



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse Mathématique et Numérique



Thème

Numerical solution of linear Volterra integral equations

Présentée par : *SOUIDA Hanane*

Soutenu publiquement le : .../.../2019.

Devant le jury composé de :

Mr. NADIR Mostefa	Prof	Université de M'sila	Président.
Mr. DILMI Mustapha	M.C.B	Université de M'sila	Encadreur.
Mr. GAGUI Bachir	M.C.A	Université de M'sila	Examineur.

Année universitaire 2018/2019



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse Mathématique et Numérique

Thème

Numerical solution of linear Volterra integral equations

Présentée par : *SOUIDA Hanane*

Soutenu publiquement le 30.06/2019.

Devant le jury composé de :

Mr. NADIR Mostefa	Prof	Université de M'sila	Président.
Mr. DILMI Mustapha	M.C.B	Université de M'sila	Encadreur.
Mr. GAGUI Bachir	M.C.A	Université de M'sila	Examineur.

Année universitaire 2018/2019

Remerciement

Avant toute considération ,je remercie le GRAND DIEU le tout puissant qui ,m'a aidé pour echiever ce travail

En premier lieu j'adresse ma reconnaissance à mon encadreur DILMII Mustapha qui a accepté d'encadrer ce travail

Je la remercie aussi pour sa guidance,ses conciels pour m'avoire écouté et encouragé durant la préparation de cette mémoire

Je remercie messieurs les membres de jury qui ont accepté de participer au jury de soutenance

Je tiens à remercier mes parents pour leur soutient exemplaireet leurs sacrifices loyaux durant ces longues années de quête sur la voie du savoir

En fin , je remercie toute personnes,famille ,amis,qui contribué à la réalisation de ce travail.

Résumé

L'objectif essentiel de ce travail consiste à étudier les équations intégrale et en particulier les équations intégrale linéaire de volterra et leur résolution par différents méthodes (analytique : Noyau de dégénéré...,numérique :Galerkin,...)

Mots clés

Equations intégrale,Méthode de projection,Méthode de collocation,Méthode de Galerkin, polynomes orthogonaux

Abstract

The main objective of this work is to study the integrale equation particularly the linear volterra integral equations and resolve them with different ways(analytical :Degenerate core...,numerical :Galerkin,...)

Key words

Integral equation,projection method,collocation method,Galerkin method ,Orthogonal polynomials

Table des matières

Introduction	1
1 RAPPELS ET NOTIONS FONDAMENTALES	2
1.1 Notions sur les espace fonctionnelles	2
1.2 Notions sur les opérateurs	3
1.2.1 Opérateurs intégrales linéaires	3
1.2.2 Opérateur adjoint	5
1.2.3 Opérateur compact	5
1.3 Equations intégrales et leurs classifications	6
1.3.1 Equations intégrales linéaires	6
1.3.2 Equations intégrales non-linéaire	8
1.3.3 Equations intégrales singulières	10
1.3.4 Lien entre les équations différentielles et les équations intégrales de Volterra	11
2 Existence et unicité des solution pour les équations intégrales	13
2.1 Méthodes de résolution des équations intégrales	14
2.2 Méthodes analytiques	14
2.3 Méthodes numériques	18
2.3.1 Méthodes de projection	18
3 Solutions des équations intégrales linéaires par la série de bernouli	24
3.1 Solution avec méthode de collocation	25

3.2 Résultats numériques	27
Conclusion générale et perspectives	30
Bibliographie	32

Introduction

Le travail que nous présentons porte sur une étude générale des équations intégrales , il est complété par une étude sur les équations intégrales de volterra .

Il est connu que les équations intégrales touchent divers domaine des mathématique et de la physique .Elle offrent un puissant moyen technique pour résoudre certains problème pratique

Le but de notre travail est de résoudre numériquement des équations intégrales de volterra tel que est présenté en quatre chapitre :

Le premier chapitre : est une introduction sur les espaces fonctionnelles et les opérateurs ,les equations intégrales et leur classification.

Dans le **deuxième chapitre** : nous présentons quelques théorèmes qui montre l'existence et l'unicité de la solution de l'équation intégrale de volterra.

Dans le **troisième chapitre** : est consacré essentiellement à présenter quelque méthodes de résolution des equations intégrales (méthodes numérique et analytique).

Dans le **quatrième chapitre** : est consacré aux solutions des équations intégrales linéaires par la série de bernouli.

Chapitre 1

RAPPELS ET NOTIONS FONDAMENTALES

Dans ce chapitre on présente un rappel sur les notions de l'analyse fonctionnelle et on donne les définitions et les types des équations intégrales (classifications) qui l'on utilisera dans les chapitres qui se suivent

1.1 Notions sur les espace fonctionnelles

Définition 1.1 (*Espace vectoriel normé*) soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou

\mathbb{C} , on appelle norme sur l'espace E toute application notée $\|\cdot\|$ définie sur E à valeurs dans \mathbb{R}_+ , vérifiant pour tout x, y dans E et α dans \mathbb{k}

(i) $\|x\| = 0$ si seulement si $x = 0$.

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ (homogénéité).

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

Définition 1.2 (*Espace métrique complet*)

On dit que E est un espace métrique complet si toute suite de Cauchy de E converge dans E .

Définition 1.3 (*Espace de Banach*)

Tout espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.

Définition 1.4 (produit scalaire)

soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} ; un produit scalaire sur E est une application de $E \times E$ dans \mathbb{R} , notée $\langle \cdot, \cdot \rangle$

possédant les propriétés suivantes :

pour tout x, y, z dans E et α, β dans \mathbb{R}

$$(i) \langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$$

$$(ii) \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle.$$

$$(iii) \langle x, x \rangle \geq 0.$$

$$(iv) \langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0.$$

Définition 1.5 (Espace de Hilbert)

un espace de Hilbert réel est un espace vectoriel réel H muni d'un produit scalaire (i.e une forme bilinéaire de $H \times H$ dans \mathbb{R} , symétrique et définie positive), et qui est complet pour la norme associée.

