les vortex décrivent un arc axisymétrique suivant la géométrie ronde de la lance d'entrée du jet, La distance de séparation initiale entre deux bagues consécutives du train primaire de Kelvin Helmholtz est l'échelle de longueur de l'instabilité. Une fois, les bagues formées, les deux vortex fondamentaux consécutifs de Kelvin Helmholtz s'enroulent autour d'eux par induction mutuelle, en menant finalement à leur dernière fusion (Zaman & Huss) voir [10].

Me Lander et al, ont abouti que la dimension des plus grands tourbillons secondaires de Kelvin Helmholtz est définie par la double distance de séparation après la première fusion des vortex primaires de Kelvin Helmholtz. Ce processus est connu comme la cascade de vorticité, qui est maintenu jusqu'à la fin du cône potentiel voir [12].

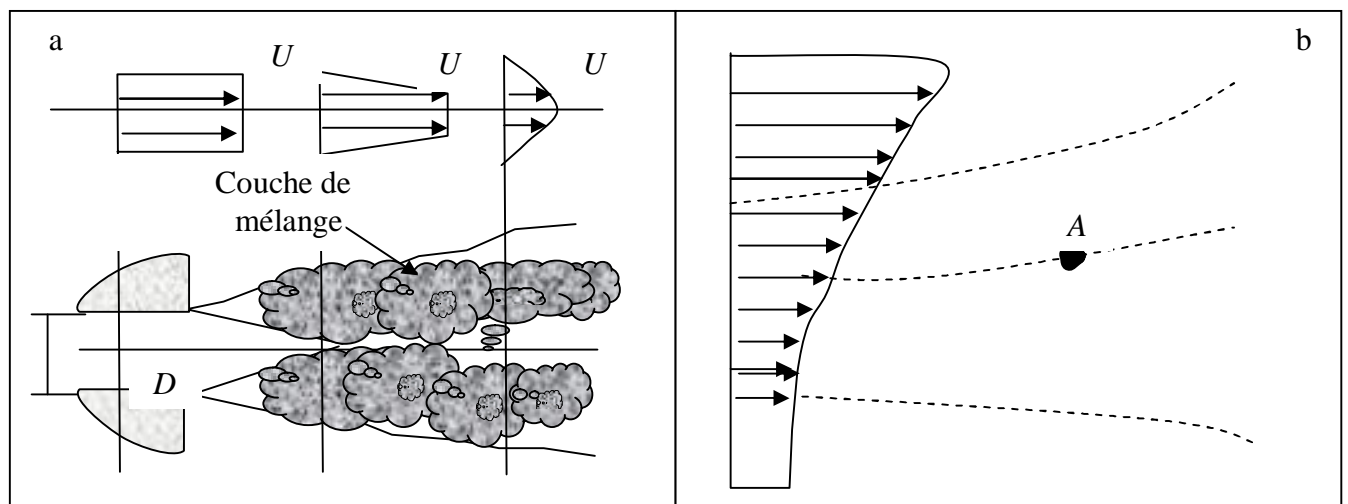


Figure (I-4) a) schémas de développement d'écoulement à la sortie du jet

b) illustration de l'instabilité de KELVIN HELMHOLTZ

I.4.3 Tavaux antérieurs

De par, leur présence dans certaines configurations industrielles et leur rôle important, Le jet détermine la nature du champ d'écoulement dans les chambres de combustion et les turboréacteurs d'avion dont la conception de ces derniers dépend de l'efficacité du mélange formé par le jet et le fluide environnant. En plus le problème de propagation du bruit à travers les structures acoustiques provoquée, par le mouvement du fluide qui est l'un des problèmes majeurs de la vibration de ces configurations.

Beaucoup d'études ont été élaborées pour la compréhension des phénomènes complexes de la turbulence qui s'y développe dans de tel écoulement, ainsi que Les effets de la compressibilité, l'instabilité initiale et la viscosité sur la longueur du cône potentiel, le taux détente et les différentes régions du jet.

Parmi ces études expérimentales, théoriques et numériques, on peut en citer:

Dans le cadre des études des jets en zone proche, on en compte un grand nombre sur le comportement des jets compressibles en zone pleinement développé. Les plus remarquables d'entre elles, sont résumées dans les travaux de C. J, CHEN et W. RODI [14], qui ont confirmé le partage du jet, en trois zones principales et la non validité des hypothèse de l'auto similitude en zone proche. Concluant ainsi, la non validité des hypothèses d'auto similitude.

L. JOLY [15] a proposé une nouvelle distinction des différentes régions d'un jet, fonde sur l'équilibre des termes prépondérants de l'équation du bilan de la quantité de mouvement.

P. CHASSING [16] a préconisé l'emploi de l'énergie cinétique turbulente en tant que paramètre. La description du jet, ainsi permet de dégager deux zones dans le jet associées respectivement à sa croissance et à sa décroissance. Cette nouvelle délimitation du jet est la conséquence de la prédominance respective de la diffusion et de la dissipation.

KHALED S. et ABDOLHAMID [6] ont étudié les écoulements aérodynamiques des jets supersoniques et subsoniques de nombre de Mach allant de 0.6 à 3.0, par une simulation numérique des équations de Navier stockes tridimensionnelles, en utilisant le modèle classique de JONES LAUNDER des deux équations de transport K, e . Les résultats obtenus des profils de variation de la pression et de la vitesse, sont en accord avec les résultats expérimentaux, surtout pour le phénomène

de décadence de la vitesse du centre du jet, qui définit la longueur du cône potentiel. Les résultats obtenus ont été confirmés par la relation empirique donnée par LAU MORRIS et FICHER [17].

BULENT VULT et VOLKAN OTUGEN [9], dans le cadre d'une étude analytique d'un jet compressible supersonique, ont fait une analyse dynamique et thermique de l'influence du nombre de Mach et de la compressibilité, sur le choix des paramètres asymptotes du jet; vitesse, pression, et températures. Cette étude a été basée sur des travaux expérimentaux qui ont abouti à la conclusion de la contribution de ces paramètres sur l'évolution des variables d'écoulement.

KOLBE et RONALD [23] ont étudié la génération du bruit dans l'écoulement d'un jet rectangulaire par l'outil numérique, en utilisant le code FAST3D qui résout les équations dynamiques et thermiques de l'écoulement, par l'algorithme du flux correcteur de transport (F.C.T). Les résultats obtenus ont montré l'efficacité de ce code dans la représentation correcte des variables moyennes de l'écoulement telles que la vitesse, la température et la pression.

FREUND [18] est le premier qui a utilisé une simulation numérique directe (S.N.D), pour étudier la génération du bruit dans un jet turbulent, d'un nombre de Reynolds 2000 et de nombre de Mach 1.92. Les champs de pression obtenus dans cette étude ont été validés à l'aide des résultats expérimentaux, mais la faiblesse de ce type de simulation est limitée pour des écoulements à bas nombre de Reynolds, en raison du nombre de points de maillage utilisé.

MANKABDI et AL [19] sont les premiers qui ont utilisé le modèle (L.E.S) large Eddy simulation, pour simuler un jet rond, en utilisant un schéma numérique de quatrième ordre, en vue de capter les effets des petites structures inférieures de la maille de calcul. Ils ont utilisé le théorème de Lighthill pour la résolution du problème de la variation des variables d'écoulement instantané. Les résultats obtenus sont satisfaisants.

ZHO et AL [20] ont étudié le comportement d'un jet rond avec un nombre de Reynolds 3600 et avec un nombre de Mach 0.9, les résultats obtenus, comparés avec les résultats de simulation directe de FREUND [18] et avec des résultats expérimentaux, ont montré un bon accord.

MORIS et AL [21], pour étudier les instabilités des structures d'écoulement dans un jet rond, ont utilisé la simulation numérique, qui repose sur la résolution des équations non linéaires ou les quantités instationnaires sont décomposées en quantités moyennes et en quantités de grandes et

petites échelles perturbées. Le résultat obtenu donne une bonne compréhension de l'évolution des stabilités dans les jets.

BOERSMA et LELE [8] ont utilisé le modèle (L.E.S), pour étudier un jet rond de nombre de Mach 0.9 et de nombre de Reynolds 3600, en modélisant le tenseur sous maille par le modèle dynamique de smagorinsky, en vue d'étudier le comportement du champ de vorticité. Les résultats obtenus ont montré la faiblesse de ce modèle pour capter les effets des petites structures d'échelles de la maille.

Les études expérimentales ont montré que l'organisation des structures de la turbulence est de plus en plus compliqué dans le cas des écoulements en 3D, de plus, ces études ne fournissent pas les renseignements pour la compréhension des phénomènes complexes de la turbulence et les mécanismes qui apparaissent dans tel écoulement.

Les travaux qui utilisent la méthode de simulation numérique directe S.N.D comme outil permet de résoudre ce problème, cependant, de point de vue physique nous sommes limités par les ressources informatiques actuellement disponible à cause de l'augmentation de la taille de calcul lors de la simulation de toute la gamme d'échelle de l'écoulement et particulièrement dans le cas des écoulements à haut nombre de Reynolds.

Les méthodes RANS comptent sur les modèles de la turbulence, qui modélisent toutes les échelles de la turbulence. De plus, ces méthodes utilisent les propriétés moyennes de l'écoulement, alors que le flux d'advection est un problème multi - échelle qui implique une grande gamme de longueur d'échelles et du temps, il apparaît donc que les méthodes R.A.N.S restent limitées pour des cas spécifiques ou le modèle serait capable à mod ler correctement toute la gamme d'échelles de la turbulence qui se développe dans tel écoulement.

La technique la plus adéquate pour la simulation des écoulements à haut nombre de Reynolds est la simulation des grandes échelles (LES).

En général, les résultats obtenus par les modèles (L.E.S) sont encourageants et motivants pour l'utilisation de cette approche comme un bon outil de simulation. De ce fait, nous présentons une étude détaillée de ces modèles au chapitre suivant. Cependant cette approche se base sur la modélisation explicite des échelles non résolues (le tenseur sous maille). Cette modélisation n'est pas fiable dans le cas des écoulements compressibles à cause de l'opération de d filtrage, qui n'est pas bien déterminée, Même l'application du modèle de la viscosité a prouvé que ces modèles ne correspondent pas au tenseur sous maille.

BORIS et al.[27], ont proposé un modèle basé sur le rapport évident entre la discrétisation numérique et le tenseur sous maille, dont le tenseur sous maille est modélisé par la diffusion non linéaire du schéma numérique. Ce modèle est appelé "monotone integrated large Eddy simulation"

(M.I.L.E.S), Que nous utilisons dans ce travail pour la simulation numérique d'un jet compressible en 3D ou Les effets des échelles sous maille non résolue sur les échelles Résolues de l'écoulement sont inclus dans le flux convectif (le flux limiteur non linéaire).

I.5 Les objectifs de cette étude

Nos objectifs dans cette étude:

1. la validation d'un code 3D (M.I.L.E.S) pour la simulation d'un jet compressible et turbulent, implanté dans le système des coordonnées cartésiennes. Le code est développé par un schéma (P.P.M) de haut ordre, à l'instar de la méthode de godunov, en vue de capter toutes les magnitudes inférieures à la maille de calcul pour éliminer les oscillations non physiques qui résultent des échelles non résolues de la maille. Pour enfin, calculer le flux de transport correcteur par l'algorithme de ROE.
2. la configuration et l'évolution des champs hydrodynamique et thermique qui est principalement gouverné par un mécanisme d'advection non linéaire par le logiciel de haut niveau de visualisation TEC PLOT.
3. étude paramétrique de l'influence du : nombre de Mach, le rapport de pression et le nombre de Reynolds sur l'écoulement en l'occurrence les structures turbulentes.

Chapitre II

LES MODELES DE GRANDES STRUCTURES DE TURBULENCE LARGE EDDY SIMULATION (L.E.S)

II.1 Introduction

La simulation des grandes structures de turbulences a pour fondement la résolution explicite des grandes échelles et la modélisation du processus de transfert d'énergie, depuis celles-ci vers les échelles les plus petites, que la taille de la maille qui habituellement sont appelées, les échelles sous maille et qui ne peuvent être résolues directement, Ce type de modélisation repose sur deux hypothèses principales: Les petites structures créés par l'interaction des grosses structures sont approximativement isotropes et universelles . L'isotropie permet de développer la modélisation sous maille à l'aide des théories analytiques.

La simulation des grandes structures turbulentes est une approche intermédiaire hybride, utilisant une simulation numérique partielle (des grandes structures) et une modélisation partielle (des petites structures), c'est-à-dire, une approche hybride entre la simulation directe (D.N.S) et la moyenne de Reynolds des équations de Navier stockes (R.A.N.S). L'idée est de mieux rendre compte des grandes

échelles qui sont en général fortement dépendantes de la géométrie de l'écoulement Et de la modélisation à un niveau où l'on peut utiliser des caractéristiques plus universelles.

Des modèles assez connus peuvent être développés pour décrire les comportements des ces petites échelles, mais étant porteuses d'une quantité peu importante, elles doivent être modélisées d'une façon simple, ce qui allège le calcul (L.E.S), qui exige des hautes résolutions. Voir les références [25], [30].

II.2 Le concept de cascade d'énergie dans les modèles (L.E.S)

Le concept de cascade d'énergie est essentiel pour la compréhension de la méthode de (L.E.S).

Un écoulement turbulent peut être conçu comme un enchevêtrement des structures tourbillons, dont les vecteurs de vorticités (rotationnels de la vitesse) sont orientés dans toutes les directions et sont fortement instationnaires. Lorsque les conditions aux limites le permettent (c'est à dire quand on fait l'hypothèse de la périodicité dans les trois directions de l'écoulement), voir [25], [30], [35].

L'équation de l'évolution de l'énergie cinétique dans l'espace spectrale obtenu à partir des équations de Navier Stokes dans l'espace spectral:

$$(\partial_t + 2nk^2)E(k,t) = W(k,t) + T(k,t) \quad (\text{II-1})$$

On a $W(k,t)$: Représente la production d'énergie due aux forces appliquées au fluide.

$T(k,t)$: Représente le transfert d'énergie dû aux termes non- linéaire des équations de NAVIER STOCKES.

On interprète l'équation (II-1) de la manière suivante:

L'énergie introduite dans le système au niveau des grandes structures par le terme $W(k,t)$ est ensuite transformée aux échelles des plus petits par le terme $T(k,t)$, pour enfin se dissiper au niveau des plus petites échelles par le terme $2nk^2 E(k,t)$.

Le transfert d'énergie des grandes échelles vers les petites échelles est dû principalement au phénomène d'étirement des filets (vortex stretchings) dans l'évolution de la turbulence. On considère que les structures turbulentes sont des éléments tourbillonnaires, qui s'étirent les uns des autres, produisant le transfert d'énergie à des échelles de plus en plus petites, jusqu'aux forces visqueuses qui deviennent actives et dissipent l'énergie. On a alors trois zones dans l'évolution du spectre d'énergie turbulente (voir figure II-1).

- 1- la zone de production.
- 2- la zone inertielle.
- 3- la zone de dissipation.

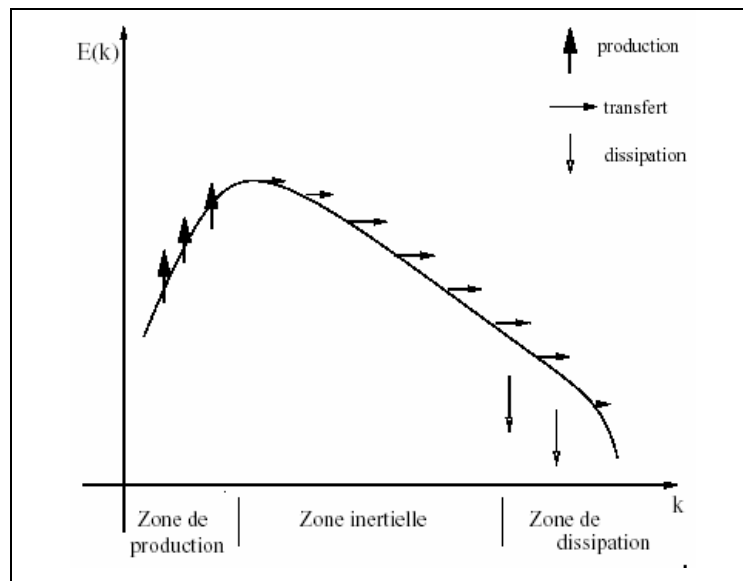


Figure (II-1) : les zones du spectre d'énergie turbulent

Les deux zones, production et dissipation, ne se recouvrent pas, même pour des nombres de REYNOLDS faibles. On remarqué, que la zone inertielle augmente quant le nombre de REYNOLDS augmente.

La simulation des grands échelles de turbulence, consiste à ne simuler, que les modes qui sont inférieurs à un certains échelles k_c , dites échelles de coupure qui se situent dans la zone inertielle, C'est-à-dire, simuler numériquement tous les modes, ce qu'on fait d'ailleurs, dans la simulation directe (S.N.D). Il reste à analyser, comment on représente l'effet des modes non résolus sur ceux qui sont résolus (voir figure II-2). Dans la référence [30] il y'a plus de détails.

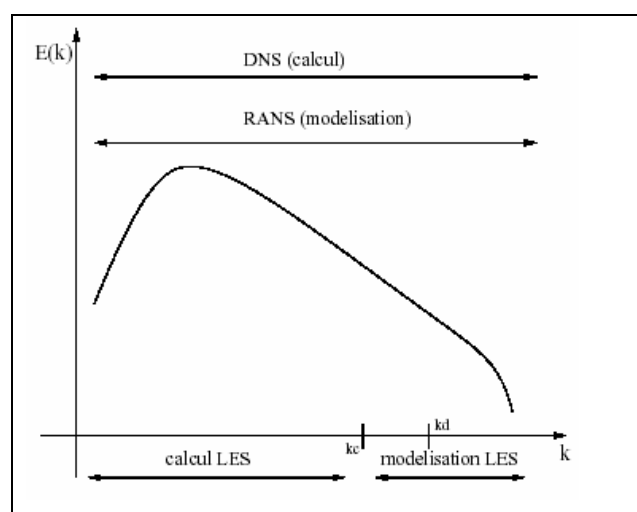


Figure (II-2) : les modes de simulation numérique des échelles de la turbulence.

II.3 Hypothèse de Kolmogorov

L'hypothèse de Kolmogorov énonce que le taux d'énergie cascade des plus grands échelles aux plus petits échelles est assumée constamment et indépendamment du temps, ce qui implique que le terme non- linéaire de l'équation de Navier stockes:

1- Ne participe pas à l'énergie cinétique globale.

2- Redistribue l'énergie globale des grandes structures aux petites structures.

Alors L'énergie cinétique globale, dans ce cas, dépend seulement de ϵ (Dissipation) et pas directement de la viscosité, est assimilée d'après l'analyse dimensionnelle par:

$$E(k) = c_{Kolmo} \cdot \epsilon^{2/3} \cdot k^{-5/3} \quad (\text{II-2})$$

Où c_{Kolmo} : Est la constante de Kolmogorov ≈ 1.5 .

Nous décrivons la largeur de l'échelle de Kolmogorov h , qui décrit l'équilibre entre l'effet inertiel et l'effet visqueux seulement, par le nombre de Reynolds qui mesure aussi le rapport entre ces effets. L'échelle de Kolmogorov est déterminé par :

$$\text{Re}_t \approx \frac{u_{k'k'} h}{\nu} \approx 1 \quad (\text{II-3})$$

Re_t : Nombre de Reynolds turbulent.

$u_{k'k'}$: La vitesse des échelles associées à:

$$k' = k_{Kolmo} = \frac{2p}{h} \quad (\text{II-4})$$

Où k_{Kolmo} , est La fréquence associée aux échelles de Kolmogorov et La vitesse u_{kk} associée à cette échelle et qui est déterminée par l'énergie cinétique $E(k)$.

Alors, Nous définissons le nombre de REYNOLDS globale par:

$$\text{Re} = \frac{h}{L} \quad (\text{II-5})$$

Où L : est la longueur d'échelle associe au nombre de Reynolds globale

Cette relation nous permet d'estimer le nombre de cellules dont on a besoin pour résoudre les écoulements complètement turbulents. Voir [1], [29].

II.4 Le filtrage

La simulation des grandes échelles de turbulence est basée sur l'opération de filtrage. L'idée classique est d'utiliser un filtre qui fait séparer les grandes structures aux petites structures, où nous obtenons des équations de Navier Stokes qui sont plus facile à résoudre, telles que les petites structures modélisées.

Une grandeur turbulente, telle que la vitesse ou la pression, peut s'écrire comme la somme d'une partie filtrée et d'une partie fluctuante (petit structure) voir [1], [25], [30].

$$V = \bar{V} + V' \quad (\text{II-6})$$

Pour isoler les contributions des grandes structures, il est nécessaire d'introduire un opérateur de moyenne spatiale filtré, défini par une convolution avec une fonction d'atténuation (un filtre) sur une largeur spatiale Δ autour du point x , ou la valeur moyenne filtrée des variables d'écoulement est définie par :

$$\bar{V}(x,t) = \int_{\Omega} G_{\Delta}(x,x')V(x',t)dx' \quad (\text{II-7})$$

Et: $x' = x - z$

Où $G_{\Delta}(x,x')$: désigne le filtre appliqué à la variable instantanée au point x et qui détermine la partie des fluctuations qui est incorporée dans les gros tourbillons.

Δ : est un paramètre libre qui représente la largeur du filtre choisi.

Ω : est le domaine d'intégration.

L'opérateur du filtrage est supposé normé:

$$\int_{\Omega} G_{\Delta}(x,x')dx' = 1 \quad (\text{II-8})$$

En turbulence homogène, la grandeur filtrée ne dépend pas de la position x et on peut écrire :

$$\bar{V}(x,t) = \int_{\Omega} G_{\Delta}(x-x')V(x',t)dx' \quad (\text{II-9})$$

Qui représente en est fait un produit de convolution:

$$\bar{V} = G_{\Delta} * V \quad (\text{II-10})$$

Les propriétés d'un filtre sont cependant très différentes de celle d'une moyenne classique. Le filtre ne vérifie pas les règles de Reynolds et en particulier:

$$\overline{\bar{V}} \neq \bar{V} \quad , \quad \overline{V'} \neq 0 \quad , \quad \overline{V'} \neq \bar{V} - \overline{\bar{V}} \quad (\text{II-11})$$

Parmi les filtres les plus souvent utilisés, on mentionne:

II.4.1 Le filtre passe bas

Est défini dans l'espace spectrale par:

$$\hat{G}(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \leq k_c \\ 0 & \text{sin on} \end{cases} \quad (\text{II-12})$$

Dans l'espace physique, il est défini par:

$$G_{\Delta}(z) = \prod_{i=1}^3 \frac{\sin\left(\frac{pz_i}{\Delta}\right)}{pz_i} \quad (\text{II-13})$$

$$\Delta = \frac{p}{k_c} \quad (\text{II-14})$$

k_c : est l'échelle de coupure.

Ce filtre a l'inconvénient de fournir une fonction oscillatoire dans l'espace physique, mais il est très simple dans l'espace spectrale voir [1].

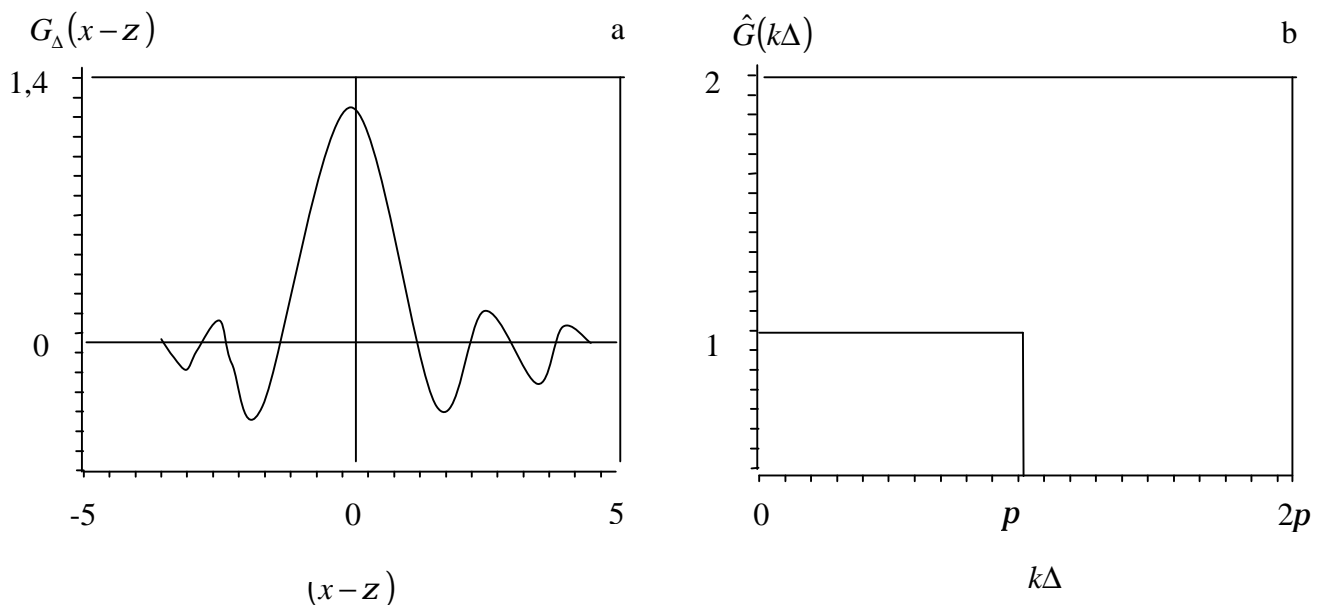


Figure (II-3) : Spectral passe bas filtre a) représentation dans l'espace physique

b) représentation dans l'espace de Fourier

II.4.2 Le filtre boite "top-hat"

Le filtre chapeau est défini dans l'espace physique par :

$$G_{\Delta}(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } |z| < \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{si } |z| \geq \frac{\Delta}{2} \end{cases} \quad (\text{II-15})$$

Et dans l'espace de Fourier par:

$$\hat{G}(k) = \prod_{i=1}^3 \frac{\sin\left(\frac{k_i \Delta}{2}\right)}{\frac{k_i \Delta}{2}} \quad (\text{II-16})$$

L'inconvénient de ce filtre est qu'il n'est pas localisé dans l'espace spectral ou il devient une fonction oscillante voir [1].

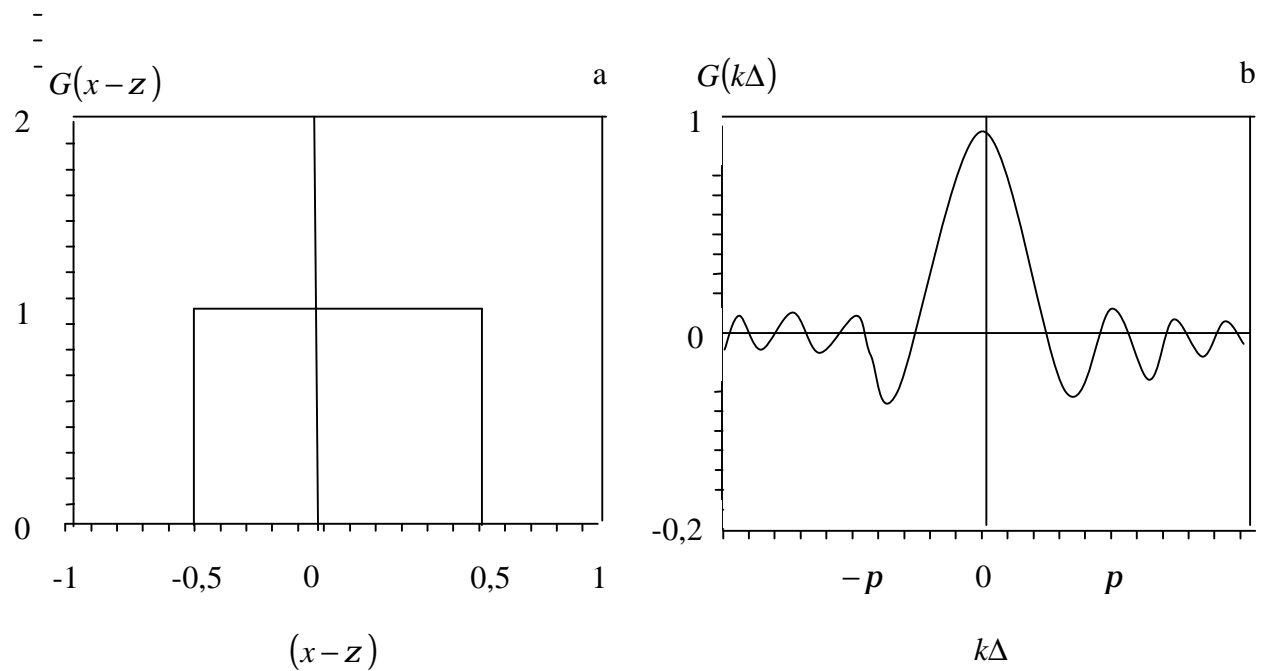


Figure (II-4) : Spectral top-hat filtre a) représentation dans l'espace physique
b) représentation dans l'espace de Fourier.

II.4.3 Le filtre gaussien

Il est Défini dans l'espace physique par:

$$G_{\Delta}(z) = \left(\frac{6}{p\Delta^2} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left\{ -6 \frac{|z|^2}{\Delta^2} \right\} \quad (\text{II-17})$$

Ce filtre est utilisable aussi bien dans l'espace physique que dans l'espace spectral, il donne souvent de bons résultats voir [1].

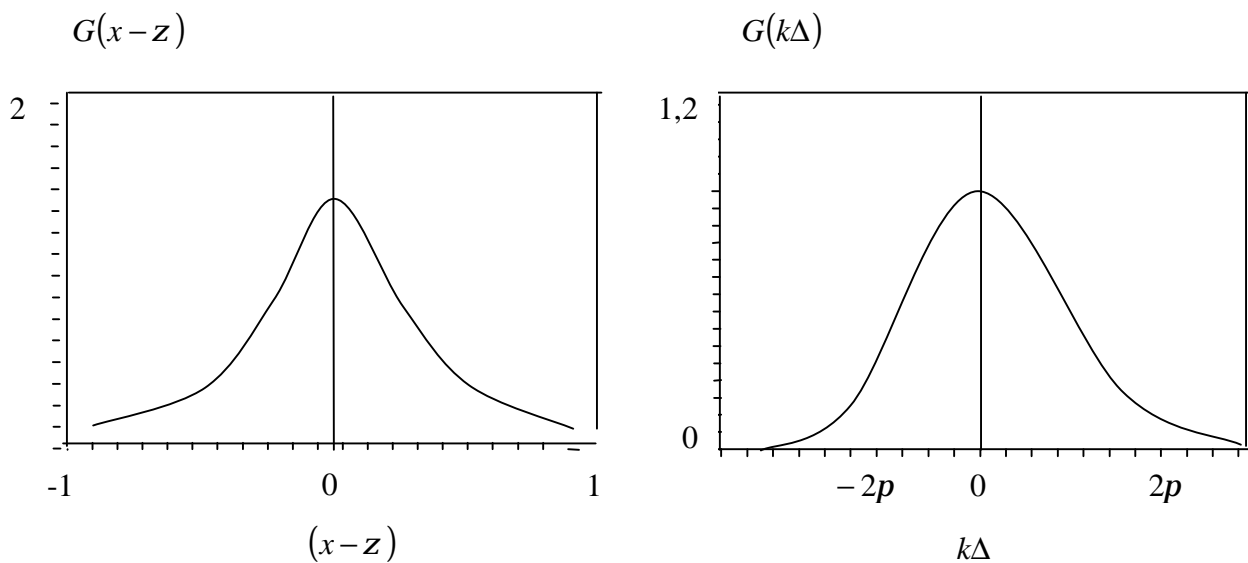


Figure (II-5): Gaussien filtre a) représentation dans l'espace physique

b) représentation dans l'espace de Fourier.

Remarque

La taille du filtre qui correspond à l'échelle de séparation des structures de l'écoulement peut varier dans un écoulement inhomogène. Ce cas exige l'utilisation de maillage différent dans les trois directions de l'espace

II.5 Le concept de filtrage:

L'application de l'opération de filtrage sur les équations de Navier Stokes pour les écoulements compressibles, on définit le filtre Favre qui est analogue à la moyenne statique,

Voir [25], [29], [32] par:

$$\tilde{V}(x,t) = \frac{1}{\bar{r}} \int_{\Omega} G_{\Delta}(x,x') V(x',t) dx'$$

Ou:
$$\tilde{V}(x,t) = \frac{\overline{rV}}{\bar{r}}$$

- **équations de la quantité de mouvement filtré**

Après le filtrage de l'équation de la quantité du mouvement, on obtient:

$$\frac{\partial \bar{r}\tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{r}\tilde{u}_i\tilde{u}_j}{\partial x_j} + d_{ij} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (m\tilde{\tau}_{ij}) - \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{II-18})$$

T_{ij} : Est le tenseur sous maille qui est équivalent à:

$$T_{ij} = \mathbf{I}_{ij} + C_{ij} + R_{ij} \quad (\text{II-19})$$

Le tenseur $\mathbf{I}_{ij} = \bar{\rho}(\tilde{u}_i\tilde{u}_j - \tilde{u}_i\tilde{u}_j)$: est le tenseur de Leonard

Le tenseur $C_{ij} = -\bar{\rho}(\tilde{u}_i'\tilde{u}_j' + \tilde{u}_j'\tilde{u}_i')$: est le tenseur croisé

Le tenseur $R_{ij} = \bar{r}\tilde{u}_i'\tilde{u}_j'$: est le tenseur de Reynolds de sous maille

Le tenseur de Leonard \mathbf{I}_{ij} peut être calculé directement à partir des valeurs moyennes filtre \tilde{u} , une fois qu'on connaît explicitement l'expression du filtre. Le tenseur croisé représente l'interaction entre les grandes structures et les petites structures. Le tenseur de Reynolds de sous maille ne fait intervenir que les petites structures de fluctuation.

les termes C_{ij} et R_{ij} correspondent, à la fois au transfert d'énergie des échelles explicitement calculées vers les échelles implicites sous mailles (transfert direct) et au transfert inverse ("backscatter") des échelles sous maille vers les grandes échelles. Voir [28], [29].

Après avoir obtenu, les équations de la quantité de mouvement filtrée, on passe maintenant à la fermeture du système obtenu. Le problème de fermeture consiste à la modélisation du tenseur sous maille T_{ij} par des modèles qu'on appelle des modèles de fermeture de sous maille.

II.6 Les modèles des grandes structures de turbulence (L.E.S)

La modélisation du tenseur sous maille T_{ij} est en fait le point clé de la simulation des grandes structures de turbulences. Il n'existe pas de modèle universel. Un choix doit être fait pour chaque problème traité, pour la modélisation du tenseur T_{ij} :

- Modéliser toutes ses composantes.
- Introduire une viscosité turbulente reliant le tenseur de contrainte sous Maille au tenseur de taux de déformation filtré (fermeture au premier ordre)
- Prescrire des équations de transport pour les tenseurs turbulents. ces équations permettent de traiter de façon plus exacte l'anisotropie du tenseur sous maille, mais elles sont difficiles à mettre en œuvre.
- Proposer une modélisation algébrique pour le tenseur T_{ij} . C'est en fait, une expression simplifiée des modèles précédents qui sont plus faciles à résoudre numériquement.

Pour Plus de détails voir [25], [28].

II.6.1 Concept de la viscosité turbulente dans les modèles (L.E.S)

C'est l'option la plus utilisée dans la pratique. D'après hypothèse de BONSSINEQ, Une dépendance linéaire entre les contraintes turbulentes et le tenseur de déformation du champ moyen.

$$T_{ij} - \frac{1}{3}d_{ij} \sum_{m=1}^3 T_{mm} = -2m_t \tilde{S}_{ij} \quad (\text{II-20})$$

Où:

$$\tilde{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II-21})$$

Alors:

$$T_{ij} = -2m_t \tilde{S}_{ij} + \frac{1}{3}d_{ij} \sum_{m=1}^3 T_{mm}$$

\tilde{S}_{ij} Est le tenseur de déformation du champ filtré et m_t est un coefficient appelé viscosité turbulente, largement utilisée, en vue de définir des modèles de fermeture de sous maille. La viscosité turbulente n'est pas une propriété du fluide mais une propriété du mouvement lui-même, elle est déterminée en

chaque point du domaine de calcul. Du point de vue physique, on confère aux contraintes turbulentes un caractère diffusif voir [35].

Utilisant l'hypothèse de BOSSINEQ pour caractériser le tenseur T_{ij} , dans l'équation de quantité de mouvement filtrée, nous avons:

$$\frac{\partial \bar{r}\tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{r}\tilde{u}_i\tilde{u}_j}{\partial x_j} = -d_{ij} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (m\tilde{\tau}_{ij}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(2m_i\tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3}d_{ij} \sum_{m=1}^3 T_{mm} \right) \quad (\text{II-22})$$

Posant:
$$\tilde{\tau}_{ij} = 2\tilde{S}_{ij} - \frac{2}{3}d_{ij} \sum_{m=1}^3 \tilde{S}_{mm} = 2m\tilde{S}_{ij} \quad (\text{II-23})$$

Avec:
$$\tilde{S}_{mm} = \text{div}\tilde{u} = 0 \quad (\text{II-24})$$

Alors:
$$\frac{\partial r\tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial r\tilde{u}_i\tilde{u}_j}{\partial x_j} = -d_{ij} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_j} + 2(m + m_i) \frac{\partial \tilde{S}_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{II-25})$$

Ou: $\bar{P} = \bar{p} - \frac{1}{3}d_{ij} \sum_{m=1}^3 T_{mm}$: est la pression modifiée.

