

# *Remerciements*

Je tiens à remercier, tout d'abord, **Mon Dieu** qui m'a donné la force de rédiger ce modeste travail.

Je tiens à remercier Prof SAADI Khalil directeur de mon mémoire, pour sa disponibilité et ses conseils judicieux tout au long de ce travail.

Je tiens à remercier les membres du jury, qui ont accepté d'évaluer mon travail de mémoire.

Je tiens à exprimer tout mes respects à mes parents, mes frères qui m'ont toujours encouragé. Je remercie tous les professeurs du département de Mathématiques, sans oublier aussi mes collègues et amies, ainsi tous ceux qui ont participé de loin ou de près à l'élaboration de ce mémoire.

Merci

---

## Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

A mes parents ma mère et mon père.

A mes frères .

A toute la famille.

A toute mes amies.

Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion,

En fin, je dédie ce mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Produit tensoriel entre espaces de Banach</b>	<b>3</b>
1.1 Introduction . . . . .	3
1.2 Espaces de Banach et de Hilbert . . . . .	3
1.3 Espaces de suites . . . . .	4
1.4 Suites vectoriels $p$ -sommables . . . . .	4
1.5 Applications linéaires bornées . . . . .	5
1.6 L'espace des opérateurs bilinéaires . . . . .	6
1.7 Produit tensoriel algébrique . . . . .	7
1.8 Produit tensoriel projectif . . . . .	8
1.9 Produit tensoriel injectif . . . . .	10
<b>2 Produit tensoriel de Chevet-Saphar</b>	<b>12</b>
2.1 Introduction . . . . .	12
2.2 Construction des normes tenseurielles de Chevet-Saphar . . . . .	12
2.3 Les normes de chevet-Saphar . . . . .	13
<b>3 Les opérateurs linéaires <math>p</math>-sommants</b>	<b>21</b>
3.1 Opérateurs de rang fini . . . . .	21
3.2 Les opérateurs $p$ -sommants . . . . .	22
3.3 Théorème de factorisation de Pietsch . . . . .	25
3.4 Les opérateurs Cohen fortement $p$ -sommants . . . . .	26

3.5	L'opérateur adjoint d'un opérateur linéaire . . . . .	27
3.6	L'espace dual de $X \widehat{\otimes}_{g_p} Y$ et $X \widehat{\otimes}_{d_p} Y$ . . . . .	28
	<b>Conclusion</b>	<b>32</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>33</b>

# Introduction

Le présent **mémoire de Master option analyse fonctionnelle** s'inscrit essentiellement dans le cadre de la théorie de produit tensoriel entre espaces de Banach. On prend deux espaces de Banach  $X, Y$ , ensuite on définit leur produit tensoriel algébrique, noté  $X \otimes Y$ . Ce dernier produit peut être vu comme un espace vectoriel engendré par les tenseurs d'ordre 1  $x \otimes y$ . De plus, l'élément  $x \otimes y$  est une forme linéaire sur l'espace des formes bilinéaires  $\mathcal{L}(X \times Y; \mathbb{K})$  telle que

$$x \otimes y(T) = T(x, y),$$

pour tout  $T \in \mathcal{L}(X \times Y; \mathbb{K})$ . Pour rendre l'espace vectoriel  $X \otimes Y$  un espace de Banach, on devrait définir des normes qui s'appellent normes tensorielles pour lesquelles l'espace  $X \otimes Y$  est complet, d'où un espace de Banach. Il existe plusieurs normes tensorielles qu'on peut définir sur  $X \otimes Y$ , par exemple la norme tensorielle injective  $\varepsilon$  (la plus petite norme tensorielle) et la norme tensorielle projective  $\pi$  (la plus grande norme tensorielle). Il est facile de montrer que si  $\alpha$  une autre norme tensorielle on a

$$\varepsilon \leq \alpha \leq \pi.$$

Dans ce mémoire, on va faire une étude approfondie sur le produit tensoriel de Chavet-Saphar. Ce mémoire contient trois chapitre.

Dans le premier chapitre, on discutera la structure vectorielle du produit tensoriel de deux espaces de Banach, la relation entre un opérateur bilinéaire et sa linéarisation. On consacre le reste de ce chapitre en étudiant les deux normes tensorielles célèbres. Tout d'abord, on munit l'espace  $X \otimes Y$  de la norme projectif suivante

$$\pi(u) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \|x_i\| \|y_i\| \right\},$$

où l'infimum est porté sur toutes les représentations possibles de  $u$ . Ensuite, on étudie le produit tensoriel injectif, c'est l'espace vectoriel  $X \otimes Y$  muni de la norme suivante

$$\varepsilon(u) = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n x^*(x_i) y^*(y_i) \right| : x^* \in X^*, y^* \in Y^* \right\},$$

où le supremum est porté sur toutes les représentations possibles de  $u$ . Cette norme est la plus petite norme tensorielle.

Le deuxième chapitre a pour but d'étudier le produit tensoriel de Chevet-Saphar. On va munir l'espace  $X \otimes Y$  de la norme suivante

$$g_p(u) = \inf \left\{ \|(x_j)\|_{p^*}^w \|(y_j)\|_p : u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right\}$$

où l'infimum est porté sur toutes les représentations possibles de  $u$ . Certaines propriétés importantes seront dévoilées au cours de ce chapitre.

Le troisième chapitre est consacré à étudier la relation entre l'espace des opérateurs  $p$ -sommants et le dual du produit tensoriel de Chevet-Saphar. En commençant par un survol sur les opérateurs  $p$ -sommants, ensuite les opérateurs Cohen fortement  $p$ -sommants en mettant l'accent sur quelques propriétés et résultats de ces deux types d'opérateurs. On termine ce chapitre par donner la coïncidence entre les classes d'opérateurs citées ci-dessus et le dual de produit tensoriel muni des normes de Chevet-Saphar.

# Chapitre 1

## Produit tensoriel entre espaces de Banach

### 1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on définit les espaces de Banach et de Hilbert. Certains exemples sont donnés. Par la suite, on étudie les applications linéaires bornées ainsi que les applications bilinéaires bornées. On étudie également la structure algébrique d'un produit tensoriel. On termine ce chapitre en étudiant le produit tensoriel projectif et injectif.

### 1.2 Espaces de Banach et de Hilbert

Soit  $X$  un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{R}$ . On appelle une norme sur  $X$  l'application

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

qui satisfait aux conditions suivantes:

- (i)  $\forall x \in X : \|x\| = 0 \iff x = 0$ .
- (ii)  $\forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ .
- (iii)  $\forall x, y \in X : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

Un espace vectoriel normé  $X$  est dit de Banach, si toute suite de Cauchy dans  $X$  est convergente dans  $X$ . C'est à dire, un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet pour la distance issue de la norme.