Définition 1.6 (Espace $C^1(a, b)$)

Les éléments de cet espace sont toutes les fonctions définies sur $]a, b[$ et possédant sur cet intervalle des dérivées continues jusqu'à l'ordre

1.2 Notions sur les opérateurs

1.2.1 Opérateurs intégrales linéaires

Définition 1.7 Soient X, Y deux espaces normés, un opérateur A définie sur X dans Y est dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes :

$$1- Au \in Y$$

$$2- A(\alpha u + \beta v) = \alpha A(u) + \beta A(v).$$

Définition 1.8 Un opérateur linéaire A définie sur X dans Y est dit borné s'il existe une constante positive c , telle que :

$$\|Au\|_Y \leq c \|u\|_X \quad \forall u \in X$$

Définition 1.9 soit $k : C[a, b] \times C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, l'opérateur intégral linéaire A sur $C[a, b]$ est défini par :

$$\varphi \in C[a, b] \rightarrow A\varphi \in C[a, b]$$

tel que

$$(A\varphi)(x) = \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt.$$

ou la fonction $K(x; t)$ s'appelle noyau de l'opérateur intégral A .

Remarque 1.10 Soit K est une fonction continue de $[a, b] \times [a, b]$, Alors A est appelé opérateur intégral à noyau continu.

Définition 1.11 Soient X, Y deux espace normés, et $A : X \rightarrow Y$, on dit que A est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné dans X à un ensemble relativement compact dans Y .

Remarque 1.12 1- L'opérateur A est dit complètement continu, s'il est continue et compact.

2- A est compact $\Leftrightarrow \forall (x_n) \subset X$, borné, la suite (Ax_n) admet une sous suite convergente dans Y .

Définition 1.13 Soit A un opérateur d'un espace de Banach X dans lui-même, A est une contraction, s'il existe une constante $0 \leq k < 1$ telle que, pour tout $x, y \in X$, on ait

$$\|A(x) - A(y)\| \leq k\|x - y\| \quad (1.11)$$

Définition 1.14 Si $k \geq 0$ dans la relation (1.11), A est dit Lipschitzienne. L'application Lipschitzienne est nécessairement continue.

Si $k < 1$ dans la relation (1.11), A est dite contraction.

Si $k = 1$ dans la relation (1.11), A est dit non expansive.

1.2.2 Opérateur adjoint

Soient X et Y deux espace de Hilbert, on dit que les opérateurs A et B sont adjoint s'ils vérifient

$$\forall (\varphi, \psi) \in X, (A\varphi, \psi) = (\varphi, B\psi)$$

Théorème 1.15 Soient X et Y deux espace de Hilbert, et $A : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire bornée, alors il existe uniquement un opérateur linéaire $A^* : Y \rightarrow X$ tel que

$$(A\varphi, \psi) = (\varphi, A^*\psi)$$

1.2.3 Opérateur compact

Définition 1.16 (opérateur compact) soit A un opérateur linéaire d'un espace normé E dans un espace normé F , on dit que A est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné G dans E à un ensemble relativement compact $A(G)$ dans F . Autrement dit, la fermeture $\overline{A(G)}$ est compact.

Théorème 1.17 Un opérateur compact est un opérateur borné, la réciproque est fausse.

Théorème 1.18 une combinaison linéaire $A = \alpha A_1 + \beta A_2$ des opérateurs compacts est un opérateur compact

Théorème 1.19 le produit AB de deux opérateur bornés A et B est compact si l'un des opérateur A ou B compact

Théorème 1.20 Si (A_n) est une suite d'opérateurs compacts dans un espace de Banach X , convergeant en norme vers un opérateur A , alors l'opérateur A est aussi compact.

Preuve. En effet pour prouver la compacité de l'opérateur A , il suffit de montrer que, pour toute suite borné $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ d'éléments de X , de la suite (Ax_n) on peut extraire une sous-suite convergente.

Il est facile de vérifier qu'une combinaison linéaire d'opérateurs compacts est compacte. Par conséquent, dans l'espace $B(X, Y)$ de tous les opérateurs linéaires bornés, définis sur X l'ensemble $K(X, Y)$ forment un sous-espaces fermé. ■

1.3 Equations intégrales et leurs classifications

1.3.1 Equations intégrales linéaires

La forme ordinaire d'une équation intégrale linéaire est donnée par :

$$\alpha(x)u(x) = f(x) + \lambda \int k(x, t)u(t)dt \quad (1.1)$$

ou' $\alpha(x), f(x), k(x, t)$ sont des fonctions données, λ est un paramètre réel ou complexe différent de zéro. La fonction $k(x, t)$ est appelée le noyau de l'équation intégrale.

a-Equation intégrale de Fredholm

On appelle équation intégrale linéaire de Fredholm si les deux limites d'intégration de l'équation intégrale(1.1)

sont constantes. une équation, à une inconnue $u(x)$ de la forme :

$$\alpha(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt \quad a \leq x \leq b \quad (1.2)$$

La fonction $\alpha(x)$ détermine le type de l'équation intégrale.

1. Si $\alpha(x) = 0$; l'équation s'écrit (1.2) :

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt = 0 \quad (1.3)$$

et s'appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce

2.Si $\alpha(x) = 1$; l'équation s'écrit(1.2) :

$$cu(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)d$$

et s'appelle équation intégrale de Fredholm de second espèce

3.Si $\alpha(x)$ est continue et s'annule en certains points, mais pas en tout point de $[a, b]$, elle est dite équation intégrale de Fredholm de troisième espèce.