Les modèles de viscosité turbulente consistent donc à modifier la viscosité de l'écoulement de façon qu'on puisse compenser l'absence d'une partie des termes non linéaires d'interactions liées aux petites échelles, dont l'évaluation de la viscosité turbulente est fonction des échelles de vitesse filtrée \tilde{u} et de la longueur l de l'agitation turbulente:

$$m_i = \tilde{u} \cdot l \quad (\text{II-26})$$

C'est l'idée de la plupart des modèles de viscosité turbulente. Voir [25], [35]. Ces modèles se différencient principalement par la définition de l'échelle de la vitesse filtrée \tilde{u} et dont l'échelle de longueur est déterminée par la taille de la maille de calcul:

$$l = \Delta = \frac{P}{k_c} \quad (\text{II-27})$$

k_c : est l'échelle de coupure

Pour un écoulement homogène, la valeur de l est unique et le maillage est uniforme. Mais pour le cas des écoulements fortement inhomogènes, on utilise un maillage irrégulier. Dans des cas d'écoulement complexe, L'évaluation de l'échelle, l pose parfois des problèmes.

Les différentes façons d'évaluer l'échelle de vitesse caractéristique \tilde{u} permettent de définir différents modèles sous maille basés sur le concept de la viscosité turbulente.

Parmi les modèles basant sur le concept de la viscosité turbulente on a:

II.6.1.1 Le modèle de Smagorinsky classique

Est l'un des modèles les plus utilisés dans le domaine de L.E.S, il a été introduit par le métrologue J. Smagorinsky pour des simulations numériques de la circulation générale atmosphérique.

Voir [25], [29], [30].

Il s'est basé, sur l'hypothèse, que La dissipation sous maille e_{SGS} est égale à:

$$e_{SGS} = \frac{q_{SGS}^3}{\Delta} = -T_{ij} \tilde{S}_{ij} \quad (II-28)$$

Δ : est la largeur du filtre

Et d'après l'hypothèse de BOSSINEQ:

$$T_{ij} - \frac{1}{3} d_{ij} \sum_{m=1}^3 T_{mm} = -2m_t \tilde{S}_{ij} \quad (II-29)$$

L'équation (II-28) devient :

$$T_{ij} = -\frac{q_{SGS}^3}{\Delta \cdot \tilde{S}_{ij}}$$

L'équation (II-29) devient :

$$T_{ij} = -2m_t \tilde{S}_{ij} + \frac{1}{3} d_{ij} \sum_{m=1}^3 T_{mm}$$

$$(II-28) = (II-29) - \frac{q_{SGS}^3}{\Delta \cdot \tilde{S}_{ij}} = -2m_t \tilde{S}_{ij} + \frac{1}{3} d_{ij} \sum_{m=1}^3 T_{mm}$$

$$\frac{1}{3} d_{ij} \sum_{m=1}^3 T_{mm} \rightarrow 0$$

Et on prend:

$$m_t \approx q_{SGS} \cdot \Delta$$

$$\frac{q_{SGS}^3}{\Delta \cdot \tilde{S}_{ij}} = 2q_{SGS} \cdot \Delta \cdot \tilde{S}_{ij}$$

$$\Rightarrow q_{SGS} \approx \Delta \cdot |\tilde{S}_{ij}|$$

Tel que:

$$|\tilde{S}_{ij}| = (2\tilde{S}_{ij} \tilde{S}_{ij})^{1/2}$$

$|\tilde{S}_{ij}|$: Qui représente la magnitude du tenseur de déformation filtré

La viscosité turbulente est écrite alors :

$$m_t = c_s \Delta^2 |\tilde{S}_{ij}| \quad (II-30)$$

c_s : Est la constante de Smagorinsky

Pour évaluer c_s LILLY (1967) a assimilé que dans la partie inertielle du spectre d'énergie :

$$E(k) = c_{Kolmo} \cdot e^{2/3} \cdot k^{-5/3} \quad (\text{II-31})$$

$|\tilde{S}_{ij}|$: est évaluée approximativement par l'intégration de la dissipation spectrale dans les fréquences des échelles résolues.

$$|\tilde{S}_{ij}|^2 \approx 2 \int_0^{p/\Delta} k^2 E(k) dk = 2c_{Kolmo} e^{2/3} \int_0^{p/\Delta} k^{1/3} dk = \frac{3}{2} c_{Kolmo} e^{2/3} \left(\frac{p}{\Delta} \right)^{4/3}$$

$$c_{Kolmo} \approx 1.41$$

La dissipation sous maille est égale a:

$$e_{SGS} = -c_s \Delta^2 |\tilde{S}_{ij}|^3 \quad (\text{II-32})$$

Alors:

$$\Rightarrow |\tilde{S}_{ij}|^2 = \frac{3}{2} c_{Kolmo} \left[(-c_s \Delta)^2 |\tilde{S}_{ij}|^3 \right]^{2/3} \left(\frac{p}{4} \right)^{4/3}$$

II.6.1.2 Le modèle de Smagorinsky dynamique

Est le modèle de Germano et Al (1990), qui est aussi un modèle appelé dynamique, puisqu'il permet d'évaluer la constante de Smagorinsky à partir de la simulation elle-même. L'idée de ce modèle est d'appliquer un double filtrage, en utilisant deux filtres de largeur différente.

Le filtre réel \tilde{G} et le filtre test $\tilde{\tilde{G}}$, en supposant que le filtre test est plus gros que le filtre réel $\left(\tilde{\tilde{\Delta}} \mathbf{f} \tilde{\tilde{\Delta}} \right)$. Soit les deux tenseurs, t_{ij} et T_{ij} agissant par les deux filtres:

t_{ij} : Est le tenseur sous maille agissant par le filtre réel \tilde{G} sur les équations Navier stockes

T_{ij} : Est le tenseur résolu test agissant par le filtre test $\tilde{\tilde{G}}$ sur les équations Navier stockes

Ces deux tenseurs sont liés par l'identité suivante, dite "identité de germano":

$$L_{ij} = T_{ij} - \tilde{t}_{ij} \quad (\text{II-34})$$

L_{ij} : Est le tenseur turbulent résolu, qui est calculé à partir des vitesses des grandes échelles.

$$\tilde{L}_{ij} = \tilde{u}_i \tilde{u}_j - \tilde{u}_i \tilde{u}_j \quad (\text{II-35})$$

Egale à:

Le tenseur sous maille test est paramétrable par une viscosité turbulente: a

$$t_{ij} - \frac{1}{3} d_{ij} \sum_{m=1}^3 t_{mm} = -c \tilde{\Delta}^2 |\tilde{S}_{ij}| \tilde{S}_{ij} = -c \tilde{\Delta}^2 b_{ij} \quad (\text{II-36})$$

$$T_{ij} - \frac{1}{3} d_{ij} \sum_{m=1}^3 T_{mm} = -c \tilde{\Delta}^2 |\tilde{S}_{ij}| \tilde{S}_{ij} = -c \tilde{\Delta}^2 a_{ij} \quad (\text{II-37})$$

Remplaçant (II-36) et (II-37) dans (II-34) on trouve :

$$L_{ij}^{(a)} = L_{ij} - \frac{1}{3} d_{ij} \sum_{m=1}^3 L_{mm} = -c a_{ij} + c \tilde{b}_{ij} \quad (\text{II-38})$$

Qui est une équation tensorielle avec l'inconnu c . Germano et AL ont proposé de contracter l'équation (II-38) par \tilde{S}_{ij} , obtenant ainsi l'expression suivante :

$$c(x, t) = \frac{L_{ij}^{(a)} \tilde{S}_{ij}}{\left(\tilde{b}_{ij} - a_{ij} \right) \tilde{S}_{ij}} \quad (\text{II-39})$$

Pour éviter, les problèmes qui peuvent apparaître quand le dénominateur de l'équation (II-39) s'annule, on moyenne dans les directions homogènes, obtenant dans ce cas:

$$c(x, t) = \frac{\langle L_{ij}^{(a)} \tilde{S}_{ij} \rangle}{\langle \left(\tilde{b}_{ij} - a_{ij} \right) \tilde{S}_{ij} \rangle} \quad (\text{II-40})$$

$c(x, t)$ Est Comme une fonction de la coordonnée non homogène du temps.

Avec l'application de la procédure dynamique du modèle de Smagorinsky, de très bons résultats sont obtenus. Pour beaucoup de détails voir [1], [25].

II.6.2 Hypothèse de Similarité d'échelles

L'hypothèse de similarité d'échelles, telle qu'elle a été proposée par BARDINA et AL, Consiste à supposer que la structure statistique des tenseurs construits à partir des échelles sous maille est similaire à celles de leur équivalence, évaluée à partir des plus petites échelles résolues. Cette hypothèse fait donc apparaître un découpage du spectre de La solution en trois bandes: les plus

grandes échelles résolues, les plus petites échelles résolues (c'est à dire champ d'épreuve) et les échelles non résolues.

Cette cohérence statistique peut être interprétée de deux manières complémentaires, La première fait appel à la notion de cascade d'énergie: Les échelles non résolues et les plus petites échelles résolues ont un historique commun, associées à leurs interactions avec les plus grandes échelles résolues. La représentation classique de la cascade veut que l'effet et les plus grandes échelles résolues soient exercées sur les plus petites échelles résolues qui influencent à leur tour les échelles sous maille. Ces dernières sont donc forcées indirectement par les premières, mais de façon similaire. La Seconde repose sur la notion de structure cohérente: ces structures possèdent une signature non locale en fréquence, c'est-à-dire qu'elles ont une contribution sur les trois bandes spectrales considérées.

La similarité d'échelles est alors associée, au fait que certaines structures apparaissent sur chacune des trois bandes, induisant une cohérence du champ, entre les différents niveaux de décomposition. On présente, par la suite, les modèles structurels construits à partir de l'hypothèse de similarité d'échelles. Tous font appel à une technique d'extrapolation en fréquence: le tenseur sous maille est approché par un Tenseur analogue calculé à partir des plus hautes fréquences résolues voir [1].

II.6.2.1 Modèle de BARDINA

Partant de cette hypothèse, BARDINA, FERZIGER et REYNOLDS, ont proposé de modéliser les tenseurs C et R de la décomposition de Leonard, en appliquant une seconde fois le filtre qui a permis d'effectuer la séparation d'échelles. De plus, ils ont fait l'approximation

$$\tilde{a}\tilde{b} \approx \tilde{a}\tilde{b} \tag{II-41}$$

Alors:
$$\Gamma_{ij} = -\bar{\rho}(\tilde{u}_i\tilde{u}_j - \tilde{u}_i\tilde{u}_j) \approx H_{ij} \tag{II-42}$$

H_{ij} : Est le tenseur résulte de la décomposition de Leonard

Comparé à (D.N.S), ce modèle montre de très hautes corrélations avec le tenseur sous maille réel. FERZIGER a trouvé que ce modèle dissipe à peine toute l'énergie et ne peut servir comme une position modèle sous maille seule. Ce modèle cède l'une des substantielles instabilités numériques. Voir [31],[34].

II.6.2.2 Le modèle de similarité d'échelles dynamique

Même procédure que le modèle Smagorinsky dynamique où, on a deux filtres; le filtre réel \tilde{G} et le filtre test $\tilde{\tilde{G}}$ et on suppose que la largeur du filtre test est plus grosse que le filtre réel ou t_{ij} , et T_{ij}

Sont les deux tenseurs agissant par les filtres \tilde{G} , $\tilde{\tilde{G}}$, respectivement voir [33], D'après le modèle de similarité d'échelles on a:

$$t_{ij} = D.H_{ij} \quad \text{Tel que } D \geq 0 \quad (\text{II-43})$$

Si: $D = 1 \Rightarrow t_{ij} = H_{ij}$ nous aurons le modèle de BARDINA

Posant:
$$T_{ij} = D.\tilde{\tilde{H}}_{ij} \quad (\text{II-44})$$

$\tilde{\tilde{H}}_{ij}$: Est le Tenseur de la décomposition de Leonard filtre par le filtre test $\tilde{\tilde{G}}$

Et d'après l'identité de Germano:

$$H_{ij} = T_{ij} - \tilde{t}_{ij}$$

On obtient:

$$D = \left[\frac{\sum (H_{ij} + \tilde{t}_{ij})}{\sum \tilde{\tilde{H}}_{ij}} \right] \quad (\text{II-45})$$

II.6.2.3 Le modèle mixte

Est une combinaison entre le modèle similarité d'échelles et la dissipation produite par la viscosité turbulente (modèle de smagorinsky) voir [30], [36].

$$T_{ij} = T_{ij} (\text{simil}) - T_{ij} (\text{smag}) \quad (\text{II-46})$$

REMARQUE:

Pour la modélisation des flux du sous mailles des espèces et de la chaleur associées à ce tenseur, il y'a des modèles analogues aux modèles précédents mais avec une expression basée sur le gradient de l'espèces et de la température.

II.7 Models monotone integrated large eddy simulation (M.I.L.E.S)

Les modèles (L.E.S) basés sur la modélisation explicite du tenseur sous maille (S.G.S) sont insignifiants à cause de l'opération de défiltrage, qui n'est pas bien déterminée et par le manque d'un modèle (S.G.S) standard pour les écoulements anisotropes. Même l'application du modèle de la viscosité a prouvé que ces modèles ne correspondent pas au tenseur de Reynolds, surtout pour le cas des écoulements proches de la paroi.

AL et BORIS [27], ont proposé un modèle basé sur Le rapport évident entre la discrétisation numérique et le tenseur sous maille, dont le (S.G.S) est modelé par la diffusion non linéaire du schéma numérique. Ce modèle est appelé "monotone integrated large Eddy simulation" (M.I.L.E.S). D'après les équations de Navier stockes filtrées, le tenseur non linéaire qui spécifie les effets des échelles non résolues aux échelles résolues T_{ij} , et le flux de chaleur, d'espèce $Q_j, w_{j,k}$ associé.

Tel que :

$$\begin{aligned} T_{ij} &= -\bar{r}(\tilde{u}_i \tilde{u}_j - \tilde{u}_i \tilde{u}_j) \\ Q_j &= -\bar{r}Cv.(\tilde{T}\tilde{u}_j - \tilde{T}\tilde{u}_j) \\ w_{j,k} &= -\bar{r}(\tilde{u}_j \tilde{Y}_k - \tilde{u}_j \tilde{Y}_k) \end{aligned} \tag{II-47}$$

Sont ignorés (c'est-à-dire $T_{ij} = 0$, $Q_j = 0$, $w_{j,k} = 0$), Et pour prendre ces effets dans le modèle (M.I.L.E.S), on utilise un algorithme monotone pour la résolution numérique des équations de Navier –stockes. Pour beaucoup de détails, voir les références [24], [26], [27].

II.7.1 Les algorithmes monotones

Les algorithmes monotones sont utilisés pour résoudre les échelles de grandes structures de la turbulence pour le problème d'advection sans modèle sous maille. Ceci est du à l'importance dynamique et thermique des grandes échelles par rapport aux petites échelles. La diffusion numérique contrôle les effets de ce tenseur.

Les quantités de mouvement changent de signes localement et fréquemment dans les écoulements turbulents ou les propriétés des dérivés de convection sont garanties par les propriétés fondamentales de la dynamique de fluide: La conservation, la causalité, la positivité, et la monotonie.

La dissipation locale non linéaire des grandes structures aux petites structures dans ces algorithmes est continuellement connectée par ces propriétés, en fournissant une construction dans la mesure de la dissipation étudiée. Voir [26].

II.7.1.1 Les propriétés fondamentales de la dynamique du fluide

La difficulté numérique de la résolution des équations d'advection apparaît, dans les erreurs des schémas numériques: la diffusion, la dispersion et l'erreur de Gibbs.

La monotonie est un moyen d'éliminer les oscillations non physiques (dispersion) de la quantité convectée et cela même en appliquant des schémas de haut ordre. On dit que, Les schémas linéaires de la forme:

$$V_I^{n+1} = f[V_{I-1}^n, \dots, V_{I+m}^n] = \sum_{k=-1}^m b_k \cdot V_{I+k}^n \quad (\text{II-48})$$

Sont monotones, si tous les coefficients $b_k \geq 0$

I, m : Sont des entiers positifs.

La Positivité est aussi un moyen d'éliminer les oscillations qui apparaissent dans les schémas numériques de haut ordre, par l'idée que la quantité V convectée est définie positive, de la même manière que la densité ne peut être physiquement négative.

La Causalités exige que la particule convectée du point (A) à un point (B) de la maille doit traverser toutes les cellules de la maille de calcul. Donc La causalité et la conservation sont utilisées pour calculer le flux des cellules en mouvement entre elles voir [26].

II.7.2 Concepts et utilisation des algorithmes monotones

Pour résoudre le problème d'advection, on utilise beaucoup de concepts parmi eux:

II.7.2.1 le Flux correcteur

Est basé sur l'ajustement du flux à l'entrée et à la sortie de chaque cellule, afin que les oscillations non physiques locales minimale ou maximale, ne soient pas introduites dans l'algorithme. Le flux limite est imposé par les propriétés: la monotonie et la causalité utilisées dans les équations individuelles du système d'équation hyperbolique (advection), pour enfin utiliser la résolution numérique.

Pour éliminer les oscillations apparaissant dans le schéma numérique de haut ordre, on ajoute une diffusivité numérique au schéma, dans les régions de haut gradient, qui peuvent être des chocs ou des discontinuité de contact. Les propriétés de l'algorithme monotone sont achevées à travers le choix des coefficients de diffusivité numérique, pour enfin représenter le flux des cellules, dans un processus appelé le Flux correcteur. Plus de détails, voir [24], [26].

Parmi ces algorithmes, on a:

- FCT (flux correcteur transport).
- TVD (totale variation Dimshing).
- PPM (piéewise parabole method).
- HOG (haut ordre Godunov).

II.7.2.1.1 le Flux correcteur de transport (F.C.T)

Le flux correcteur de transport non linéaire est un flux numérique contrôlé par une anti-diffusion, en vue d'éliminer les valeurs extrêmes maximales et minimales qui apparaissent dans le profil du flux.

L'anti-diffusion tend à diminuer la variable V_I^n tout en augmentant la valeur de la variable V_I^{n+1} voir [24].

Si nous avons:

$$V_I^{n+1} = V_I^n - \left[F_{I+\frac{1}{2}}^n - F_{I-\frac{1}{2}}^n \right] \quad (\text{II-49})$$

$F_{I\pm\frac{1}{2}}^n$: sont les flux convectifs à travers les interfaces gauche et droite de la cellule.

La correction dans l'algorithme s'accomplit par l'élimination de la diffusivité dans le schéma, en introduisant un anti-diffusive dans le flux, l'équation s'est écrite alors:

$$V_I^{n+1} = V_I^n - \left[F_{I+\frac{1}{2}}^{ad} - F_{I-\frac{1}{2}}^{ad} \right] \quad (\text{II-50})$$

$F_{I\pm\frac{1}{2}}^{ad}$: sont les flux anti-diffusion sur les interfaces cellulaires gauche et droite, égale à:

$$F_{I+\frac{1}{2}}^{ad} = m_{I+\frac{1}{2}} (V_{I+1}^n - V_I^n)$$

$m_{I\pm\frac{1}{2}}$: sont les coefficients anti-diffusive positifs qui garantissent la positivité.

$$m_{I\pm\frac{1}{2}} = a_{I\pm\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \left| \Gamma_{I\pm\frac{1}{2}} \right| \quad (\text{II-51})$$

$a_{I\pm\frac{1}{2}}$: Est la vitesse de fluide approximative à l'interface de la cellule

$\Gamma_{I\pm\frac{1}{2}}$: Est le résiduel de la diffusion $a_{I\pm\frac{1}{2}}$.

Pour le choix du résiduel de la diffusion, $a_{I\pm\frac{1}{2}}$, dépend du flux correcteur non linéaire de la valeur actuelle et de la forme du profil de la variable V_I^n .

Alors, La nouvelle valeur devient:

$$V_i^{n+1} = V_I^n - \left[F_{I+\frac{1}{2}}^c - F_{I-\frac{1}{2}}^c \right] \quad (\text{II-52})$$

Ou $F_{I\pm\frac{1}{2}}^c$: est le flux correcteur devant satisfaire:

$$F_{I\pm\frac{1}{2}}^c = S \cdot \max \left\{ 0, \min \left[S \cdot (V_{I+1}^n - V_{I+1}^n), \left| F_{I\pm\frac{1}{2}}^{ad} \right|, (V_I^n - V_{I-1}^n) \right] \right\} \quad (\text{II-53})$$

Ou : $S = 1$

II.7.2.1.2 Totale variation Diminishing

L'idée de cette méthode est d'assurer que les valeurs V et $\frac{\partial V}{\partial x}$ soient connues à un temps donné et la propriété physique de la solution, $\frac{\partial V}{\partial x}$ intégrée au domaine entier de la maille soit constante, au cours du temps. L'intégral de la quantité $\frac{\partial V}{\partial x}$ est appelée, totale variation diminishing TV voir [26].

$$TV = \int \left| \frac{\partial V}{\partial x} \right| dx \quad (\text{II-54})$$

En discrétisant le dérivé, on obtient:

$$TV(V) = \sum_I \frac{V_{I+1} - V_{I-1}}{2} \quad (\text{II-55})$$

Alors, si, $TV(V^{n+1})$ et $TV(V^n)$ sont évaluées respectivement aux temps $(n+1)$ et n , l'algorithme est dit totale variation diminishing si :

$$TV (V^{n+1}) \leq TV (V^n) \quad (\text{II-56})$$

Pour améliorer l'algorithme de type flux limiteur comme le (F.C.T), La méthode TVD peut être incorporée.

II.7.2.1.3 le limiteur de la pente du flux

L'approche géométrique du flux correcteur est appelée, le slope limiteur. L'idée de cette méthode est de remplacer à l'instant t , la représentation de la fonction du flux par une représentation par morceau. De haut ordre, telle qu'une représentation linéaire ou quadratique, comme dans le cas de la méthode (PPM) *piecwise parabolic method*, de Wood Word et Collela (1984) voir [46], qui sera définie ultérieurement.

II.7.2.2 Méthode upwind

La méthode consiste à ajouter une contrainte physique dans la solution numérique. Cette contrainte fait apparaître les interactions de l'ensemble des équations de la continuité, de la quantité de mouvement, d'énergie et d'espèce. La méthode upwind essaye d'assurer le maximum d'informations numériques à la solution, par la direction correcte de la grille de calcul qui est définie par les caractéristiques physique de l'écoulement voir [24]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} \quad (\text{II-57})$$

$A = \frac{\partial F}{\partial U}$: est le Jacobien de la matrice du flux.

Les valeurs et les vecteurs propres de la matrice Jacobienne sont les vitesses et les directions du flux.

Chapitre III

Formulation mathématique

III.1 Méthodologie

Dans ce travail nous avons considéré la méthodologie de la simulation numérique des grandes structures de turbulences, (L.E.S) large Eddy simulation, en utilisant l'algorithme Monotone Integrated Large Eddy Simulation (M.I.L.E.S). La configuration étudiée ainsi que les conditions aux limites sont représentées, ci-dessous. Figure (III-1).

Il s'agit d'un jet compressible, turbulent et tridimensionnel, dont la géométrie de l'orifice, de diamètre D_0 est ronde. Le système de coordonnées choisi est le système des coordonnées cartésiennes.

Afin de réaliser cette étude, nous avons considéré les hypothèses suivantes:

III.2 Les hypothèses fondamentales et simplificatrices

1. l'écoulement est instationnaire, tridimensionnelle et axisymétrique sur les trois directions de l'écoulement, dont l'axe du jet est l'axe de symétrie.
2. le fluide injecté à travers l'orifice du jet est un fluide parfait obéit à la loi du gaz parfait.
3. les propriétés physique et thermique du fluide du jet sont supposées constantes le long de l'axe du jet (r, m, I, D, Cp).
4. Pas d'échange de chaleur et de masse aux frontières du domaine physique.

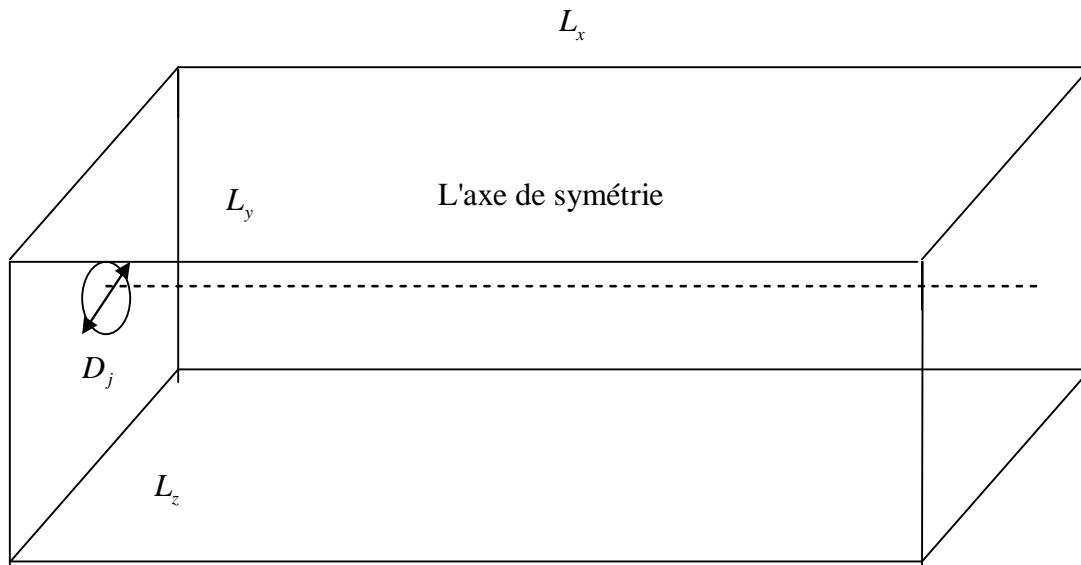


Figure (III-1) : représentation du problème traité

III.3 Les équations générales du problème étudié

Résoudre complètement un problème de convection, revient à déterminer en tout point et à tout instant, les grandeurs caractéristiques du fluide: vitesse, pression, température et concentration. Pour calculer ces fonctions, il est nécessaire de disposer des équations de conservation de masse, quantité de mouvement, énergie et concentration. Voir [3], [38], [41], [42].

Les variables des grandes structures dans les équations de l'écoulement compressible, sont écrites en

terme de variables FAVRE FILTRE: $\tilde{V} = \frac{\overline{r.V}}{\bar{r}}$

Où V : variable primitive arbitraire de l'écoulement.

Remarque: pour alléger l'écriture dans ce qui suit, les variables Favre filtre seront notées sans signe descriptif \tilde{V} .

• Équation de conservation de la masse

Cette équation exprime la conservation de la masse transportée:

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \text{div}(r \cdot \mathbf{u}) = 0$$

Alors:
$$\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial ru}{\partial x} + \frac{\partial rv}{\partial y} + \frac{\partial rw}{\partial z} = 0 \quad (\text{III-1})$$

• Équation de la quantité de mouvement (Navier Stokes)

Les équations de la quantité de mouvement du problème sont écrites, dans la forme générale:

$$\frac{\partial ru_i}{\partial t} + \frac{\partial ru_i \cdot u_j}{\partial x_j} + dij \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} (mt_{ij}) \quad (\text{III-2})$$

m : Est la viscosité dynamique

Avec:
$$t_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} d_{ij} \sum_{m=1}^3 \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \quad (\text{III-3})$$

Ou : d_{ij} est le symbole de KRONIKER

$$(d_{ij}=1 \text{ si } i=j, d_{ij}=0 \text{ si } i \neq j)$$

Avec:
$$u_i : (u_1, u_2, u_3) = (u, v, w)$$

$$x_i : (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$$

Alors:

Sur l'axe ox :

$$\frac{\partial ru}{\partial t} + \frac{\partial ru}{\partial x} \cdot u + \frac{\partial ru}{\partial y} \cdot v + w \cdot \frac{\partial ru}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (mt_{11}) + \frac{\partial}{\partial y} (mt_{12}) + \frac{\partial}{\partial z} (mt_{13}) \quad (\text{III-4})$$

Sur l'axe oy :

$$\frac{\partial rv}{\partial t} + \frac{\partial rv}{\partial x} \cdot u + \frac{\partial rv}{\partial y} \cdot v + w \cdot \frac{\partial rv}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (mt_{21}) + \frac{\partial}{\partial y} (mt_{22}) + \frac{\partial}{\partial z} (mt_{23}) \quad (\text{III-5})$$

Sur l'axe oz :

$$\frac{\partial rw}{\partial t} + \frac{\partial rw}{\partial x} \cdot u + \frac{\partial rw}{\partial y} \cdot v + \frac{\partial rw}{\partial z} \cdot w + \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} (mt_{31}) + \frac{\partial}{\partial y} (mt_{32}) + \frac{\partial}{\partial z} (mt_{33}) \quad (\text{III-6})$$

• Équation de la conservation de l'énergie

L'équation de la conservation de l'énergie s'écrit:

$$\frac{\partial r e}{\partial t} + \frac{\partial(r e + p)}{\partial x} u + \frac{\partial(r e + p)}{\partial y} v + \frac{\partial(r e + p)}{\partial z} w = \nabla \cdot (I \nabla T) + \nabla \cdot (\underline{\underline{m u}} \cdot \underline{\underline{t}}_{ij}) \quad (\text{III-7})$$

I : Est La conductivité thermique.

e : Est L'énergie interne totale, par unité de volume.

L'énergie totale par unité de masse est égale à:
$$e = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + c_v T \quad (\text{III-8})$$

Où:
$$e = \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) + \frac{P}{g-1} \quad (\text{III-9})$$

g : Constant du gaz parfait est égale a:
$$g = \frac{C_p}{C_v} \quad (\text{III-10})$$

• Équation de la concentration

L'équation de la concentration, pour l'espèce du fluide du jet Y s'écrit:

$$\frac{\partial r Y}{\partial t} + \frac{\partial r Y u}{\partial x} + \frac{\partial r Y v}{\partial y} + \frac{\partial r Y w}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(r D \frac{\partial Y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(r D \frac{\partial Y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r D \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \quad (\text{III-11})$$

D : Est la diffusivité massique

• Équation d'état du gaz

La loi du gaz parfait s'écrit:

$$p = r \cdot \frac{RT}{M} \quad (\text{III-12})$$

On définit les caractéristiques thermodynamiques du gaz parfait par:

M : La masse molaire

C_p : Chaleur spécifique à pression moyenne constante.

C_v : La chaleur spécifique à volume moyen constant.

R : La chaleur massique

III.4 Les conditions initiales et aux limites

- **Les conditions initiale d'entrée**

Le profil du champ de la vitesse d'entrée est donné par l'expression suivante:

Pour: $x = 0$ et $t = 0$:

$$u(r) = U_0 - \frac{U_0 - U_2}{2} \left[1 + \tanh \left[2.5 \left(\frac{r}{R_j} - \frac{R_a}{r} \right) \right] \right] \quad (\text{III-13})$$

Et: $v(r, t = 0) = 0$ $w(r, t = 0) = 0$

r : La direction radiale dans les coordonnées cylindriques égale à:

$$r^2 = y^2 + z^2$$

U_0 : La vitesse à la sortie de l'orifice du jet

U_2 : La vitesse du fluide enveloppant le jet.

Ce profil est similaire au profil utilisé par BOGEY et BIULLY. Voir [37].

La relation de COROCCO BUSMAN est donnée, par le profil de densité, en supposant un léger échauffement le long de l'axe du jet. Voir [45].

$$r(r) = r_0 \left(1 + \frac{g-1}{2} M_a^2 \frac{u(r)}{U_0} \left(1 - \frac{u(r)}{U_0} \right) \right)^{-1} \quad (\text{III-14})$$

M_a : est le nombre de mach du jet.

r_0 : La densité à la sortie de l'orifice du jet.

- **Les conditions aux limites**
- **Les conditions aux limites d'entrée**

Elles sont de type DIRICKLET. Pour spécifier la valeur de la vitesse de fluctuation, nous avons représenté cette vitesse par un bruit blanc, voir [39], qui sera superposée au profil de la vitesse. Dans

ce travail, l'expression de ce bruit blanc est: $(\text{rand}(\text{naleat}) - 0.5) \times 0.1 \cdot \exp\left[-r^2/0.08\right]$

Le profil du champ de vitesse à l'entrée est donné par l'expression suivante:

Pour: $x = 0$ et $t \neq 0$:

$$u(r) = U_0 - \frac{U_0 - U_2}{2} \left[1 + \tanh \left[2.5 \left(\frac{r}{R_a} - \frac{R_a}{r} \right) \right] \right] + (rand(naleat) - 0.5) \times 0.1 \cdot \exp \left[-r^2 / 0.08 \right] \quad (\text{III-15})$$

$$v(r) = (rand(naleat) - 0.5) \times 0.1 \cdot \exp \left[-r^2 / 0.08 \right] \quad (\text{III-16})$$

$$w(r) = (rand(naleat) - 0.5) \times 0.1 \cdot \exp \left[-r^2 / 0.08 \right] \quad (\text{III-17})$$

• Les Conditions à la sortie

Les variables d'écoulements aux frontières du domaine de calcul, par rapport aux axes x, y, z , sont maintenues constantes, Ce qui traduit que les conditions sont de type de Newman:

$$x = L_x \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial x} = 0 \quad (\text{III-18})$$

$$y = L_y \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial y} = 0 \quad (\text{III-19})$$

$$z = L_z \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial Y}{\partial z} = 0 \quad (\text{III-20})$$

III.5 Les équations du problème sous forme adimensionnelle

Les équations adimensionnelle sont formulées dans une forme conservative, dont l'avantage est de simplifier le problème, en regroupant les paramètres qui affectent l'écoulement au niveau des nombres adimensionnelles tels que: le nombre de REYNOLDS, le nombre de PRANDT et le nombre de SCHMIT, en adimensionalisant par rapport à des échelles de référence, les variables adimensionnelles sont données comme suit:

$$\begin{aligned} r^{\bullet} &= \frac{r}{r_0} \quad , \quad u^{\bullet} = \frac{u}{U_0} \quad , \quad v^{\bullet} = \frac{v}{U_0} \quad , \quad w^{\bullet} = \frac{w}{U_0} \quad , \quad x^{\bullet} = \frac{x}{D_a} \quad , \quad y^{\bullet} = \frac{y}{D_a} \\ z^{\bullet} &= \frac{z}{D_a} \quad , \quad p^{\bullet} = \frac{p}{r_0 \cdot U_0^2} \quad , \quad t^{\bullet} = \frac{t \cdot U_0}{D_a} \quad , \quad T^{\bullet} = \frac{T}{T_0} \quad , \quad Y^{\bullet} = \frac{Y}{Y_0} \end{aligned}$$

Les variables dimensionnelles sont référées par rapport aux variables du centre du jet et les dimensions spatiale et temporaire se réfèrent à la dimension de l'orifice du jet (le diamètre du jet). voir [39], [40], [43], [44].

r_0 : La densité à la sortie de l'orifice du jet

U_0 : La vitesse à la sortie de l'orifice du jet.

D_a : Diamètre de l'orifice du jet

Pour alléger l'écriture dans ce qui suit les variables adimensionnelles seront notées sans astérix.

Alors, Les équations sous forme adimensionnelles conservatifs s'écrivent:

• Équation de la continuité

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad \text{(III-21)}$$

• Équation de la conservation de la quantité de mouvement

Sur l'axe ox :

$$\frac{\partial r u_1}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial (r u_j u_1 + d_{j1} p)}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \left(\frac{r}{\text{Re}} \right)_{1j}}{\partial x_j} \quad \text{(III-22)}$$

Sur l'axe oy :

$$\frac{\partial r u_2}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial (r u_j u_2 + d_{j2} p)}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \left(\frac{r}{\text{Re}} \right)_{2j}}{\partial x_j} \quad \text{(III-23)}$$

Sur l'axe oz :

$$\frac{\partial r u_3}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial (r u_j u_3 + d_3 p)}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \left(\frac{r}{\text{Re}} \right) \epsilon_{3j}}{\partial x_j} \quad (\text{III-24})$$

Et Re : est le nombre de Reynolds du jet: $\text{Re} = \frac{U_0 D_0}{m}$

• Équation de l'énergie:

$$\frac{\partial r e}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial (r e + p) u_j}{\partial x_j} = \nabla \cdot \left(\frac{Cp.r}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \nabla T \right) + \nabla \cdot \left(\frac{r}{\text{Re}} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{u \cdot \mathbf{t}} \right) \quad (\text{III-25})$$

Re , Pr : sont les nombres de Reynolds et PRANDT respectifs.

$$\text{Pr} = \frac{m}{l}$$

• Equation de la concentration

$$\frac{\partial r Y}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial r Y u_j}{\partial x_j} = \nabla \cdot \left(\frac{r}{SC \cdot \text{Re}} \cdot \nabla Y \right) \quad (\text{III-26})$$

Re , SC : Sont les nombres de Reynolds, et Schmidt respectifs.

$$SC = \frac{m}{D}$$

Chapitre IV

LA Méthode numérique de résolution

IV.1 Introduction

Les équations de la conservation de la masse, du mouvement, de l'énergie et de l'espèce sont écrites dans la forme conservative voir [44], [51], [52]:

$$\frac{\partial U(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial F_j(U(\mathbf{x},t))}{\partial x_j} = S(U(\mathbf{x},t)) \quad (\text{IV-1})$$

Où les vecteurs des variables conservatives sont:

$$U(\mathbf{x},t) = \{r, ru_1, ru_2, ru_3, re, rY\}$$

r : est La densité

u_1, u_2, u_3 : sont les vitesse sur les directions cartésiennes (x_1, x_2, x_3)

e : est l'énergie totale par unité de masse

Y : Est l'espèce

$$\text{Où : } F_j(U(\mathbf{x}, t)) = \begin{bmatrix} ru_j \\ ru_j u_1 + d_{j1} p \\ ru_j u_2 + d_{j2} p \\ ru_j u_3 + d_{j3} p \\ (re + p)u_j \\ rYu_j \end{bmatrix} \quad (\text{IV-2})$$

Le terme $S(U(\mathbf{x}, t))$ contient les termes de la dissipation visqueuse et la diffusivité massique.

$$S(U(\mathbf{x}, t)) = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \sum_{j^*1}^3 \frac{\partial \left(\frac{r}{\text{Re}} \right)}{\partial x_j} t_{1j} \\ \sum_{j^*1}^3 \frac{\partial \left(\frac{r}{\text{Re}} \right)}{\partial x_j} t_{2j} \\ \sum_{j^*1}^3 \frac{\partial \left(\frac{r}{\text{Re}} \right)}{\partial x_j} t_{3j} \\ \nabla \left(\frac{Cp \cdot r}{\text{Pr} Sc} \cdot \nabla T \right) + \nabla \left(\frac{r}{\text{Re}} \frac{\mathbf{r} \mathbf{r}}{u \mathbf{t}} \right) \\ \nabla \left(\frac{r}{SC \text{Re}} \nabla Y \right) \end{array} \right\} \quad (\text{IV-3})$$

$$t_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} d_{ij} \sum_{m=1}^3 \frac{\partial u_m}{\partial x_m}$$

Re, Pr, SC : Sont les nombres de REYNOLDS et PRANDT et SCHMITH respectifs.