**Proposition 1.2.1**

- 1) *Tout espace normé de dimension finie est un espace de Banach.*
- 2) *Tout sous espace fermé d'un espace de Banach est un espace de Banach.*

**1.3 Espaces de suites**

Soit  $p$  un nombre réel tel que  $1 \leq p < +\infty$ . Rappelons que  $\ell_p(\mathbb{N}) = \ell_p$  est l'espace vectoriel des suites scalaires  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  pour les quelles la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p$  converge. Alors  $\ell_p(\mathbb{N})$  (noté par fois  $\ell_p$ ) est un espace de Banach pour la norme  $\|\cdot\|_{\ell_p}$  définie par

$$\text{Pour tout } x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_p : \|x\|_{\ell_p} = \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace des suites scalaires  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bornées muni de la norme

$$\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

est un espace de Banach noté  $\ell_\infty(\mathbb{N})$  ou tout simplement  $\ell_\infty$ . On notera  $c_0(\mathbb{N})$  ou tout simplement  $c_0$  le sous-espace fermée de  $\ell_\infty$  des suites qui convergent vers zéro. Soit  $1 \leq p^* \leq \infty$  le conjugué de  $p$  telle que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1.$$

**1.4 Suites vectoriels  $p$ -sommables**

Soit  $X$  un espace de Banach. Une suite  $(x_n)$  (resp.  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ ) dans  $X$  est absolument  $p$ -sommables si la suite scalaire  $(\|x_n\|)$  (resp.  $(\|x_i\|)_{1 \leq i \leq n}$ ) est dans  $\ell_p$ . On note  $\ell_p(X)$  (resp.  $\ell_p^n(X)$ ) l'espace de suites  $(x_n)$  (resp.  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ ) dans  $X$  absolument  $p$ -sommables muni de la norme

$$\begin{aligned} \|(x_n)_n\|_{\ell_p(X)} &= \left( \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \|(x_n)_n\|_{\ell_\infty(X)} &= \sup_n \|x_n\| & \text{si } p = \infty \end{aligned}$$

**L'espace de suites faiblement  $p$ -sommables.** Une suite  $(x_n)$  (resp.  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ ) dans  $X$  est faiblement  $p$ -sommables si la suite scalaire  $(x^*(x_n))$  (resp.  $(x^*(x_i)_{1 \leq i \leq n})$ ) est dans  $\ell_p$  pour

tout  $x^* \in X^*$ . On note  $\ell_p^w(X)$  (resp.  $\ell_p^{nw}(X)$ ) l'espace des suites  $(x_i)$  (resp.  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ ) dans  $X$  faiblement  $p$ -sommables telle que

$$\ell_p^w(X) := \{(x_n)_n \subset X : \langle x^*, x_n \rangle_n \in \ell_p, x^* \in X^*\}$$

muni de la norme:

$$\begin{aligned} \|(x_n)_n\|_{\ell_p^w(X)} &= \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left( \sum_{i=1}^n |x^*(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \|(x_n)_n\|_{\ell_\infty^w(X)} &= \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sup_n |x^*(x_n)| & \text{si } p = \infty \end{aligned}$$

Si on munit un espace vectoriel d'un produit scalaire, il lui fait donc un espace préhilbertien. Ce produit scalaire peut générer une norme et par conséquent il engendre une distance. Alors on donne la définition suivante.

**Définition 1.4.1** (*Espace de Hilbert*). *Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet pour la distance issue du produit scalaire.*

**Théorème 1.4.1** (*L'espace  $\ell_2$* ). *L'espace  $\ell_2$  est un espace de Hilbert dont le produit scalaire est*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n y_n.$$

**Proposition 1.4.1** (*Comparaison entre les espaces*). *Soit  $1 \leq p \leq q \leq \infty$ . Nous avons*

$$\ell_p \subset \ell_q.$$

## 1.5 Applications linéaires bornées

Soient  $X, Y$  deux espaces normés et  $u : X \rightarrow Y$  une application. Elle est linéaire si

- i)  $\forall x, y \in X : u(x + y) = u(x) + u(y)$ .
- ii)  $\forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R} : u(\lambda x) = \lambda u(x)$ .

Un opérateur linéaire  $u : X \rightarrow Y$  est dit continue (borné) s'il existe  $C > 0$  tel que

$$\forall x \in X : \|u(x)\| \leq C \|x\|.$$

On note  $\mathcal{B}(X, Y)$  l'espace vectoriel des applications linéaires continues. On munit l'espace  $\mathcal{B}(X, Y)$  de la norme des opérateurs suivante

$$\|u\| = \sup_{x \in B_X} \|u(x)\|,$$

où  $B_X$  est la boule unité fermée de  $X$ . Si  $Y$  est espace de Banach, l'espace  $\mathcal{B}(X, Y)$  devient alors un espace de Banach.

**Dual topologique.** Soit  $X$  un espace vectoriel normé. On appelle dual topologique, et on note  $X^*$ , l'espace de Banach des formes linéaires continues sur  $X$ , i.e.,

$$X^* = \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$$

## 1.6 L'espace des opérateurs bilinéaires

Soient  $X, Y$  et  $Z$  trois espaces de Banach. Une application  $T : X \times Y \rightarrow Z$  est dite bilinéaire si il est linéaire par rapport à chaque composante. On note  $L(X \times Y; Z)$  l'ensemble de toutes les applications bilinéaires définies de  $X \times Y$  dans  $Z$ . On définit les opérations linéaires suivantes:

$$\begin{aligned} (T_1 + T_2)(x, y) &= T_1(x, y) + T_2(x, y) \\ (\alpha T)(x, y) &= \alpha T(x, y), \end{aligned}$$

ce qui donne à  $L(X \times Y; Z)$  une structure d'espace vectoriel. Un opérateur bilinéaire  $T : X \times Y \rightarrow Z$  est dit borné (continue) s'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\forall (x, y) \in X \times Y : \|T(x, y)\| \leq C \|x\| \|y\|.$$

On note  $\mathcal{L}(X \times Y; Z)$  l'espace vectoriel des applications bilinéaires continues. Si  $Z = \mathbb{K}$  on notera  $\mathcal{L}(X \times Y; \mathbb{K}) = \mathcal{L}(X \times Y)$  l'espace de formes bilinéaires sur  $X \times Y$ . On munit l'espace  $\mathcal{L}(X \times Y; Z)$  de la norme suivante

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X, y \in B_Y} \|T(x, y)\|,$$

Si  $Z$  est espace de Banach, alors l'espace  $\mathcal{L}(X \times Y; Z)$  devient un espace de Banach.

**Proposition 1.6.1** *Les conditions suivantes sont équivalentes;*

1.  $T$  est continue;
2.  $T$  est continue au point  $(0, \dots, 0)$ ;
3. Il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\|T(x, y)\| \leq C \|x\| \|y\| \text{ pour tout } (x, y) \in X \times Y. \quad (1.1)$$

Il est facile de voir que

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X, y \in B_Y} \|T(x, y)\| = \inf \{C, \text{ satisfait (1.1)}\}.$$

## 1.7 Produit tensoriel algébrique

Soient  $X, Y$  deux espaces de Banach. Soient  $x \in X$  et  $y \in Y$ . On définit  $x \otimes y$  comme étant une forme linéaire sur l'espace de formes bilinéaires  $\mathcal{L}(X \times Y)$  comme suite

$$\forall T \in \mathcal{L}(X \times Y) : x \otimes y(T) = \langle T, x \otimes y \rangle = T(x, y).$$

On note  $X \otimes Y$  l'espace vectoriel engendré par les éléments de la forme  $x \otimes y$  avec  $x \in X$  et  $y \in Y$ . L'espace  $X \otimes Y$  s'appelle espace de produit tensoriel algébrique de  $X$  et  $Y$ . On peut représenter cet espace sous la forme suivante

$$X \otimes Y = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i : n \in \mathbb{N}^*, x_i \in X, y_i \in Y \right\}.$$

D'après la définition de  $X \otimes Y$  nous avons

$$X \otimes Y \subset \mathcal{L}(X \times Y)^*.$$

Nous allons voir certaines propriétés des éléments de  $X \otimes Y$ , commençons par établir la relation entre les opérations  $+$  et  $\otimes$ .

**Proposition 1.7.1** *Pour tous  $x, x_1, x_2 \in X$  et  $y, y_1, y_2 \in Y$  nous avons:*

1.  $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$ .
2.  $x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$

3.  $\lambda(x \otimes y) = \lambda(x) \otimes y = x \otimes (\lambda y)$  avec  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

4.  $x \otimes 0 = 0 \otimes y = 0$ .