Remarque 1.21 Si $f(x) = 0$ l'équation s'écrit (1.2)

$$u(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt$$

et elle est dite homogène

si $f(x) \neq 0$ l'équation elle est dite non homogène

Exemple 1.22 exemples des equations intégrales linéaires de Fredholm de la seconde et première espèce homogènes et non homogènes

$$u(x) - \lambda \int_{-1}^1 (x^2 - t)u(t)dt = x^2 + \sin(x) + 1 \quad x \in [-1, 1]$$

$$-\lambda \int_{-1}^1 (x^2 - t)u(t)dt = x^2 + \sin(x) + 1 \quad x \in [-1, 1]$$

$$\lambda \int_{-1}^1 (x^2 - t)u(t)dt = u(x) \quad x \in [-1, 1]$$

$$\lambda \int_{-1}^1 (x^2 - t)u(t)dt = 0 \quad x \in [-1, 1]$$

b-Equation intégrale de Volterra

On appelle équation intégrale linéaire de Volterra telle que l'un des deux limites d'intégration

est variable, une équation de la forme :

$$\alpha(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt \quad (1.4)$$

1. On appelle équation intégrale de Volterra de première espèce, si $\alpha(x) = 0$, donc l'équation s'écrit(1.4) comme suit :

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt = 0$$

2. On appelle équation intégrale de Volterra de seconde espèce, si $\alpha(x) = c = \text{constante}$

, donc l'équation s'écrit (1.4) de la forme :

$$cu(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)u(t)dt$$

3. Si $\alpha(x) \neq 0$, donc la formule(1.4) est appelée équation intégrale de Volterra de troisième espèce

Remarque 1.23 *L'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm, il suffit de prendre le noyau k vérifie la condition*

$$k(x, t) = 0 \text{ pour } x < t$$

Exemple 1.24 *exemples des equations intégrales linéaires de volterra de la seconde et première espèce homogènes et non homogènes*

$$\begin{aligned} u(x) - \lambda \int_0^x (x^2 - 1)u(t)dt &= x^2 + \sin(x) + 1 \\ -\lambda \int_0^x (x^2 - 1)u(t)dt &= x^2 + \sin(x) + 1 \\ \lambda \int_0^x (x^2 - 1)u(t)dt &= u(x) \\ \lambda \int_0^x (x^2 - 1)u(t)dt &= 0 \end{aligned}$$

1.3.2 Equations intégrales non-linéaire

a-Equations intégrales de Fredholm

Définition 1.25 1- *On appelle équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce une équation de la forme*

$$u(x) + f(x) = \lambda \int_a^b k(x, t, u(t)) dt$$

2- *On appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce une équation de la forme*

$$u(x) = \lambda \int_a^b k(x, t, u(t)) dt$$

b- Equations intégrales de Volterra**Définition 1.26**

1- On appelle équation intégrale de Volterra de deuxième espèce une équation de la forme

$$u(x) + f(x) = \lambda \int_a^x k(x, t, u(t)) dt$$

2- On appelle équation intégrale de Volterra de première espèce une équation de la forme

$$u(x) = \lambda \int_a^x k(x, t, u(t)) dt$$

c- Equations intégrales de Abel

Définition 1.27 On appelle équation intégrale de Abel une équation de la forme

$$u(x) = \int_{-\infty}^x (x-t)^{\alpha-1} g(u(t)) dt$$

où $-\infty < x$, $0 < \alpha < 1$ et $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ tel que $g(0) = 0$ et $g(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

e- Equations intégrales de Hammerstein et de Uryson

Définition 1.28 1- On appelle équation intégrale de Hammerstein une équation de la forme

$$u(x) = g(x) + \int_0^x k(x, t) g(x, u(t)), t \in [0, 1]$$

2- On appelle équation intégrale de Uryson une équation de la forme

$$u(x) = \int_0^x k(x, t) g(x, u(t)), t \in [0, 1]$$

où F et g sont des fonction arbitraires

1.3.3 Equations intégrales singulières

On dit qu'une équation intégrale est singulière si l'une ou les deux limites d'intégration sont infinies, ou bien le noyau devient infini au voisinage des limites de l'intégration

Définition 1.29 *Considérons l'équation intégrale suivante*

$$u(x) = f(x) + \int_T M(x,t)k(x,t)u(t)dt \quad (1.5)$$

On dit que l'équation (1.7) est singulière si $M(x)$ admet une singularité ou le domaine T n'est pas bornée

Singularité de type Volterra et Fredholm

On considère l'équation intégrale de deuxième espèce de la forme

$$u(x) = f(x) + \int_a^x M(x,t)k(x,t)u(t)dt \quad a \leq x < \infty \quad (1.6)$$

où $k(x,t)$ est faiblement singulier, en générale $k(x,t)$ donnons par

$$k(x,t) = |x-t|^{-\alpha}$$

$$\log |x-t|$$

Alors

- (i) L'équation (1.8) est de Volterra.
- (ii) Si $x = b$; l'équation (1.8) est de Fredholm
- (iii) Le cas où $k(x,t) = |x-t|^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$ s'appelle singularité algébriques.
- (iv) Le cas où $k(x,t) = \log |x-t|$ s'appelle singularité logarithmiques.

Définition 1.30 *(Equation intégrale de Carleman) On appelle équation intégrale de Carleman une équation de la forme :*

$$a(x) \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{u(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{b(t)}{t-x} u(t) dt = f(x)$$

où a, b sont des fonctions continues.

Singularité de type de Cauchy

Soit D un domaine bornée et convexe dans un plan complexe, alors l'intégrale de Cauchy

donné par la formule :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{u(t)}{t-x} dt = f(x), t \in \mathbb{C}$$

Définition 1.31 On appelle équation intégrale de Cauchy une équation de la forme :

$$a(x)u(x) + b(x) \int_{\Gamma} \frac{u(t)}{t-x} dt + \int_{\Gamma} k(x,t)u(t)dt = f(x)$$

telle que $\Gamma = \partial D$

1.3.4 Lien entre les équations différentielles et les équations intégrales de Volterra

Réduction d'une équation différentielle à une équation intégrale : la résolution d'une équation différentielle linéaire peut être ramenée à la résolution d'une équation intégrale de Volterra de deuxième espèce.