IV.2 Schémas SPLITTING

A l'aide du schéma SPLITTING, on peut décomposer l'équation générale du problème en équations différentielles, qui nous définissent des sous problèmes faciles à résoudre indépendamment les uns des autres. Donc la solution du problème général est obtenue en faisant la combinaison des solutions des sous problèmes voir [50].

Le problème général suivant:

$$\frac{\partial U(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial F_j(U(\mathbf{x}, t))}{\partial x_j} = S(U(\mathbf{x}, t))$$

Avec la condition initiale: $U(x_1, x_2, x_3, t^n) = U_{ini}^n$

La version la plus simple de la méthode SPLITTING est de décomposer l'équation du problème PDE (IV-1), en trois équations dimensionnelles homogènes conservatives $L_j (j = 1,2,3)$ et une équation différentielle ordinaire (ODE) y .

$$L_1 : \left. \begin{array}{l} \frac{\partial U(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \frac{\partial F_1(U(\mathbf{x},t))}{\partial x_1} = 0 \\ CI : U_{init}^n \end{array} \right\} \Delta t \Rightarrow U^{n+\frac{1}{4}} \quad \forall J, \forall K \quad (IV-4)$$

$$L_2 : \left. \begin{array}{l} \frac{\partial U(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \frac{\partial F_2(U(\mathbf{x},t))}{\partial x_2} = 0 \\ CI : U^{n+\frac{1}{4}} \end{array} \right\} \Delta t \Rightarrow U^{n+\frac{1}{2}} \quad \forall I, \forall K \quad (IV-5)$$

$$L_3 : \left. \begin{array}{l} \frac{\partial U(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \frac{\partial F_3(U(\mathbf{x},t))}{\partial x_3} = 0 \\ CI : U^{n+\frac{2}{4}} \end{array} \right\} \Delta t \Rightarrow U^{n+\frac{3}{4}} \quad \forall I, \forall J \quad (IV-6)$$

$$y : \left. \begin{array}{l} \frac{\partial U(\mathbf{x},t)}{\partial t} = s(U(\mathbf{x},t)) \\ CI : U^{n+\frac{3}{4}} \end{array} \right\} \Delta t \Rightarrow U^{n+1} \quad (IV-7)$$

La résolution du problème (IV-1) au temps $(n+1)$ est définie comme suit: La solution du problème (IV-4) sur la direction x_1 , avec la condition initiale U_{init}^n au pas du temps Δt est $U^{n+\frac{1}{4}}$. Cette valeur sera la condition initiale pour la résolution du problème (IV-5) sur la direction x_2 au pas du temps Δt , la valeur obtenue est $U^{n+\frac{2}{4}}$. Avec la même procédure, on résout le problème (IV-6) au pas du temps Δt sur la direction x_3 , nous aurons la valeur $U^{n+\frac{3}{4}}$, qui sera ensuite la condition initiale pour la résolution du problème (IV-7).

On voit que la solution du problème général avance de quatre pas du temps, cependant il faut que la solution du problème (IV-1) concorde avec les solutions des sous problèmes, sinon nous aurons une erreur de décomposition (SPLITTING), qui dépend de la largeur du pas du temps. Dans le cas contraire.

On utilise la méthode "STRANG SPLITTING", qui nous donne la forme de la solution du problème (IV-1) comme suit:

$$U^{n+1} = \mathbf{y}^{1/2} L_3 L_1 L_2 \mathbf{y}^{1/2} U^n \quad (\text{IV-8})$$

C'est-à-dire, on résout le problème (IV-7) au pas du temps $\frac{\Delta t}{2}$ et la résolution des

Problèmes (IV-4), (IV-5), (IV-6) sera au pas de temps Δt . Voir détails [53],[54],[55] [56].

En vue, d'obtenir des résultats bien précis, nous avons utilisé le schéma STRANG SPLITTING de deuxième ordre, qui nous donne la solution au pas du temps $(n+2)$, définie comme suit:

$$U^{n+2} = \mathbf{y}^{1/2} L_3 L_1 L_2 \mathbf{y}^{1/2} \mathbf{y}^{1/2} L_2 L_1 L_3 \mathbf{y}^{1/2} U^n \quad (\text{IV-9})$$

IV.3 Résolution de l'équation d'advection

L'analyse mathématique de la loi de conservation dans l'équation d'advection (Euler) nécessite, une solution conservative. Pour cela, on utilise des méthodes modernes pour la résolution de ce problème.

On se limite au cas de l'équation advection (IV-4). Pour alléger l'écriture de ce qui suit, on met $x_1 = x$ et $F = F_1$, alors on écrit :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0 \quad (\text{IV-10})$$

L'idée principale de la résolution de ce problème est de trouver des valeurs aux points qui nous autorise à déterminer le flux d'écoulement convenablement, ou l'approximation de la valeur moyenne U_i^{n+1} de cellule I , de la maille de calcul au pas du temps $(n+1)$, ne dépend qu'au changement des flux sur les interfaces de cette cellule. On peut alors écrire l'équation d'advection discrétisée:

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[F_{I-\frac{1}{2}}^n - F_{I+\frac{1}{2}}^n \right] \quad (\text{IV-11})$$

L'approximation de la valeur moyenne cellulaire U_i^n , est calculée à partir des deux interfaces $x_{I+\frac{1}{2}}, x_{I-\frac{1}{2}}$ de cette cellule.

Ou $F_{I+\frac{1}{2}}^n, F_{I-\frac{1}{2}}^n$: Sont les flux moyens, le long de $x = x_{I+\frac{1}{2}}$, et $x = x_{I-\frac{1}{2}}$

D'où:
$$F_{I+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} F \left(U \left(x_{I+\frac{1}{2}}, t \right) \right) dt \quad (IV-12)$$

Si l'écoulement se propage avec une vitesse définie, entre deux points de ces deux interfaces cellulaire $x_{I+\frac{1}{2}}, x_{I-\frac{1}{2}}$, il est raisonnable de supposer que les flux $F_{I+\frac{1}{2}}^n, F_{I-\frac{1}{2}}^n$ sont calculés seulement à l'aide des valeurs de ces points.

Cette idée s'apparente à la méthode de GODUNOV, alors on peut écrire:

$$F_{I+\frac{1}{2}}^n = F \left(U_{I+\frac{1}{2},L}^n, U_{I+\frac{1}{2},R}^n \right) \quad (IV-13)$$

$$F_{I-\frac{1}{2}}^n = F \left(U_{I-\frac{1}{2},L}^n, U_{I-\frac{1}{2},R}^n \right) \quad (IV-14)$$

$\left(U_{I+\frac{1}{2},L}^n, U_{I+\frac{1}{2},R}^n \right), \left(U_{I-\frac{1}{2},L}^n, U_{I-\frac{1}{2},R}^n \right)$ sont les valeurs des interfaces $x_{I+\frac{1}{2}}, x_{I-\frac{1}{2}}$ appelées aussi les états du problème de Riemann le long $x = x_{I+\frac{1}{2}}, \quad et \quad x = x_{I-\frac{1}{2}}$.

$F \left(U_{I+\frac{1}{2},L}^n, U_{I+\frac{1}{2},R}^n \right), F \left(U_{I-\frac{1}{2},L}^n, U_{I-\frac{1}{2},R}^n \right)$ sont appelées les flux numériques ou le flux de GODUNOV

Finalement, la formule générale de la résolution de l'équation d'advection discrétisée est écrite:

$$U_I^{n+1} = U_I^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[F \left(U_{I+\frac{1}{2},L}^n, U_{I+\frac{1}{2},R}^n \right) - F \left(U_{I-\frac{1}{2},L}^n, U_{I-\frac{1}{2},R}^n \right) \right] \quad (IV-15)$$

Pour calculer les valeurs interfaciales (discontinuité) d'une cellule considérée, on utilise un schéma d'interpolation de haut ordre (PPM) "PIECEWISE PARABOLIC METHOD", qui est appliqué aux variables primitives de l'équation d'advection. Pour calculer les flux interfaciales, on applique l'approximation de Riemann SOLVEUR avec l'algorithme de "ROE". Donc la résolution du problème d'advection est basée sur ces deux méthodes voir [44], [49].

Avant de définir ces méthodes de résolution, nous donnons une description générale du problème de Riemann qui est à la base de ces deux méthodes.

IV.3.1 Problème de RIEMANN

L'application de La loi de conservation aux équations d'advection ou la distribution des variables primitives V est constante par morceau, cette application est appelée problème de RIEMANN. Les états constants sont limites par des surfaces appelées discontinuités. Alors la forme de la solution dépend de la relation entre deux états constants gauche et droit V_L et V_R des discontinuités voir [48], [50].

On peut écrire l'équation d'advection unidimensionnelle (IV-10) en variables primitives par:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + A \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (\text{IV-16})$$

Où:
$$A = \frac{dF}{dU} = F' \quad (\text{IV-17})$$

Le comportement de la fonction F' a des conséquences importantes sur la solution de l'équation. Pour que le système soit hyperbolique, on vérifie que la matrice est diagonalisable, l'on peut écrire alors:

$$A = G\Lambda G^{-1} \quad (\text{IV-18})$$

Λ : La matrice des valeurs propres (les vitesses d'ondes) a_k de la matrice A

Où:
$$|\Lambda| = |A - a.I| = 0 \quad (\text{IV-19})$$

I : est la matrice unitaire

G : La matrice des vecteurs propres $R^{(k)}$ droits associés aux valeurs propres de la matrice Λ

Où:
$$AR^{(k)} = a_k R^{(k)} \quad (\text{IV-20})$$

G^{-1} : La matrice des vecteurs propres $R_{(k)}$ gauches associés aux valeurs propres de la matrice Λ

Pour que les vecteurs soient normes, on met:

$$R^{(k)} \cdot R_{(k)} = 1 \quad (\text{IV-21})$$

Alors la matrice Λ possède a_k valeurs propres (vitesses d'ondes) et par conséquents $R^{(k)}$ vecteurs propres.

Pour calculer les variables caractéristiques On écrit l'équation (IV-16) en termes de variables caractéristiques voir [48] par:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad (\text{IV-22})$$

Où:
$$dV = GdW \quad (\text{IV-23})$$

Et:
$$dW = G^{-1}dV \tag{IV-24}$$

Alors on peut écrire:
$$e_k = \Delta V \cdot R^{(k)} \tag{IV-25}$$

Et:
$$\Delta V = \sum_{k=1}^m e_k R^{(k)} \tag{IV-26}$$

Ou e_k : sont les coefficients de saut ou les variables caractéristiques.

Pour calculer ΔV le saut entre les deux états extrêmes R, L , voir la figure (IV-1). On suppose que toutes les valeurs propres (vitesses d'ondes) a_k de la matrice Λ , sont réelles et ordonnées $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_m$

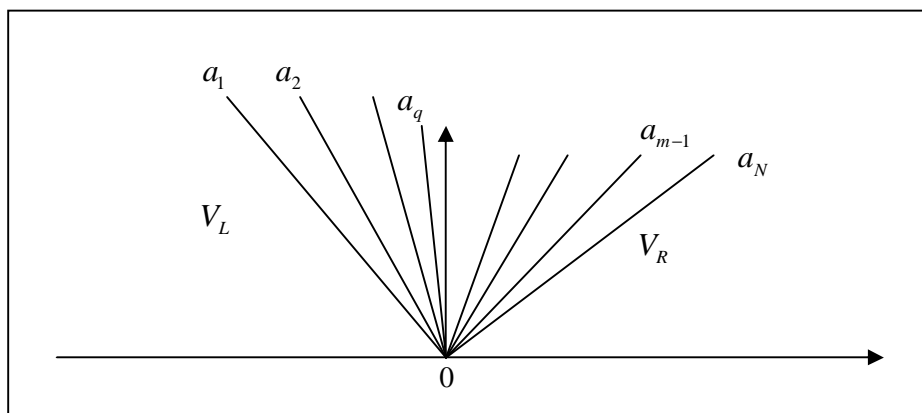


Figure (IV-4): représentation de propagation des caractéristiques dans le plan $x-t$

Les vitesses d'ondes suivantes a_k sont issues de l'origine 0. Chaque variable caractéristique, caractérise un saut ou la variation des variables primitives V de l'état gauche V_L à la vitesse a_1 constant, à l'état droite V_R de la vitesse a_N constant. On suppose que les états V_R et V_L sont fonction des vecteurs propres droites $R^{(k)}$ qui sont linéairement indépendants.

Alors On a:

$$V_L = \sum_{k=1}^q e_k R^{(k)} \tag{IV-27}$$

$$V_R = \sum_{k=q+1}^N e_k R^{(k)}$$

Alors on peut écrire:
$$\Delta V = V_R - V_L = \sum_{k=q+1}^N e_k R^{(k)} + \sum_{k=1}^q e_k R^{(k)} \tag{IV-28}$$

La solution de V pour un point (x, t) quelconque devient:

$$V(x, t) = \sum_{k=q+1}^N e_k^R R^{(k)} + \sum_{k=1}^q e_k^L R^{(k)} \tag{IV-29}$$

Où m est la valeur maximale de k , on peut aussi écrire :

$$V(x,t) = V_L + \sum_{k=q+1}^N e_k^R R^{(k)} + \sum_{k=1}^q e_k^L R^{(k)} \quad (\text{IV-30})$$
$$V(x,t) = V_R - \sum_{k=q+1}^N e_k^R R^{(k)} + \sum_{k=1}^q e_k^L R^{(k)}$$

Dans le système d'équations d'advection non linéaire, tel que les équations d'Euler, les discontinuités sont des ondes: chocs, contact de discontinuité ou ondes de réfraction. Cependant la solution du problème de Riemann concerne une seule onde qui sépare deux états constants. Cette onde, (discontinuité), doit être une onde de choc ou une onde de contact qui conserve l'entropie du système à résoudre voir [48], [50].

- **Onde de choc**

Les vitesses d'ondes dans chaque région où V est constant se dirigent vers le choc lorsque le temps évolue et les vitesses d'ondes dans les états gauches sont plus grandes que celles des états droits de la discontinuité.

Les variables primitives r, u, p , à travers l'onde de choc sont discontinues, alors que la vitesse tangentielle est continue, tout en conservant l'entropie de système.

- **Onde de réfraction**

Les vitesses d'ondes s'éloignent de l'onde de détente, cette solution est instable et viole l'entropie du système de résolution.

Les variables primitives r, u, p , à travers l'onde de choc sont discontinues, alors que la vitesse tangentielle est continue.

- **Onde de contact**

Les vitesses d'ondes dans chaque région de V est constant.

La masse et la vitesse tangentielle à travers l'onde de Contact sont discontinues alors que la pression et la vitesse normale sont continues.

IV.3.1.1 Application du Problème de Riemann dans l'équation d'Euler

On se limite au cas monodimensionnel pour alléger les résultats, mais la portée reste tout de même générale. L'équation d'Euler unidimensionnel s'écrit dans la forme conservative:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0$$

Où U et $F(U)$ sont données respectivement par :

$$U = \begin{bmatrix} r \\ ru \\ e \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} ru \\ ru^2 + p \\ u(e + p) \end{bmatrix} \quad (\text{IV-31})$$

e : est l'énergie totale par unité de masse

$$e = \frac{1}{2}u^2 + \frac{p}{r(g-1)} \quad (\text{IV-32})$$

$g = \frac{c_p}{c_v}$: Est le constant de chaleur spécifique

L'équation d'Euler dans la forme primitive est écrite:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + A(U) \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad V = \begin{bmatrix} r \\ u \\ p \end{bmatrix} \quad (\text{IV-33})$$

$A(U) = \frac{\partial F}{\partial U}$: est la matrice Jacobienne du système d'équation linéaire

$$A(U) = \frac{\partial F}{\partial U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}(g-3)u^2 & (3-g)u & g-1 \\ u \left[\frac{1}{2}(g-1)u^2 - h \right] & h - (g-1)u^2 & gu \end{bmatrix} \quad (\text{IV-34})$$

h : est l'enthalpie totale par unité de masse

$$h = e + P \quad (\text{IV-35})$$

Les valeurs propres de la matrice Jacobienne A sont déterminées par la résolution de l'équation

(IV-19) qui nous donne les trois vitesses d'ondes suivantes:

$$a_1 = u - c \quad , \quad a_2 = u \quad , \quad a_3 = u + c \quad (IV-36)$$

Les vecteurs propres droits de la matrice A sont déterminés par la résolution de l'équation (IV-20) qui nous donne les vecteurs propres droits associés aux valeurs propres (vitesse d'onde):

$$R^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u-1 \\ h-uc \end{bmatrix}, \quad R^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ \frac{1}{2}u^2 \end{bmatrix}, \quad R^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u+1 \\ h+uc \end{bmatrix} \quad (IV-37)$$

Les vecteurs propres gauches de la matrice A sont déterminés par la résolution de l'équation (IV-21) qui nous donne les vecteurs propres gauche associés aux valeurs propres (vitesse d'onde):

$$R_{(1)} = \left(\frac{u}{4c} (2+g-1) \frac{u}{c}, \quad \frac{1}{2c} (1+(g-1) \frac{u}{c}), \quad \frac{g-1}{2} \quad \frac{1}{c^2} \right)$$

$$R_{(2)} = \left(1 - \frac{g-1}{2} \frac{u^2}{c^2}, \quad (g-1) \frac{u}{c^2}, \quad -(g-1) \frac{1}{c^2} \right) \quad (IV-38)$$

$$R_{(3)} = \left(-\frac{u}{4c} (2-(g-1) \frac{u}{c}), \quad \frac{1}{2c} (1-(g-1) \frac{u}{c}), \quad \frac{g-1}{2} \quad \frac{1}{c^2} \right)$$

Les variables caractéristiques (coefficients de saut) e_k sont déterminés par la résolution de l'équation (IV-25):

$$e_1 = \left(\frac{u}{4c} (2+g-1) \frac{u}{c}, \quad \frac{1}{2c} (1+(g-1) \frac{u}{c}), \quad \frac{g-1}{2} \quad \frac{1}{c^2} \right)$$

$$e_2 = \left(1 - \frac{g-1}{2} \frac{u^2}{c^2}, \quad (g-1) \frac{u}{c^2}, \quad -(g-1) \frac{1}{c^2} \right) \quad (IV-39)$$

$$e_3 = \left(-\frac{u}{4c} (2-(g-1) \frac{u}{c}), \quad \frac{1}{2c} (1-(g-1) \frac{u}{c}), \quad \frac{g-1}{2} \quad \frac{1}{c^2} \right)$$

e_k Sont exprimés par les variables primitives:

$$e_1 = \frac{1}{2c^2} (\Delta p - r.c \Delta u)$$

$$e_2 = \Delta r - \frac{\Delta p}{c^2} \quad (IV-40)$$

$$e_3 = \frac{1}{2c^2} (\Delta p + r.c \Delta u)$$

$$c = \sqrt{\frac{gp}{r}} : \text{Est la vitesse du son} \quad (\text{IV-41})$$

Le problème de Riemann pour l'équation d'Euler unidimensionnelle est physiquement analogue au problème de tube de choc dans la GAZODYNAMIQUE, voir [47], [48].

IV.3.2 Piecewise Parabolic Method (PPM)

La méthode de GODUNOV utilise un schéma numérique de premier ordre, pour la détermination, des valeurs de la discontinuité (interface) afin de calculer le flux de GODUNOV. Dans la mesure où on veut augmenter l'ordre de précision, on présente dans cette section une méthode de deuxième ordre, qui tout en tenant compte des oscillations non physiques à l'approche de la discontinuité, permet d'obtenir un flux correct de Transport (F.C.T). Beaucoup d'idées sont fondées sur la continuité de la pente du flux dans les régions proche de la discontinuité dans le but d'éliminer les oscillations. Un des ces algorithmes hybride basée sur cette idée, est l'algorithmes de type, PIECEWISE PARABOLIC METHOD (PPM) de WOODWORD et COLLELA voir [46].

PPM est une méthode de haut ordre à l'instar de la méthode de GODUNOV, utilise une fonction d'interpolation spatiale quadratique pour la distribution des variables primitives, en vue d'obtenir une bonne représentation de la discontinuité, particulièrement la discontinuité de contact. Le calcul des fonctions des variables primitives moyennes, se fait par l'utilisation des interactions non linéaires des vitesses d'onde des équations des caractéristiques. Comme pour toutes les méthodes de GODUNOV de haut ordre, les dissipations additionnelles permettent de garder la fonction d'interpolation des variables primitives monotone.

La procédure de l'application de la méthode PPM est la suivante:

Soit, L'équation linéaire d'advection unidimensionnelle, avec une vitesse de convection a constante:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + a \cdot \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (\text{IV-42})$$

La valeur moyenne V_i^n au point x_i et au temps t^n est calculée par l'intermédiaire des interfaces: $x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}$, intercalant ce point.

On peut écrire alors:

$$V_I^n = \frac{1}{\Delta x_I} \int_{x_{I-\frac{1}{2}}}^{x_{I+\frac{1}{2}}} V_I(x, t^n) dx \quad (\text{IV-43})$$

$$\Delta x_I = x_{I+\frac{1}{2}} - x_{I-\frac{1}{2}}$$

Où $V_I(x, t^n)$: est la fonction d'interpolation des variables primitives d'écoulement de la cellule I au temps t^n

Alors, la valeur moyenne de la solution de l'équation d'advection au temps: $t^{n+1} = t^n + \Delta t$

Où Δt satisfait la condition de stabilité: $a\Delta t \leq \min \Delta x_I$, peut être écrite:

$$V_I^{n+1} = \frac{1}{\Delta x_I} \int_{x_{I-\frac{1}{2}}}^{x_{I+\frac{1}{2}}} V_I(x, t^{n+1}) dx$$

Le but est de construire un polynôme d'interpolation par morceau $V_I(x)$, qui est continu sur chaque cellule de la maille et qui satisfait à la condition :

$$V_I^n = \frac{1}{\Delta x_I} \int_{x_{I-\frac{1}{2}}}^{x_{I+\frac{1}{2}}} V_I(x) dx$$

On peut écrire V_I^{n+1} , la solution de l'équation d'advection au temps t^{n+1} par:

$$V_I(x, t^n + \Delta t) = V_I(x - a\Delta t) \quad (\text{IV-44})$$

Et:

$$V_I^{n+1} = \frac{1}{\Delta x_I} \int_{x_{I-\frac{1}{2}}}^{x_{I+\frac{1}{2}}} V_I(x - a\Delta t) dx$$

Ce qui traduit que La valeur moyenne au temps t^{n+1} de la variable V dans la cellule de la maille I est obtenue par l'intégration du polynôme d'interpolation initial translaté à droite par $a\Delta t$. Voir les figures (IV-1), (IV-2) c'est-à-dire on interprète les variations temporelles moyennes des variables primitives à l'aide des variations moyennes spatiales.

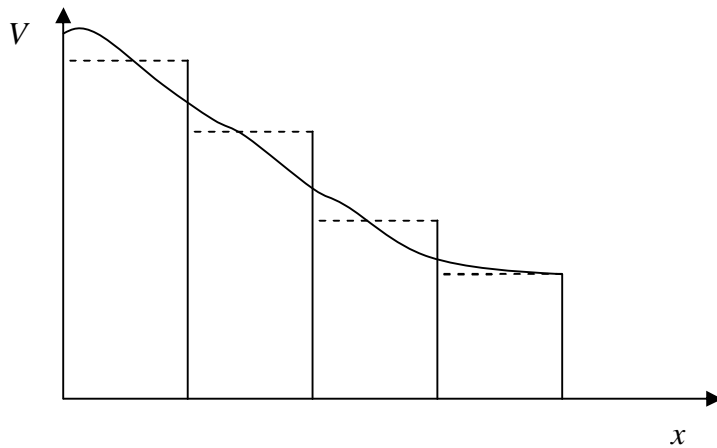


Figure (IV-1) : schéma d'interpolation au pas du temps t^n suivant P.P.M

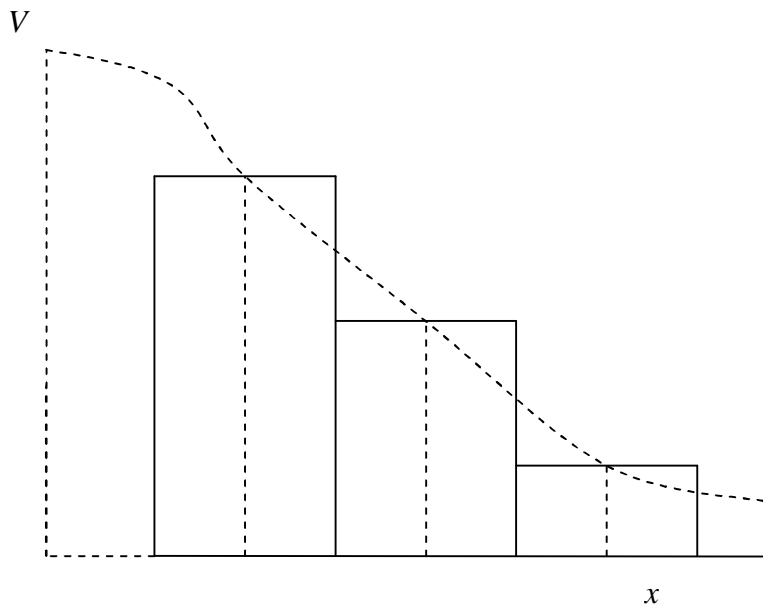


Figure (IV-2) : schéma d'interpolation au pas du temps t^{n+1} suivant P.P.M

La méthode de PPM utilise une fonction d'interpolation parabolique pour la représentation de la distribution des variables primitives dans chaque cellule I voir [46], sous la forme:

$$V_I(x) = V_{L,I} + z(\Delta V_I + V_{6,I}(1-z)) \quad (IV-45)$$

Ou: $z = \frac{x - x_{I-\frac{1}{2}}}{\Delta x_I}$ $x_{I-\frac{1}{2}} \leq x \leq x_{I+\frac{1}{2}}$ (IV-46)

Et: $V = \{r, u, v, w, p, Y\}$

Tels que les coefficients du polynôme sont définis par:

$$\lim_{x \rightarrow x_{I-\frac{1}{2}}} V_I(x) = V_{L,I} \qquad \lim_{x \rightarrow x_{I+\frac{1}{2}}} V_I(x) = V_{R,I} \qquad (\text{IV-47})$$

$$\Delta V_I = V_{R,I} - V_{L,I} \qquad V_{6,I} = 6 \left(V_I^n - \frac{1}{2} (V_{L,I} + V_{R,I}) \right) \qquad (\text{IV-48})$$

$V_{R,I}, V_{L,I}$: Sont les valeurs gauche et droite de la cellule I .

Chaque fonction parabolique définit les valeurs moyennes des cellules intercalée par les valeurs moyennes $V_{I+\frac{1}{2}}$, $V_{I-\frac{1}{2}}$, ces valeurs sont calculées à l'aide d'un schéma différentiel de quatrième ordre. En faisant des correction, s'il y a des extrêmes maximales ou minimales qui apparaissent dans le schéma, afin d'assurer la monotonie de la fonction d'interpolation.

1. Calcul les coefficients du polynôme $V_{R,j}$, $V_{L,j}$:

Les coefficients $V_{R,I}$, $V_{L,I}$ sont déterminés suivant les valeurs de V aux points $x_{I+\frac{1}{2}}, x_{I-\frac{1}{2}}$,

calculer par le schéma d'interpolation $V_I(x)$, ou ces valeurs soient satisfaites aux conditions au dessous pour que La fonction d'interpolation $V_I(x)$ soit monotone et continue sur

l'intervalle $\left(x_{I+\frac{1}{2}}, x_{I-\frac{1}{2}} \right)$ sinon on modifie les coefficients $V_{R,I}, V_{L,I}$.

$$1. \quad V_{I+\frac{1}{2}} \neq V_{R,I} \neq V_{L,I+1} \qquad \text{Et} \qquad V_{I-\frac{1}{2}} \neq V_{L,I} \neq V_{R,I-1}$$

2. les valeurs; $V_{I+\frac{1}{2}}$ et $V_{I-\frac{1}{2}}$, soient respectivement inférieures aux valeurs données par la fonction d'interpolation de la cellule $I+1$ et supérieures dans la cellule $I-1$ dans la région continue.

À ce moment là, on introduit les discontinuités aux bords de la cellule I : $x_{I+\frac{1}{2}}, x_{I-\frac{1}{2}}$.

Pour calculer la valeur V aux bords de la cellule $x_{I+\frac{1}{2}}, x_{I-\frac{1}{2}}$, on interpole la Valeur $V_{I+\frac{1}{2}}$, a l'aide

de la fonction d'interpolation quadratique $g(x)$ qui est définie par:

$$g(x) = \int_{I-\frac{1}{2}}^x V_I(x') dx' \qquad (\text{IV-49})$$

Ou:

$$x_{I-\frac{1}{2}+k'} \leq x' \leq x_{I+\frac{1}{2}+k'}$$

Les valeurs aux bords des cellules est connaît et calculées par:

$$g\left(x_{I+\frac{1}{2}}\right) = g_{I+\frac{1}{2}} = \sum_{k \leq I} V_{k'}^n \Delta x_{k'} \quad (\text{IV-50})$$

On calcul les interpolations du polynôme quadratique $f(x)$, à travers les points $\left(g_{I+k'+\frac{1}{2}}, x_{I+k'+\frac{1}{2}}\right)$,

Ou: $k' = 0, \pm 1, \pm 2$, en dérivant, nous obtenons ainsi, $V_{I+\frac{1}{2}}, V_{I-\frac{1}{2}}$, par:

$$V_{I+\frac{1}{2}} = \left. \frac{dg}{dx} \right|_{x_{I+\frac{1}{2}}} \quad (\text{IV-51})$$

La formule finale de $V_{I+\frac{1}{2}}$ est écrite:

$$V_{I+\frac{1}{2}} = V_I^n + \frac{\Delta x_I}{\Delta x_I + \Delta x_{I+1}} (V_{I+1}^n - V_I^n) + \frac{1}{\sum_{k=1}^2 \Delta x_{I+k}} \times \left\{ \frac{2\Delta x_{I+1} \Delta x_I}{\Delta x_I + \Delta x_{I+1}} \left[\frac{\Delta x_{I-1} + \Delta x_I}{2\Delta x_I + \Delta x_{I+1}} - \frac{\Delta x_{I+2} + \Delta x_{I+1}}{2\Delta x_{I+1} + \Delta x_I} \right] \times \right. \\ \left. (V_{I+1}^n - V_I^n) - \Delta x_I \frac{\Delta x_{I-1} + \Delta x_I}{2\Delta x_I + \Delta x_{I+1}} dV_{I+1} + \Delta x_{I+1} \times \frac{\Delta x_{I+1} + \Delta x_{I+2}}{\Delta x_I + 2\Delta x_{I+1}} dV_I \right\} \quad (\text{IV-52})$$

Où dV_I : est le gradient moyen dans I th cellule de la fonction d'interpolation parabolique, il est exprime en fonction des valeurs moyennes $V_{I+1}^n, V_I^n, V_{I-1}^n$, par :

$$dV_I = \frac{\Delta x_I}{\Delta x_{I-1} + \Delta x_I + \Delta x_{I+1}} \left[\frac{2\Delta x_{I-1} + \Delta x_I}{\Delta x_{I+1} + \Delta x_I} (V_{I+1}^n - V_I^n) + \frac{\Delta x_I + 2\Delta x_{I+1}}{\Delta x_{I-1} + \Delta x_I} (V_I^n - V_{I-1}^n) \right] \quad (\text{IV-53})$$

On remplace dV_I par $d_m V_I$.

Où $d_m V_I$: est le gradient moyen dans I th cellule de la fonction d'interpolation parabolique qui est exprime par :

$$d_m V_I = \min\left(|dV_I|, 2|V_I^n - V_{I-1}^n|, 2|V_I^n - V_{I+1}^n|\right) dV_I^n (dV_I) \quad (\text{IV-54})$$

Si : $(V_{I+1}^n - V_I^n)(V_I^n - V_{I-1}^n) > 0$ (IV-55)

Sinon

$$d_m V_I = 0 \quad (IV-56)$$

La même procédure de calcul que précédemment pour déterminer la valeur $V_{I-\frac{1}{2}}$ au bord de la cellule $x_{I-\frac{1}{2}}$.

Au lieu de poser : $V_{R,I} \rightarrow V'_{R,I} = V_{I+\frac{1}{2}}$ et $V_{L,I} \rightarrow V'_{L,I} = V_{I-\frac{1}{2}}$

Prenant en compte à la dissipation des discontinuités dans les cellules avoisinantes. Pour cela, on utilise une distribution linéaire par morceau avec:

$$V_{L,I} \rightarrow V_{L,I}^d = V_{I-1} + \frac{1}{2} d_m V_{I-1} \quad (IV-57)$$

$$V_{R,I} \rightarrow V_{R,I}^d = V_{I+1} - \frac{1}{2} d_m V_{I+1} \quad (IV-58)$$

Ou: $d_m V_{I+1}, d_m V_{I-1}$: sont les pentes moyennes des cellules $I+1, I-1$, qui sont données par la relation (IV-53).

Pour prendre en compte, cette substitution sur la monotonie de la fonction d'interpolation, on utilise une relation qui relie la relation (IV-53) aux relations (IV-57) et (IV-58). C'est-à-dire, prévenir les erreurs des discontinuités des cellules avoisinantes $I+1$ et $I-1$.

Les deux relations suivantes relient la relation (IV-53) aux relations (IV-57), (IV-58):

$$V_{L,I} = V'_{L,I} (1 - h_I) + V_{L,I}^d h_I \quad (IV-59)$$

$$V_{R,I} = V'_{R,I} (1 - h_I) + V_{R,I}^d h_I \quad (IV-60)$$

Tel que n_I est définie par :

$$h_I = \max(0, \min(h^{(1)}(\bar{h}_I - h^{(2)}), 1)) \quad (IV-61)$$

Si: $-d^2 V_{I+1} \cdot d^2 V_{I-1} \cdot |V_{I+1} - V_{I-1}| - e \min(|V_{I+1}|, |V_{I-1}|) > 0$

$$\bar{h}_I = - \left(\frac{d^2 V_{I+1} - d^2 V_{I-1}}{x_{I+1} - x_{I-1}} \right) \left(\frac{(x_I - x_{I-1})^3 + (x_{I+1} - x_I)^3}{V_{I+1} - V_{I-1}} \right) \quad (IV-62)$$

Sinon

$$\overline{h}_I = 0 \quad (\text{IV-63})$$

Et :

$$d^2V_I = \frac{1}{\Delta x_{I-1} + \Delta x_I + \Delta x_{I+1}} \left[\frac{V_{I+1} - V_I}{\Delta x_{I+1} + \Delta x_I} - \frac{V_I - V_{I-1}}{\Delta x_I + \Delta x_{I-1}} \right] \quad (\text{IV-64})$$

Les paramètres $h^{(1)}$, $h^{(2)}$, e sont des constants. Dans le calcul au GAZODYNAMIQUE, on prend :

$$h^{(1)} = 20, h^{(2)} = 0.05, e = 0.01 \quad (\text{IV-65})$$

Pour que la fonction d'interpolation soit monotone dans la région continue de la cellule I et prenne des valeurs

$$V_{L,I} \leq V_I^n \leq V_{R,I}$$

Pour cela, on distingue deux cas:

1. si: $(V_{R,I} - V_I^n)(V_I^n - V_{L,I}) \leq 0$

Alors: $V_{L,I} = V_I^n \quad (\text{IV-66})$

$$V_{R,I} = V_I^n$$

2. si: $|\Delta V_I| \geq |V_{6,I}|$

On modifie la valeur $V_{L,I}$ si:

$$\frac{(V_{R,I} - V_{L,I})^2}{6} < (V_{R,I} - V_{L,I}) \left(V_I^n - \frac{1}{2}(V_{L,I} + V_{R,I}) \right)$$

Alors: $V_{L,I} = 3V_I^n - 2V_{R,I} \quad (\text{IV-67})$

On modifier la valeur $V_{R,I}$ si:

$$-\frac{(V_{R,I} - V_{L,I})^2}{6} > (V_{R,I} - V_{L,I}) \left(V_I^n - \frac{1}{2}(V_{L,I} + V_{R,I}) \right)$$

Alors: $V_{R,I} = 3V_I^n - 2V_{L,I} \quad (\text{IV-68})$

Après avoir déterminé les coefficients de la fonction d'interpolation $V_{L,I}$, $V_{R,I}$, nous définissons

Les fonctions d'interpolation moyennes $f_{I+\frac{1}{2},L,R}^V(X)$, pendant un pas du temps Δt sur le domaine de dépendance: $[x_{i+\frac{1}{2}} - a\Delta t, x_{i+\frac{1}{2}}]$, entre la cellule I et $I+1$, sont définie par:

- Les ondes gauches

$$f_{I+\frac{1}{2},L}^V(V_I(x),a) = \begin{cases} \frac{1}{a\Delta t} \int_{x_{I+\frac{1}{2}} - a\Delta t}^{x_{I+\frac{1}{2}}} V_I(x) dx & \text{si } a > 0 \\ V_{I+\frac{1}{2}}^- & \text{si } a \leq 0 \end{cases} \quad (\text{IV-69})$$

$V_I\left(x_{I+\frac{1}{2}}\right) = V_{I+\frac{1}{2}}^-$: est la valeur de la fonction d'interpolation moyenne de la cellule I au point $x_{I+\frac{1}{2}}$

- les ondes droites :

$$f_{I+\frac{1}{2},R}^V(V_I(x),a) = \begin{cases} -\frac{1}{a\Delta t} \int_{x_{I+\frac{1}{2}} - a\Delta t}^{x_{I+\frac{1}{2}}} V_I(x) dx & \text{si } a < 0 \\ V_{I+\frac{1}{2}}^+ & \text{si } a \geq 0 \end{cases} \quad (\text{IV-70})$$

$V_{I+1}\left(x_{I+\frac{1}{2}}\right) = V_{I+\frac{1}{2}}^+$: est la valeur de la fonction d'interpolation moyenne de la cellule $I+1$ au point $x_{I+\frac{1}{2}}$

$$\text{Alors: } f_{I+\frac{1}{2},L}^V(V_I(x),a) = V_{R,I} - \frac{Z}{2} \left(\Delta V_I - \left(1 - \frac{2}{3}Z\right) V_{6,I} \right) \quad \text{Si } a > 0 \quad (\text{IV-71})$$

$$f_{I+\frac{1}{2},R}^V(V_I(x),a) = V_{L,I+1} + \frac{Z}{2} \left(\Delta V_I + \left(1 - \frac{2}{3}Z\right) V_{6,I} \right) \quad \text{Si } a < 0 \quad (\text{IV-72})$$

IV.3.2.1 Application de la méthode PPM dans l'équation d'Euler (advection) :

Dans les équations d'Euler, nous avons trois vitesses d'ondes qui figurent dans les équations d'Euler sous la forme des caractéristiques. Pour résoudre ce problème, on utilise une approche basée sur la construction des estimations gauches et droites des états du problème de Riemann (les discontinuités), en utilisant la petite et la grande vitesse d'onde du système d'équation voir [46],[48]. L'algorithme de résolution est le suivant:

- nous décrivons les fonctions d'interpolation $V_I(x)$ utilisées dans les schémas d'interpolation précédents.