**Proposition 1.7.2** Soient  $X, Y$  deux espaces de Banach. Pour tout  $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$  les assertions suivantes sont équivalentes:

1.  $u = 0$ .

2.  $\sum_{i=1}^n x^*(x_i) y^*(y_i) = 0$  pour tout  $x^* \in X^*, y^* \in Y^*$ .

3.  $\sum_{i=1}^n x^*(x_i) y_i = 0$  pour tout  $x^* \in X^*$ .

4.  $\sum_{i=1}^n y^*(y_i) x_i = 0$  pour tout  $y^* \in Y^*$ .

**Linéarisation.** On associe à  $T$  un opérateur linéaire  $\tilde{T}$  définie sur le produit tensoriel  $X \otimes Y$  par

$$\tilde{T}(u) = \sum_{i=1}^n T(x_i, y_i), \quad (1.2)$$

avec  $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$ . L'opérateur  $\tilde{T}$  s'appelle linéarisation de  $T$  qui est unique.

## 1.8 Produit tensoriel projectif

Soit  $\alpha$  une norme sur l'espace vectoriel  $X \otimes Y$ . La norme  $\alpha$  est dite raisonnable si pour tout élément élémentaire  $x \otimes y$  on a

$$\alpha(x \otimes y) = \|x\| \|y\|. \quad (1.3)$$

Soit  $\alpha$  une norme raisonnable définie sur  $X \otimes Y$ . De la formule (1.3) on peut conclure que pour tout élément  $u \in X \otimes Y$  tel que  $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$  on a

$$\begin{aligned} \alpha(u) &= \alpha\left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \|x_i\| \|y_i\| \\ &\leq \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \|x_i\| \|y_i\| \right\} \end{aligned} \quad (1.4)$$

où l'infimum est porté sur toutes les représentations de  $u$ .

**Définition 1.8.1** Soient  $X, Y$  deux espaces de Banach. Dans le but de définir la plus grande norme tensorielle, de la formule (1.4) on va considérer l'application suivante:

$$\pi : X \otimes Y \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$\forall u \in X \otimes Y : \pi(u) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \|x_i\| \|y_i\| \right\},$$

où l'infimum est porté sur toutes les représentations de  $u$ .

**Proposition 1.8.1** L'application  $\pi$  est une norme tensorielle raisonnable sur l'espace  $X \otimes Y$ . Elle s'appelle norme projective.

**Notation 1.8.1** On note  $X \otimes_{\pi} Y$  l'espace vectoriel  $X \otimes Y$  muni de la norme projective  $\pi$ . Généralement cet espace n'est pas complet sauf si  $X$  et  $Y$  sont de dimension fini. On complète donc l'espace  $X \otimes_{\pi} Y$  afin d'avoir un espace de Banach, on le note  $X \widehat{\otimes}_{\pi} Y$  qui sera appelé produit tensoriel projectif.

**Lemme 1.8.1** Soient  $u \in X \widehat{\otimes}_{\pi} Y$  et  $\varepsilon > 0$ , alors il existe une représentation de  $u$  de la forme  $u = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i$  telle que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| \|y_i\| \leq \pi(u) + \varepsilon.$$

**Théorème 1.8.1** Pour tout  $u \in X \widehat{\otimes}_{\pi} Y$  nous avons

$$\pi(u) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| \|y_i\| \right\},$$

où l'infimum est porté sur toutes les représentations de  $u$  de la forme  $u = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i$ .

**Dual du produit tensoriel projectif.** Soient  $X, Y$  et  $Z$  trois espaces de Banach. On note  $X \otimes Y$  le produit tensoriel algébrique de  $X, Y$  et  $X \widehat{\otimes}_{\pi} Y$  son produit tensoriel projectif i.e.; le complété de  $X \otimes Y$  pour la norme projective. Si  $X = Y$  on écrit simplement  $\widehat{\otimes}_{\pi}^2 X$ . Soit  $T : X \times Y \rightarrow Z$ , à  $T$  on associe la linéarisation  $\widetilde{T}, \widetilde{T} : X \widehat{\otimes}_{\pi} Y \rightarrow Z$  définie par

$$\widetilde{T} \left( \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right) = \sum_{i=1}^n T(x_i, y_i). \quad (1.5)$$

**Remarque 1.8.1** Dans la formule (1.5) on a utilisé une représentation finie de  $u$  malgré que l'espace de Banach  $X \widehat{\otimes}_\pi Y$  contient probablement d'autre représentation infinie de  $u$ . La continuité de  $\widetilde{T}$  sur l'espace  $X \otimes Y$  et la densité de  $X \otimes Y$  dans  $X \widehat{\otimes}_\pi Y$  permettons de redéfinir la formule en utilisant les représentations infinies.

**Proposition 1.8.2** L'opérateur linéaire  $\widetilde{T}$  est bien défini, unique et

$$\|\widetilde{T}\| = \|T\|.$$

Comme conséquence de ce qui précède on a le résultat suivant.

**Théorème 1.8.2** Nous avons l'identification isométrique suivante

$$\mathcal{L}(X \times Y; Z) = \mathcal{B}(X \widehat{\otimes}_\pi Y; Z),$$

$$\begin{array}{l} \text{via l'application} \quad \Phi : \mathcal{L}(X \times Y; Z) \rightarrow \mathcal{B}(X \widehat{\otimes}_\pi Y; Z) \\ T \quad \mapsto \quad \Phi(T) = \widetilde{T} \end{array}$$

**Cas particulier** Le dual de  $X \widehat{\otimes}_\pi Y$  s'identifie à l'espace des formes linéaires bornées

$$(X \widehat{\otimes}_\pi Y)^* = \mathcal{L}(X \times Y).$$

## 1.9 .Produit tensoriel injectif

La norme injective est la plus petite norme tensorielle qu'on peut munir l'espace  $X \otimes Y$ . Sa définition simple lui fait comme une norme importante et son utilisation ramène beaucoup de propriétés et applications intéressantes.

**Construction de la norme tenseoreille injectif.** Notons que les éléments du produit tensoriel  $X \otimes Y$  peuvent être vu comme des formes bilinéaires sur l'espace  $X^* \times Y^*$ . Si  $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$  une représentation quelconque de  $u$ , alors la forme bilinéaire associée est donnée par

$$B_u(x^*, y^*) = \sum_{i=1}^n x^*(x_i) y^*(y_i).$$

On constate donc que  $X \otimes Y$  se plonge canoniquement dans l'espace des formes bilinéaires  $\mathcal{L}(X^* \times Y^*)$ . On définit donc la *norme injective* sur  $X \otimes Y$  comme étant la norme induite par

ce plongement. Autrement dit, on voit tout élément de  $X \otimes Y$  comme une forme bilinéaire de  $\mathcal{L}(X^* \times Y^*)$  puis on calcul sa norme correspondante. En effet, soit  $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$ , sa norme dans  $\mathcal{L}(X^* \times Y^*)$  est

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{L}(X^* \times Y^*)} &= \sup_{x^* \in B_{X^*}, y^* \in B_{Y^*}} |B_u(x^*, y^*)| \\ &= \sup_{x^* \in B_{X^*}, y^* \in B_{Y^*}} \left| \sum_{i=1}^n x^*(x_i) y^*(y_i) \right|. \end{aligned}$$

**Définition 1.9.1** On définit la norme injective de  $u$  par

$$\varepsilon(u) = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n x^*(x_i) y^*(y_i) \right|, x^* \in B_{X^*}, y^* \in B_{Y^*} \right\}.$$

**Remarque 1.9.1** La norme injective est une norme induite de celle de l'espace des formes bilinéaires, c'est à dire elle vérifie toutes les hypothèses des normes classiques.