Soit l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x) y = F(x) \quad (1.7)$$

où $a_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ sont des coefficient continus, avec les conditions initiales

$$y(0) = c_0, y'(0) = c_1, \dots, y^{n-1}(0) = c_{n-1} \quad (1.8)$$

peut être ramenée à la solution d'une équation intégrale de Volterra de deuxième espèce

Exemple 1.32 Soit

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_2(x) y = F(x) \quad \text{avec } y(0) = c_0, y'(0) = c_1. \quad (1.9)$$

posons

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(x) \quad (1.10)$$

alors

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(t) dt + c_1 \Rightarrow y = \int_0^x (x-t) \varphi(t) dt + c_1(x) + c_0 \quad (1.11)$$

Nous avons utilisé la formule

$$\underbrace{\int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x dx \dots \int_{x_0}^x f(x) dx}_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-z)^{n-1} f(z) dz$$

compte tenu de (1.12) et (1.13) mettons l'équation différentielle (1.11) sous la forme

$$k(x, t) = -[a_1(x) + a_2(x)(x-t)], \quad f(x) = F(x) - c_1 a_1(x) - c_1 x a_2(x) - c_0 a_2(x)$$

$$\varphi(x) + \int_0^x [a_1(x) + a_2(x)(x-t)] \varphi(t) dt = F(x)$$

posant

$$k(x, t) = -[a_1(x) + a_2(x)(x-t)], \quad f(x) = F(x) - c_1 a_1(x) - c_1 x a_2(x) - c_0 a_2(x)$$

nous ramenons l'équation intégrale de Volterra du première espèce à la forme suivante

$$\varphi(x) = \int_0^x k(x, t) \varphi(t) dt$$

i.e. nous obtenons une équation intégrale de Volterra de deuxième espèce.

Chapitre 2

Existence et unicité des solution pour les équations intégrales

Certaines équations intégrale sont une solution et d'autres pas de solution ou un nombre infini de solutions. Les théorèmes suivants énoncent l'existence et l'unicité de la solution pour l'équation intégrale de Fredholm, et de Volterra du second type

Théorème 2.1 *Supposons que le noyau $k(x, t)$ de l'équation intégrale linéaire de Volterra*

$$u(x) = f(x) + \int_0^x k(x, t)u(t)dt, x \in I = [0, T] \quad (2.1)$$

est continu sur $D = \{(x, t) / 0 \leq t \leq x \leq T\}$ Puis pour toute fonction $f(x)$ qui est continue sur I c'est-à-dire $f(x) \in C(I)$, l'équation intégrale de Volterra possède une solution unique. $u(x) \in C(I)$ Cette solution peut être écrite dans le forme

$$u(x) = f(x) + \int_0^x R(x, t)f(t)dt, x \in I \quad (2.2)$$

Pour certains $R \in C(D)$. La fonction $R(x, t)$ s'appelle le noyau résolvant du noyau donné $k(x, t)$

Théorème 2.2 *Si on définit l'opérateur integral*

$$k : C(I) \rightarrow C(I)$$

par

$$(kf)(x) = \int_0^x R(x,t)f(t)dt, x \in I \quad (2.3)$$

alors l'équation intégrale de Volterra sous forme d'opérateur est donnée

$$u = f + Vu \quad \text{ou} \quad (I - V)u = f$$

(où I désigne l'opérateur d'identité et l'intégrale de l'opérateur V classique de Volterra est défini par

$$(Vu)(x) = \int_0^x k(x,t)u(t)dt, x \in I \quad (2.4)$$

ensuite nous avons la relation suivante

$$(I - V)u = f \Rightarrow u = (I + K)f$$

Selon le théorème (2.1), cela implique que l'opérateur inverse

$$(I - V)^{-1}$$

existeet par conséquent par l'unicité de $k(x, y)$

$$(I - V)^{-1} = I + K$$

2.1 Méthodes de résolution des équations intégrales

2.2 Méthodes analytiques

Méthode du noyau dégénéré

La méthode du noyau dégénéré est un méthode classique bien connue pour résoudre numériquement les équations intégrales de second type. l'idée principale consiste à-remplacer le noyau de l'équation intégrale $k(x, t)$ par un noyau dégénéré .i.e

$$k(x, t) = \sum_{k=1}^n a_k(x)b_k(t) \quad (2.5)$$

les fonctions $a_k(x)$, $b_k(t)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) continue sur $a \leq x, t \leq b$ et linéairement indépendants.

L'équation intégrale à noyau dégénéré :

$$u(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{k=1}^n a_k(x)b_k(t) \right] \varphi(t)dt = f(x) \quad (2.6)$$

est résoudre comme suite :

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^n a_k(x) \int_a^b b_k(t)\varphi(t)dt \quad (2.7)$$

on pose :

$$\int_a^b b_k(t)\varphi(t)dt = C_k \quad k = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.8)$$

(2.7) devient alors :

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^n C_k a_k(x) \quad (2.9)$$

C_k : des constantes inconnues telle que $u(x)$ inconnues d'après la forme (2.6)

on a :

$$C_m - \int_a^b b_m(t)\varphi(t)dt = 0 \quad (2.10)$$

Remplacant (2.9) dans (2.10) on obtient

$$C_m - \int_a^b b_m(t)(f(t) + \lambda \sum_{k=1}^n C_k a_k(t))dt = 0$$

C'est à dire :

$$C_m - \lambda \sum_{k=1}^n C_k \int_a^b a_k(x)b_m(t)dt = \int_a^b b_m(t)f(t)dt$$

On note :

$$a_{mk} = \int_a^b a_k(t)b_m(t)dt$$

$$f_m = \int_a^b b_m(t)f(t)dt$$

$$u(x) - \lambda \int_{-1}^1 (5xt^3 + 4x^2t + 3xt)u(t)dt = 0$$

$$u(x) = \lambda \left[5x \int_{-1}^1 t^3 u(t) dt + 4x^2 \int_{-1}^1 t u(t) dt + 3x \int_{-1}^1 t u(t) dt \right]$$