Où: $V = r, u, v, w, p, Y$

- nous utilisons le schéma d'interpolation sans détection de discontinuité pour les quantités p, u, v, w, Y , mais pour r , sauf si la condition suivante est satisfaite :

$$gk_0 \frac{|r_{I+1} - r_{I-1}|}{\min(r_{I+1}, r_{I-1})} \geq \frac{|p_{I+1} - p_{I-1}|}{\min(p_{I+1}, p_{I-1})} \quad (\text{IV-73})$$

Où k_0 : est constant. Pour le calcul, on prend $k_0 = 0.1$.

g : Est le constant du gaz. $g = \frac{c_p}{c_v}$.

En utilisant la fonction d'interpolation, on peut déterminer, $\bar{V}_{I+\frac{1}{2},L}$, $\bar{V}_{I+\frac{1}{2},R}$, états du problème de

Riemann, par:

$$\bar{V}_{I+\frac{1}{2},L} = f_{I+\frac{1}{2},L}^V(V_I(x), (u_I + c_I)) \quad (\text{IV-74})$$

Et:
$$\bar{V}_{I+\frac{1}{2},R} = f_{I+\frac{1}{2},R}^V(V_I(x), (u_I - c_I)) \quad (\text{IV-75})$$

S'il n'y a pas d'ondes qui se heurtent à droite et à gauche de l'interface $x_{I+\frac{1}{2}}$, alors $\bar{V}_{I+\frac{1}{2},L}$, $\bar{V}_{I+\frac{1}{2},R}$ sont

les valeurs moyennes finales de la fonction d'interpolation si non les états gauches et droits du problème de Riemann doivent être modifier par l'approche qu'il y a des ondes qui se propageant dans

l'une des deux directions de la discontinuité. On peut conclure que la variation dans la solution est une quantité de masse transportée par la vitesse d'advection à travers l'interface $x_{I+\frac{1}{2}}$, au pas du temps Δt . Alors les états du problème de Riemann impliqueront une correction de la variation de la masse associée à chaque famille d'onde qui est transportée à travers les bords de la cellule en utilisant un schéma de second ordre pour la correction.

Nous définissons les nouvelles valeurs du problème de Riemann par; $V_{I+\frac{1}{2},L}$, $V_{I+\frac{1}{2},R}$ et on écrit:

- Si: $a_k^L > 0$ et $a_k^R < 0$ alors:

$$V_{I+\frac{1}{2},L} = \bar{V}_{I+\frac{1}{2},L} + V_{I+\frac{1}{2},L}^{(k)} \quad (\text{IV-76})$$

$$V_{I+\frac{1}{2},R} = \bar{V}_{I+\frac{1}{2},R} + V_{I+\frac{1}{2},R}^{(k)} \quad (\text{IV-77})$$

Où:

$$V_{I+\frac{1}{2},L}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 f_{I+\frac{1}{2},L}^V(V_I(x), a_k^L) \quad (\text{IV-78})$$

$$V_{I+\frac{1}{2},R}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 f_{I+\frac{1}{2},R}^V(V_I(x), a_k^R) \quad (\text{IV-79})$$

- et si : $a_k^L \leq 0$ et $a_k^R \geq 0$ alors:

$$V_{I+\frac{1}{2},L} = \bar{V}_{I+\frac{1}{2},L} \quad (\text{IV-80})$$

$$V_{I+\frac{1}{2},R} = \bar{V}_{I+\frac{1}{2},R} \quad (\text{IV-81})$$

Où: a_k^L , a_k^R : sont les vitesses d'ondes des équations d'Euler associées à la cellule gauche I et la cellule droite $I+1$, On peut écrire par la suite:

$$a_{1,L} = u_I - c_I, \quad a_{2,L} = u_I, \quad a_{3,L} = u_I + c_I \quad (\text{IV-82})$$

$$a_{1,R} = u_{I+1} - c_{I+1}, \quad a_{2,R} = u_{I+1}, \quad a_{3,R} = u_{I+1} + c_{I+1} \quad (\text{IV-83})$$

Après avoir déterminé les valeurs moyennes des variables primitives à l'interface $\left(I+\frac{1}{2}\right)$ et $\left(I-\frac{1}{2}\right)$.

On utilise l'algorithme de ROE, pour calculer les flux à travers les interfaces $\left(x_{I+\frac{1}{2}}, x_{I-\frac{1}{2}}\right)$.

IV.3.3 ROE SOLVEUR

En appliquant la méthode de Godounov dans un système d'équation hyperbolique (advection), nous avons besoin seulement de déterminer les valeurs gauche et droite $\left(V_{I+\frac{1}{2},L}, V_{I+\frac{1}{2},R} \right)$ de l'état $V_{I+\frac{1}{2}}^*$, précisément une discontinuité de contact, alors la solution du système se base sur la résolution des états $\left(V_{I+\frac{1}{2},L}, V_{I+\frac{1}{2},R} \right)$ du problème de Riemann.

Beaucoup de schémas numériques, pour la résolution du système d'équation hyperbolique conservative sont bases sur l'exploitation des résultats obtenus par la considération du séquence de Riemann et il est démontré que ce traitement de la solution peut être obtenu en construisant une matrice A^* , selon les propriétés de l'état $V_{I+\frac{1}{2}}^*$ (discontinuités de contact) et comment elle est lie dans

l'état spatial, avec l'exploitation des équations du GAZODYNAMIQUE stable et instable pour déterminer les vecteurs propres de la matrice A^* .

Il y'a Beaucoup de variété de l'approximation du problème de Riemann, voir [48], [50] une de ces variétés est: le SOLVEUR de ROE. L'idée de ce SOLVEUR est la détermination de l'approximation de la solution $V^*(x,t)$ du système d'équation hyperbolique qui est obtenu par la résolution du système linéaire conservatif, dont les coefficients de la matrice A^* sont constants, au lieu d'un système non linéaire originale et dont Les coefficients de la matrice du système linéaire utilisé dépendent des états

gauche et droite de la discontinuité $\left(V_{I+\frac{1}{2},L}, V_{I+\frac{1}{2},R} \right)$.

Le problème linéaire doit être concordant avec le problème non linéaire original, selon certaines conditions imposées à la matrice A^* . voir [47].

Le Problème linéaire de l'équation d'advection est écrit:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + A \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

En remplaçant le problème linéaire par une approximation de la matrice A , on peut écrire:

Ou:
$$\frac{\partial V}{\partial t} + A^* \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \tag{IV-84}$$

$$A^*_{I+\frac{1}{2}} = A^*(V_{I+\frac{1}{2},L}, V_{I+\frac{1}{2},R})$$

Le problème sera de déterminer la matrice $A^*_{I+\frac{1}{2}}$ sous des conditions imposés pour que le système soit hyperbolique. Ceci exige que:

- $a_k^* = a_k^* \left(V_{I+\frac{1}{2},L}, V_{I+\frac{1}{2},R} \right)$: sont choisis dans l'ordre:

$$a_1^* \leq a_2^* \leq a_3^* \leq \dots \leq a_k^*$$

- tous les vecteurs propres gauches sont indépendants linéairement:

$$R^{*(1)}, R^{*(2)}, \dots, R^{*(k)}$$

- la Consistance avec la matrice exacte JACOBIENNE:

$$\tilde{A}(V_{I+\frac{1}{2},L}, V_{I+\frac{1}{2},R}) = A^*(V_{I+\frac{1}{2}}^*)$$

- conservation à travers la discontinuité:

$$F(V_{I+\frac{1}{2},L}) - F(V_{I+\frac{1}{2},R}) = A^*(V_{I+\frac{1}{2},R} - V_{I+\frac{1}{2},L})$$

1. détermination de flux de ROE:

Si Nous avons la matrice $A^*(V_{I+\frac{1}{2},L}, V_{I+\frac{1}{2},R})$ et qui satisfait aux conditions définies au dessus, alors nous

désignons par $a_k^* \left(V_{I+\frac{1}{2},L}, V_{I+\frac{1}{2},R} \right)$, $R^{*(k)} \left(V_{I+\frac{1}{2},L}, V_{I+\frac{1}{2},R} \right)$, les valeurs et les vecteurs propres droites associées

à cette matrice voir [47], dont la variation des variables primitives à travers la discontinuité est écrite:

$$\Delta V = V_{I+\frac{1}{2},R} - V_{I+\frac{1}{2},L} = \sum_{k=1}^m e_k^* R^{*(k)} \quad (IV-85)$$

$e_k^* = e_k^* \left(V_{I+\frac{1}{2},L}, V_{I+\frac{1}{2},R} \right)$: sont les coefficients de saut des variables primitives à travers la discontinuité.

La solution du problème de Riemann $V_{j+\frac{1}{2}}^*$ est écrite:

$$V_{I+\frac{1}{2}}^* = V_{I+\frac{1}{2},L} + \sum_{a_k \leq 0} e_k^* R^{*(k)} \quad (IV-86)$$

$$V_{I+\frac{1}{2}}^* = V_{I+\frac{1}{2},R} - \sum_{a_k \geq 0} e_k^* R^{*(k)} \quad (IV-87)$$

de (IV-86) + (IV-87), nous obtenons:

$$V_{I+\frac{1}{2}}^* = \frac{V_{I+\frac{1}{2},R} + V_{I+\frac{1}{2},L}}{2} + \frac{1}{2} \left[\sum_{a_k^* \leq 0} e_k^* R^{*(k)} - \sum_{a_k^* \geq 0} e_k^* R^{*(k)} \right] \quad (\text{IV-88})$$

Avec la fonction de flux est définie par:

$$F \left(V_{I+\frac{1}{2}}^* \right) = A^*_{I+\frac{1}{2}} V_{I+\frac{1}{2}}^* = F_{I+\frac{1}{2}} \quad (\text{IV-89})$$

Le flux de ROE est écrit:

$$F_{I+\frac{1}{2}} = A^*_{I+\frac{1}{2}} \left(\frac{V_{I+\frac{1}{2},R} + V_{I+\frac{1}{2},L}}{2} \right) + \frac{1}{2} A^*_{I+\frac{1}{2}} \left[\sum_{a_k^* \leq 0} e_k^* R^{*(k)} - \sum_{a_k^* \geq 0} e_k^* R^{*(k)} \right] \quad (\text{IV-90})$$

Nous avons:

$$F_{I+\frac{1}{2},L} = A^*_{I+\frac{1}{2}} V_{I+\frac{1}{2},L} \quad F_{I+\frac{1}{2},R} = A^*_{I+\frac{1}{2}} V_{I+\frac{1}{2},R}$$

Le flux de ROE sera définie comme suit:

$$F_{I+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (F_{I+\frac{1}{2},L} + F_{I+\frac{1}{2},R}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 e_k^* |a_k^*| R^{*(k)} \quad (\text{IV-91})$$

$$\text{Ou: } a_k^* = a_k^* \left(V_{I+\frac{1}{2},L}, V_{I+\frac{1}{2},R} \right)$$

$$\text{Alors: } F_{I\pm\frac{1}{2}} = \frac{F(U_{I\pm\frac{1}{2},L}) + F(U_{I\pm\frac{1}{2},R})}{2} - \sum_{k=1}^3 |a_k^*| R^{*(k)} e_k^* \quad (\text{IV-92})$$

Ou : $U_{I\pm\frac{1}{2}}^{R,L}$ sont les moyennes de ROE des variables primitives des états gauches et droits de la discontinuité.

a_k^* , $R^{*(k)}$, e_k^* : sont respectivement les valeurs propres (amplitudes), vecteurs propre droite et coefficients de saut, calculés par l'intermédiaire des moyennes de ROE.

2. construction de la matrice $A^*_{I+\frac{1}{2}}$:

L'équation d'Euler (advection) unidimensionnelle est définie comme suit:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0$$

$$U = \begin{pmatrix} r \\ m \\ e \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} ru \\ ru^2 + p \\ u(e + p) \end{pmatrix}$$

La construction de la matrice A^* est basée sur l'introduction d'un paramètre vecteur Z , tel que les deux vecteurs des variables U et $F(U)$ sont exprimé par Z voir [47]:

$$U = U(z) \quad \text{et} \quad F = F(z) \quad (\text{IV-93})$$

Et Avec les variations suivants: $\Delta U = U_{I+\frac{1}{2},R} - U_{I+\frac{1}{2},L}$ et $\Delta F = F\left(U_{I+\frac{1}{2},R}\right) - F\left(U_{I+\frac{1}{2},L}\right)$

Sont exprimé en terme de change: $\Delta z = z_{I+\frac{1}{2},R} - z_{I+\frac{1}{2},L}$

On induit un vecteur Z :

$$Z = \begin{pmatrix} \sqrt{r} \\ \sqrt{ru} \\ (e + p) / \sqrt{r} \end{pmatrix} \quad (\text{IV-94})$$

Pour trouvez que :

$$U = \begin{pmatrix} z_1 z_2 \\ z_1 z_2 \\ \frac{1}{g} z_1 z_3 + \frac{g-1}{2g} z_2 z_2 \end{pmatrix} \quad (\text{IV-95})$$

$$F = \begin{pmatrix} z_1 z_2 \\ \frac{g+1}{2g} z_2 z_2 + \frac{g-1}{g} z_1 z_3 \\ z_2 z_3 \end{pmatrix} \quad (\text{IV-96})$$

Les deux vecteurs U, F sont exprimes par des fonctions quadratiques des éléments Z vérifiant,

Qu'il existe deux matrices B et C , tel que :

$$\begin{aligned}\Delta U &= B.\Delta Z \\ \Delta F &= C.\Delta Z\end{aligned}\tag{IV-97}$$

Ou Les deux matrices B et C sont des éléments linéaires, On cherche alors un vecteur \bar{Z} moyen, obtenu en effectuant la moyenne arithmétique suivante :

$$\bar{Z} = \frac{1}{2} \left(Z_{I+\frac{1}{2},L} + Z_{I+\frac{1}{2},R} \right)\tag{IV-98}$$

$$B = B(\bar{Z})$$

$$C = C(\bar{Z})$$

$$\Delta U = B.\Delta Z$$

Alors, on a :

$$\Delta F = C.\Delta Z\tag{IV-100}$$

$$\Delta F = C.B^{-1}.\Delta Z$$

La condition satisfaisante pour que la matrice de ROE existe si:

$$A^*_{I+\frac{1}{2}} = C.B^{-1}\tag{IV-101}$$

On peut écrire alors la matrice $\tilde{A}_{I+\frac{1}{2}}$ comme :

$$A^*_{I+\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{g-3}{2}u^{*2} & (3-g)u^* & g-1 \\ \frac{g-1}{2}u^{*3} - u^*h^* & h^* - (g-1)u^{*2} & gu^* \end{pmatrix}\tag{IV-102}$$

Ou :

$$A^*_{I+\frac{1}{2}} = \left(\frac{\partial F}{\partial U} \right)_{U=U^*}\tag{IV-103}$$

Et:

$$U^* = U^* \left(U_{I+\frac{1}{2},L}, U_{I+\frac{1}{2},R} \right)$$

En pose: $l = 1 + \frac{1}{2}, L$ Et $r = 1 + \frac{1}{2}, R$

Les moyennes de ROE sont définies par:

$$\begin{aligned}
 r^* &= \sqrt{r_l r_r} \\
 u^* &= \frac{u_l \sqrt{r_l} + u_r \sqrt{r_r}}{\sqrt{r_r} + \sqrt{r_l}} \\
 h^* &= \frac{h_l \sqrt{r_l} + h_r \sqrt{r_r}}{\sqrt{r_l} + \sqrt{r_r}} \\
 v^* &= \frac{v_l \sqrt{r_l} + v_r \sqrt{r_r}}{\sqrt{r_l} + \sqrt{r_r}} \\
 w^* &= \frac{w_l \sqrt{r_l} + w_r \sqrt{r_r}}{\sqrt{r_l} + \sqrt{r_r}} \\
 c^* &= \left[(g-1) \left(h^* - \frac{1}{2} U^{*2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\
 U^{*2} &= u^{*2} + v^{*2} + w^{*2}
 \end{aligned} \tag{IV-104}$$

Tous les ingrédients du flux de ROE sont connus, comme les valeurs propres qui sont égales :

$$a_1^* = u^* + c^* \quad a_2^* = u^* \quad a_3^* = u^* - c^* \tag{IV-105}$$

Ou: c^* : est la vitesse du son

Les vecteurs propres droits:

$$R^{*(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ u^* - c^* \\ h^* - u^* c^* \end{pmatrix}, \quad R^{*(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ u^* \\ \frac{1}{2} u^{*2} \end{pmatrix}, \quad R^{*(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ u^* + c^* \\ h^* + u^* c^* \end{pmatrix} \tag{IV-106}$$

Les coefficients de saut e_k^* :

$$\begin{aligned}
 R_{(1)}^* &= \left(\frac{u^*}{4c^*} (2 + g - 1) \frac{u^*}{c^*}, \quad \frac{1}{2c^*} (1 + (g - 1) \frac{u^*}{c^*}), \quad \frac{g - 1}{2} \frac{1}{c^{*2}} \right) \\
 R_{(2)}^* &= \left(1 - \frac{g - 1}{2} \frac{u^{*2}}{c^{*2}}, \quad (g - 1) \frac{u^*}{c^{*2}}, \quad -(g - 1) \frac{1}{c^{*2}} \right) \\
 R_{(3)}^* &= \left(-\frac{u^*}{4c^*} (2 - (g - 1) \frac{u^*}{c^*}), \quad \frac{1}{2c^*} (1 - (g - 1) \frac{u^*}{c^*}), \quad \frac{g - 1}{2} \frac{1}{c^{*2}} \right)
 \end{aligned} \tag{IV-107}$$

Alors les coefficients e_k^* sont exprimés en fonction des variables primitives par:

$$\begin{aligned}
 e_1^* &= \frac{1}{2c^{*2}} (\Delta p - r^* . c^* \Delta u) \\
 e_2^* &= \Delta r - \frac{\Delta p}{c^{*2}} \\
 e_3^* &= \frac{1}{2c^{*2}} (\Delta p + r^* . c^* \Delta u)
 \end{aligned} \tag{IV-108}$$

Alors, on récapitule l'algorithme de ROE pour calculer le flux $F_{i \pm \frac{1}{2}}$ à travers une discontinuité par:

- le calcul des moyennes de ROE .
- le Calcul des valeurs propres a_k^* en utilisant les moyennes de ROE.
- Le calcul des vecteurs propres gauche $R^{s(k)}$ en utilisant les moyennes de ROE.
- Le calcul les coefficients de saut (variation) e_k^* en utilisant les moyennes de ROE.

IV.4 Condition du pas du temps

Le pas du temps Δt du schéma d'advection est donné par la non interaction des vitesses d'ondes du problème de Riemann ou la condition (IV-127) soit satisfait :

$$\Delta t = \frac{CFL \cdot \Delta x_l}{a_{\max}^n} \quad (\text{IV-109})$$

Δx_l : Est Le pas spatiale

CFL : Est le courant Frederik LEWY qui satisfait a :

$$0 \leq CFL \leq 1 \quad (\text{IV-110})$$

a_{\max}^n : est la plus grande vitesse d'onde du problème de Riemann au temps t^n , pour que cette vitesse ne traverse pas plus que la distance Δx_l au temps Δt .

L'estimation de la vitesse a_{\max}^n pour l'équation d'Euler est:

$$a_{\max}^n = \max \left\{ a_{l+\frac{1}{2}}^n \right\} \quad (\text{IV-111})$$

$a_{l+\frac{1}{2}}^n$: Est la vitesse d'onde non linéaire maximale intercalée par les discontinuités au pas du temps t^n .

Pour le choix du coefficient CFL , si a_{\max}^n est connu avec $CFL \leq 1$, On peut choisir $CFL = 1$. Dans ce cas les ondes passent à travers elles sans accélération.

En pratique, on choisit toujours $CFL = 0,9$. Voir [47], [48].

IV.5 Résolution de l'équation de la source

L'équation différentielle ordinaire de la source qui contient Les termes de dissipation visqueuse de la quantité de mouvement, dissipation de l'énergie et la dissipation d'espèce est écrite:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = S(U(x,t)) \quad (\text{IV-112})$$

Avec:

$$U = \begin{bmatrix} ru \\ rv \\ rw \\ re \\ ry \end{bmatrix} \quad S(U(\mathbf{x},t)) = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \left(\frac{r}{\text{Re}} \right) t_{1j}}{\partial x_j} \\ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \left(\frac{r}{\text{Re}} \right) t_{2j}}{\partial x_j} \\ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \left(\frac{r}{\text{Re}} \right) t_{3j}}{\partial x_j} \\ \nabla \left(\frac{cp}{\text{Re.Pr}} \frac{\mathbf{r}}{\nabla T} \right) + \nabla \left(\frac{1}{\text{Re}} (ut_{ij}) \right) \\ \nabla \left(\frac{r}{\text{Re.Pr}} \frac{\mathbf{r}}{\nabla Y} \right) \end{bmatrix} \quad (\text{IV-113})$$

On utilise la méthode du volume fini avec l'application de la loi de conservation. Le flux et le tenseur t Sont calculés par rapport aux valeurs des interfaces (discontinuités) en conservant la consistance des variables d'écoulements dans l'équation d'advection. Pour l'intégration temporaire, on utilise la méthode de RUNGE KUTTA quatrième ordre voir [50]. L'application de cette méthode permet

De déterminer la valeur de U dans un intervalle de temps de $n\Delta t$ à $(n+1)\Delta t$. L'approximation de la valeur U_i^{n+1} , de U au temps $(n+1)$, est écrite:

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \Delta t S(U_i^n(x,t)) \quad (\text{IV-114})$$

On pose:

$$S(U_i^n(x,t)) = Y_i^n$$

Ou:

$$\begin{aligned}
 U_I^{n(1)} &= U_I^n & U_I^{n+1(1)} &= U_I^{n+1} \\
 U_I^{n(2)} &= U_I^n + \Delta t a_2 y_I^{n(1)} & U_I^{n+1(2)} &= U_I^{n+1} + \Delta t B_2 y_I^{n+1(1)} \\
 U_I^{n(3)} &= U_I^{n(2)} + \Delta t a_3 y_I^{n(2)} & U_I^{n+1(3)} &= U_I^{n+1(2)} + \Delta t B_3 y_I^{n+1(2)} \\
 U_I^{n(4)} &= U_I^{n(3)} + \Delta t a_k y_I^{n(3)} & U_I^{n+1(4)} &= Q_I^{n+1(3)} + \Delta t B_3 y_I^{n+1(3)} \quad (IV-115) \\
 \text{alors} & & \text{alors} & \\
 U_I^{n(k+1)} &= U_I^n + \Delta t \sum_{k=1}^4 a_k y_I^{n(k)} & U_I^{n+1(k+1)} &= U_I^{n+1} + \Delta t \sum_{k=1}^4 B_k y_I^{n+1(k+1)}
 \end{aligned}$$

Le schéma final est écrit:

$$U_I^{n+1} = U_I^n + \Delta t \sum_{k=1}^4 B_k y_I^{n(k)} \quad (IV-116)$$

Et Par consistance :

$$\sum_{k=1}^k B_k = 1 \quad (IV-117)$$

Ainsi, nous obtenons Les coefficients du schéma de RUNGE KUTTA quatrième ordre, comme suit:

$$\begin{aligned}
 a_2 &= \frac{1}{2} \quad , \quad a_3 = \frac{1}{2} \quad , \quad a_4 = 1 \\
 B_1 &= \frac{1}{6} \quad , \quad B_2 = B_3 = \frac{1}{3} \quad , \quad B_4 = \frac{1}{6} \quad (IV-118)
 \end{aligned}$$

Voir les références [44], [48]

IV.6 Structure du code de calcul

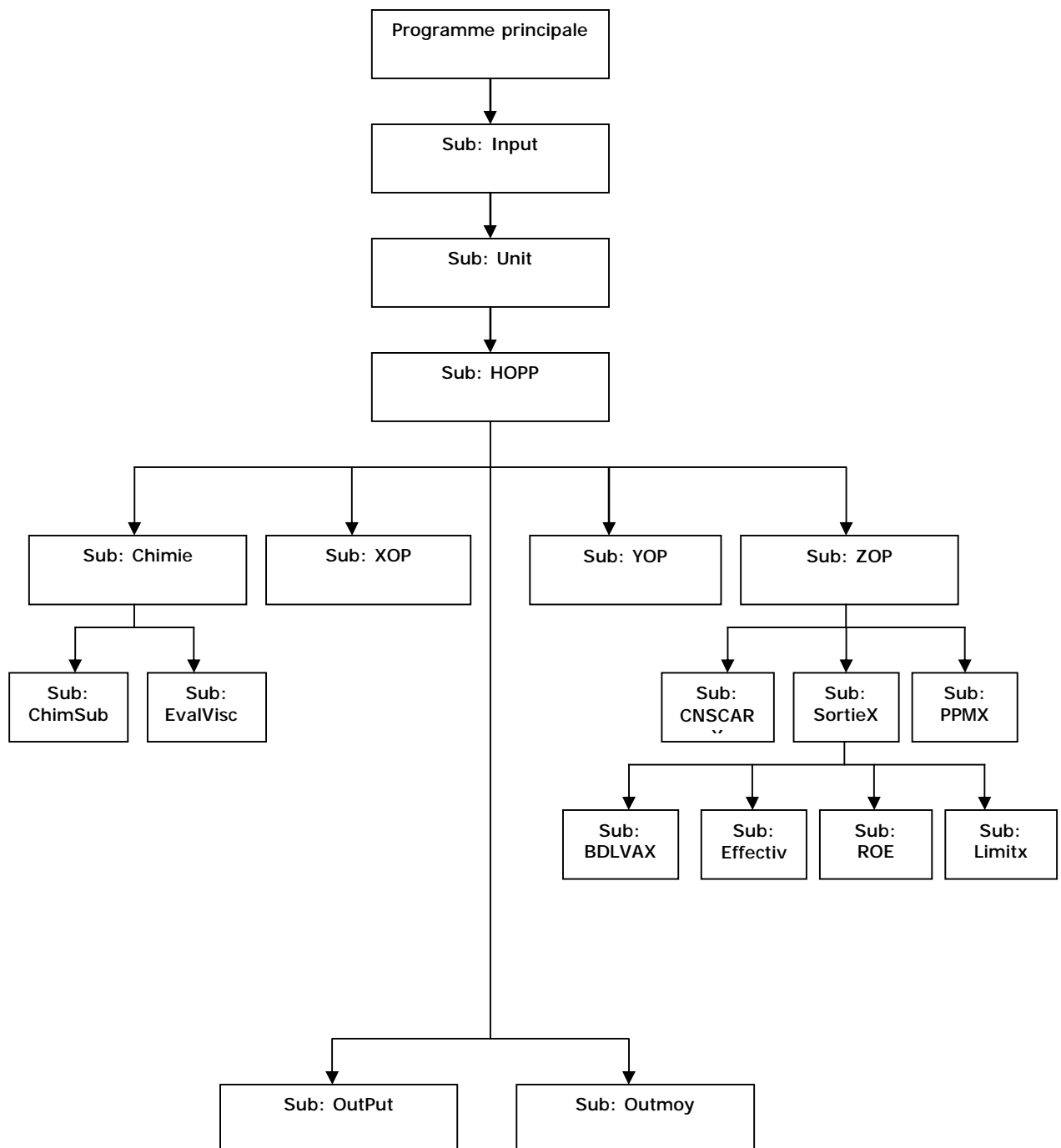
Le code de calcul est constitué par un programme principal faisant appel aux SUBROUTINES suivantes:

- CALL INPUT : entrer les données de calcul (les donnée physique et géométrique du domaine de calcul).
- CALL INIT : Initialiser les variables d'écoulement et les conditions initiales imposées.
- CALL HOPP : Faire le calcul des schémas (advection – source). Cette subroutine fait appel aux subroutines suivantes:
- CALL CHIMIE : calcul le schéma "source" par l'algorithme RUNGE KUTTA, Cette subroutine fait appel aussi aux subroutines suivantes
 - CALL EVALVISC : c'est la procédure de calcul du terme "dissipation visqueuse" dans l'équation de la source.
 - CALL CHIMSUB : calcule le terme de la diffusion chimique de l'équation de la source.
- CALL XOP : Calcul le schéma d'advection sur la direction axiale.
- CALL YOP : Calcul le schéma d'advection sur la direction Longitudinale
- CALL ZOP : Calcul le schéma d'advection sur la direction Transversale

Chacune des ces dernières subroutines appelle les subroutines suivantes:

- CALL CNSCARX: faire le changement des variables conservatives aux variables primitives.
- CALL SORTIEX : calcule les variables à la sortie par le schéma d'advection.
- CALL PPMX : calcule le schéma piecwise parabolic method
Cette dernière subroutine fait appel aux subroutines suivantes:
- CALL BDLVAX : calcule les valeurs gauche et droite de l'algorithme de ROE
- CALL EFFECTIV : calcule les valeurs effectives de l'algorithme de ROE

- CALL ROE : la procédure de la l'algorithmme de ROE
- CALL LIMITES : calcule les valeurs des variables d'écoulement dans les conditions aux limites imposées.
- CALL OUTPUT : affiche les résultats obtenus sur des fichiers de sortie.
- CALL OUTMOY : Calcul les variables moyennes d'écoulement.



Chapitre V

Résultats et discussions

V.1 Présentation des résultats

Nous avons, simuler numériquement un jet rond compressible tridimensionnelle et turbulent, par la simulation des grandes échelles de turbulence, en utilisant l'algorithme monotone Intégrated Large Eddy Simulation avec une résolution spatiale de $125 \times 125 \times 125$ points de maillage cartésien uniforme dans les trois directions longitudinales, transversales et latérales. La taille du domaine de calcul est:

$$L_x = 20.D_0 \quad L_y = 5.D_0 \quad L_z = 5.D_0$$

Les variables d'écoulement sont adimensionnées par les variables du centre du jet et la géométrie de l'orifice.

Les simulations sont obtenues pour un pas du temps $\Delta t = 0.1 \frac{D_0}{U_0}$ et un pas spatiale

$\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.1.D_0$. L'outil informatique utilisé est un Pentium IV (2.4) avec une RAM de 384 MO et de disque dur 40 GO.

Le fluide du jet est assimilé à un gaz parfait ainsi que le fluide enveloppant le jet. Ils ont de mêmes caractéristiques thermiques:

La constante massique: $r = 28 \frac{J}{K.Kg}$

La chaleur spécifique: $C_v = 2,5 \frac{J}{K.Kg}$

La vitesse du fluide enveloppant le jet: $U_2 = \frac{1}{4}U_0$ et avec un nombre de Mach égale à 1.48.

Les résultats présentés, ci-dessous, sont obtenus à partir de nombreuses compilations qui ont été exécutées avec divers paramètres d'entrée. Les paramètres appropriés pour l'analyse de leurs influences sur les variables d'écoulement telles que la vitesse, la pression et la température sont:

Le nombre de Mach du jet, le nombre de Reynolds et le rapport de pression du jet. Afin de comprendre les résultats obtenus on analyse en premier lieu les résultats par une visualisation couleur donnée par le logiciel TEC PLOT des champs des contours de la pression, de la température et de la vitesse. Nous avons représenté l'évolution de ces variables pour les différentes valeurs de nombre de Mach, Nombre de Reynolds et du rapport de pression.

Le tableau, ci-dessous, récapitule les données de simulation.

Pas Du temps	Domaine De calcul	La vitesse du fluide enveloppant le jet	Intervalle Du temps	Nombre de SCHMIT	Nombre de Mach/fluide	Rayon l'orifice/Jet
0.1	20x5x5	$0.25 U_0$	40	1	1.48	0.5

V.2 L'influence du nombre de Mach du jet

Pour analyser l'influence du nombre de Mach du jet M_0 sur les variables d'écoulement; vitesse, pression et la température, nous avons effectué des simulations avec des nombres de Mach variés:

$$M_0 = 1, 1.4, 1.6, 2$$

Le rapport de pression: $p_1/p_2 = 1$ et un nombre de Reynolds: $Re = 2000$ en gardant les mêmes données d'entrée, indiquées au tableau ci-dessus.

Les figures (V-1), (V-2) et (V-3), représentent les différents champs de pression, température et de vitesse et leurs coupes et profils associés, le long d'un plan $y = \frac{5.D_0}{2}$, sur l'axe du jet et ce pour des nombre de Mach du jet $M_0 = 1, 1.4, 1.6, 2$

V.2.1 Champs de pression:

La figure (V-1), correspond à la visualisation du champ de pression extérieur suivant les valeurs du nombre de Mach. On remarque que l'iso valeur extérieure du champ de pression a l'allure d'une hélice qui représente l'instabilité de kelvin Helmholtz. La valeur iso surface augmente au fur est à mesure que le nombre de Mach augmente. Les niveaux du champs intérieur, sont représentés sur les figures (V-2), on observe des zones de hautes et basses pression proches de l'axe du jet. Ces zones représentent respectivement les zones du vortex et leurs points d'arrêt associés. Ces zones augmentent et diminuent respectivement avec l'augmentation du nombre de Mach. L'allure du profil de pression le long de l'axe du jet est représentée sur les figures (V-3), elle est caractérisée par l'augmentation de la longueur du cône potentiel quand Le nombre de Mach augmente. On peut conclure, alors, que la longueur du cône potentiel augmente quand le Nombre de Mach augmente. La pression est fonction du nombre de Mach, l'augmentation radiale des champs de ces derniers est due à l'augmentation de la dissipation de la chaleur dans la couche de cisaillement, pour maintenir l'enthalpie des vortex.

V.2.2 Champs de température

Le champ de température extérieur est représenté sur la figure (V-4). Les iso valeurs extérieures ont la forme de tore dans la partie du développement de l'instabilité de kelvin Helmholtz.

L'iso valeur de ces tores augmente avec le nombre de Mach alors que la zone laminaire diminue, ceci est traduit par l'augmentation de l'échange de chaleur, au fur est à mesure que le nombre de Mach augmente, comme indiqué sur la figure (V-5). On voit aussi la création des zones de haute et basse température proche de l'axe du jet dans la zone turbulente qui caractérisent la formation des vortex. La température est fonction du nombre de Mach, l'augmentation radiale des champs de ce dernier est due à l'augmentation de la dissipation de chaleur dans la couche de cisaillement à cause de la compressibilité, pour maintenir l'enthalpie des vortex.

L'allure des profils sur la figure (V-6) indique l'augmentation de la longueur du cône potentiel et cela quand on augmente le nombre de Mach. Le développement de la turbulence est caractérisé par la nature aléatoire du profil de température.

V.2.3 Champs de vitesse

Les champs de vitesse représentés sur Les figures (V-7) et (V-8) sont caractérisés par les deux zones: la zone laminaire du cône potentiel et la zone de la couche de cisaillement qui se développe sur les deux coté de la zone laminaire. On remarque l'augmentation de la longueur du cône potentiel au fur est à mesure que le nombre de Mach augmente et la diminution de l'épaisseur de la quantité de mouvement.