**Notation 1.9.1** On note  $X \otimes_\varepsilon Y$  le produit tensoriel  $X \otimes Y$  muni de la norme injective. Le complété de  $X \otimes_\varepsilon Y$  pour cette norme sera noté  $X \widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ , qui appelé le produit tensoriel injective de  $X$  et  $Y$ .

Nous avons maintenant quelques propriétés élémentaires de la norme injective.

**Proposition 1.9.1** Soient  $X, Y$  deux espaces de Banach, alors:

1. Pour tout  $u$  de  $X \otimes Y$  on a  $\varepsilon(u) \leq \pi(u)$ .
2.  $\varepsilon(x \otimes y) = \|x\| \|y\|$  pour chaque  $x \in X, y \in Y$ .
3. Si  $x^* \in X^*, y^* \in Y^*$ , alors  $x^* \otimes y^*$  est une forme linéaire bornée sur  $X \widehat{\otimes}_\varepsilon Y$  et

$$\|x^* \otimes y^*\| = \|x^*\| \|y^*\|.$$

# Chapitre 2

## Produit tensoriel de Chevet-Saphar

### 2.1 Introduction

Les normes de Chevet-Saphar sont des normes tensorielles qu'on peut munir l'espace  $X \otimes Y$ . Ces normes possèdent beaucoup de propriétés et applications intéressantes. Notons que le dual de l'espace de produit tensoriel de Chevet-Saphar coïncide avec la classe des opérateurs linéaires  $p$ -sommants.

### 2.2 Construction des normes tensorielles de Chevet-Saphar

Notons que les éléments du produit tensoriel  $X \otimes Y$  peuvent être vu comme des formes bilinéaires sur l'espace  $X^* \times Y^*$ . Si  $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$  une représentation quelconque de  $u$ , alors la forme bilinéaire associée est donnée par

$$B_u(x^*, y^*) = \sum_{i=1}^n x^*(x_i) y^*(y_i).$$

On constate donc que  $X \otimes Y$  se plonge canoniquement dans l'espace des formes bilinéaires  $\mathcal{L}(X^* \times Y^*)$ . Commençons par un autre regard à la définition de la norme injective sur le produit de tensoriel  $X \otimes Y$ . Nous nous rappelons que cette norme peut être définie en

enfonçant le produit tensoriel dans l'espace des opérateurs  $\mathcal{B}(X^*; Y)$ . Ainsi, soit  $u = \sum x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$ ,

$$\varepsilon(u) = \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^n x^*(x_i) y_i \right\| : x^* \in B_{X^*} \right\}.$$

Puisque  $\varepsilon$  est la plus petite norme tensoriel, nous recherchons une norme qui domine cette expression. Par l'inégalité de Hölder

$$\varepsilon(u) \leq \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left( \sum_{i=1}^n |x^*(x_i)|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \left( \sum_{i=1}^n \|y_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Cette formule dépend de la représentation choisie pour  $u$ . Nous arrivons donc à l'idée de la définition de norme de Chevet-Saphar

$$\|u\| = \inf \left\{ \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left( \sum_{i=1}^n |x^*(x_i)|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \left( \sum_{i=1}^n \|y_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\},$$

où l'infimum porte sur toutes les représentation de  $u$ .

## 2.3 Les normes de chevet-Saphar

Les normes de Chevet-Saphar sont définies pour  $1 \leq p \leq \infty$  comme suit

$$d_p(u) = \inf \left\{ \|(x_i)\|_{\ell_p^{n,w}(X)} \|(y_i)\|_{\ell_p^n(Y)} : u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right\}, \quad (2.1)$$

où l'infimum porte sur toutes les représentations de  $u \in X \otimes Y$ . Nous pouvons changer les roles des normes faibles et fortes dans (2.1) pour définir une autre norme tensorielle

$$g_p(u) = \inf \left\{ \|(x_i)\|_{\ell_p^n(X)} \|(y_i)\|_{\ell_p^{n,w}(Y)} : u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right\}. \quad (2.2)$$

**Définition 2.3.1** (Norme transposée) Soit  $\alpha$  une norme tensorielle sur  $X \otimes Y$ . La norme transposée de  $\alpha$ , notée  $\alpha^t$ , est une norme tensorielle sur  $Y \otimes X$  qui vérifie

$$\alpha^t \left( \sum_{i=1}^n y_i \otimes x_i \right) = \alpha \left( \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right),$$

dans ce cas nous avons

$$X \otimes_{\alpha} Y = Y \otimes_{\alpha^t} X.$$

**Proposition 2.3.1** *Clairement, nous avons*

$$g_p = d_p^t.$$

pour chaque  $p$ .

Il s'en suit que chaque propriété de  $d_p$  peut être interprétée comme propriété de  $g_p$  et vice versa. Nous avons aussi

$$X \otimes_{g_p} Y = Y \otimes_{d_p} X \quad (2.3)$$

Par fois on rencontre par des versions suivantes des normes de Chevet-Saphar

$$d_p(u) = \inf \left\{ \|(\lambda_i)\|_{\ell_p^n} \| (x_i) \|_{\ell_{p^*}^{n,w}(X)} \| (y_i) \|_{\ell_\infty^n(Y)} : u = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \otimes y_i \right\}, \quad (2.4)$$

naturellement, nous avons une variation semblable pour  $g_p$ . Pour prouver (2.4), dénotons l'expression donnée là par  $\delta_p(u)$  pour le moment. Nous notons d'abord que chaque représentation de  $u$  de la forme  $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \otimes y_i$  peut être écrite comme suite

$$\sum_{i=1}^n x_i \otimes (\lambda_i y_i),$$

et par conséquent

$$d_p(u) \leq \| (x_i) \|_{\ell_{p^*}^{n,w}(X)} \| (\lambda_i y_i) \|_{\ell_p^n(Y)} \leq \| (\lambda_i) \|_p \| (x_i) \|_{\ell_{p^*}^{n,w}(X)} \| (y_i) \|_{\ell_\infty^n(Y)}$$

de ce qu'il suit que

$$d_p(u) \leq \delta_p(u).$$

D'autre part, laisser  $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$  être une représentation de  $u$ . Nous pouvons écrire  $u$  en

tant que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \otimes z_i$ , où  $\lambda_i = \|y_i\|$  et  $\|z_i\| \leq 1$  pour chaque  $i$ . Puis

$$\delta_p(u) \leq \| (y_i) \|_{\ell_p^n(Y)} \| (x_i) \|_{\ell_{p^*}^{n,w}(X)}$$

et par conséquent

$$\delta_p(u) \leq d_p(u).$$

**Proposition 2.3.2** *Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach. Soit  $p \in [1, \infty]$ , alors  $g_p$  est une norme tesorielle sur  $X \otimes Y$ .*

**Preuve.** Il est clair que pour tout  $u \in X \otimes Y$  et tout scalaire  $\alpha$  nous avons

$$g_p(u) \geq 0 \quad \text{et} \quad g_p(\alpha u) = |\alpha| g_p(u).$$

Soient  $y^* \in Y^*$ ,  $x^* \in X^*$  et  $u \in X \otimes Y$ . L'action de  $(x^*, y^*)$  sur  $u$  est donnée par

$$|\langle (x^*, y^*), u \rangle| = \left| \sum_{i=1}^n x^*(x_i) y^*(y_i) \right|.$$

Alors,

$$\begin{aligned} |\langle (x^*, y^*), u \rangle| &= \left| \sum_{i=1}^n x^*(x_i) y^*(y_i) \right| \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^n |x^*(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n |y^*(y_i)|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq \|x^*\| \|y^*\| \|(x_i)_i\|_{\ell_p^n(X)} \|(y_i)_i\|_{\ell_{p^*}^{n,w}(Y)}. \end{aligned}$$

Par prendre l'infimum sur toutes les représentation de  $u$ , on obtient

$$|\langle (x^*, y^*), u \rangle| \leq \|x^*\| \|y^*\| g_p(u).$$

Maintenant, supposons que  $g_p(u) = 0$ , alors pour tout  $x^* \in X^*$  et  $y^* \in Y^*$

$$0 = \langle (x^*, y^*), u \rangle = \sum_{i=1}^n x^*(x_i) y^*(y_i),$$

par la Proposition 1.7.2, on a

$$u = 0.$$

On montre maintenant l'inégalité triangulaire pour  $g_p$ . Soient  $u_1, u_2 \in X \otimes Y$ , Soit  $\varepsilon > 0$ .