On note

$$\begin{array}{lll} a_1 = 5x & a_2 = 4x^2 & a_3 = 3x \\ b_1 = t^3 & b_2 = t & b_3 = t \end{array}$$

Solution 2.4 on a

$$a_{mk} = \int_a^b a_k(t)b_m(t)dt$$

$$\begin{array}{lll} a_{11} = 2 & a_{21} = \frac{10}{3} & a_{31} = \frac{10}{3} \\ a_{12} = 0 & a_{22} = 0 & a_{32} = 0 \\ a_{13} = \frac{6}{5} & a_{23} = 2 & a_{33} = 2 \end{array}$$

Et

$$A = \begin{vmatrix} 1 - 2\lambda & 0 & \frac{-6}{5}\lambda \\ \frac{-10}{3}\lambda & 1 & -2\lambda \\ \frac{-10}{3}\lambda & 0 & 1 - 2\lambda \end{vmatrix}$$

$$\implies \det A = -(1 - 2\lambda)(1 - 2\lambda) + 4\lambda^2$$

$$\implies \lambda = \frac{1}{4}$$

Avec des calculs on trouve

$$u(x) = \frac{3}{2}x^2 + x^2C$$

On trouve $C = 1$ Et la solution de l'équation est de la forme

$$u(x) = \frac{3}{2}x^2 + x^2$$

2.3 Méthodes numériques

2.3.1 Méthodes de projection

Définition 2.5 (*définition des opérateurs de projection*)

Soit V un espace vectoriel, V_1 et V_2 deux sous espace vectoriel de V . On dit que V est

une somme directe de V_1 et V_2 et on écrit si tout $v \in V = V_1 \oplus V_2$ si tout $v \in V$ peut être décomposé

de la manière unique

$$v = v_1 + v_2, \quad v_1 \in V_1, \quad v_2 \in V_2$$

En outre, si V est muni d'un produit scalaire et que

$$\forall v_1 \in V_1, \forall v_2 \in V_2 : \langle v_1, v_2 \rangle = 0$$

Alors V est appelé la somme directe orthogonale de V_1 et V_2 .

Proposition 2.6 *Soit V un espace vectoriel, puis $V = V_1 \oplus V_2$ si et seulement si s'il existe un opérateur linéaire $p : V \rightarrow V$ tel que $P^2 = P$ avec $V_1 = P(V)$ et $V_2 = (I - P)(V)$ et aussi $V_1 = P(V)$ et $V_2 = (I - P)(V)$*

Définition 2.7 *Soit V un espace de Banach; un opérateur $P \in \mathcal{L}(V)$ tel que $P^2 = P$ est appelé un opérateur de projection*

Si V est un espace d'Hilbert l'opérateur P est appelé un opérateur de projection orthogonal. Il est facile de remarquer que l'opérateur de projection P est orthogonal si et seulement si

$$\langle Pv, (I - P)(u) \rangle = 0 \quad \forall u, v \in V$$

Principe des méthodes de projection

On étudie la résolution de l'équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce

$$u(x) - \lambda \int_D k(x, t)u(t)dt = g(x) \quad (2.1)$$

où D est un fermé et borné et V un espace complet de fonctions. tel que ou bien $V = C(D)$ ou bien $V = L^2(D)$

presque partout. On choisit une suite finie d'approximation de sous espaces V_n ; tel que $V_n \subset V$; $n \geq 1$ et V_n de dimension k_n . Soit une base $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{k_n}\}$

de V_n donc le principe de la méthode de projection consiste à trouver une suite de fonctions $u_n \in V_n$ tels que

$$u_n(x) = \sum_{j=1}^{k_n} c_j \varphi_j(x) \quad \forall x \in D \quad (2.2)$$

Pour déterminer les coefficients (c_j) , on substituant, cette fonction dans l'équation (2.1) et on exigeant que l'équation soit exacte dans le sens où le résidu

$$\begin{aligned} r_n(x) &= u_n(x) - \lambda \int_D k(x, t)u_n(t)dt - g(x) \\ &= \sum_{j=1}^{k_n} c_j \left\{ \varphi_j(x) - \lambda \int_D k(x, t)\varphi_j(t)dt \right\} - g(x) \end{aligned}$$

dans ce cas u_n est une approximation de la solution u de l'équation intégrale, et on note $u \approx u_n$

On remarque aussi que l'équation intégrale qui peut être écrite sous la forme notation d'opérateurs, tel que

$$(\lambda - k)u = g$$

dans ce cas le résidu $r_n(x)$ est écrit sous la forme

$$r_n = (\lambda - k)u_n - g$$

Les coefficients $\{c_1, c_2, \dots, c_{k_n}\}$ doivent être choisis de telle sorte que

$$r_n(x) \rightarrow 0$$

L'espoir et l'attente, c'est que la fonction résultante $u_n(x)$ sera une bonne approximation de solution exacte $u(x)$

.Méthode de collocation

Pour résoudre l'équation de Fredholm de deuxième espèce

$$u(x) - \lambda \int_D k(x, t)u(t)dt = g(x)$$

on va choisir un ensemble de points distincts dites des points de collocation $\{x_1, x_2, \dots, x_{k_n}\}$ telle que

$$r_n(x) = 0 \quad n = 1, \dots, k_n$$

qui vont déterminer les coefficients $\{c_1, \dots, c_{k_n}\}$ comme solution du système linéaire

$$\sum_{j=1}^{k_n} c_j \left\{ \varphi_j(x_i) - \lambda \int_D k(x, t)\varphi_j(t)dt \right\} = g(x_i) \quad i = 1, \dots, k_n$$

d'où

$$\sum_{j=1}^{k_n} c_j \varphi_j(x_i) = \sum_{j=1}^{k_n} \lambda \int_D k(x, t)\varphi_j(t)dt + g(x_i) \quad i = 1, \dots, k_n$$

Nous introduisons un opérateur de projection $p_n : V \rightarrow V_n$ avec $V = C(D)$: Soit $U \in C(D)$, on défini $p_n u$ comme élément de V_n l'interpolation de u aux points

de x_i

$$P_n u(x_i) = u_n(x) = \sum_{j=1}^{k_n} c_j \varphi_j(x)$$

$$P_n u(x_i) = \sum_{j=1}^{k_n} \lambda \int_{D_n} k(x_i, t)\varphi_j(t)dt + g(x_i) = \sum_{j=1}^{k_n} c_j \varphi_j(x_i)$$

Les coefficients c_j sont déterminés par la résolution du système

$$\sum_{j=1}^{k_n} c_j \varphi_j(x_i) = u(x_i)$$

ce système admet une solution unique si

$$\det |\varphi_j(x_j)| \neq 0$$

cette condition signifie que les fonctions $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k\}$ constituent un système linéairement indépendant.