D'après les profils de la vitesse présentés sur La figure (V-9), on voit que le développement de la turbulence est plus rapide quand le nombre de mach est plus petit, ceci se traduit par la chute de la vitesse qui donne naissance aux gradients qui sont la source de la génération des vorticités.

On conclut alors que l'augmentation de ce nombre induit une croissance de la longueur du cône potentiel du fait que les instabilités se développent plus loin de l'orifice du jet.

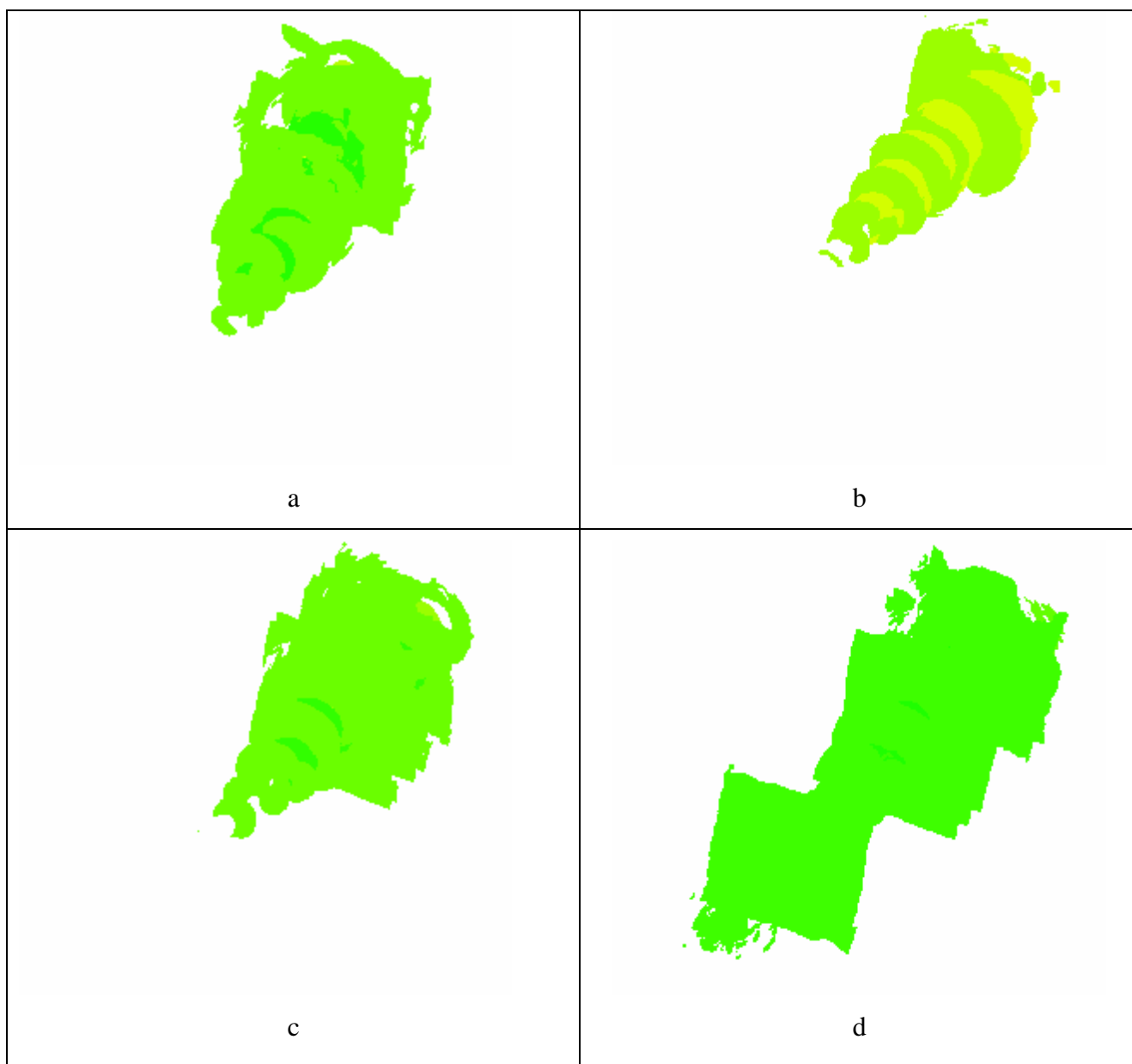


Figure V-1

Champs de pressions, pour des nombre de Mach a) $M=1$, b) $M=1.4$, c) $M=1.6$, d) $M=2$

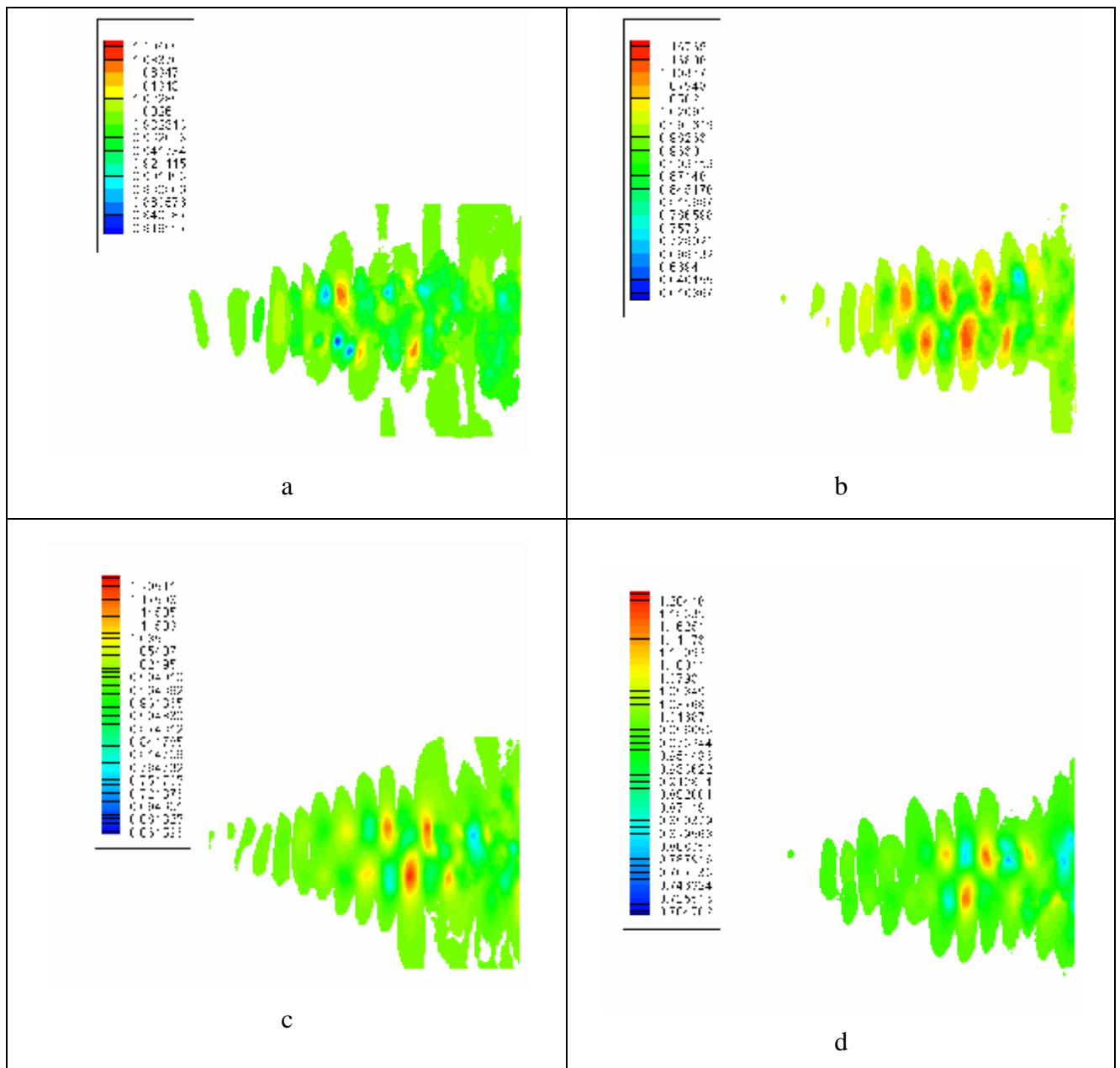


Figure V-2

Champs de pressions sur un plan, pour des nombre de Mach a) M=1, b) M=1.4, c) M=1.6, d) M=2

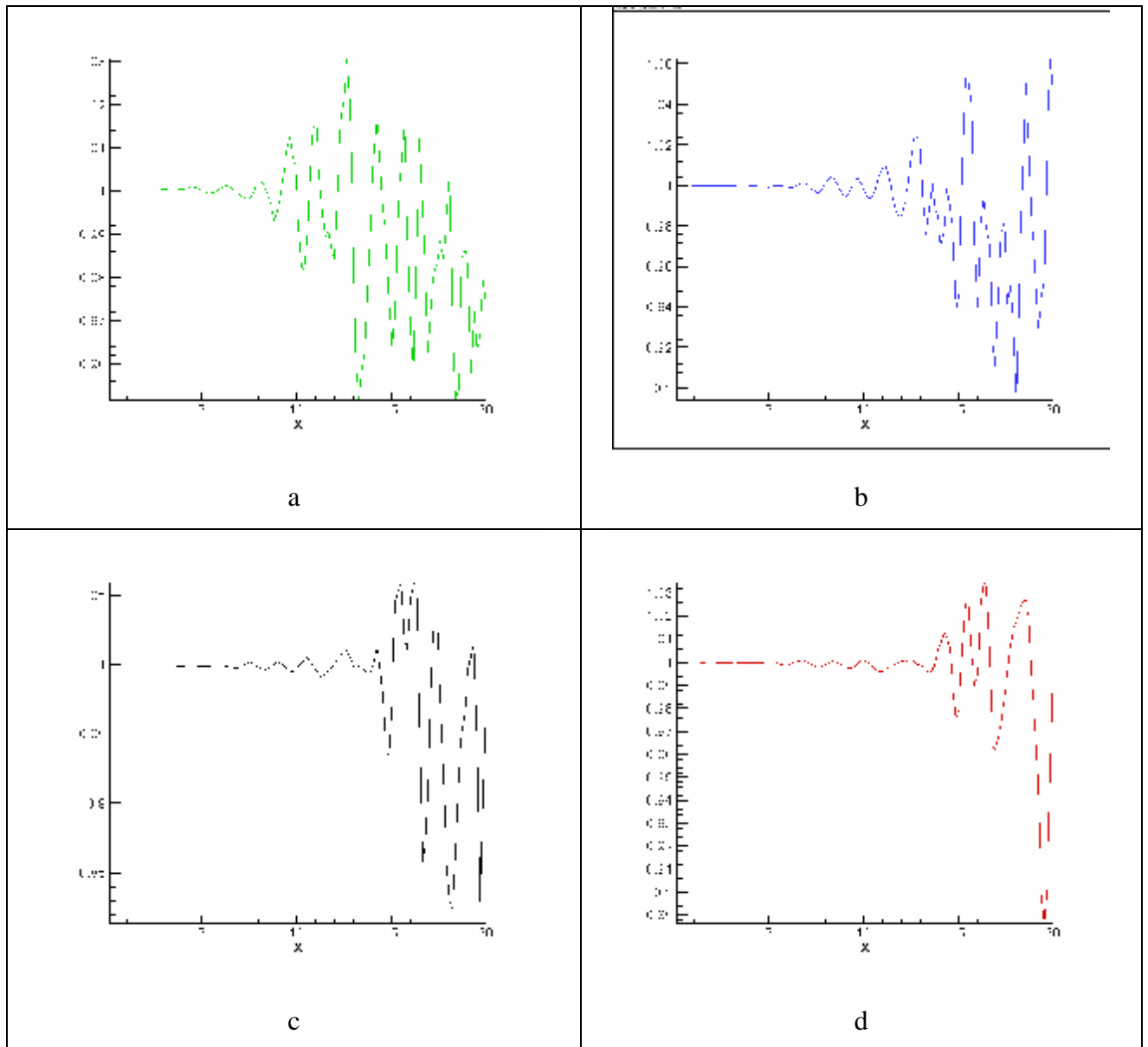


Figure V-3

Profils de variation de pressions, pour des nombre de Mach a) $M=1$, b) $M=1.4$, c) $M=1.6$, d) $M=2$

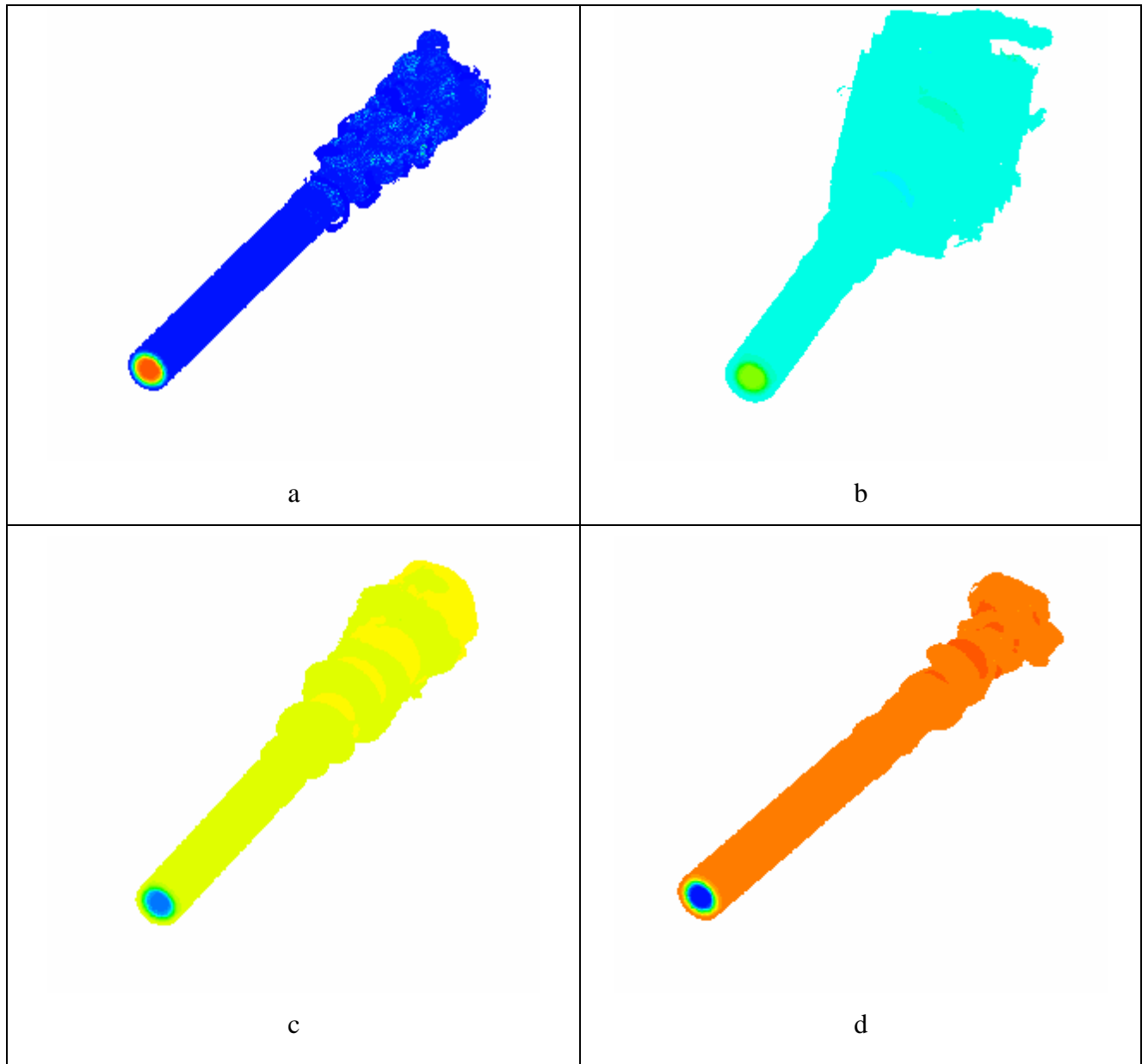


Figure V-4

Champs de températures, pour des nombre de Mach a) $M=1$, b) $M=1.4$, c) $M=1.6$, d) $M=2$

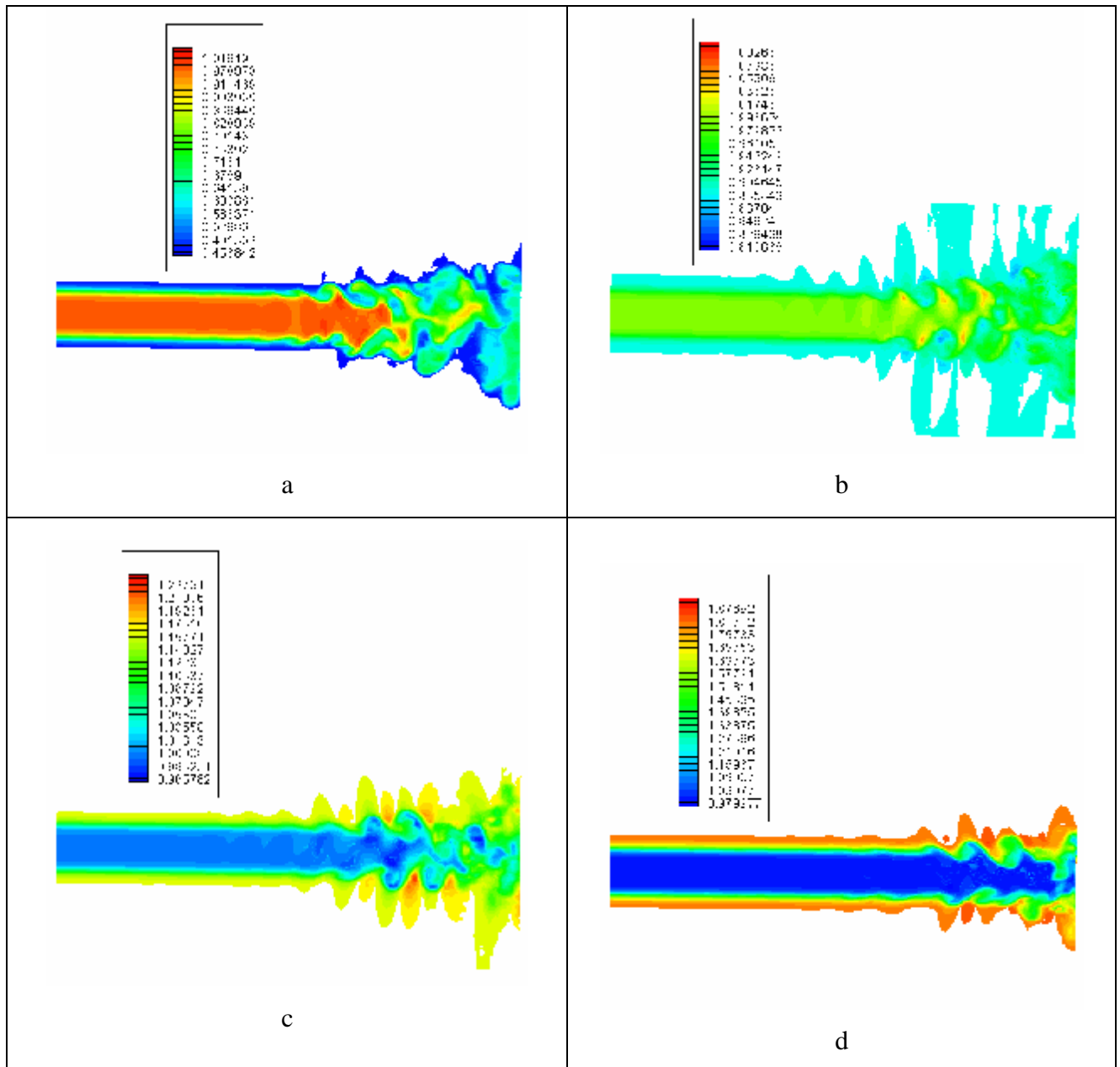


Figure V-5

Champs de températures sur un plan, pour des nombre de Mach a) $M=1$, b) $M=1.4$, c) $M=1.6$
d) $M=2$

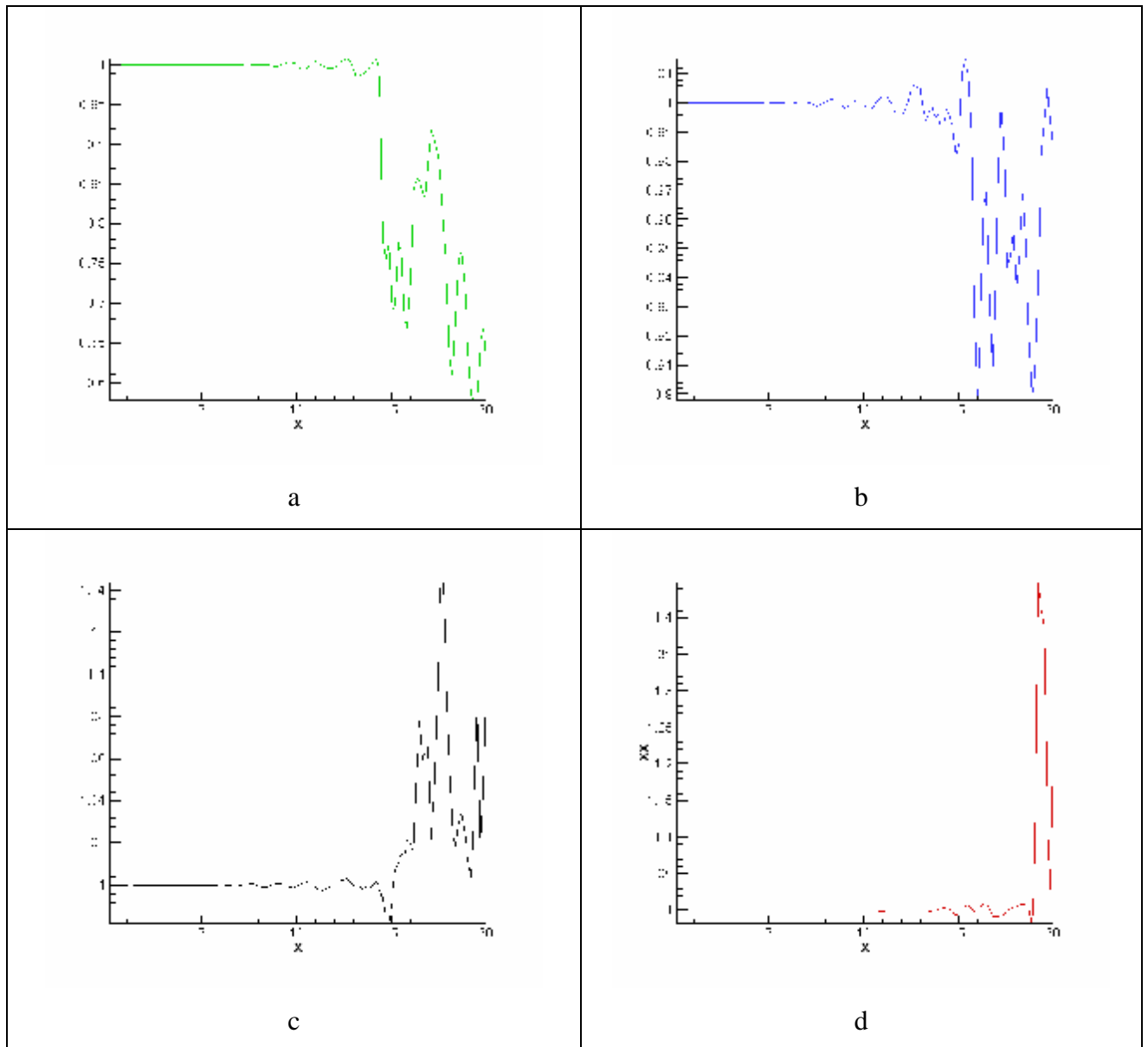


Figure V-6

Profils de variation de températures, pour des nombre de Mach a) $M=1$, b) $M=1.4$, c) $M=1.6$, d) $M=2$

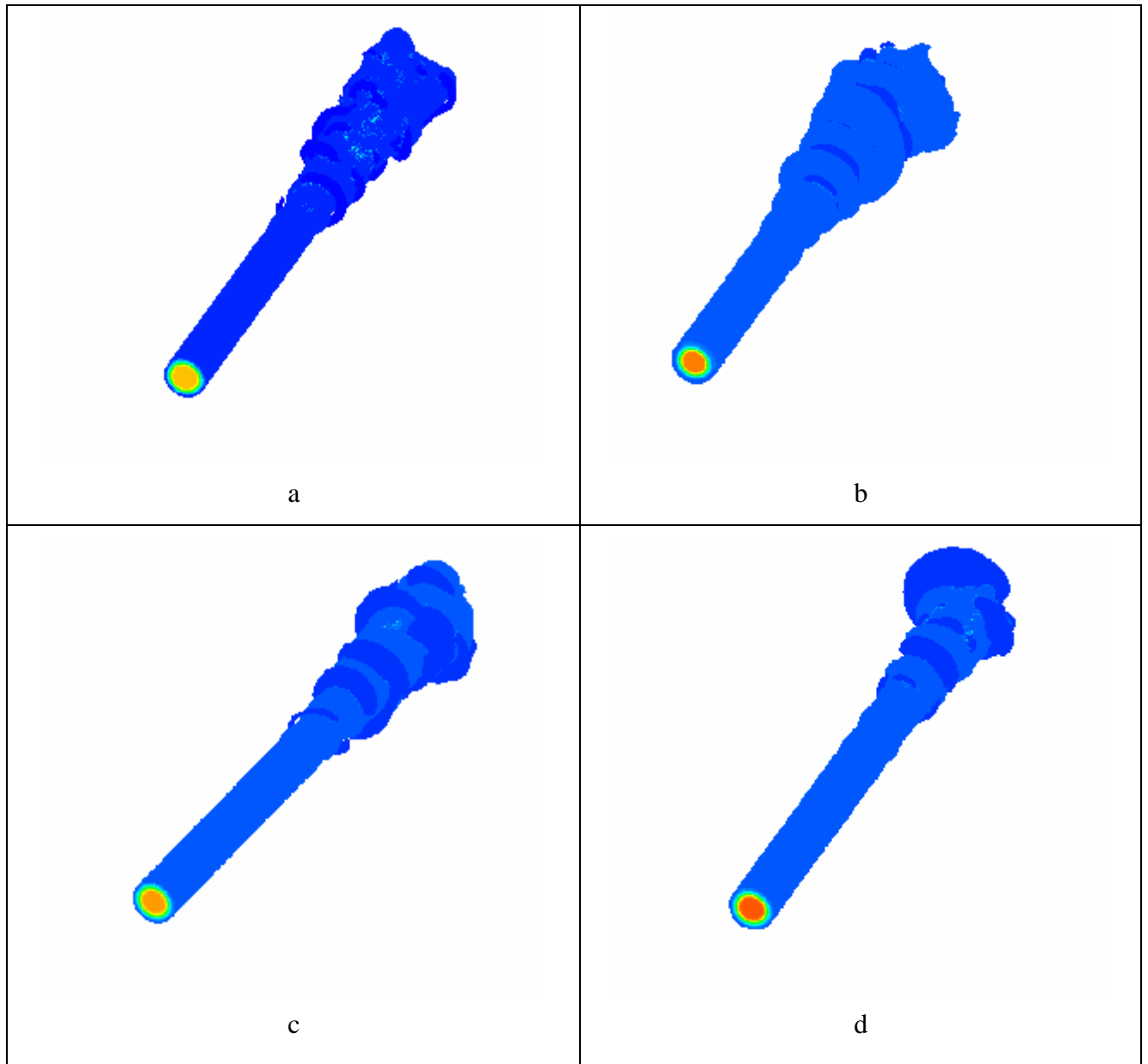


Figure V-7

Champs de vitesses, pour des nombre de Mach a) $M=1$, b) $M=1.4$, c) $M=1.6$, d) $M=2$

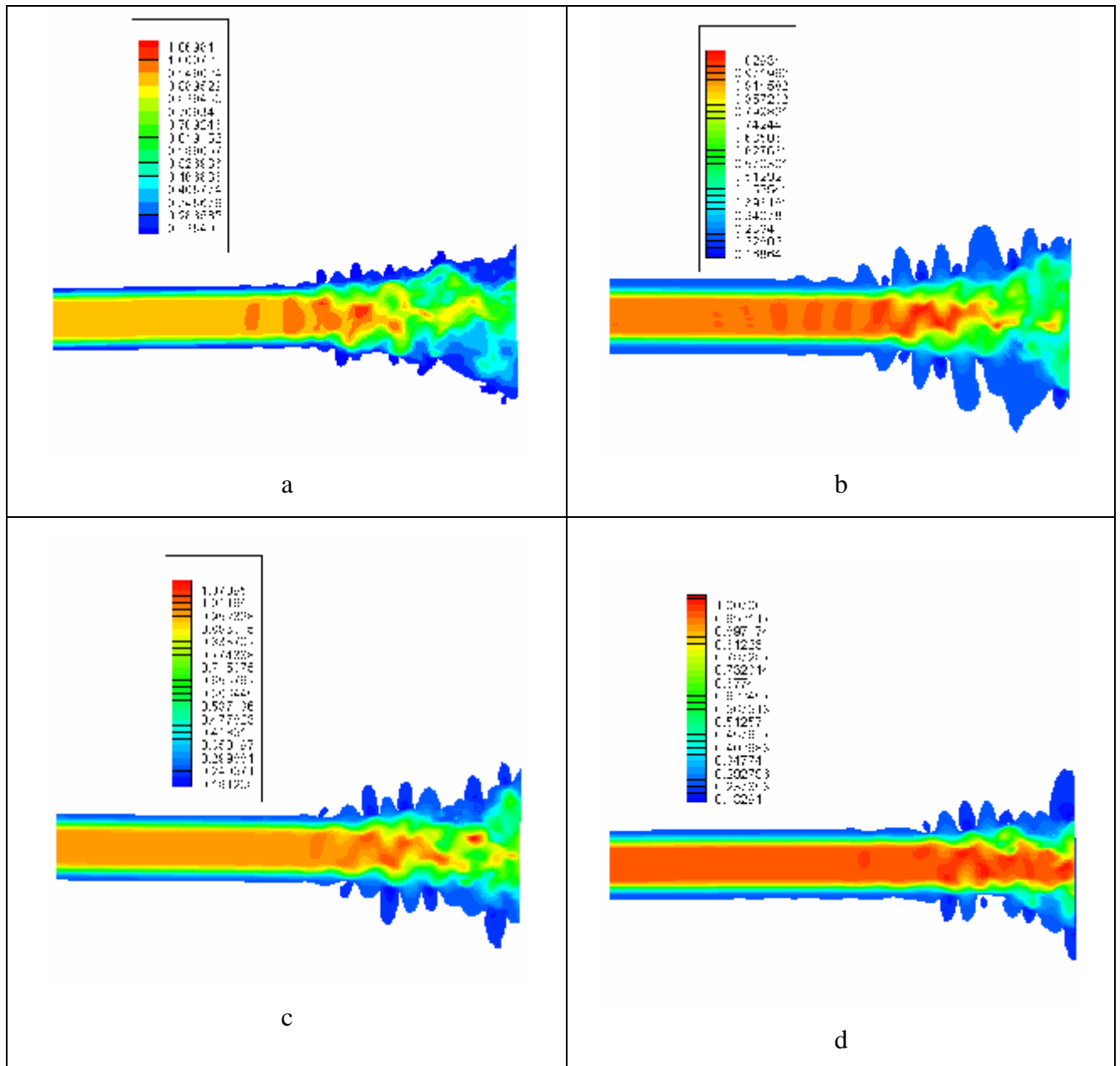


Figure V-8

Champs de vitesses sur un plan, pour des nombre de Mach a) $M=1$, b) $M=1.4$, c) $M=1.6$, d) $M=2$

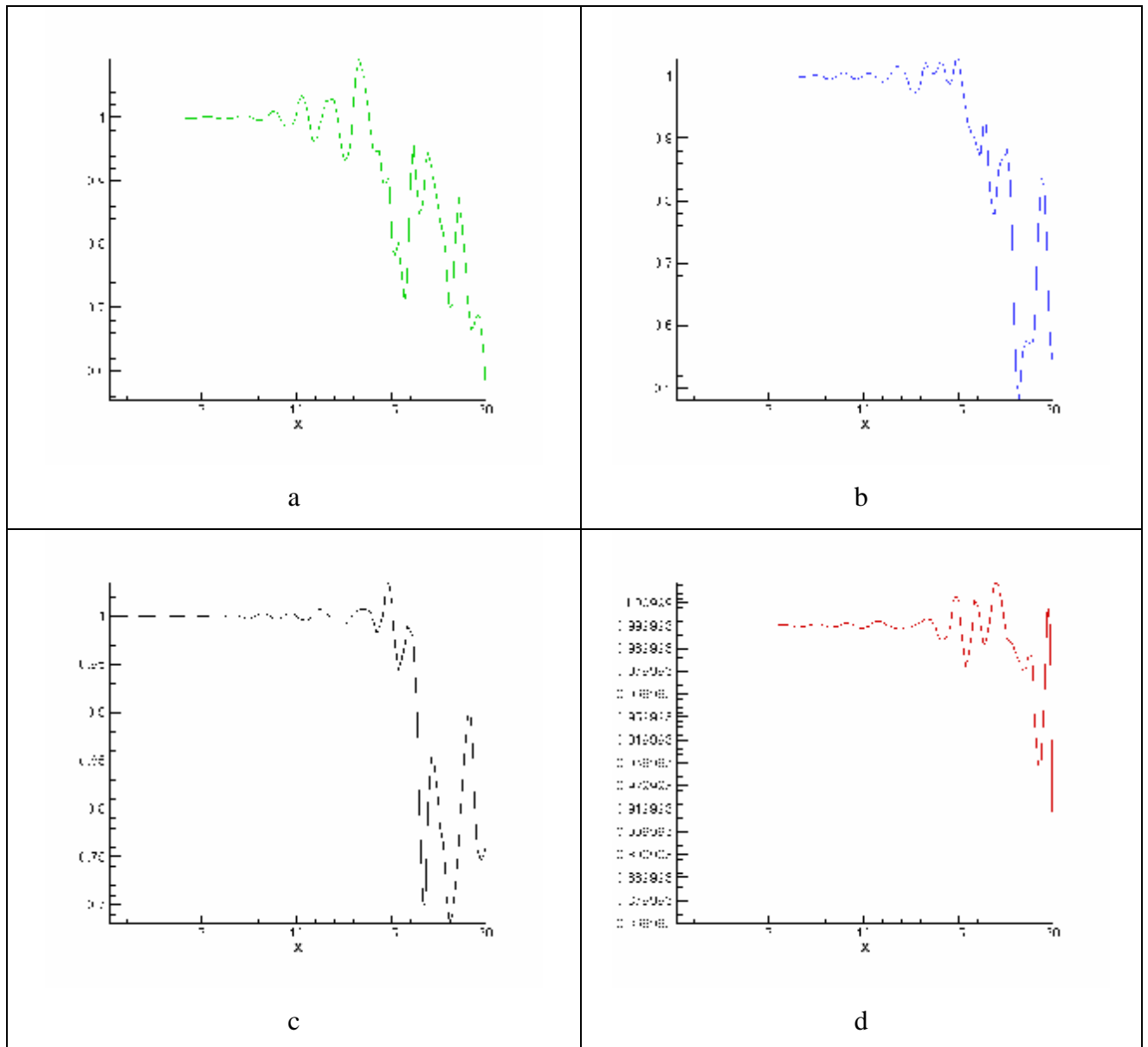


Figure V-9

Profils de variation de vitesses, pour des nombre de Mach a) $M=1$, b) $M=1.4$, c) $M=1.6$, d) $M=2$

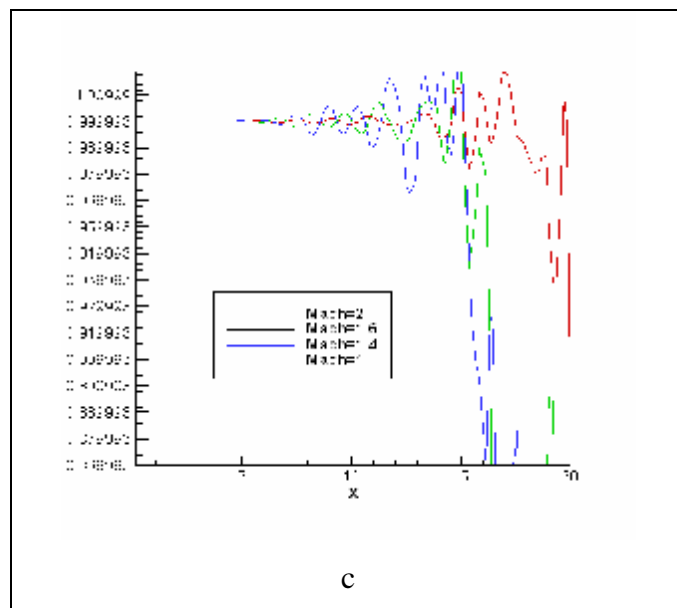
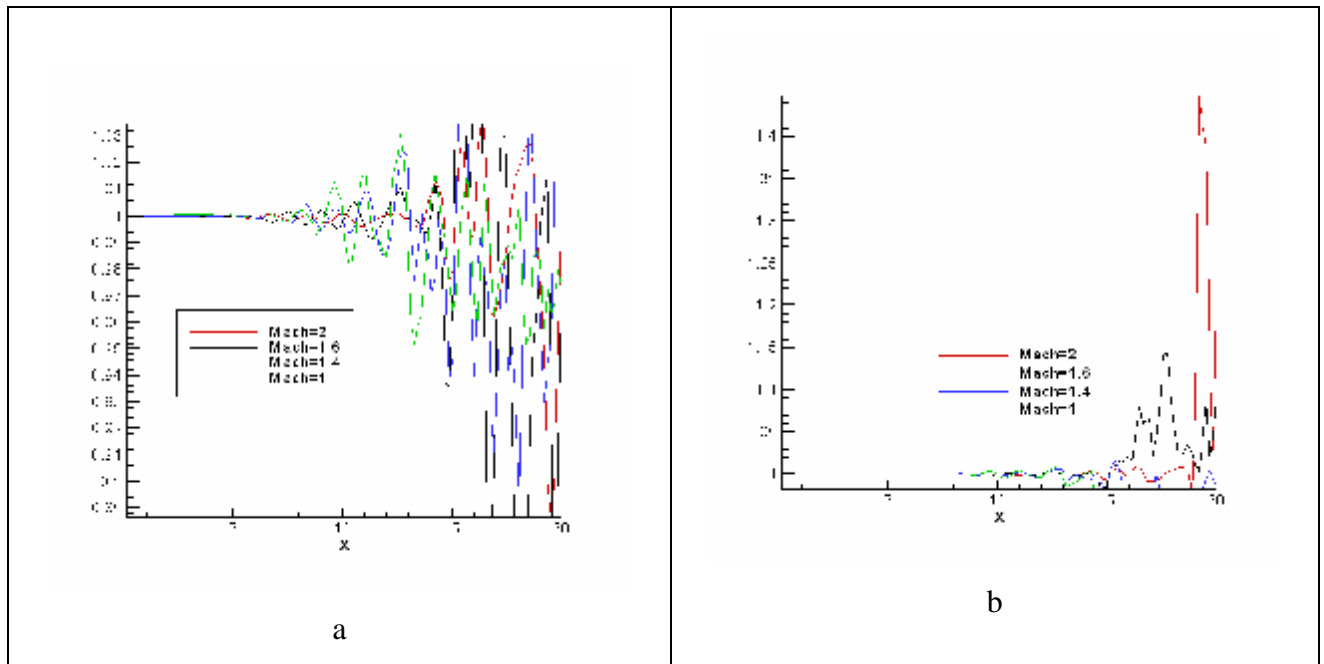


Figure V-10

Profils comparatifs des variables a) pression, b) température, c) vitesse pour des nombre de Mach a) M=1, b) M=1.4, c) M=1.6, d) M=2

V.3 Influence du nombre de REYNOLDS

Pour analyser l'influence du nombre de REYNOLDS sur les variables d'écoulement; vitesse, pression et température, nous avons fait des testes pour trois valeurs de REYNOLDS. $Re = 2.10^3, 10^4, 10^5$.