Par la définition de  $g_p$  on peut trouver une représentation de  $u_1$

$$u_1 = \sum_{i=1}^l x_{1i} \otimes y_{1i},$$

telle que

$$\|(x_{1i})_i\|_{\ell_p^l(X)} \|(y_{1i})_i\|_{\ell_{p^*}^{l,w}(Y)} \leq g_p(u_1) + \varepsilon.$$

Remplaçons  $(x_{1i})$  et  $(y_{1i})$  par

$$x_{1i} = \frac{x_{1i}}{\|(x_i)_i\|_{\ell_p^l(X)}^{\frac{1}{p^*}} \|(y_{1i})_i\|_{\ell_{p^*}^{l,w}(Y)}}, \quad y_{1i} = \frac{y_{1i}}{\|(y_{1i})_i\|_{\ell_{p^*}^{l,w}(Y)}^{\frac{1}{p}} \|(x_i)_i\|_{\ell_p^l(X)}}$$

on trouve

$$\|(x_{1i})_i\|_{\ell_p^l(X)} \leq (g_p(u_1) + \varepsilon)^{\frac{1}{p}}, \quad \|(y_{1i})_i\|_{\ell_{p^*}^{l,w}(Y)} \leq (g_p(u_1) + \varepsilon)^{\frac{1}{p^*}}.$$

Même chose pour  $u_2$ , on choisi une représentation

$$u_2 = \sum_{i=1}^s x_{2i} \otimes y_{2i},$$

telle que

$$\|(x_{2i})_i\|_{\ell_p^s(X)} \|(y_{2i})_i\|_{\ell_{p^*}^{s,w}(Y)} \leq g_p(u_2) + \varepsilon.$$

Encore, remplaçons  $(x_{2i})$  et  $(y_{2i})$  comme dans la précédente on obtient

$$\|(x_{2i})_i\|_{\ell_p^s(X)} \leq (g_p(u_2) + \varepsilon)^{\frac{1}{p}}, \quad \|(y_{2i})_i\|_{\ell_{p^*}^{s,w}(Y)} \leq (g_p(u_2) + \varepsilon)^{\frac{1}{p^*}}.$$

Donc nous avons

$$\begin{aligned} & g_p(u_1 + u_2) \\ & \leq \left( \|(x_{1i})_i\|_{\ell_p^l}^p + \|(x_{2i})_i\|_{\ell_p^s}^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \|(y_{1i})_i\|_{\ell_{p^*}^{l,w}(Y)}^{p^*} + \|(y_{2i})_i\|_{\ell_{p^*}^{s,w}(Y)}^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ & \leq (g_p(u_1) + g_p(u_2) + 2\varepsilon)^{\frac{1}{p}} (g_p(u_1) + g_p(u_2) + 2\varepsilon)^{\frac{1}{p^*}} \\ & \leq g_p(u_1) + g_p(u_2) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

En faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, on obtient l'inégalité triangulaire pour  $g_p$ . ■

**Remarque 2.3.1** Avec un argument similaire de celle de Proposition précédente, on peut établir que  $d_p$  est norme tensorielle sur  $X \otimes Y$ .

**Notation 2.3.1** On note  $X \otimes_{g_p} Y$  le produit tensoriel  $X \otimes Y$  muni de la norme  $g_p$  et  $X \otimes_{d_p} Y$  le produit tensoriel  $X \otimes Y$  muni de la norme  $d_p$ . Le complété de  $X \otimes_{g_p} Y$  et  $X \otimes_{d_p} Y$  seront notés  $X \widehat{\otimes}_{g_p} Y$  et  $X \widehat{\otimes}_{d_p} Y$  respectivement, qui sont appelés le produit tensoriel de Chevet-Saphar de  $X$  et  $Y$ .

Il est facile de montrer la Proposition suivante.

**Proposition 2.3.3** *Pour tout  $1 \leq p, q \leq \infty$ ,  $d_p$  et  $g_p$  sont des normes tensorielles. Si  $p \leq q$  alors*

$$d_p \geq d_q \quad \text{et} \quad g_p \geq g_q.$$

Si  $p = 1$ , on a

$$d_1 = g_1 = \pi.$$

Nous avons maintenant quelques propriétés élémentaires des norme de Chevet-Saphar.

**Théorème 2.3.1** *Soient  $X, Y$  deux espaces de Banach, alors:*

1. *Pour tout  $1 \leq p \leq \infty$  et  $u$  de  $X \otimes Y$  on a*

$$g_p(u) \leq \pi(u).$$

2.  *$g_p(x \otimes y) = \|x\| \|y\|$  pour chaque  $x \in X, y \in Y$ .*

3. *Si  $x^* \in X^*, y^* \in Y^*$ , alors  $x^* \otimes y^*$  est une forme linéaire bornée sur  $X \widehat{\otimes}_{g_p} Y$  et*

$$g_p(x^* \otimes y^*) = \|x^*\| \|y^*\|.$$

**Preuve.**

1. Soit  $u \in X \otimes Y$  tel que  $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ . Nous avons

$$\begin{aligned} g_p(u) &= \inf \left\{ \|(x_i)\|_p \|(y_i)\|_{p^*}^w : u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right\} \leq \|(x_i)\|_p \|(y_i)\|_{p^*}^w \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \left( \sum_{i=1}^n |y^*(y_i)|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n \|y_i\|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}}, \end{aligned}$$

en substituant  $x_i$  par  $\frac{x_i}{\|x_i\|^{\frac{p-1}{p}} \|y_i\|^{-\frac{1}{p}}}$  et  $y_i$  par  $\frac{y_i}{\|y_i\|^{\frac{p^*-1}{p^*}} \|x_i\|^{-\frac{1}{p^*}}}$  on obtient

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\|x_i\|^{\frac{p-1}{p}} \|y_i\|^{-\frac{1}{p}}} \otimes \frac{y_i}{\|y_i\|^{\frac{p^*-1}{p^*}} \|x_i\|^{-\frac{1}{p^*}}} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i \otimes y_i}{\|x_i\|^{\frac{p-1}{p} - \frac{1}{p^*}} \|y_i\|^{\frac{p^*-1}{p^*} - \frac{1}{p}}},$$

en remarquant que  $\frac{p-1}{p} - \frac{1}{p^*} = 0$  et  $\frac{p^*-1}{p^*} - \frac{1}{p} = 0$ , alors

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\|x_i\|^{\frac{p-1}{p}} \|y_i\|^{-\frac{1}{p}}} \otimes \frac{y_i}{\|y_i\|^{\frac{p^*-1}{p^*}} \|x_i\|^{-\frac{1}{p^*}}} = u.$$