Méthode de Galerkin

Application de la méthode de collocation

Soit $V = L^2(D)$ l'espace d' Hilbert des fonctions carré intégrable sur D , et on note par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur V .soit $\{\varphi_j\}$ un système de fonctions orthogonales telle que

$$\langle V_n, \varphi_j \rangle = 0 \quad i = 1, \dots, k_n$$

comme

$$r_n(x) = \sum_{j=1}^{k_n} \left[c_j \left\{ \lambda \varphi_j(x) - \int_D k(x, y) \varphi_j(x) \right\} \right] - g(x)$$

donc

$$\langle r_n, \varphi_j \rangle = \sum_{j=1}^{k_n} [c_j \{ \lambda \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle - \langle k \varphi_j, \varphi_i \rangle \}] - \langle g, \varphi_j \rangle = 0 \quad (i = 1, \dots, k_n)$$

C'est Le système linéaire de Galerkin . il suffit déterminer les coefficients c_i .

Application de la méthode de Galerkin

soit à chercher une solution approchée de l'équation intégrale

$$\lambda u(x) - \int_a^b k(x, t) u(t) dt = g(x)$$

par la méthode de Galerkin ,on choisit un système de fonctions $\{\varphi_j\}$ linéairement indépendantes dans $V = L^2(a, b)$. on cherche une solution approchée sous la forme :

$$u_n(x) = \frac{1}{\lambda} \left[g(x) + \sum_{i=1}^n A_i \varphi_i(x) \right]$$

on a le résidu

$$r_n(x) = \lambda u_n(x) - \int_a^b k(x, t) u_n(t) dt - g(x)$$

donc

$$r_n(x) = g(x) + \sum_{j=1}^n A_j \varphi_j(x) - \frac{1}{\lambda} \int_a^b k(x, t) \left[g(t) + \sum_{j=1}^n A_j \varphi_j(t) \right] dt - g(x)$$

d'où

$$r_n(x) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n A_j \left[\lambda \varphi_j(x) - \int_a^b k(x, t) \varphi_j(t) dt \right] - \frac{1}{\lambda} \int_a^b k(x, t) g(t) dt$$

d'après

$$\langle r_n, \varphi_i \rangle = \langle \lambda r_n, \varphi_i \rangle = \int_a^b \lambda r_n(x) \varphi_i(x) dx = 0$$

$$\int_a^b \left(\sum_{j=1}^n A_j \left[\lambda \varphi_j(x) - \int_a^b k(x, t) \varphi_j(t) dt \right] - \int_a^b k(x, t) g(t) dt \right) \varphi_i(x) dx$$

il vient

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n A_j \left(\lambda \int_a^b \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx - \int_a^b \int_a^b k(x, t) \varphi_j(t) \varphi_i(x) dt dx \right) \\ = \int_a^b \int_a^b k(x, t) g(t) \varphi_i(x) dt dx \end{aligned}$$

on pose

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \int_a^b \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx \quad , \quad \beta_{ij} = \int_a^b \int_a^b k(x, t) \varphi_j(t) \varphi_i(x) dt dx \\ \gamma_{ij} &= \int_a^b \int_a^b k(x, t) g(t) \varphi_i(x) dt dx \end{aligned}$$

On obtient le système suivant

$$\sum_{j=1}^n A_j(\lambda\alpha_{ij} + \beta_{ij}) = \gamma_{ij} \quad , i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.3)$$

par conséquent, les coefficients $A_j, j = 1, \dots, n$ se définissent à partir de résolution du système (2.13) si

$$D(\lambda) = \det(\lambda\alpha_{ij} - \beta_{ij}) \neq 0$$

le système (2.13) détermine de façon unique les coefficients $\{A_j\}$

Exemple 2.8

On se propose de résoudre par le procédé de Galerkin l'équation intégrale suivante

$$u(x) = 1 - \frac{4}{3}x + \int_{-1}^1 (xt^2 - 1)u(t)dt$$

Prenant pour système complet sur $[-1, 1]$ un système de polynômes de Legendre $\{l_i(x)\}_{1 \leq i \leq 3}$ avec

$$\begin{aligned} l_1(x) &= 1, \quad l_2(x) = x \\ l_3(x) &= \frac{3x^2 - 1}{2} \end{aligned}$$

On cherche la solution sous forme

$$u_3(x) = c_1 + c_2x + c_3 \frac{3x^2 - 1}{2}$$

le résidu est égale à

$$r_3(x) = u_3(x) - 1 + \frac{4}{3}x - \int_{-1}^1 (xt^2 - 1)(c_1 + c_2t + c_3 \frac{3t^2 - 1}{2})dt$$

en calculant l'intégrale on obtient

$$r_3(x) = (3c_1 - \frac{c_3}{2} - 1) + (-\frac{2}{3}c_1 + c_2 - \frac{4}{15}c_3 + \frac{4}{3})x + \frac{3}{2}c_3x^2$$

d'après l'orthogonalité du résidu r_3 au système $\{1, x, \frac{3x^2-1}{2}\}$ on a

$$\langle r_3, 1 \rangle = 0, \quad \langle r_3, x \rangle = 0, \quad \left\langle r_3, \frac{3x^2 - 1}{2} \right\rangle = 0$$