Le rapport de pression: $p_1/p_2 = 1$ et un nombre de Mach $M_0 = 1.2$ en gardant les mêmes valeurs d'entrée, indiquées au tableau ci-dessus,

Les figures (IV-4), (IV-5), (IV-6) représentent les différents champs de pression, température et vitesse et les profiles associes sur un plan $y = \frac{5.D_0}{2}$ sur l'axe du jet, cela pour des nombre de Reynolds du jet $Re = 10^3, 10^4, 10^5$

V.3.1 Champs de vitesse, température, et pression

La ressemblance des résultats obtenus pour les trois valeurs du nombre de Reynolds représentés sur les figures (V-11), (V-14) et (V-17), explique que l'influence du nombre de Reynolds sur les variables d'écoulement; vitesse, pression et température est presque invisible. Seulement, on remarque quelque différence dans la partie de la turbulence par la création des petites structures.

Le nombre de Reynolds permet d'étudier la contribution de la viscosité sur les champs hydrodynamiques et thermiques de l'écoulement. Ce nombre n'affecte pas les grandeurs d'échelles de la boîte de calcul. L'augmentation de ce nombre accélère le développement des petites structures de turbulence.

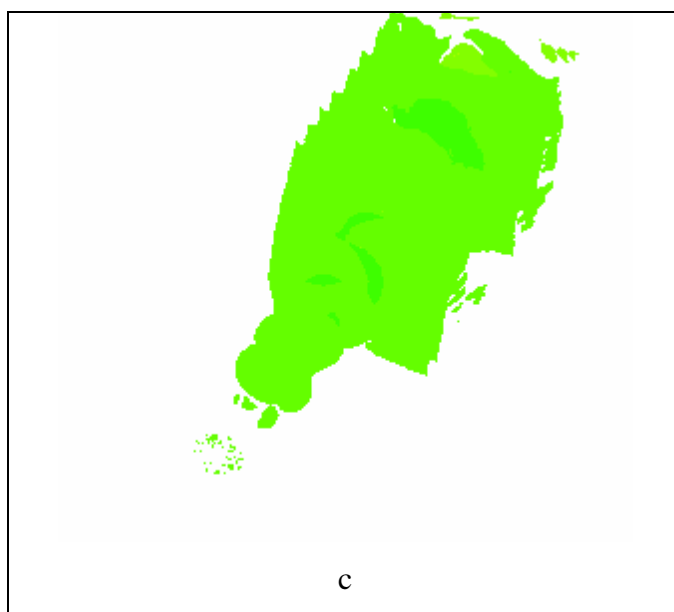
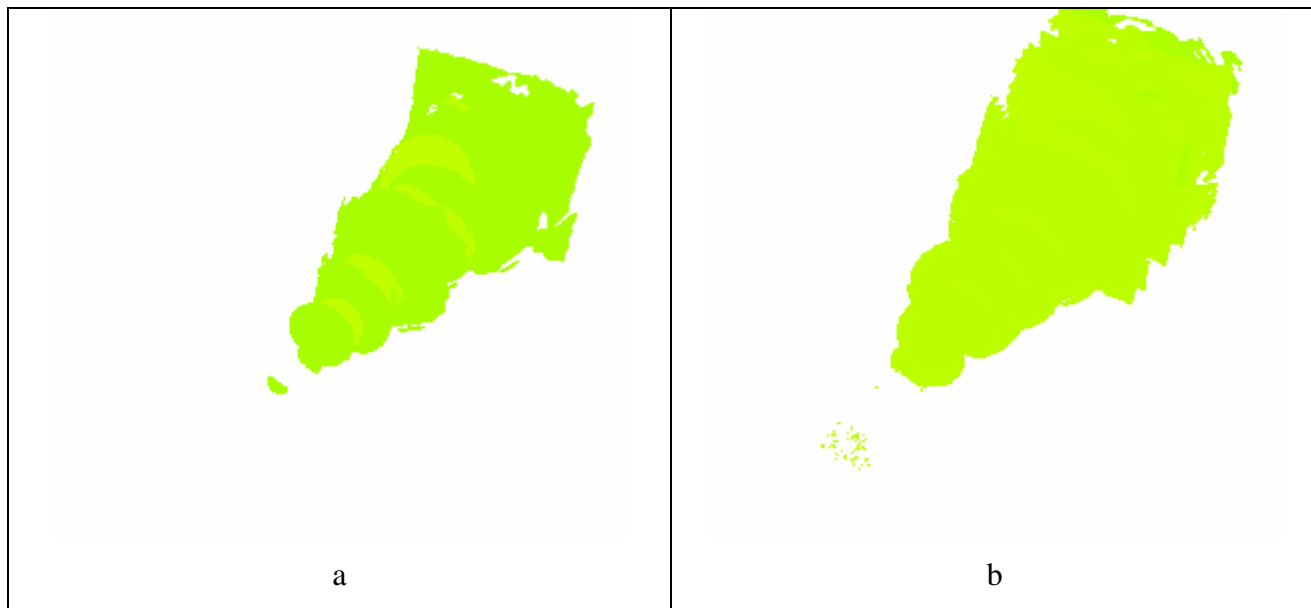


Figure V-11

Champs de pressions, pour des nombres de Reynolds a) $Re = 2 \cdot 10^3$, b) $Re = 10^4$, c) $Re = 10^5$

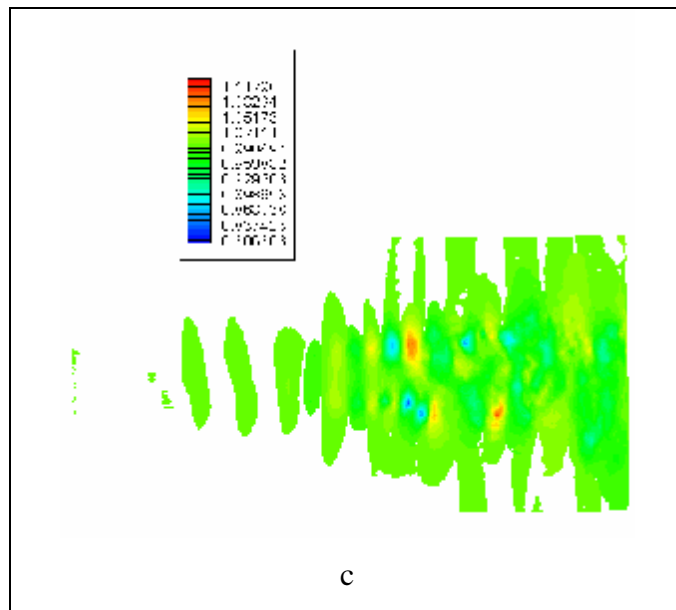
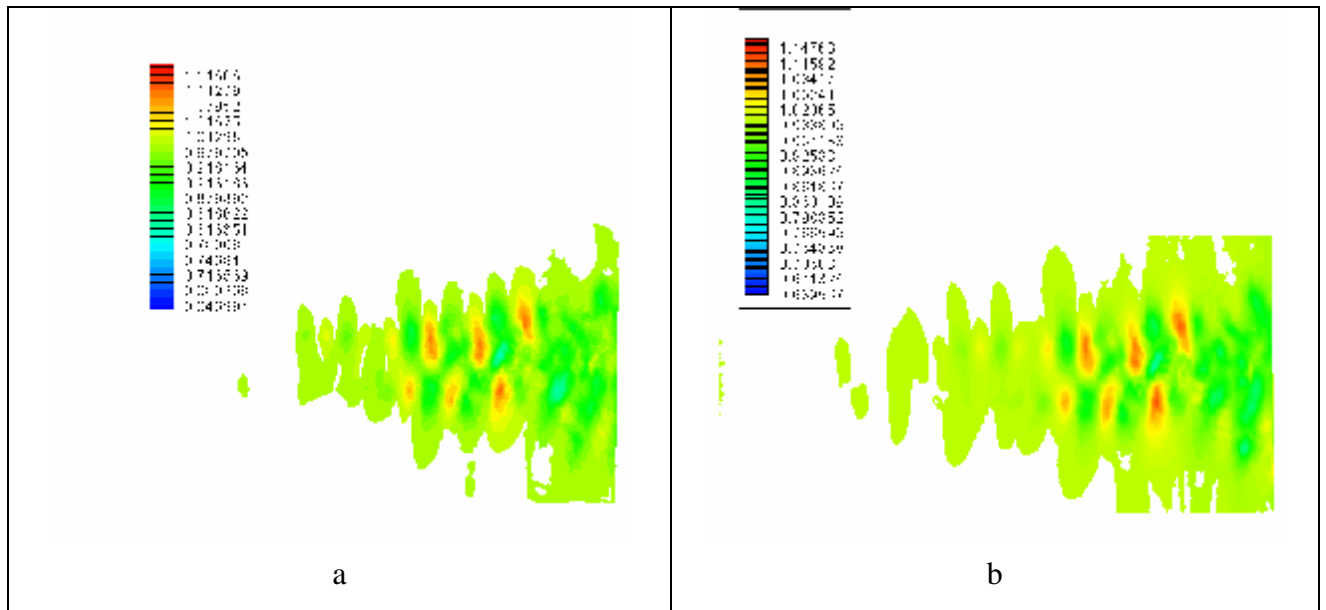


Figure V-12

Champs de pressions sur un plan, pour des nombres de Reynolds a) $Re = 2.10^3$, b) $Re = 10^4$
 c) $Re = 10^5$

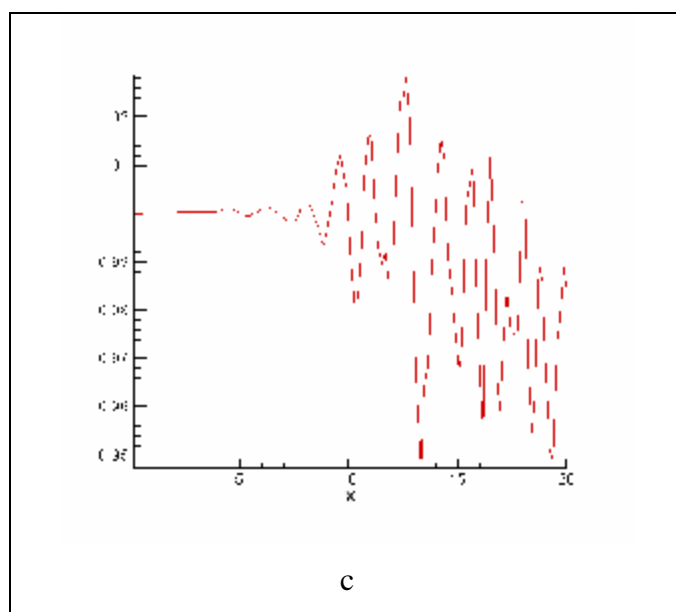
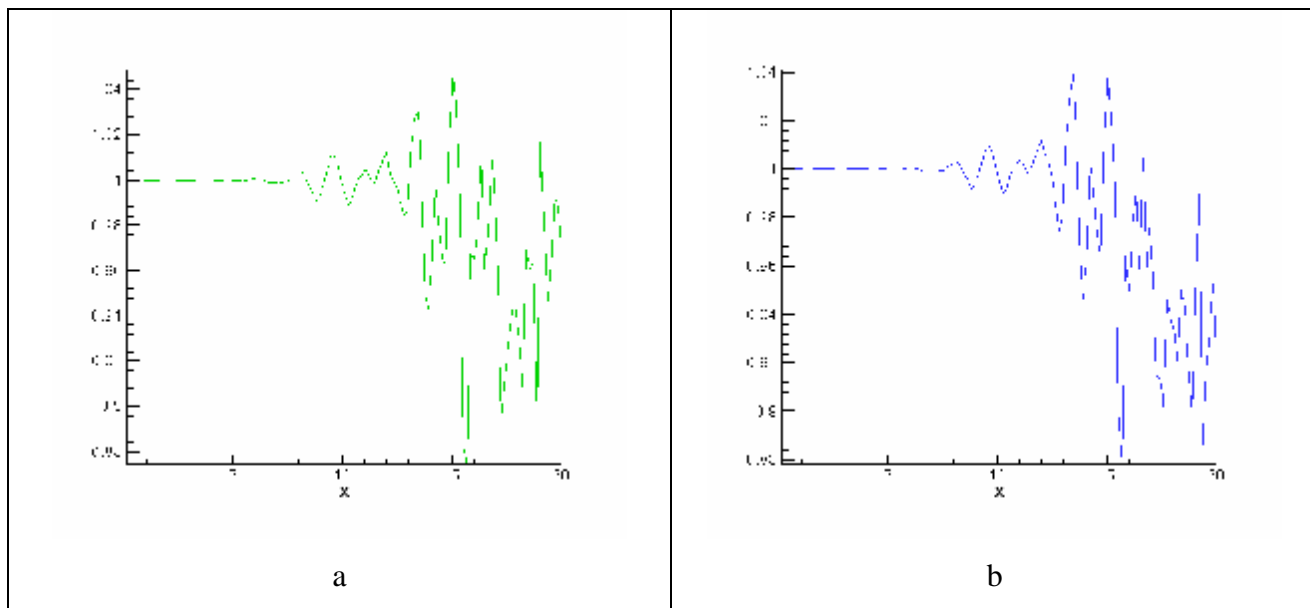


Figure V-13

Profils de variation de pressions, pour des nombres de Reynolds a) $Re = 2 \cdot 10^3$, b) $Re = 10^4$
 c) $Re = 10^5$

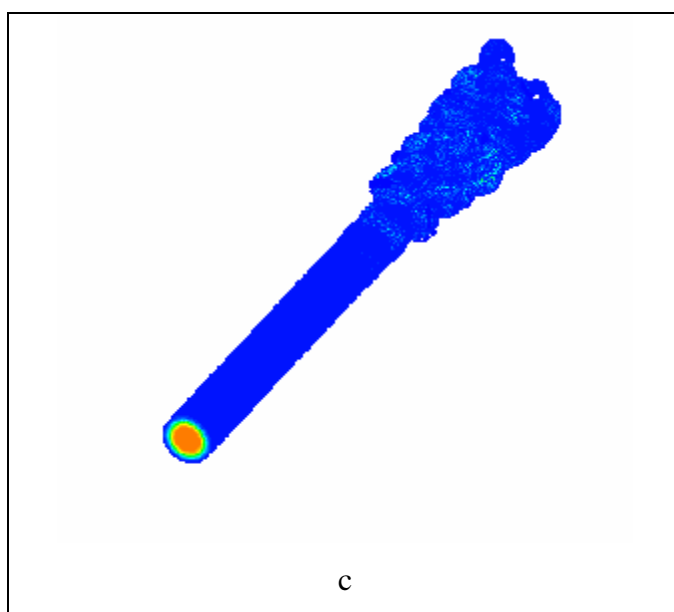
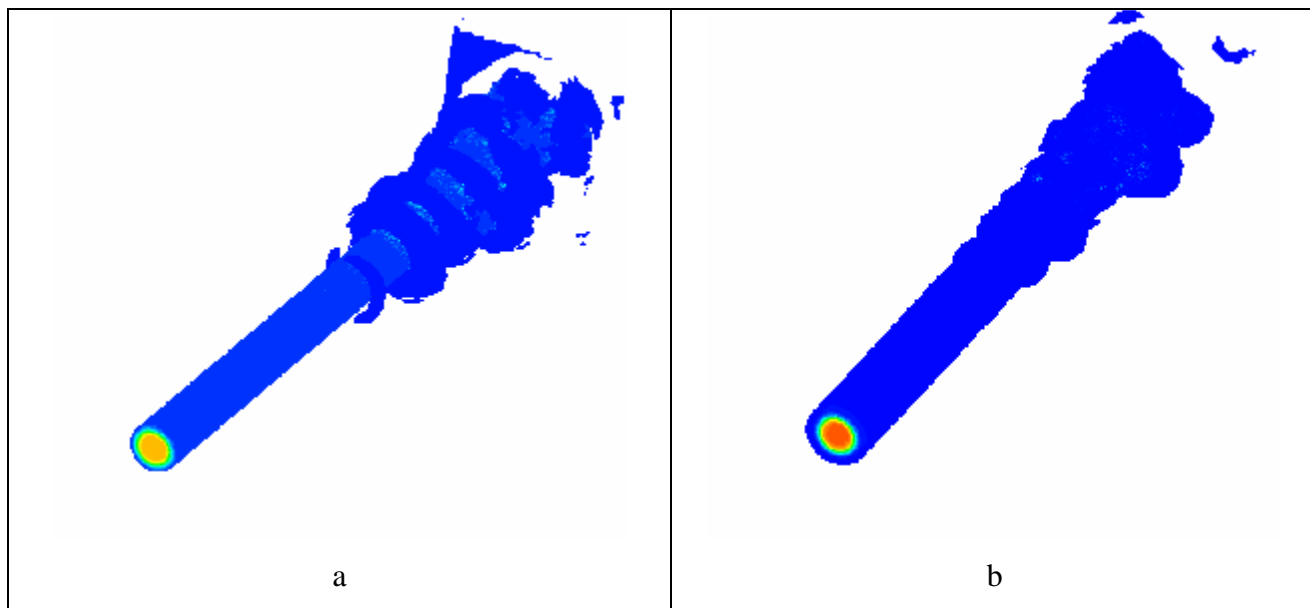


Figure V-14

Champs de températures, pour des nombres de Reynolds a) $Re = 2 \cdot 10^3$, b) $Re = 10^4$, c) $Re = 10^5$

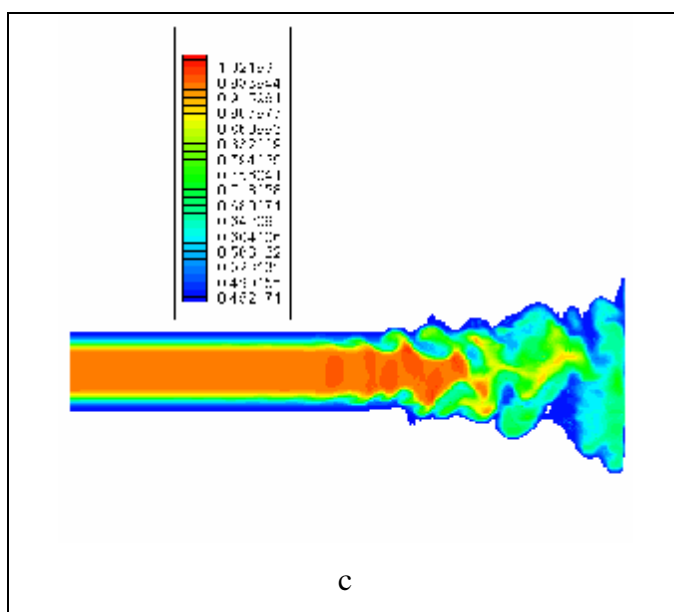
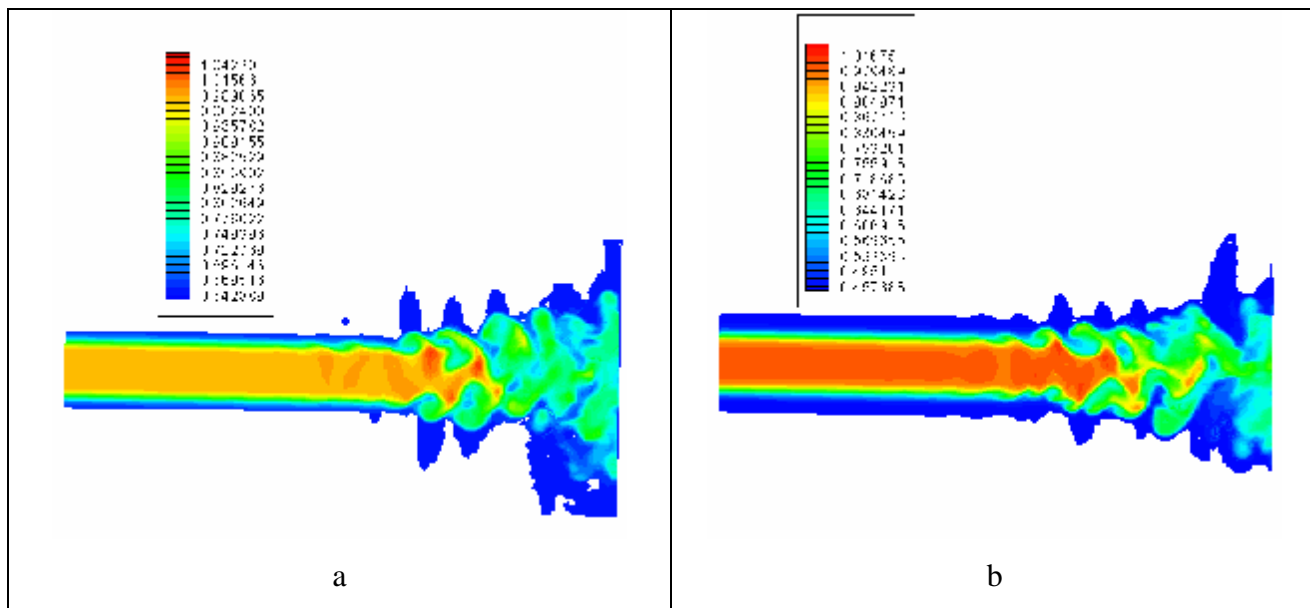


Figure V-15

Champs de températures sur un plan, pour des nombres de Reynolds a) $Re = 2.10^3$, b) $Re = 10^4$
 c) $Re = 10^5$

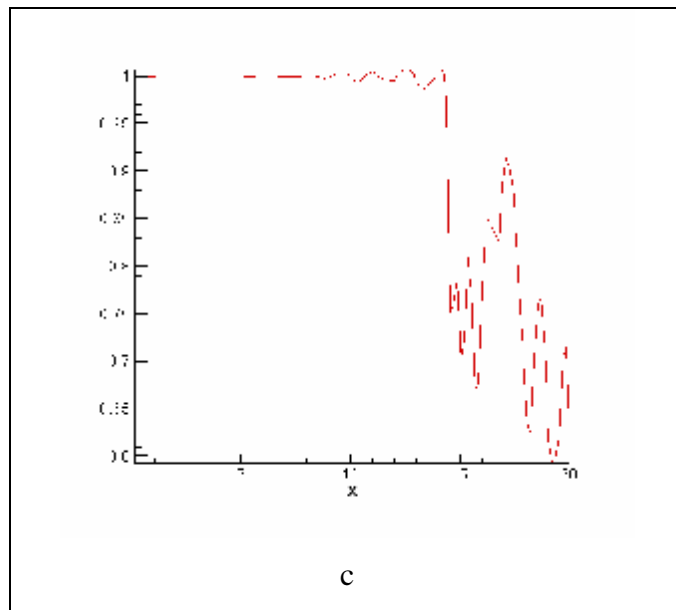
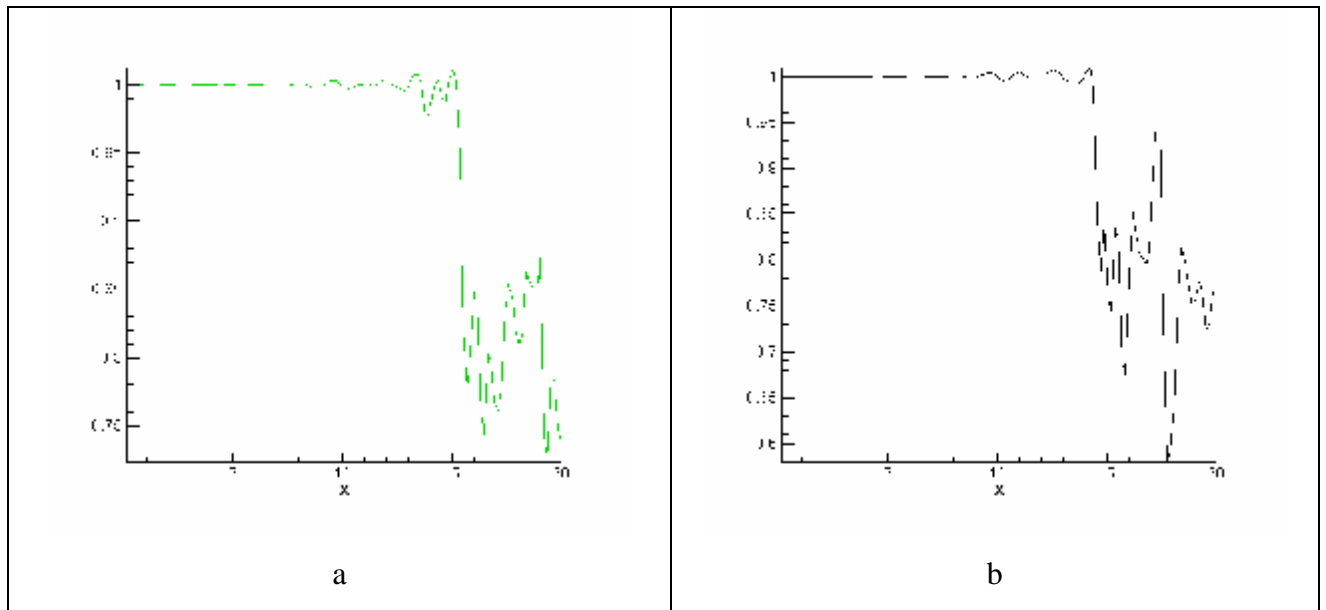


Figure V-16

Profils de variation de températures, pour des nombres de Reynolds a) $Re = 2 \cdot 10^3$, b) $Re = 10^4$
 c) $Re = 10^5$

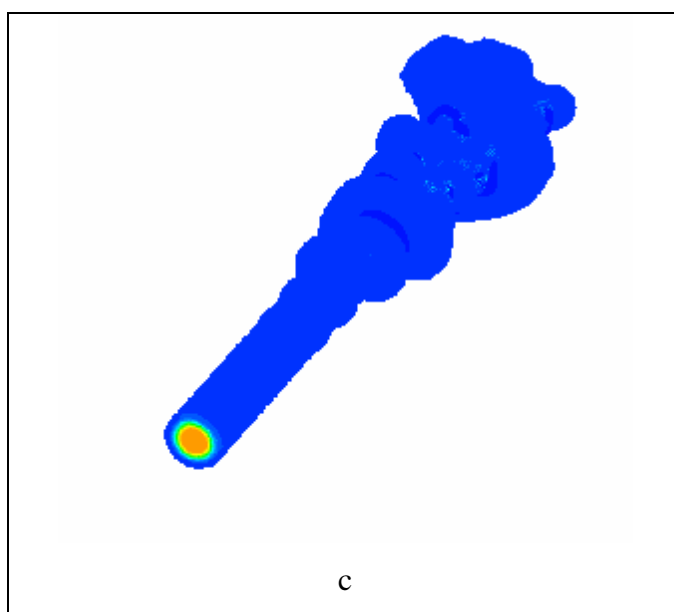
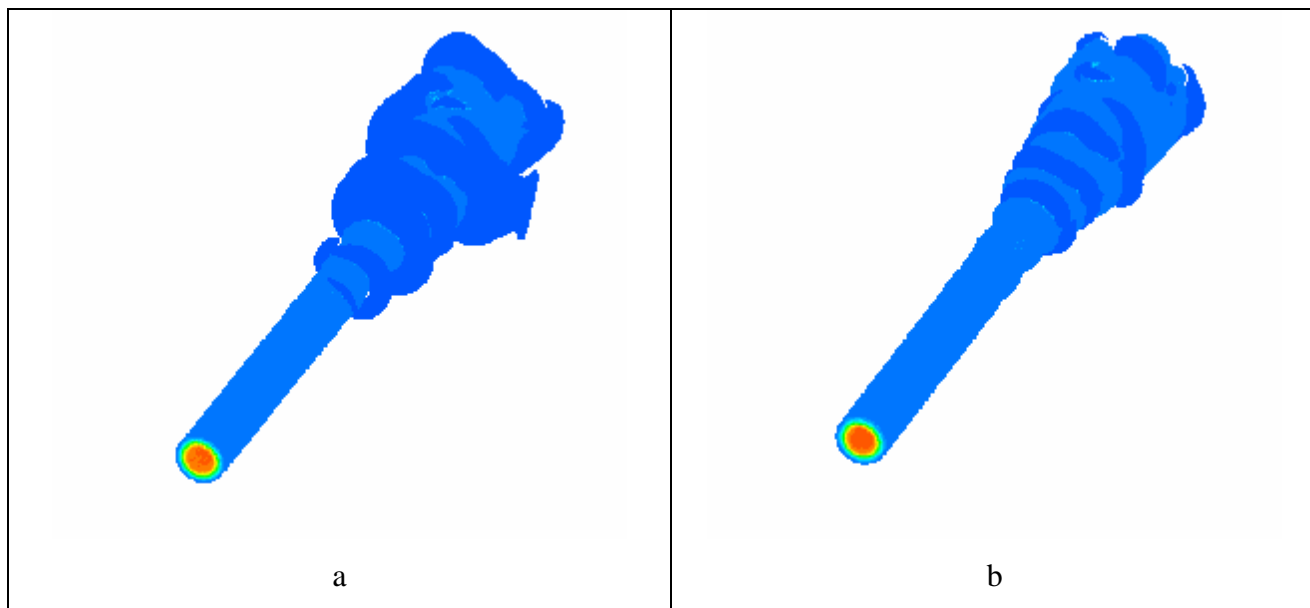


Figure V-17

Champs de vitesses, pour des nombres de Reynolds a) $Re = 2 \cdot 10^3$, b) $Re = 10^4$, c) $Re = 10^5$

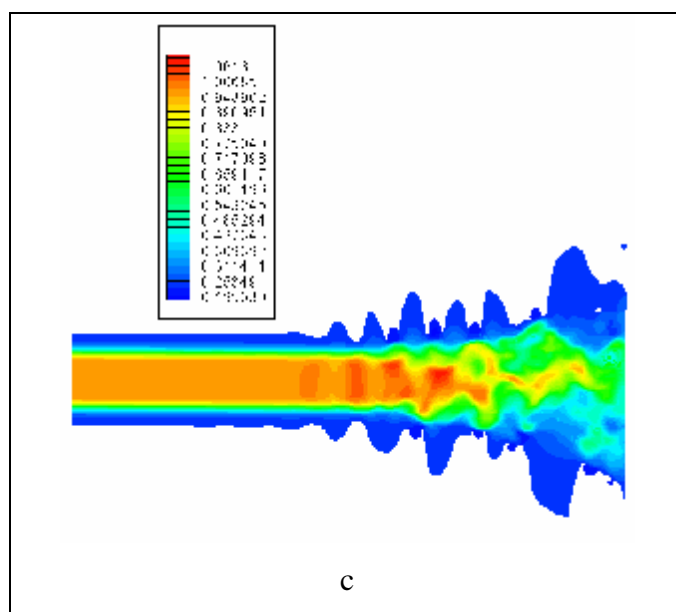
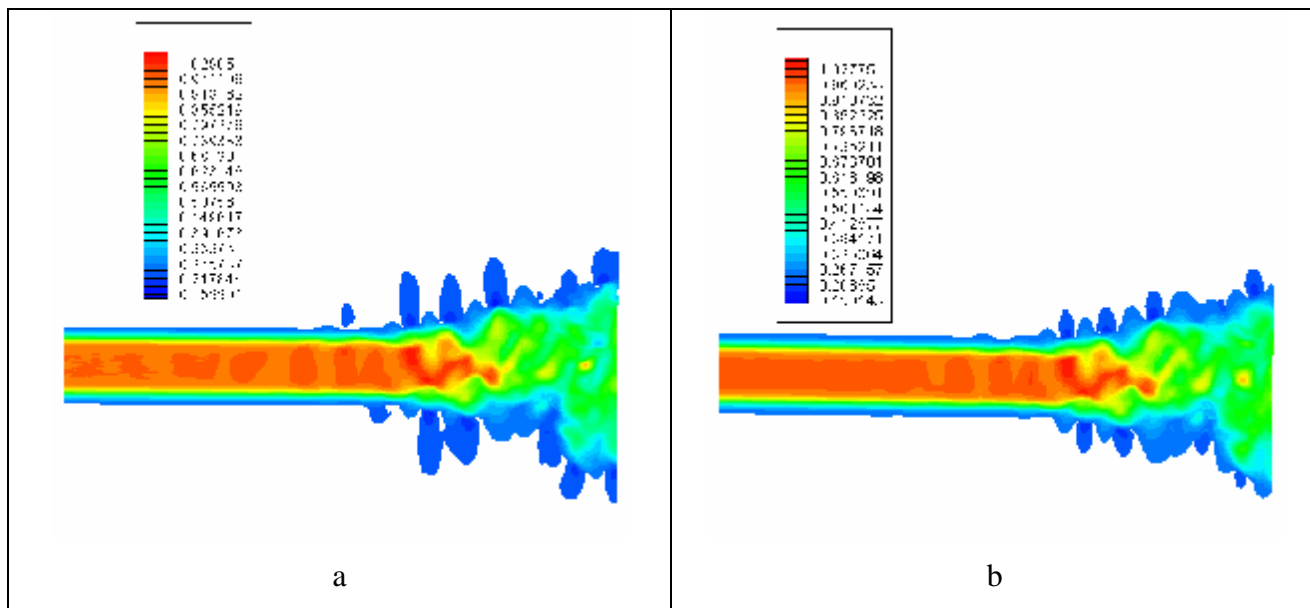


Figure V-18

Champs de vitesses sur un plan, pour des nombres de Reynolds a) $Re = 2.10^3$, b) $Re = 10^4$
 c) $Re = 10^5$