Alors,

$$\begin{aligned} g_p(u) &\leq \left( \sum_{i=1}^n \left\| \frac{x_i}{\|x_i\|^{\frac{p-1}{p}} \|y_i\|^{-\frac{1}{p}}} \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n \left\| \frac{y_i}{\|y_i\|^{\frac{p^*-1}{p^*}} \|x_i\|^{-\frac{1}{p^*}}} \right\|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^n \frac{\|x_i\|^p}{\|x_i\|^{p-1} \|y_i\|^{-1}} \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\|y_i\|^{p^*}}{\|y_i\|^{p^*-1} \|x_i\|^{-1}} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|x_i\| \|y_i\|, \end{aligned}$$

en prenant l'infimum sur toutes les représentations de  $u$ , on trouve

$$g_p(u) \leq \pi(u).$$

2. Nous avons

$$\begin{aligned} g_p(x \otimes y) &= \inf \left\{ \|x\|_p \|y\|_{p^*}^w : u = x \otimes y \right\} \\ &= \inf \left\{ \|x\| \|y\| : u = x \otimes y \right\} \\ &= \|x\| \|y\|. \end{aligned}$$

3. Soient  $x^* \in X^*$ ,  $y^* \in Y^*$ , l'action de  $x^* \otimes y^*$  sur un élément  $u \in X \widehat{\otimes}_{g_p} Y$  est donnée par

$$x^* \otimes y^*(u) = \sum_{i=1}^n x^*(x_i) y^*(y_i).$$

Alors, d'une part

$$\begin{aligned}
 \|x^* \otimes y^*\| &= \sup_{g_p(u) \leq 1} |x^* \otimes y^*(u)| \\
 &= \sup_{g_p(u) \leq 1} \left| \sum_{i=1}^n x^*(x_i) y^*(y_i) \right| \\
 &\leq \|x^*\| \|y^*\| \sup_{g_p(u) \leq 1} \left| \sum_{i=1}^n \frac{x^*(x_i)}{\|x^*\|} \frac{y^*(y_i)}{\|y^*\|} \right| \\
 &\leq \|x^*\| \|y^*\| \sup_{g_p(u) \leq 1} \left( \sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n \left| \frac{y^*(y_i)}{\|y^*\|} \right|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\
 &\leq \|x^*\| \|y^*\| \sup_{g_p(u) \leq 1} \|x_i\|_{\ell_p^n(X)} \|y_i\|_{\ell_{p^*}^{n,w}(Y)},
 \end{aligned}$$

en prenant l'infimum sur toutes les représentations de  $u$ , on trouve

$$\|x^* \otimes y^*\| \leq \|x^*\| \|y^*\| \sup_{g_p(u) \leq 1} g_p(u) = \|x^*\| \|y^*\|.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
 \|x^*\| \|y^*\| &= \sup_{\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1} |x^*(x) y^*(y)| \\
 &= \sup_{\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1} |x^* \otimes y^*(x, y)| \\
 &\leq \sup_{g_p(u)=1} |x^* \otimes y^*(u)| = \|x^* \otimes y^*\|.
 \end{aligned}$$

■

**Proposition 2.3.4** *Soient  $X, Y$  deux espaces de Banach, alors pour tout  $1 \leq p \leq \infty$  et  $u$  de  $X \otimes Y$  on a*

$$\varepsilon(u) \leq g_p(u).$$

**Preuve.** Soit  $u \in X \otimes Y$  tel que  $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ . Nous avons

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(u) &= \sup_{x^* \in B_{X^*}, y^* \in B_{Y^*}} \left| \sum_{i=1}^n x^*(x_i) y^*(y_i) \right| \\
 &\leq \sup_{x^* \in B_{X^*}, y^* \in B_{Y^*}} \sum_{i=1}^n |x^*(x_i) y^*(y_i)|.
 \end{aligned}$$

Par Hölder on trouve

$$\begin{aligned} \varepsilon(u) &\leq \sup_{x^* \in B_{X^*}, y^* \in B_{Y^*}} \left( \sum_{i=1}^n |x^*(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n |y^*(y_i)|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \left( \sum_{i=1}^n |y^*(y_i)|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \end{aligned}$$

en prenant l'infimum sur toutes les représentations de  $u$ , on obtient

$$\varepsilon(u) \leq g_p(u).$$

Avec un argument similaire au précédent on peut démontrer le résultat suivant. ■

**Théorème 2.3.2** *Soient  $X, Y$  deux espaces de Banach, alors:*

1. *Pour tout  $1 \leq p \leq \infty$  et  $u$  de  $X \otimes Y$  on a*

$$\varepsilon(u) \leq d_p(u) \leq \pi(u).$$

2.  *$d_p(x \otimes y) = \|x\| \|y\|$  pour chaque  $x \in X, y \in Y$ .*

3. *Si  $x^* \in X^*, y^* \in Y^*$ , alors  $x^* \otimes y^*$  est une forme linéaire bornée sur  $X \widehat{\otimes}_{d_p} Y$  et*

$$d_p(x^* \otimes y^*) = \|x^*\| \|y^*\|.$$

# Chapitre 3

## Les opérateurs linéaires $p$ -sommants

Nous allons étudier dans ce chapitre les opérateurs linéaires  $p$ -sommants et Cohen fortement  $p$ -sommants. Une relation importante entre ces dernières classes et le dual de produit tensoriel de Chevet-Saphar sera établie.

### 3.1 Opérateurs de rang fini

**Définition 3.1.1** (*Opérateurs de rang fini*). Un opérateur linéaire  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$  est de rang fini si

$$\dim(\operatorname{Im}(T)) < \infty.$$

L'espace des opérateurs de rang fini sera noté  $\mathcal{B}_f(X, Y)$ .

**Exemple 3.1.1 i)**

$$\begin{aligned} T : X &\rightarrow Y \\ x &\longmapsto T(x) = 0 \end{aligned}$$

est de rang fini (l'opérateur nul) et  $\dim(\operatorname{Im}(T)) = 0$ .

**ii)** Si  $\dim(X) = m$ , alors tous les opérateurs linéaires définies de  $X$  dans  $Y$  ( $Y$  est un espace de Banach quelconque) est de rang fini. En effet

$$\dim(\operatorname{Im}(T)) \leq \dim(X) = m.$$

iii) Tout forme linéaire  $x^* \in X^*$  est de rang fini. En effet

$$x^*(X) = \begin{cases} \{0\} \\ \mathbb{R} \end{cases}$$

si  $x^* \neq 0$ , alors il existe  $x_0 \in X$  tels que  $x^*(x_0) \neq 0$ . Posons  $x_1 = \frac{x_0}{x^*(x_0)}$ .

Donc  $x^*(x_1) = 1$  et  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ , on a

$$x^*(\lambda x_1) = \lambda x^*(x_1) = \lambda.$$

**Proposition 3.1.1** Soit  $T : X \rightarrow Y$  opérateur linéaire. Donc,  $T$  est de rang fini si et seulement s'il existe  $x_i^* \in X^*$ ,  $y_i \in Y$  tels que

$$T(x) = \sum_{i=1}^n x_i^*(x) y_i \text{ pour tout } x \in X.$$

## 3.2 Les opérateurs $p$ -sommants

Les opérateurs linéaires  $p$ -sommants sont introduits par Pietsch en 1967 pour tout  $p$ . Pietsch a montré son célèbre théorème de factorisation avec quelques propriétés fondamentales.