on obtient une solution

$$u_2(x) = \frac{1}{3} - \frac{10}{9}x$$

Chapitre 3

Solutions des équations intégrales linéaires par la série de bernouli

Introduction

L'équation intégrale apparaît naturellement dans de nombreuses applications physiques liées à la propagation des ondes et aux phénomènes de vibration. Il est souvent utilisé pour décrire le problème de la cavité acoustique, la diffusion d'une onde et l'onde de rayonnement. La résolution numérique des équations intégrales de Fredholm et de Volterra a été étudiée par de nombreux auteurs [1, 2, 16, 17]. Pour les méthodes qui utilisent la règle en quadrature, la collocation et l'interpolation, les noyaux dégénérés. Dans ce travail, nous considérons l'approximation de la série de Bernouli pour la solution de ces équations intégrales[16], certainement cette technique nous conduit aux meilleures approximations

$$u(x) - \int_{\Omega} k(x, t)u(t)dt = f(x), \quad x \in \Omega \quad (3.1)$$

où les fonctions $f(x)$ et $k(x, t)$ sont donnée et continues, la fonction $u(t)$ doit être déterminée comme fonction continue dans Ω .

L'équation (3.1) peut être mise sous la forme d'une équation à opérateur linéaire

$$u(x) - Au(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

avec l'opérateur linéaire A donné par

$$Au(x) = \int_{\Omega} k(x, t)u(t)dt.$$

Pour la solution de l'équation (3.1) dans les espaces de fonction complets, prenez habituellement $C(\Omega)$; nous choisissons une suite de sous-espaces dimensionnels complets V_n , $n \geq 1$, ayant n fonctions de base $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ avec dimension de $V_n = n$.

La recherche de la fonction approximative $u_n \in V_n$ de la fonction u est donnée par

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k B_k(x) \quad (3.2)$$

où l'expression (3.2) décrit la série tronquée de Bernouli de la solution de l'équation (3.1); avec les fonctions $\{B_k\}_{0 \leq k \leq n}$ représentent les polynômes de Bernouli et $\{\alpha_k\}_{0 \leq k \leq n}$ les coefficients à déterminer. En d'autres termes, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} r_n(x) &= u_n(x) - A_n u(x) - f(x), \\ r_n(x) &= u_n(x) - \int_{\Omega} k(x, t)u_n(t)dt - f(x), \\ &= \sum_{k=1}^n \alpha_k B_k(x) - \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_{\Omega} k(x, t)B_k(t)dt - f(x) \\ &= \sum_{k=1}^n \alpha_k \left(B_k(x) - \int_{\Omega} k(x, t)B_k(t)dt \right) - f(x), \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

3.1 Solution avec méthode de collocation

Choisissez une sélection de points distincts $x_1, x_2, \dots, x_n \in \Omega$ et exigeons que

$$r_n(x_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.3)$$

La condition (3.3) nous conduit à déterminer les coefficients $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ solution du système linéaire

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \left(B_k(x_j) - \int_{\Omega} k(x_j, t)B_k(t)dt \right) = f(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.4)$$

Définir les matrices

$$B = (B_{kj}) = B_k(x_j)$$

et

$$K = (K_{kj}) = \int_{\Omega} k(x_j, t) B_k(t) dt.$$

Si le $\det(E - K) \neq 0$, nous pouvons assurer qu'il existe une solution du système linéaire (3.4), et par conséquent la solution approximative $u_n(x)$ en tant que combinaison linéaire

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k B_k(x),$$

Pour qui

$$u_n(x_j) - \int_{\Omega} k(x_j, t) u_n(t) dt = f(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

En fait, le système linéaire peut être écrit en matrice

$$(B - K)\alpha = F, \tag{3.5}$$

Où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$ et $F = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))^T$ Pour le le déterminant du système (3.5) est différent de zéro, alors il est admet une solution unique

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T = (B - K)^{-1} F.$$

La solution approximative correspondante

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k B_k(x),$$

a la propriété que $r_n(x)$ soit nul aux noeuds choisis x_j .

Polynômes de Bernouli

Les n^{ième} Polynômes de Bernouli $B_n(x)$ sont définis par $B_0(x) = 1$ et la relation de récurrence suivante

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k(x) x^{n-k}.$$

Les Coefficients rationnels. de polynôme de Bernouli $B_n(x)$ est

$$\begin{aligned}
B_0(x) &= 1 \\
B_1(x) &= x - \frac{1}{2} \\
B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6} \\
B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \\
B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30} \\
B_5(x) &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x \\
B_6(x) &= x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42} \\
B_7(x) &= x^7 - \frac{7}{2}x^6 + \frac{7}{2}x^5 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{6}x \\
B_8(x) &= x^8 - 4x^7 + \frac{14}{3}x^6 - \frac{7}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{30}
\end{aligned}$$

Tableau.1 présente coefficients rationnels

Erreur d'analyse

Nous pouvons facilement vérifier l'exactitude de la méthode. puisque la série tronquée de Bernoulli est une solution approximative de l'équation (1), elle doit être approximativement satisfaite de cette équation, puis pour chaque $x_j \in [a, b]$.

$$r(x_j) = \left| u_n(x_j) - \int_{\Omega} k(x_j, t)u_n(t)dt - f(x_j) \right| \simeq 0$$

3.2 Résultats numériques

Exemple 3.1 *Considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra*

$$u(x) - \int_0^x (x-t)u(t)dt = 1 - x - \frac{x^2}{2}, \quad 0 \leq x, t \leq 1,$$

où la fonction $f(x)$ est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$u(x) = 1 - \sinh(x).$$

La solution approximative $u_n(x)$ de $u(x)$ est obtenue par la méthode tronquée de la série de Bernoulli.