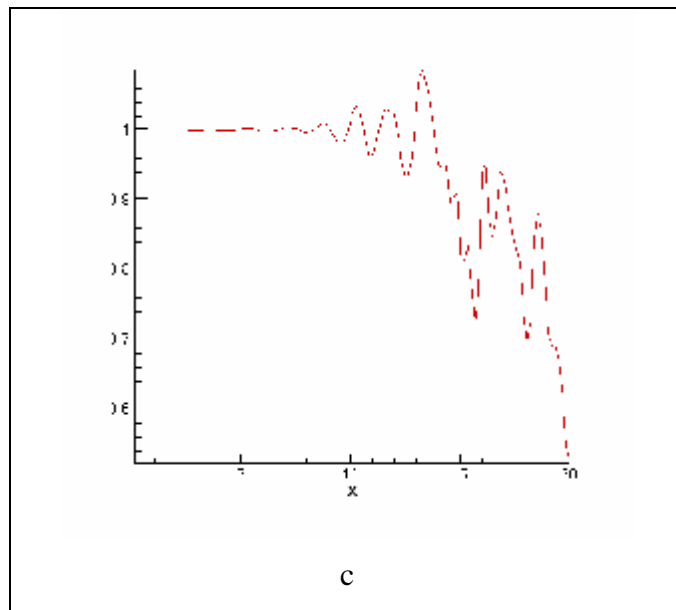
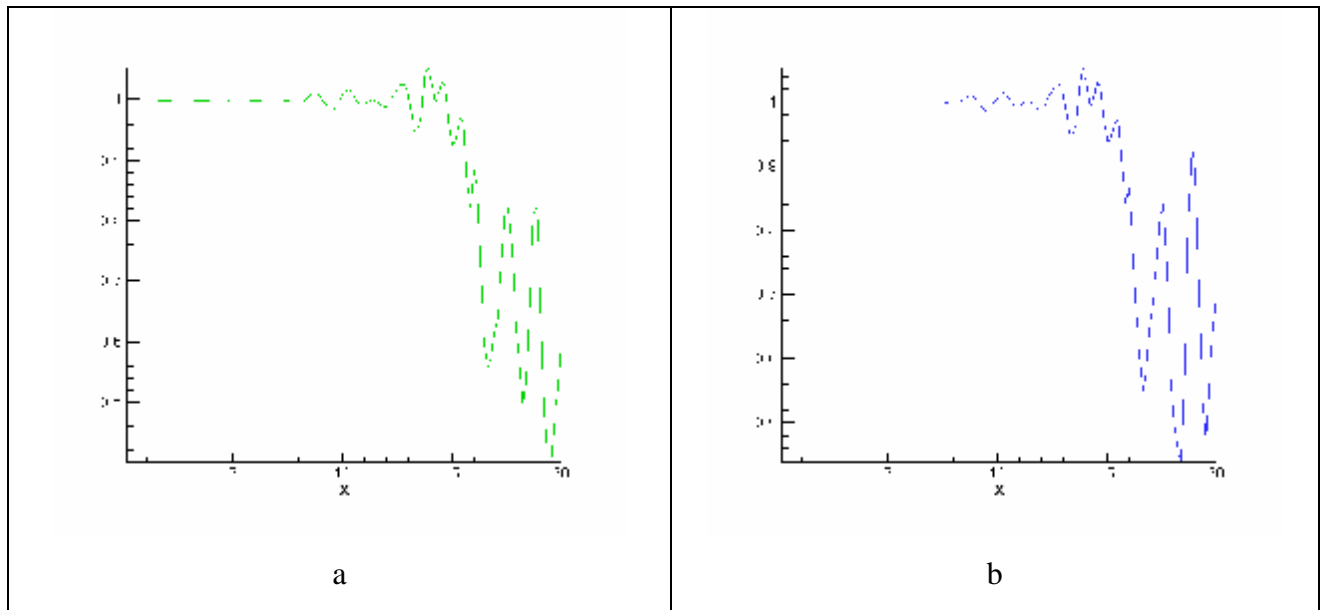


Figure V-19

Profils de variation de vitesses, pour des nombres de Reynolds a) $Re = 2 \cdot 10^3$, b) $Re = 10^4$ c) $Re = 10^5$

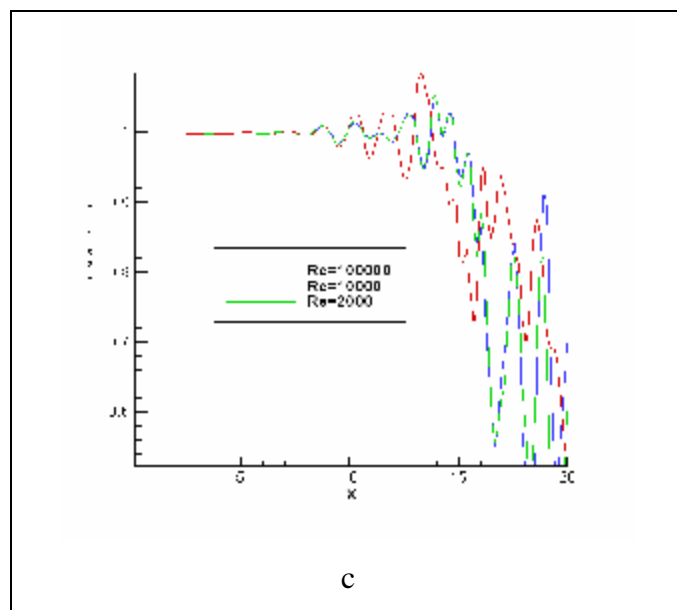
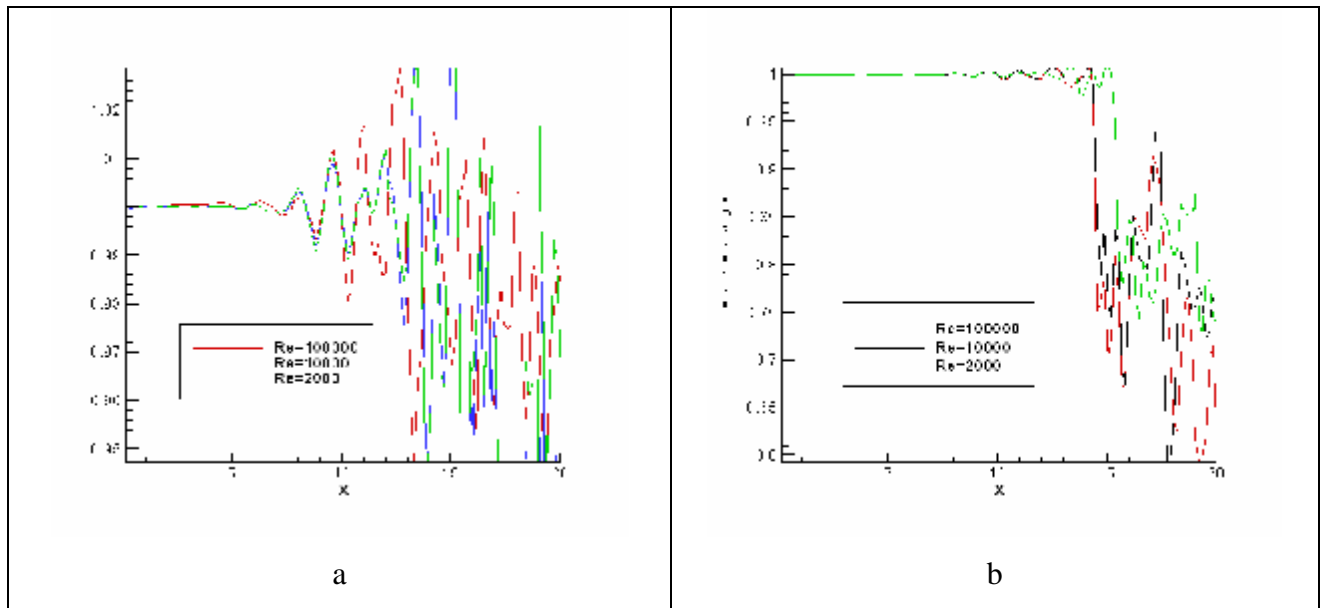


Figure V-20
 Profils comparatifs des variables: a) pression, b) température, c) vitesse
 Pour des nombres de Reynolds a) $Re = 2.10^3$, b) $Re = 10^4$, c) $Re = 10^5$

V.4 L'influence du rapport de pression

Pour analyser l'influence du rapport de pression du jet sur les variables d'écoulement, vitesse, pression et température, nous avons fait des tests avec des rapports de pression qui varie:

$$p_1/p_2 = 1.6, 1.8, 2, 3$$

Le nombre de Mach: $M_0=1.2$ et un nombre de Reynolds: $Re = 2000$ En gardant les mêmes données d'entrée, indiquées au tableau ci dessus.

Les figures (V-13), (V-14) et (V-15) représentent les différents champs de la pression, température et vitesse et leurs coupes et profils associées sur un plan $y = \frac{5.D_0}{2}$ sur l'axe sur jet.

V.4.1 Champs de pression

Sur la figure (V-20), on remarque des zones de hautes et basses pressions qui se développent d'une façon intermittente qui caractérise la nature de la turbulence. La taille de ces zones augmente, au fur et à mesure que le rapport de pression augmente. La déflexion du jet se produit pour un rapport de pression égale à 3. La nature intermittente est représentée sur la figure (V-21), par les fluctuations du profil de pression. On remarque aussi que l'iso valeur extérieure diminue avec l'augmentation du rapport de pression..

D'après les résultats obtenus, on a conclu que l'augmentation de ce rapport favorise le développement rapide de la turbulence par l'augmentation de l'instabilité initiale ce qui se traduit par la disparition totale de la zone laminaire de l'écoulement.

V.4.2 Champs de température

On remarque un développement des zones hautes et basses températures, ces zones augmentent et diminuent respectivement quand le rapport de pression augmente. L'iso valeur du champ extérieur augmente avec l'augmentation du rapport de pression. On remarque aussi que l'échange de chaleur vers la région extérieure est important quand le rapport de pression est grand, Voir figure (V-23)).

L'effet de l'instabilité initiale de cisaillement sur les champs de température est traduit par le développement rapide de la turbulence et la disparition totale de la zone laminaire de l'écoulement.

V.4.3 Champs de vitesse

Du fait de l'augmentation initiale de l'instabilité dans le développement rapide de la couche de cisaillement et l'augmentation de l'épaisseur de la quantité de mouvement au fur est à mesure que le rapport de pression augmente, le développement de la turbulence est plus rapide comme indiqués a la figure (V-26).

L'effet de la contribution de l'instabilité initiale de cisaillement sur les champs de vitesse favorise le développement rapide de la turbulence par l'augmentation du rapport de pression, ce qui se traduit par la disparition totale de la zone laminaire de l'écoulement.

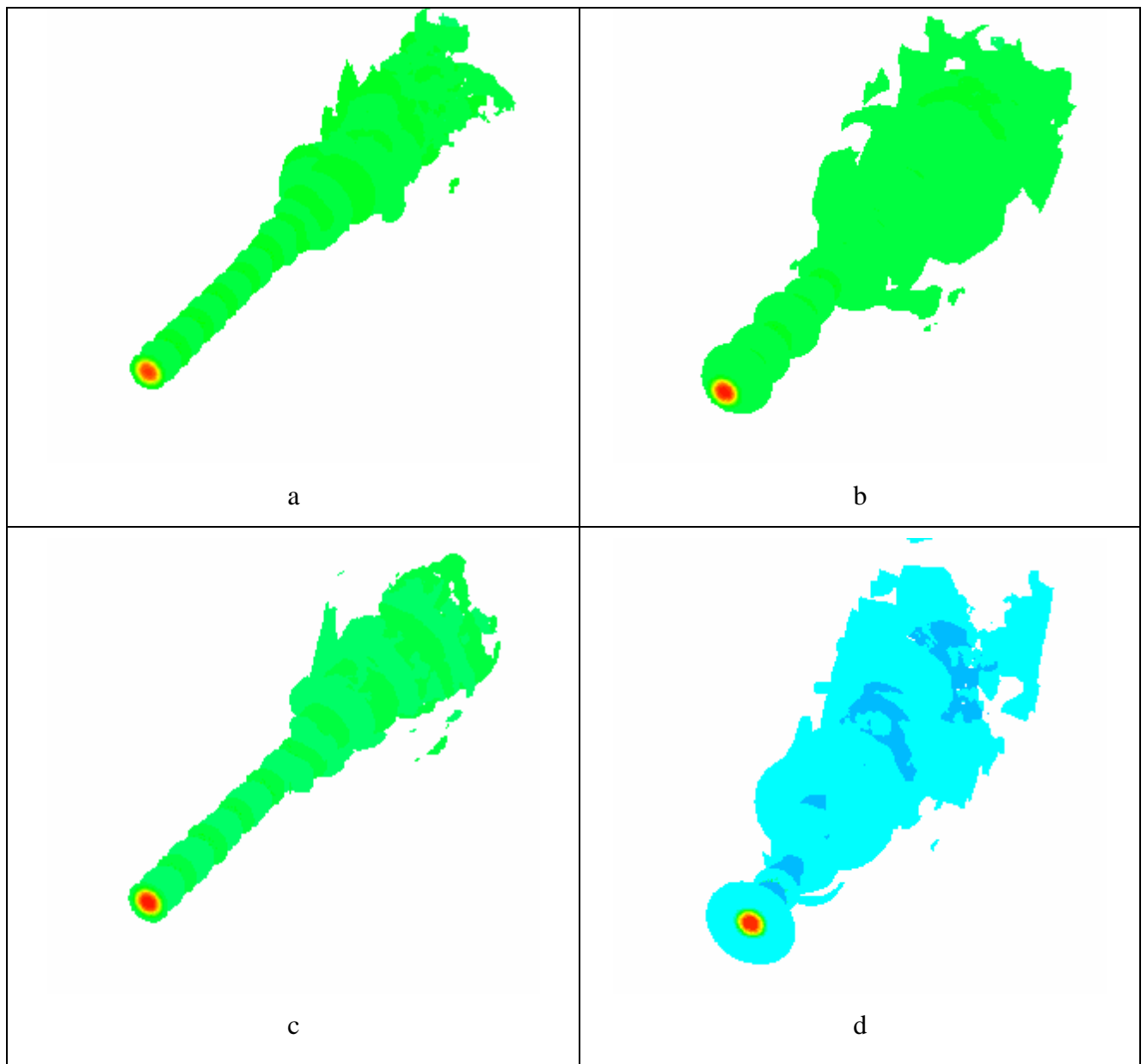


Figure V-21

Champs de pressions, pour des rapport de pression a) $\frac{P_1}{P_2}=1.6$, b) $\frac{P_1}{P_2}=1.8$, c) $\frac{P_1}{P_2}=2$, d) $\frac{P_1}{P_2}=3$

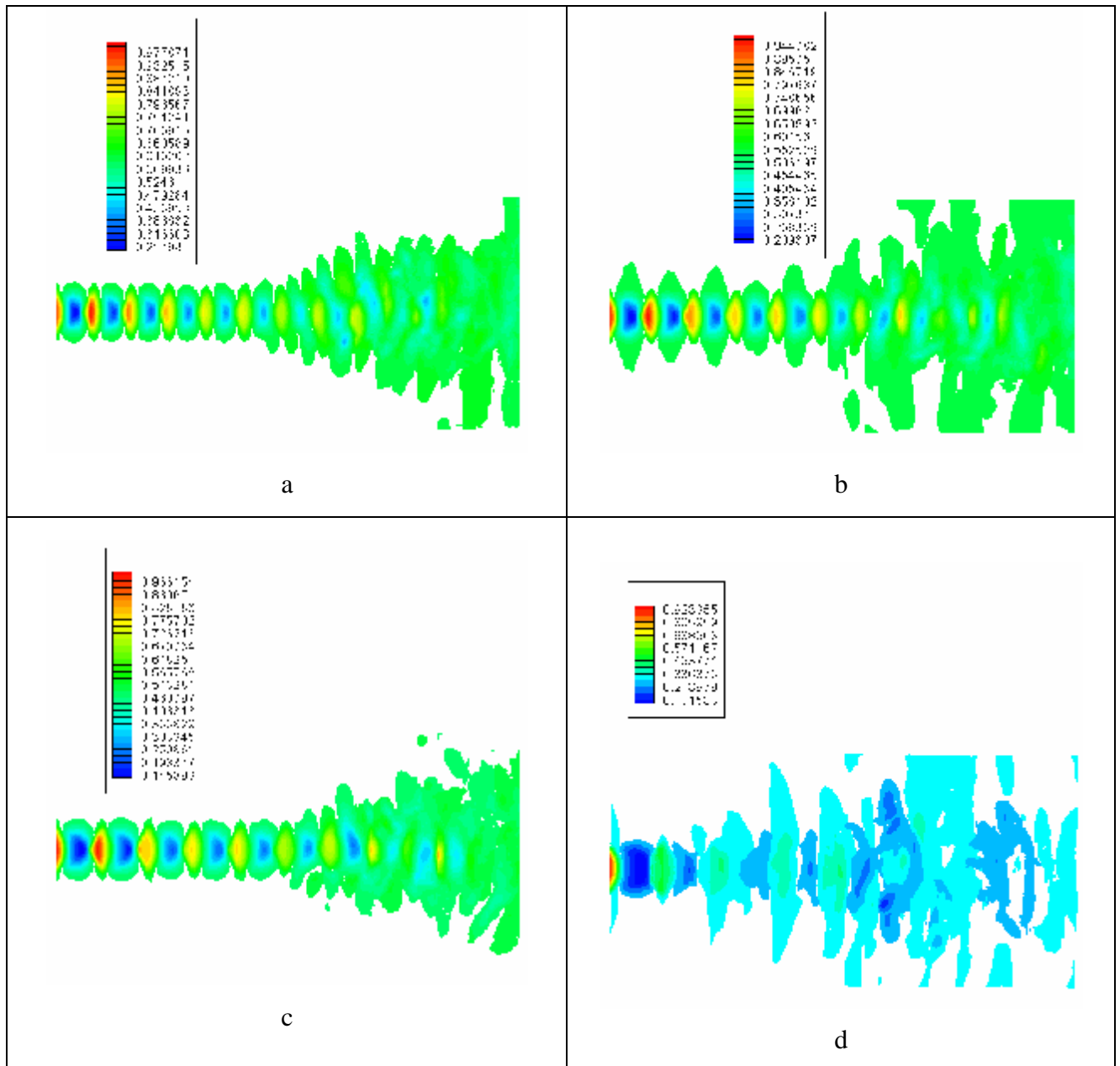


Figure V-22

Champs de pressions sur un plan, pour des rapport de pression a) $\frac{P_1}{P_2}=1.6$, b) $\frac{P_1}{P_2}=1.8$

c) $\frac{P_1}{P_2}=2$, d) $\frac{P_1}{P_2}=3$

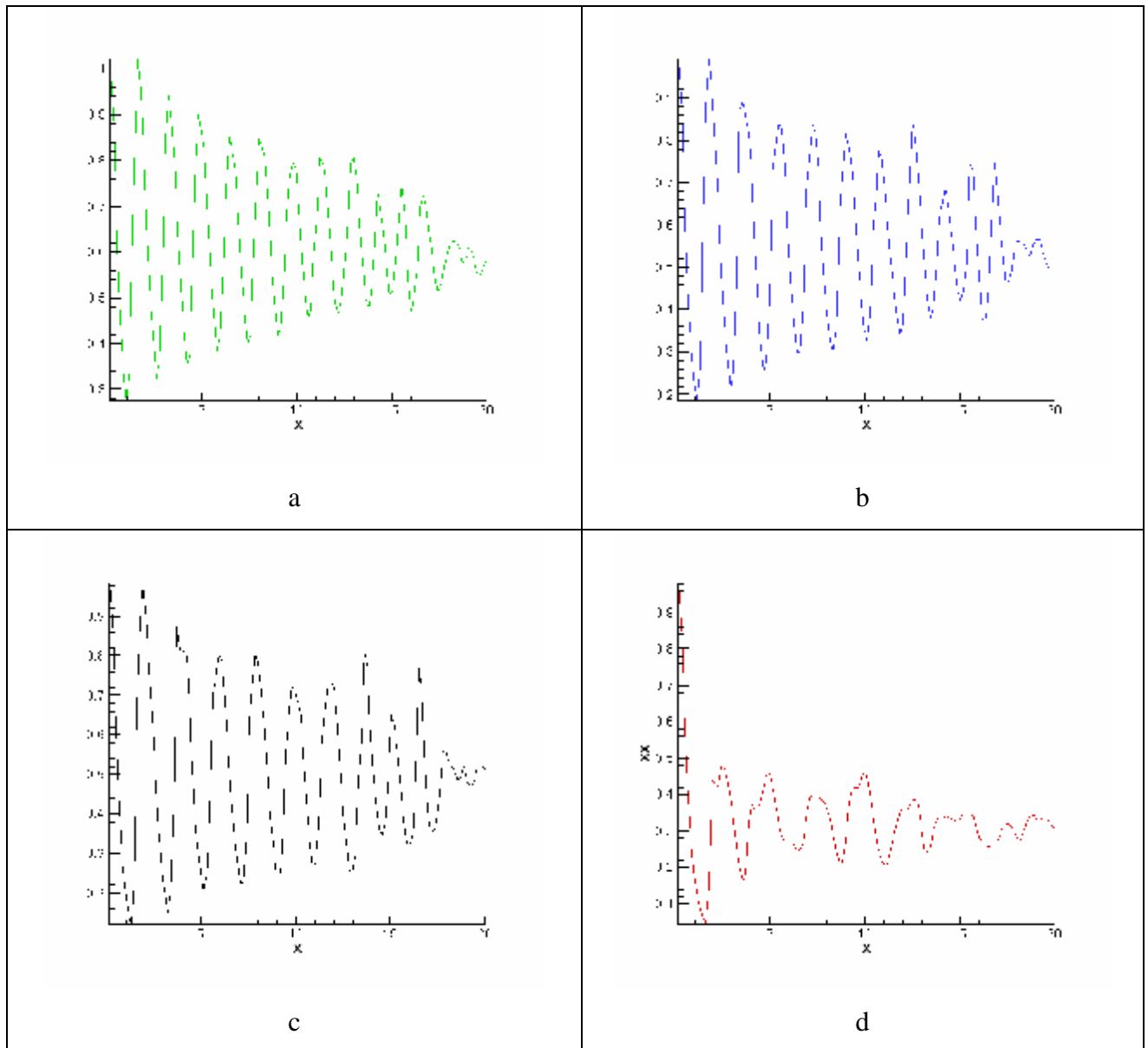


Figure V-23

Profils de variation de pressions, pour des rapport de pression a) $\frac{p_1}{p_2}=1.6$, b) $\frac{p_1}{p_2}=1.8$, c) $\frac{p_1}{p_2}=2$

d) $\frac{p_1}{p_2}=3$

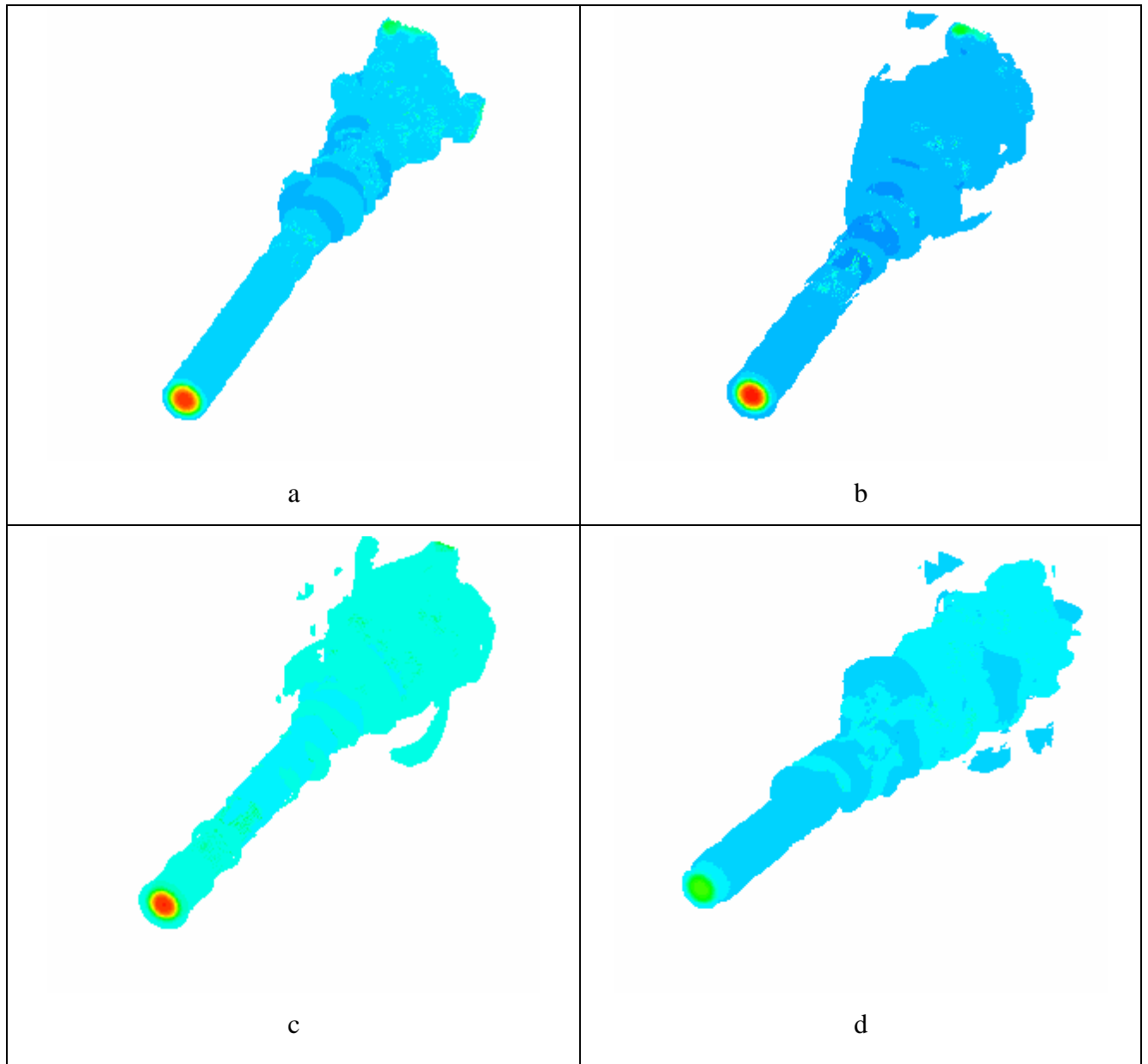


Figure V-24

Champs de températures, pour des rapport de pression a) $\frac{P_1}{P_2}=1.6$, b) $\frac{P_1}{P_2}=1.8$, c) $\frac{P_1}{P_2}=2$, d) $\frac{P_1}{P_2}=3$

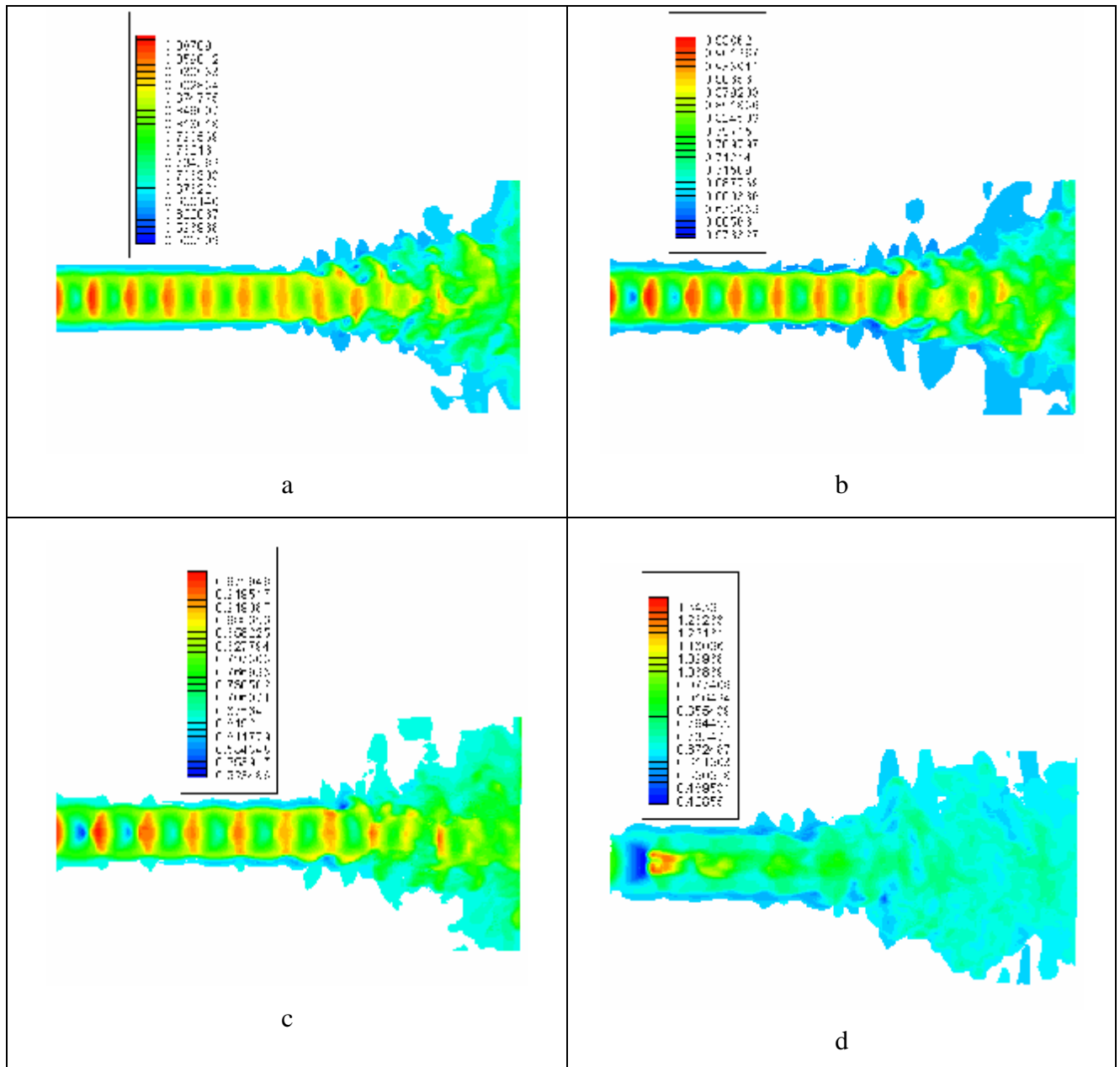


Figure V-25

Champs de températures sur un plan, pour des rapport de pression a) $\frac{P_1}{P_2}=1.6$, b) $\frac{P_1}{P_2}=1.8$

c) $\frac{P_1}{P_2}=2$, d) $\frac{P_1}{P_2}=3$

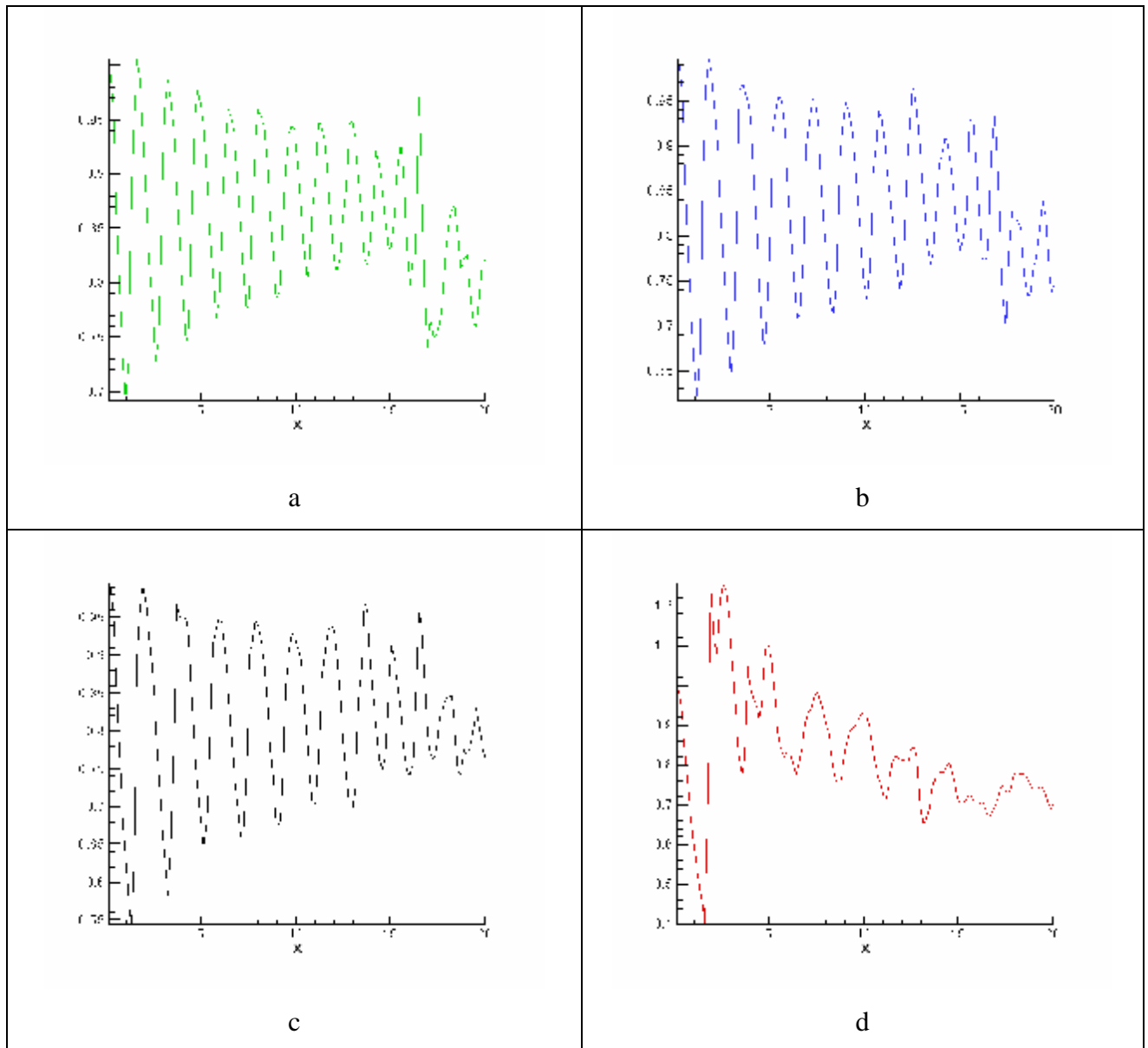


Figure V-26

Profils de variation de températures, pour des rapport de pression a) $\frac{p_1}{p_2} = 1.6$, b) $\frac{p_1}{p_2} = 1.8$, c) $\frac{p_1}{p_2} = 2$

d) $\frac{p_1}{p_2} = 3$

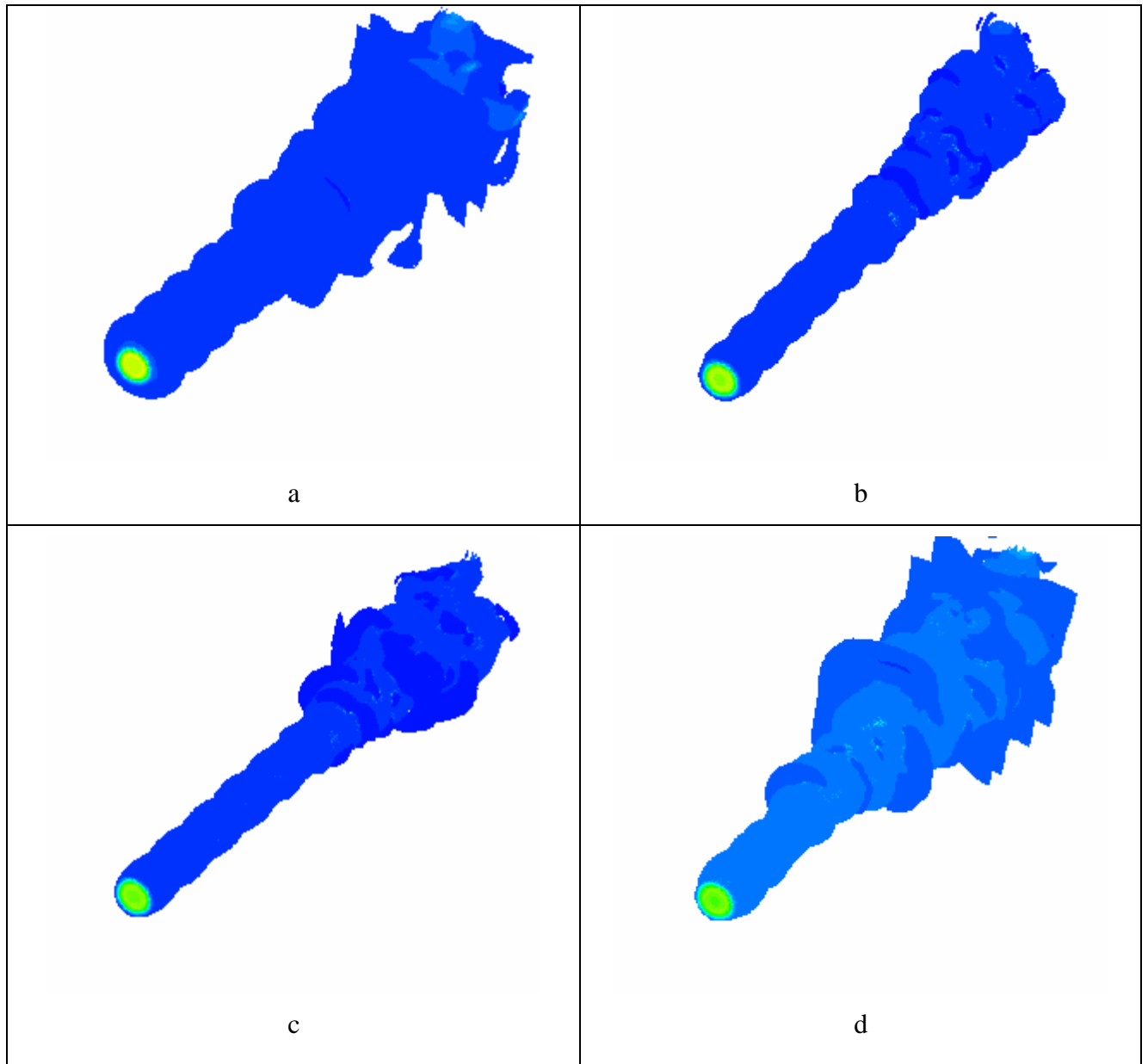


Figure V-27

Champs de vitesses, pour des rapport de pression a) $\frac{P_1}{P_2}=1.6$, b) $\frac{P_1}{P_2}=1.8$, c) $\frac{P_1}{P_2}=2$, d) $\frac{P_1}{P_2}=3$