**Définition 3.2.1** Soient  $X, Y$  deux Banach et  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ . On dit que  $T$  est  $p$ -sommant pour  $1 \leq p < \infty$  s'il existe une constante  $C > 0$ , telle que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\forall x_1, \dots, x_n \subset X$  on a

$$\left( \sum_{i=1}^n \|T(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left( \sum_{i=1}^n |x^*(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.1)$$

On note par  $\Pi_p(X; Y)$  l'espace de Banach de tous les opérateurs linéaires  $p$ -sommants entre  $X$  et  $Y$  avec la norme suivante

$$\pi_p(T) = \inf\{C, \text{ vérifiant (3.1)}\}.$$

**Exemple 3.2.1** Tout opérateur de rang fini est  $p$ -sommant pour tout  $1 \leq p < \infty$ .

**Exemple 3.2.2** Soit  $K$  un espace compact de Hausdorff, soit  $\mu$  une mesure positive sur  $K$  et soit  $1 \leq p < \infty$ . Pour tout  $\varphi \in L_p(\mu)$ , on définit l'opérateur de multiplication

$$\begin{aligned} T_\varphi : C(K) &\longrightarrow L_p(\mu) \\ f &\longmapsto f \cdot \varphi \end{aligned}$$

cet opérateur est linéaire et  $p$ -sommant de plus

$$\pi_p(T) = \|\varphi\|_{L_p}.$$

**Exemple 3.2.3** L'opérateur canonique

$$\begin{aligned} J_p : C(K) &\longrightarrow L_p(\mu) \\ f &\longmapsto f \end{aligned}$$

est  $p$ -sommant de plus

$$\pi_p(J_p) = \mu(K)^{\frac{1}{p}}.$$

**Proposition 3.2.1** Soient  $T \in \Pi_p(X, Y)$ ,  $v : E \longrightarrow X$  linéaire continue et  $w : Y \longrightarrow F$  linéaire continue. Alors,

$wTv$  est  $p$ -sommant et

$$\pi_p(wTv) \leq \|w\| \pi_p(T) \|v\|.$$

**Preuve.** Nous avons,

$$\|wTv(x)\| \leq \|w\| \|T(v(x))\|, \quad \forall x \in E.$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $x_1, \dots, x_n$  dans  $E$  alors  $\{v(x_1), \dots, v(x_n)\} \subset X$ , donc

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^n \|T(v(x_i))\|^p \right)^{1/p} &\leq \pi_p(T) \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left( \sum_{i=1}^n |\langle v(x_i), x^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \\ &\leq \pi_p(T) \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left( \sum_{i=1}^n |\langle x_i, v^*(x^*) \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

On pose  $\eta = \frac{v^*(\xi)}{\|v\|} \in B_{E^*}$ , donc

$$\left( \sum_{i=1}^n \|T(v(x_i))\|^p \right)^{1/p} \leq \pi_p(T) \|v\| \sup_{\eta \in B_{E^*}} \left( \sum_{i=1}^n |\langle x_i, \eta \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

d'où

$$\left( \sum_{i=1}^n \|wTv(x_i)\|^p \right)^{1/p} \leq \|w\| \pi_p(T) \|v\| \sup_{\eta \in B_{E^*}} \left( \sum_{i=1}^n |\langle x_i, \eta \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

et par conséquent  $wTv \in \Pi_p(E, Z)$  et

$$\pi_p(wTv) \leq \|w\| \pi_p(T) \|v\|.$$

■

**Corollaire 3.2.1** *Soit  $X_0$  un sous espace d'un Banach  $X$  et  $T \in \Pi_p(X, Y)$ . Alors*

$$T/X_0 \in \Pi_p(X_0, Y) \text{ et } \pi_p(T/X_0) \leq \pi_p(T).$$

**Proposition 3.2.2** *(Injectivité). Si  $i : Y_0 \rightarrow Y$  est une isométrie, alors*

$$T \in \Pi_p(X, Y_0) \iff iT \in \Pi_p(X, Y)$$

Dans ce cas, on a

$$\pi_p(T) = \pi_p(iT).$$

**Théorème 3.2.1** *(Théorème d'inclusion). Soit  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$  et  $1 \leq p < q < \infty$ . On a*

$$\Pi_p(X, Y) \subset \Pi_q(X, Y),$$

et

$$\pi_q(T) \leq \pi_p(T).$$

**Preuve.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $x_1, \dots, x_n \subset X$ . On pose  $\lambda_i = \|T(x_i)\|^{(\frac{q}{p})-1}$ , alors

$$\|T(x_i)\|^q = \|T(\lambda_i x_i)\|^p.$$

Comme  $T$  est  $p$ -sommant, on a

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^n \|T(x_i)\|^q \right)^{\frac{1}{p}} &= \left( \sum_{i=1}^n \|T(\lambda_i x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \\ &\leq \pi_p(T) \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i^p |x^*(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Puisque  $p < q$  et d'après l'inégalité de Hölder ( $\frac{1}{(q/p)} + \frac{1}{(q/q-p)} = 1$ ), on obtient

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^n \|T(x_i)\|^q \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \pi_p(T) \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i^{\frac{pq}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{pq}} \cdot \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left( \sum_{i=1}^n |\langle x_i, x^* \rangle| \right)^{\frac{1}{q}}, \\ &\leq \pi_p(T) \left( \sum_{i=1}^n \|T(x_i)\|^q \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \cdot \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left( \sum_{i=1}^n |x^*(x_i)|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Ce qui entraîne que

$$\left( \sum_{i=1}^n \|T(x_i)\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \pi_p(T) \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left( \sum_{i=1}^n |x^*(x_i)|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

et par conséquent  $T$  est  $q$ -sommant et  $\pi_q(T) \leq \pi_p(T)$ . ■

### 3.3 Théorème de factorisation de Pietsch

Le théorème suivant dû à Pietsch établit une caractérisation importante des opérateurs  $p$ -sommant. Comme la démonstration de ce Théorème est très connue on va l'omettre.

**Théorème 3.3.1** *Soit  $T : X \rightarrow Y$  un opérateur linéaire.  $T$  est  $p$ -sommant et  $1 \leq p < \infty$  si et seulement s'il existe une probabilité de radon  $\lambda$  sur  $(B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$ , une constante  $C > 0$  telles que*

$$\forall x \in X, \|T(x)\| \leq C \left( \int_{B_{X^*}} |x^*(x)|^p d\lambda(x^*) \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.2)$$

Nous avons

$$\pi_q(T) = \inf \{ C : \text{vérifiant l'inégalité (3.2)} \}.$$

**Remarque 3.3.1 (importante).** *L'inégalité (3.2) de Pietsch implique qu'il existe  $\tilde{T}$  dans  $\mathcal{B}(S_p, Y)$  tel que le diagramme suivant soit commutatif*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ i \downarrow & & \uparrow \tilde{T} \\ S & \xrightarrow{j/S} & S_p \\ \cap & & \cap \\ C(K) & \xrightarrow{j} & L_p(K, \lambda) \end{array}$$

avec  $T = \tilde{T} \circ j/S \circ i$  et  $\|\tilde{T}\| = \pi_p(T)$ .

Où  $K = (B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$ ,  $C(K) = \{\text{des fonctions continues sur } K\}$ ,  $i : X \longrightarrow S$ ,  $i(x) = \varphi_x$  qui est une isométrie injective,  $j : C(K) \longrightarrow L_p(K, \lambda)$  est l'injection naturelle, et  $\pi_p(j) = 1$  ( $j/S$  est  $j$  restreint à  $S$ ),  $S_p = \overline{\overline{j(S)}^{L_p(K, \lambda)}}$ .