Tableau 1. Nous présentons les solutions exactes et approximatives de l'équation dans l'exemple 3.1 dans certains points arbitraires, l'erreur pour $N = 10$ est calculée.

x	solution exacte u	solution approchée u_n	Erreur
0.000000	1.000000e+000	1.000000e+000	0.00e+00
0.200000	7.986640e-001	7.986640e-001	2.80e-08
0.400000	5.892477e-001	5.892477e-001	5.81e-08
0.600000	3.633464e-001	3.633465e-001	9.22e-08
0.800000	1.118940e-001	1.118942e-001	1.32e-07
1.000000	-1.752012e-001	-1.752010e-001	1.82e-07

Exemple 3.2 Considérons l'équation intégrale linéaire de Fredholm

$$u(x) - \int_0^\pi (\cos t + \cos x)u(t)dt = \sin x, \quad 0 \leq x, t \leq \pi,$$

la solution exacte soit donnée par

$$u(x) = \sin x + \frac{4}{2 - \pi^2} \cos x + \frac{2\pi}{2 - \pi^2}.$$

La solution approximative $u_n(x)$ est obtenue par la méthode tronquée de la série de Bernoulli.

Tableau 2. Nous présentons les solutions exactes et approximatives de l'équation dans l'exemple 3.2 dans certains points arbitraires, l'erreur pour $N = 8$ est calculée.

x	solution exacte u	solution approchée u_n	Erreur
0.000000	-1.306697e+000	-1.306872e+000	1.75e-04
0.785398	-4.507167e-001	-4.508725e-001	1.55e-04
1.570796	2.015882e-001	2.014807e-001	1.07e-04
2.356194	2.681065e-001	2.680475e-001	5.90e-05
3.141593	-2.901271e-001	-2.901661e-001	3.90e-05

Exemple 3.3 *Considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra*

$$u(x) - \int_0^x (x-t)u(t)dt = 1+x, \quad 0 \leq x, t \leq 1,$$

la solution exacte soit donnée par

$$u(x) = \exp(x).$$

La solution approximative $u_n(x)$ est obtenue par la méthode tronquée de la série de Bernoulli.

Tableau 3. *Nous présentons les solutions exactes et approximatives de l'équation dans l'exemple 3.3 dans certains points arbitraires, l'erreur pour $N = 10$ est calculée.*

x	solution exacte u	solution approchée u_n	Erreur
0.000000	1.000000e+000	1.000000e+000	2.22e-16
0.200000	1.221403e+000	1.221402e+000	3.81e-07
0.400000	1.491825e+000	1.491824e+000	7.92e-07
0.600000	1.822119e+000	1.822117e+000	1.34e-06
0.800000	2.225541e+000	2.225539e+000	2.08e-06
1.000000	2.718282e+000	2.718279e+000	2.99e-06

Conclusion

Nous proposons une méthode numérique cette méthode et de contribuer à l'étude du comportement des équations intégrales linéaires de seconde type, basée sur la série tronquée de Bernoulli de la solution, est présentée. Si le résidu $r_n(x_j) = 0$ pour tout $j = 1, 2, \dots, n$ alors la solution approximative sera sensiblement proche de la solution exacte sur l'intervalle entier Ω . L'efficacité de cette méthode est testée en résolvant quelques exemples pour lesquels la solution exacte est connue. Cela nous permet d'estimer l'exactitude avec nos résultats numériques.

Bibliographie

- [1] S. Abbasbandy, E. Shivanian, A new analytical technique to solve Fredholm's integral equations, in *Numer Algor*, 56, (2011) 27–43.
- [2] A. Adawi, F. Awawdeh, A numerical method for solving linear integral equations, *Int. J. Contemp. Mathematics Sciences*, 10, (2009) pp 485-496.
- [3] G. Arfken, *Laguerre Functions*, *Mathematical Methods for Physicists*, 1985.
- [4] K. Atkinson, *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*, the press Syndicate of the University of Cambridge, United Kingdom, 1997.
- [5] K. Atkinson, W. Han, *Theoretical Numerical Analysis A Functional Analysis Framework*. Springer, 2001.
- [6] E. Babolian, A. Davari, Numerical implementation of Adomian decomposition method for linear Volterra integral equations of the second kind, *App. Math. Comput*, 165 (2005) 223–227.
- [7] E. Babolian, H.R. Marzban, M. Salmani, Using triangular orthogonal functions for solving Fredholm integral equations of the second kind, *App. Math. and Comput.*, 201, (2008) 452-464..
- [8] A. Jerri. *Introduction to integral equations with applications*. John Wiley and Sons, INC, 1999.
- [9] B. Gagui, *Sur les équations intégrales dans les espaces d'Orlicz*, thèse de Doctorat, Université de Msila, 2015.
- [10] C. Kwang. Algorithms for Bernoulli numbers and Euler numbers. *Journal of Integer Sequences*, volume 4 article, 01.1.6, issue 1 (2001), pp 1-7.
- [11] W. Lovitt. *linear integral equation*, Dover, NewYork. 1950.

- [12] K. Maleknejad, N. Aghazadeh, Numerical solution of Volterra integral equations of the second kind with convolution kernel by using Taylor-series expansion method, *Appl. Math. Comput.*, 161, (2005) 915–922.
- [13] M. Nadir, *Cours sur les équations intégrales*, université M'sila 2008.
- [14] M. Nadir, Solving Fredholm integral equations with application of the four Chebyshev polynomials, in *Journal of Approximation Theory and Applied Mathematics*, 4, (2014), pp 37-44.
- [15] M. Nadir, Solving linear integral equations with Fibonacci polynomials, *Malaya Journal of Matematik*, Vol. 6, No. 4, (2018), 711-715.
- [16] M. Nadir, D. Mustapha, Euler Series solutions for linear Integral equations *AJMAA*, Vol. 14, No. 2, Art. 11, (2017) pp 1-7.
- [17] M. Nadir, A. Rahmoune, Modified Method for Solving Linear Volterra Integral equations of the Second Kind Using Simpson's Rule, in *International Journal Mathematical Manuscripts (IJMM)*, 1, (2) (2007), 133-140.