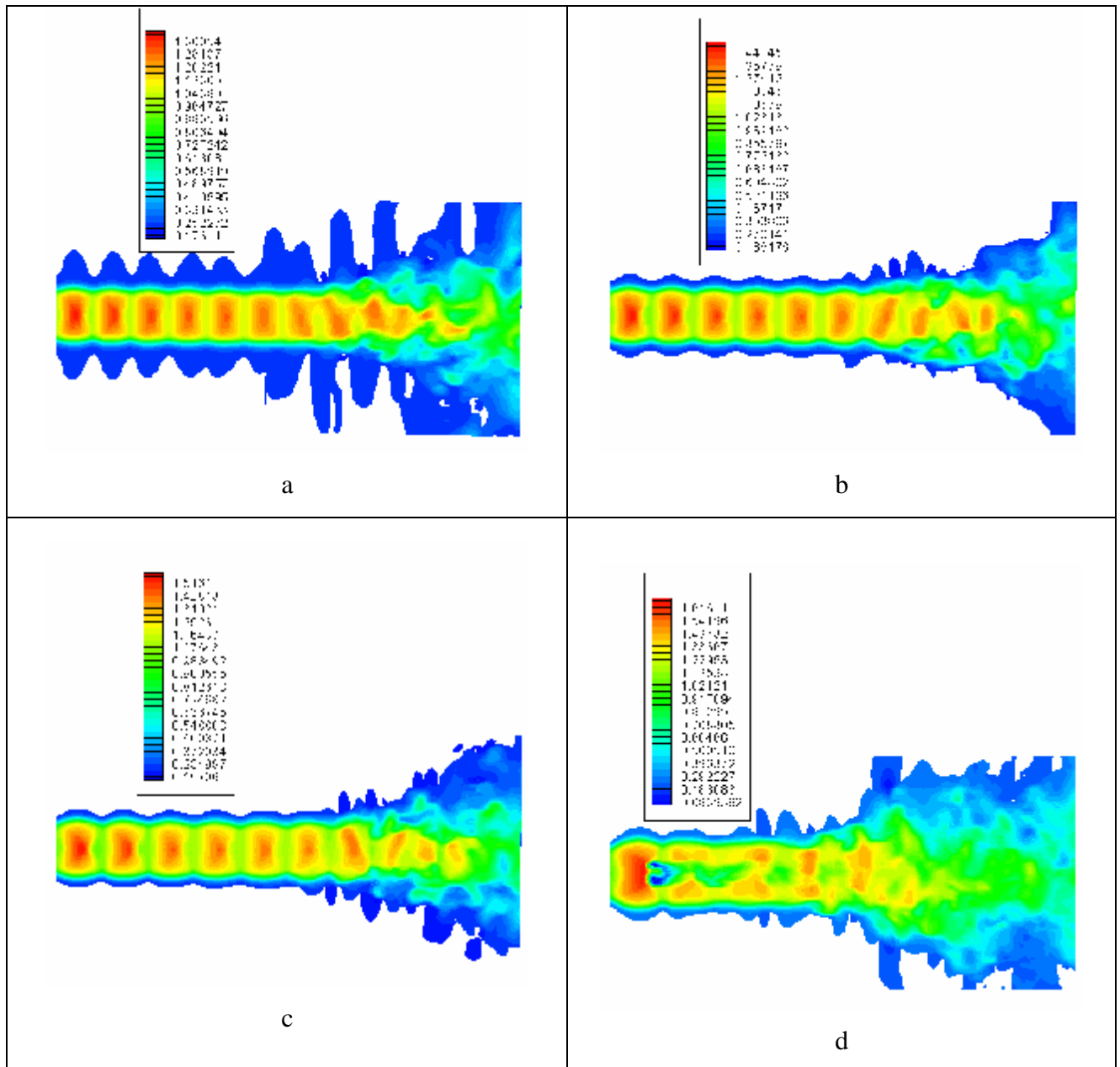


Figure V-28

Champs de vitesses sur un plan, pour des rapport de presso a) $\frac{P_1}{P_2}=1.6$, b) $\frac{P_1}{P_2}=1.8$

c) $\frac{P_1}{P_2}=2$, d) $\frac{P_1}{P_2}=3$

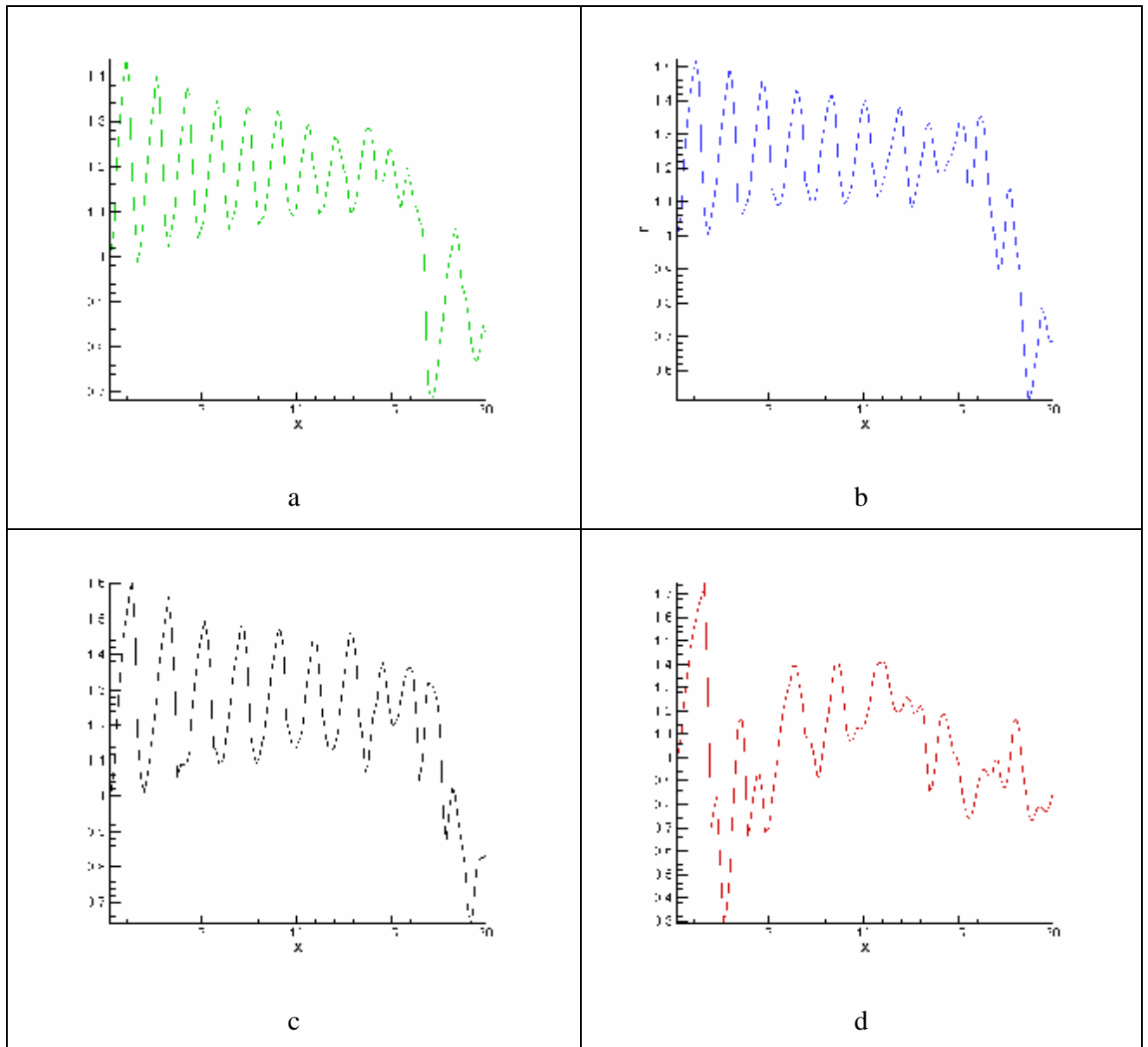


Figure V-29

Profils de variation de vitesses, pour des rapport de pression a) $\frac{p_1}{p_2} = 1.6$, b) $\frac{p_1}{p_2} = 1.8$, c) $\frac{p_1}{p_2} = 2$

d) $\frac{p_1}{p_2} = 3$

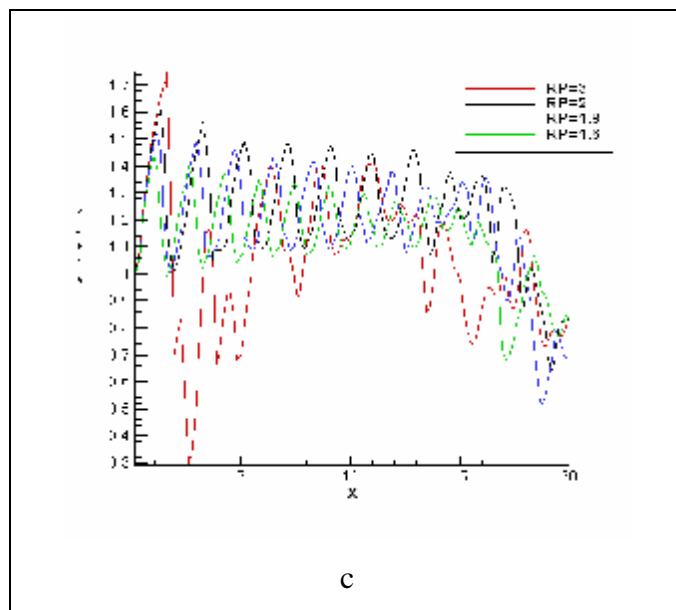
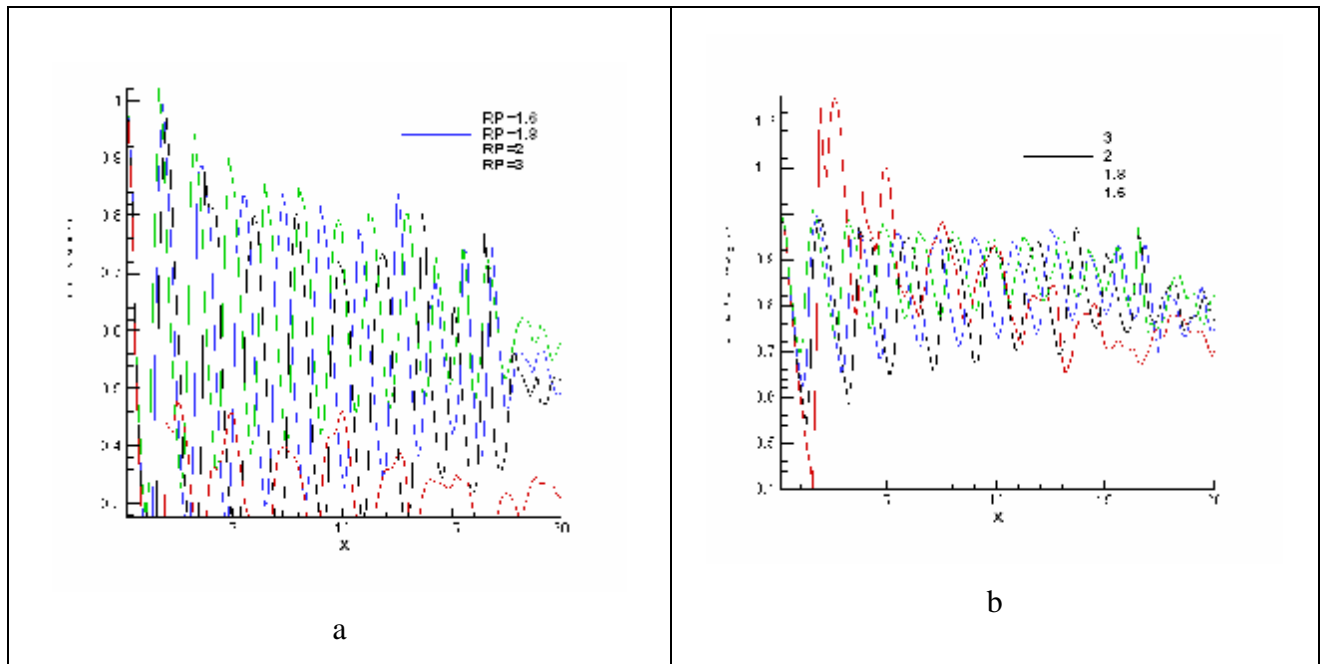


Figure V-30
 Profils comparatifs des variables a) pression, b) température, c) vitesse
 Pour des rapports de pression 1.6, 1.8, 2, 3

V.5 Validation du code de calcul

Pour la validation du code, nous comparons nos résultats avec ceux de ZAMAN [10] pour un jet de nombre de Mach égal à 0.9, nombre de Reynolds égal à 10^5 et de diamètre de l'orifice R_0 égal à 0.5. la comparaison concerne le taux de détente du jet (le taux de décadence de la vitesse centre du jet) dans la direction longitudinale de l'écoulement.

ZAMAN [10] a fait une série d'expériences pour des jets initialement compressibles en examinant le taux de détente du jet, il a abouti que le taux de détente diminue avec l'augmentation du nombre de Mach du jet, ce que confirme la figure (V-31), qui regroupe les profils de l'inverse des vitesses moyennes des nos résultats Précédents.

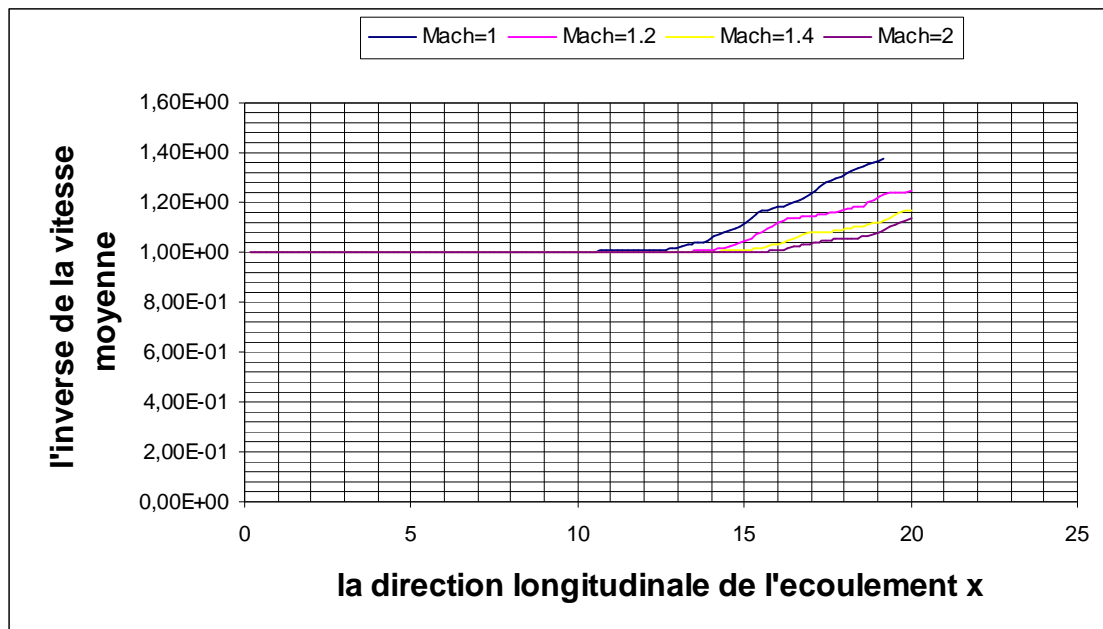


Figure (V-31): profils de la variation du taux de détente du jet en fonction du nombre de Mach

La figure (V-32) représente le profil de la variation de l'inverse de la vitesse moyenne du centre du jet sur la direction longitudinale de l'écoulement, pour voir le taux de détente.

La pente du profil de ZAMAN est égale à 0.155, quant à la pente de nos résultats, elle est égale à 0.176, qui se rapproche du résultat de ZAMAN. L'écart se justifie par les erreurs des mesures expérimentales et les erreurs de la méthode utilisée. Ceci nous amène à dire que nos résultats sont en accord avec les résultats expérimentaux.

De même la longueur du cône potentiel de nos résultats est égale à $10D_0$ presque égale aux résultats de ZAMAN.

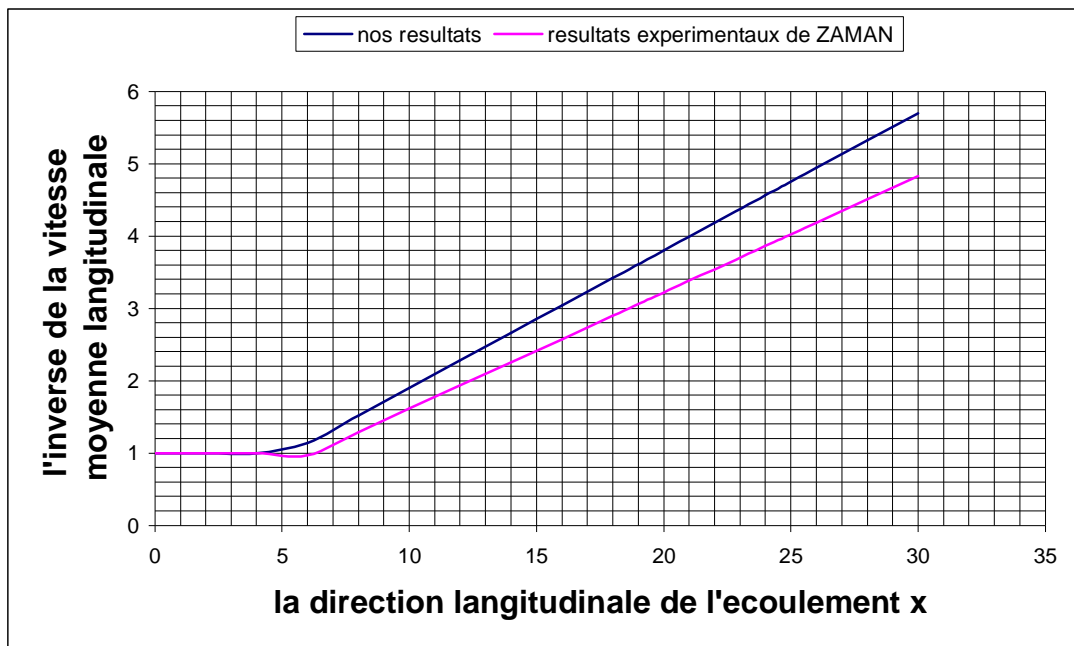


Figure (V-32): profil comparatif du taux de détente de nos résultats avec le résultat expérimental de ZAMAN

Pour renforcer la validation du code, nous avons aussi comparé le profil de la variation de la vitesse longitudinale moyenne du jet, sur la direction transversale de l'écoulement, normalisée par la vitesse centre du jet sur le plan $x = 40R_0$ avec les résultats expérimentaux de Hussein et al [59] pour un jet incompressible et de nombre de Reynolds égal 95500 et les résultats de Panachesan et Lumely [60] pour un jet incompressible et de nombre de Reynolds égal à 11000.

On remarque sur la figure (V-33), la bonne concordance de nos résultats avec les des résultats expérimentaux.

Bien que Le nombre de Mach convectif soit faible dans la région avale de l'écoulement, expliquée dans la figure (V-32), l'effet de la compressibilité étant faible ceci nous permet de comparer nos résultats avec les résultats expérimentaux des jets incompressibles.

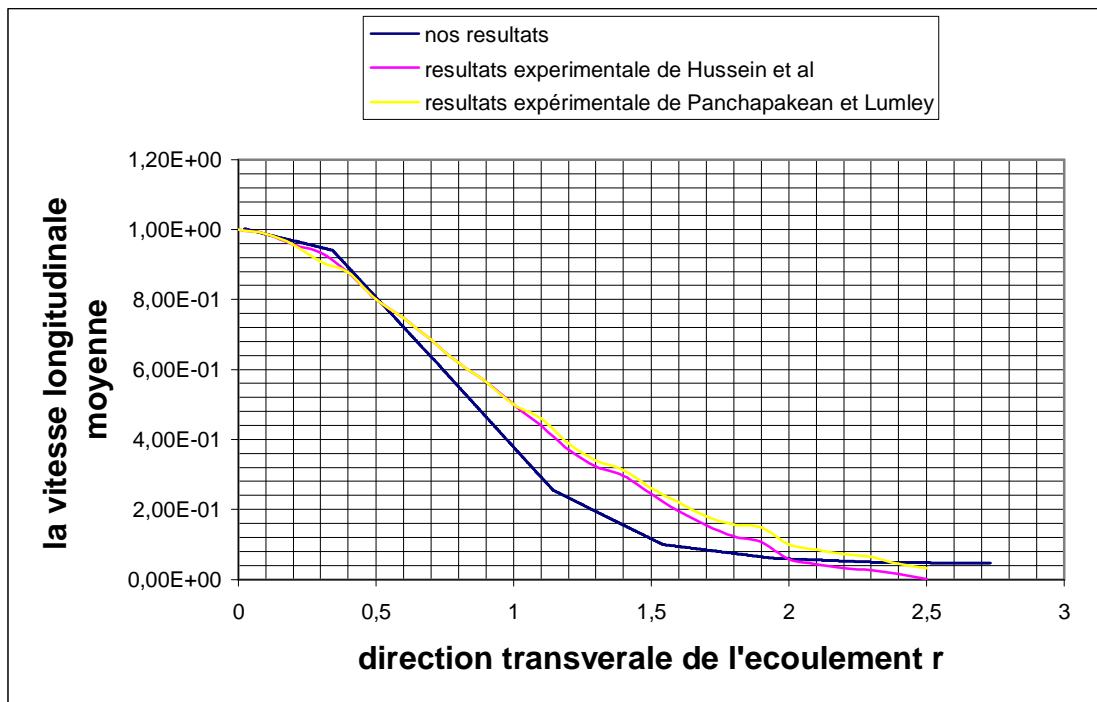


Figure (V-33): profil comparatif de variation de la vitesse longitudinale sur la direction transversale de l'écoulement avec les résultats expérimentaux

En fin, nous avons aussi validé nos résultats concernant l'augmentation de la longueur du cône potentiel avec l'augmentation du nombre de Mach du jet, par la comparaison avec les résultats de Lau Morris et Fisher [17] qui ont abouti à une formule empirique qui relie la longueur du cône potentiel au nombre de Mach du jet après une série de mesures réalisées expérimentalement pour des jets subsoniques et supersoniques.

$$\frac{L_c}{R} = 8 + 2.2.M^2 \quad (V-1)$$

De même, la comparaison est faite avec les résultats de Sarkar [61] et de Wilcox [62] obtenus par le modèle $k-\epsilon$, ou Wilcox [62] a aussi utilisé la correction de la compressibilité à l'aide de la formule (V-1).

La longueur du cône a été calculée à partir d'une vitesse du centre du jet égale à 0.99.

De même les résultats de Wilcox [62] se sont appuyés sur l'intensité turbulente calculée à partir d'une vitesse turbulente égale à 0.01.

Nous remarquons dans la figure (V-33) que nos résultats sont plus proches du profil empirique de Lau Morris et Fisher [17] que ceux obtenus par de Sarkar [61] et de Wilcox [62].

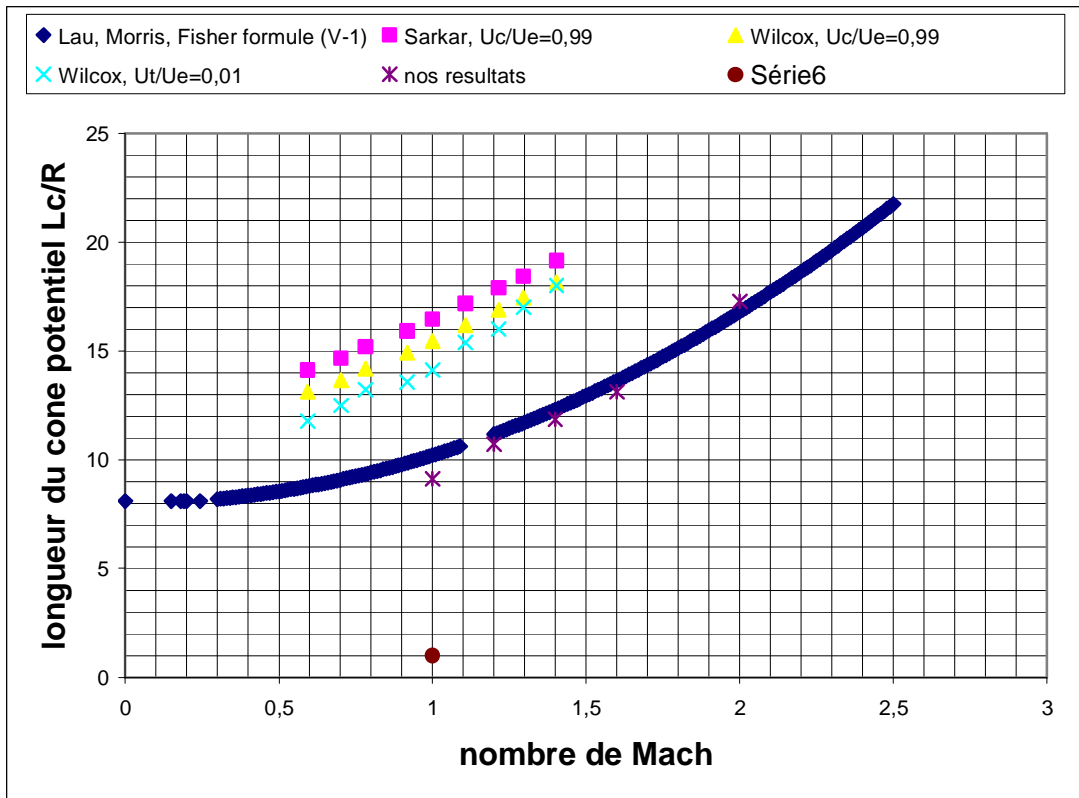


Figure (V-34): profil comparatif de variation de la longueur du cône potentiel en fonction du nombre de Mach

Conclusion générale

La simulation numérique des grandes structures de turbulences (L.E.S), d'un jet compressible, tridimensionnelle et turbulent avec l'algorithme Monotone Intégré, est l'un des outils qui rend possible la compréhension des champs hydrodynamiques et thermiques de cet écoulement.

L'algorithme met en œuvre, des méthodes numériques modernes afin d'éliminer la contribution des erreurs numériques: dissipation, dispersion et erreur de Gibbs dans les schémas numériques classiques, en utilisant la méthode de GODUNOV de haut ordre "PPM" et l'approximation de RIEMANN SOLVEUR de l'algorithme de "ROE SOLVEUR" pour résoudre le problème d'advection. L'équation de la source est résolue à l'aide de la méthode de RUNGE KUTTA quatrième ordre.

Les grandeurs instantanées, dans les trois directions, de l'écoulement sont obtenues à l'aide d'un filtre de Favre, comme dans les cas des écoulements compressibles. Les variables adimensionnelles se réfèrent aux variables de l'écoulement du centre du jet.

Les résultats sont obtenus à partir des nombreuses compilations qui ont été exécuté avec divers paramètres d'entrée du jet et à l'aide d'une visualisation couleur donnée par le logiciel TEC PLOT. On a analysé les effets de ces paramètres sur les champs de vitesse, température et de pression le long de l'axe du jet. Les paramètres influents sont:

-Le nombre de Mach: permet de rendre compte sur les effets de la compressibilité sur les champs hydrodynamiques et thermiques. On conclut que l'augmentation de ce nombre induit une croissance de la longueur du cône potentiel, du fait que les instabilités se développent plus loin de l'orifice du jet. La température et la pression sont fonction du nombre de Mach, l'augmentation radiale des champs de ces derniers est due à l'augmentation de la dissipation de chaleur dans la couche de cisaillement pour maintenir l'enthalpie des vortex.

-Le nombre de Reynolds: permet d'étudier la contribution de la viscosité sur les champs hydrodynamiques et thermiques de l'écoulement. Ce nombre n'affecte pas les grandeurs d'échelles de

la boîte de calcul. L'augmentation de ce nombre accélère la zone de transition et le développement des petites structures de turbulence.

-Le rapport de pression: permet d'étudier l'effet de la contribution de l'instabilité initiale de cisaillement sur les champs de vitesse, température et de pression. D'après les résultats obtenus, on a conclu que l'augmentation de ce rapport favorise le développement rapide de la turbulence par l'augmentation de l'instabilité initiale ce qui se traduit par la disparition totale de la zone laminaire de l'écoulement.

Malgré, les contraintes causées par le temps de calcul, la capacité de stockage des résultats et la représentation de ces résultats sur le logiciel de visualisation, nous pouvons affirmer que les résultats obtenus sont fiables comparés aux résultats obtenus par d'autre modèle de turbulence. En éliminant les contraintes précitées, et en prenant en considération toutes les instabilités qui se développent, l'utilisation de ce code peut constituer une bonne opportunité pour la compréhension du phénomène de la turbulence en fluides compressibles.

Aussi, je compte dans un proche avenir améliorer mes résultats en prenant en charge toutes les contraintes précitées.

Bibliographies

- [1] **ROLAND SCHIESTEL**, modélisation et simulation des écoulements turbulents, Hermes paris 1993.
- [2] **JEAN PHILIPPE BOIN**, Turbulence, année 2001/2002.
- [3] **CHRISTOPHE BAILLY and GENEVIEVE COMTE BELLOT**, turbulence, ENSIB Anne 2001/2001.
- [4] **RYAD HERMOUCHE**, Analyse expérimentale de la turbulence dans les jets de mélange Hélium Air, thèse INP novembre 1996.
- [5] **CALOS FEDERICO**, role of coherent structures in the control and interscale interactions of round, plane and coaxial jets, These grenoble juillet 2001.
- [6] **D. PAUL PAO and KHALED S. ABDOL HADMID**, Numerical simulation of jet aerodynamics using three dimensional Navies stokes code PAB3D, NASA technical paper 3596.
- [7] **ELEONORE KIBER**, Modélisation et calcul de jet di phasiques, Rapport de stage Cerfacs.
- [8] **B J BOERSMA and S K LELE**, Large eddy simulation of compressible turbulent, annual research breifs 1999.
- [9] **K BULENT VULT and VOLKAN OTUGEN**, Scaling parameters for underexpanded supersonic, J fluid mech 2002.
- [10] **K B M ZAMAN**, Asymptotic spreading rate of initially compressible jets experiment and analysis, J fluid mech 2000
- [11] **E J LIST**, turbulent jets and plumes, J fluid mech 2001
- [12] **ME96**, Air jet expriment, California institute of technology juin 1994.
- [13] **ROBERTV.WILSON, And AYOEDJI. O. DEMUREN.**, numerical simulation of turbulent jets with rectangular cross section, J fluid mech 2000.
- [14] **C. J. CHEN, W. RODI**, a review of experimental data of vertical buoyant jets, IIHM, report n° 193 October (1976).
- [15] **L. JOLY**, écoulement turbulents cisailles libres a masse volumique variables; analyse physique et modélisation, thèse doctorat, INP Toulouse 1994.
- [16] **P. SHASSING**, mélange turbulent de gaz inertes dans un jet de tube libre, thèse de doctorat INP Toulouse 1994.

-
- [17] **LAU: JARK. C; MORRIS, PHILIP J; and FISHER, MECHAEL J**, measurement in subsonic and supersonic free jet using a laser vélocimetre, j. fluid mech. Vol 93 part I, july 12 1979 pp. 1-27.
- [18] **FREUND. J. B, LELE. S. K and MOIN. P (2000)**, direct numerical simulation of a mach 1.92 turbulent jet and its sound field, AIAA journal 38 (11), 2023-2031.
- [19] **MANKHADI, R. R, HAYDER, ME, et POVINELI L, A (1994)**, structure of supersonic jet flow and its radiation sound, AIAA 32 (5), 897-906.
- [20] **ZHAO, W, FRANKEL, S. H, MONSEUR, L (2001)**, large eddy simulation of sound radiation from subsonic turbulent jets, AIAA journal, 39 (8) 1469-1477.
- [21] **MORRIS. P. J, SCHEIDEYGER. T. F, LONG. L. N (2000)**, jet noise simulation for circular nozzles, AIAA paper 2000-2080.
- [22] **M. W THRING ET N. P NEWBY**, combustion length of en closed turbulent jet flames, 4th INT symp-coms, Pittsburgh (1952).
- [23] **KOLBE AND DONALD**, simulation numérique d'un jet rectangulaire, j. fluid mech 2000.
- [24] **ELIANE S. ORAN and JAY P. BORIS**, Computing turbulent shear Flows – A convenient conspiracy, computers in physics vol 7.N°5.
- [25] **PIERRE SAGAUT**, Introduction a la simulation des grandes échelles pour les écoulements de fluide incompressible, édition springer (1999).
- [26] **ELAINE S ORAN and JAY P. BORIS**, Numerical simulation of reactive flow, Second edition Cambridge.
- [27] **JP BORIS, FF GRINSTEN, E S Oran and R.L KOLBE**, New insights into large eddy simulation, fluid dynamic research 16 January 1992.
- [28] **M OBERLACK**, invariant modeling in large eddy simulation of turbulence, annual research briefs 1997.
- [29] **J. L GUERMOND, T.ODEN and S. PRUDHOMME**, Mathematical perspectives on large eddy simulation models for turbulent flows, mathematics subject classification 65N30, juin 2002.
- [30] **UGO PIOMELI**, Large eddy simulations theory and applications, university of Maryland.
- [31] **F. BOUCHON AND T. DUBOIS**, modeling of incremental scales for large eddy simulation of turbulent flows, CNRS (UMR 6620).
- [32] **G ERLEBACHER M Y HUSSAINI GG SPEGZEL and T. A. ZANY**, toward the large eddy simulation of compressible turbulent flows, J fluid mech 2002.
- [33] **ANDREA EPPLER and KLAU BERNERT**, two stage testing of advanced dynamic subgrid-scale models for large eddy simulation on parallel computers, SFB 393/9213 juin 1999.

-
- [34] **N.A. ADAMS**, Modeling strategies for large eddy simulation of turbulent flows, lectures series university de Dresden.
- [35] **DELIA JIROVEANNY**, Analyse théorique et numérique de certains modèles de viscosité turbulente, thèse Grenoble 1992.
- [36] **N.A. ADAMS and STOLZ**, a subgrid scale deconvolution approach for shock capturing, journal of computational physic 178 (2002).
- [37] **BERT VERMAN, BENARD GEURTS, and HANS KUERTEN**, Large eddy simulation of the turbulent mixing layer, J. fluid mech (1997) vol 339.
- [38] **THESE THIERRY POINOT**, Simulation numérique des instabilités de combustion dans les layer aéronautique, thèse décembre 2001.
- [39] **DOYLE KNIGHT, GANG ZHOU, NORA OKANGO and VIGAY SHUKLA**, compressible large eddy simulation using unstructured Grids, AIAA papers N° 98-0535.
- [40] **SI AMEUR**, turbulent structures in a slightly compressible mixing loyers, université de batna.
- [41] **D KNIGHT and H YAN**, Large eddy simulation of compressible turbulent flows, CIMNE, Barcelona Spain 2002.
- [42] **J. F SACADURA**, initiation au transfert thermiques, édition MC GRAW HILL.
- [43] **PROF DOYLE and D KNIGHT**, simulation of three dimensional High speeds Aerodynamics flows, university of Kentucky march 2001.
- [44] **M. SIAMEUR**, numerical simulations of these dimensional supersonic shears flow, université de batna.
- [45] **ALI UZINI GREGORU A and ANASTASIO**, application of compact schemas to large eddy simulation of turbulence jet, kwver academic publishers 2004.
- [46] **PHILIP COLELA and PAUL R WOODWARD**, The piecewise parabolic method (PPM) gaz dynamical simulations, journal of computational physics 54.174.201 (1984).
- [47] **P.L ROE**, Approximate Riemann solvers, parameters vectors, and difference schemes, journal of computational physics 43.357.372/1981.
- [48] **E.F**, Riemann Solver and numerical methods for fluid dynamics, 2nd edition singer
- [49] **EITAN TADMOR**, approximation solution of non linear conservation laws, edition springer 1998.
- [50] **RANDELL J LEVEQUE**, Non linear conservation lows and finite volume methods for astrophysical fluid flow, edition springer Fev 1998.
- [51] **TRANGT BUI**, a parallel volume algorithm for large eddy simulation of turbulent flows, NASA /TM-1994.

-
- [52] **STEPHAN LENTERI**, parallel solution of three dimensional compressible flows, INRIA 2594 juin 1995.
- [53] **ROE FFLUPPES**, the numerical simulation of turbulent jets and diffusion flame, THESE UNIVERSITE EINDHOVEN NOVEMBRE.
- [54] **J LEVEQUE**, Finite volume methods for hyperbolic problems, computational methods February 1998.
- [55] **ZENG CHAN, CHUNG CHANG AND XIAO WANG**, the space time CE/SE method for the navier stockes equations in the three spatial dimensions, AIAA papers 2000-2331.
- [56] **KIM BEONGJAI**, conservation laws and numerical methods, 2nd edition rand ell leveque.
- [57] **TORG MAMSTROM and BRIAN CHRISTENSEN**, Centerline velocity decays measurements in low velocity ax symmetric jets, j fluid mech (1997) vol 246.
- [58] **JONATHAN B FREAD, K LELE and PARVIZ MOIN**, compressibility effects in turbulent annular mixing layer part1 turbulence and growth rate, J. fluid mech 2000.
- [59] **HUSSEIN, H. J, CAPP, S. C and GEORGE, W. K (1994)**, Velocity measurements In a high Reynolds number, momentum conserving axisymmetric turbulent Jet, Journal of Fluid Mechanics, 258, 31–75.
- [60] **PANCHAPAKESANP N. R. and LUMLEY, J. L (1993)**, Turbulence measurements In axisymmetric jets of air and helium. Part 1. Air jets. Journal of Fluid Mechanics, 246, 197–223.
- [61] **SARKAR, S; ERLEBACHER, G.; HUSSAINI, M. Y.; and KREISS, H. O**, the Analysis and Modeling of Dilatational Terms in Compressible Turbulence. J. Fluid Mech., vol. 227, June 1991, pp. 473–493.
- [62] **WILCOX, DAVID**, Progress in Hypersonic Turbulence Modeling, AIAA-91-1785, June 1991. AIAA J., vol. 27, Mar. 1989, pp. 315–322.