**Corollaire 3.3.1** *Si  $T$  est 2-sommant alors  $T$  se factorise par  $L_\infty(K, \lambda)$  et  $L_2(K, \lambda)$ .*

**Proposition 3.3.1** *Soit  $X_0$  un sous espace d'un Banach  $X$  et  $T \in \Pi_2(X_0, Y)$ . Alors il existe une extension sous linéaire de  $T$ , soit  $\tilde{T} : X \longrightarrow Y$ , 2-sommant et  $\pi_2(\tilde{T}) \leq \pi_2(T)$ .*

### 3.4 Les opérateurs Cohen fortement $p$ -sommants

Soit  $u : X \rightarrow Y$  un opérateur linéaire entre espaces de Banach. On définit l'opérateur adjoint de  $u$  par  $u^* : Y^* \rightarrow X^*$  tel que:  $y^* \rightarrow u^*(y^*)$ , où  $u^*(y^*) : X \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $x \rightarrow u^*(y^*)(x) = y^*(u(x))$ . Pietsch en 1967 a montré que l'opérateur identité de  $l_1$  dans  $l_2$ , qui est 2-sommant, a un adjoint qui n'est pas 2-sommant.

**Définition 3.4.1** *Un opérateur  $u$  entre espaces de Banach  $X, Y$  est Cohen fortement  $p$ -sommant ( $1 < p \leq \infty$ ) s'il existe une constante positive  $C$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, \dots, x_n \in X$  et  $y_1^*, \dots, y_n^* \in Y^*$ , on a*

$$\sum_{i=1}^n |\langle u(x_i), y_i^* \rangle| \leq C \left( \sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \|(y_i^*(y))\|_{l_p^{n*}}. \quad (3.3)$$

La plus petite constante  $C$ , notée  $d_p(u)$ , telle que l'inégalité (3.3) a lieu, définit la norme fortement  $p$ -sommante sur l'espace de Banach  $\mathcal{D}_p(X, Y)$  de tous les opérateurs Cohen fortement  $p$ -sommants de  $X$  dans  $Y$ .  $\mathcal{D}_1(X, Y)$  coïncide avec  $\mathcal{B}(X, Y)$  l'espace  $\mathcal{B}(X, Y)$  des opérateurs bornés de  $X$  dans  $Y$ .

**Proposition 3.4.1** *Propriété d'idéal. Si  $T \in \mathcal{D}_p(X; Y)$  et  $u \in \mathcal{B}(G; X)$ ,  $v \in \mathcal{B}(Y; Z)$ , alors  $v \circ T \circ u$  est dans  $\mathcal{D}_p(G; Z)$  et*

$$d_p^m(v \circ T \circ u) \leq \|v\| d_p^m(T) \|u\|.$$

**Proposition 3.4.2** *L'espace  $\mathcal{D}_p(X, Y)$  contient tous les opérateurs linéaires de rang fini.*

**Preuve.** Il suffit de montrer la propriété pour les opérateurs de la forme

$$\begin{aligned} T &= x^* \otimes y. \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), y_i^* \rangle| \\ &= \sum_{i=1}^n |\langle x^*(x_i) y, y_i^* \rangle| = \sum_{i=1}^n |x^*(x_i)| |\langle y, y_i^* \rangle| \end{aligned}$$

par Hölder

$$\begin{aligned} &\leq \left( \sum_{i=1}^n |x^*(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n |\langle y, y_i^* \rangle|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq \|y\| \|x^*\| \left( \sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \|(y_i^*(y))\|_{\ell_{p^*}^n}. \end{aligned}$$

D'où,  $T \in \mathcal{D}_p(X, Y)$  et

$$d_p(T) = \|y\| \|x^*\|.$$

■

## 3.5 L'opérateur adjoint d'un opérateur linéaire

Soient  $X, Y$  deux espaces de Banach. Si  $T \in \mathcal{B}(X; Y)$ , on définit l'adjoint de  $T$  :

$$T^* : Y^* \rightarrow X^*, \quad y^* \mapsto T^*(y^*) : X \rightarrow \mathbb{R}$$

par  $T^*(y^*)(x) = y^*(T(x))$ . Une question naturelle est d'étudier la connexion entre les opérateurs linéaires et leurs adjoints pour la notion de sommabilité.

**Théorème 3.5.1** *Soit  $1 < p \leq \infty$ . Soient  $T \in \mathcal{B}(X; Y)$  et  $T^*$  son adjoint. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

1.  $T$  est Cohen fortement  $p$ -sommant.

2. Il existe une probabilité de Radon  $\mu$  sur  $B_{Y^{**}}$  telle que, pour tout  $x \in X$ , et tout  $y^* \in L_{p^*(\mu)}$

$$|\langle T(x), y^* \rangle| \leq C \|x\|_X \|y^*\|_{L_{p^*(\mu)}}. \quad (3.4)$$

**Corollaire 3.5.1** *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

- (1)  $T$  est Cohen fortement  $p$ -sommant.
- (2)  $T^*$  est un opérateur linéaire  $p^*$ -sommant.

De plus

$$d_p(T) = \pi_{p^*}(T^*) = \inf \{C \text{ vérifiant (3.4)}\}.$$

**Preuve.** (1) $\Rightarrow$ (2) Supposons que  $T$  est Cohen fortement  $p$ -sommant,

$$|\langle T(x), y^* \rangle| \leq d_p(T) \|x\| \left( \int_{B_{Y^{**}}} |y^{**}(y^*)|^{p^*} d\mu(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}}$$

pour tout  $x \in X$  et  $y^* \in Y^*$ . Alors

$$\|T^*(y^*)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |T^*(y^*)(x)| \leq d_p(T) \left( \int_{B_{Y^{**}}} |y^{**}(y^*)|^{p^*} d\mu(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}}.$$

Par le théorème de domination de Pietsch,  $T^* \in \Pi_{p^*}(Y^*; X^*)$  et

$$\pi_{p^*}(T^*) \leq d_p(T).$$

(2) $\Rightarrow$ (1) Supposons que  $T^* \in \Pi_{p^*}(Y^*; X^*)$ . Nous avons

$$\begin{aligned} |\langle T(x), y^* \rangle| &= |T^*(y^*)(x)| \\ &\leq \|T^*(y^*)\| \|x\|. \end{aligned}$$

Par le théorème de domination de Pietsch pour les opérateurs linéaire  $p^*$ -sommants

$$|\langle T(x), y^* \rangle| \leq \pi_{p^*}(T^*) \|x\| \left( \int_{B_{Y^{**}}} |y^{**}(y^*)|^{p^*} d\mu(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}}.$$

Donc,  $T$  est Cohen fortement  $p$ -sommant et

$$d_p(T) \leq \pi_{p^*}(T^*).$$

■

### 3.6 L'espace dual de $X \widehat{\otimes}_{g_p} Y$ et $X \widehat{\otimes}_{d_p} Y$

Nous allons dans ce paragraphe montrer que le dual  $X \widehat{\otimes}_{g_p} Y$  et  $X \widehat{\otimes}_{d_p} Y$  coïncide avec l'espace des opérateurs  $p$ -sommants et Cohen fortement  $p$ -sommants. Revenons à la définition des

normes de Chevet-Saphar d'un élément  $u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j$  de  $X \otimes Y$

$$d_p(u) = \inf \left\{ \|(x_i)\|_{\ell_p^{n,w}(X)} \|(y_i)\|_{\ell_p^n(Y)} : u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right\},$$

où l'infimum porte sur toutes les représentations de  $u \in X \otimes Y$ ,

$$g_p(u) = \inf \left\{ \|(x_i)\|_{\ell_p^n(X)} \|(y_i)\|_{\ell_p^{n,w}(Y)} : u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right\}.$$

**Théorème 3.6.1** *L'espace des opérateurs linéaires  $p^*$ -sommants de  $X$  dans  $Y^*$  coïncide avec le dual du produit tensoriel de Chevet-Saphar. C'est à dire nous avons*

$$(X \widehat{\otimes}_{d_p} Y)^* = \Pi_{p^*}(X; Y^*) \text{ isométriquement.}$$

**Preuve.** On pose l'application suivante

$$\begin{aligned} \Psi : \Pi_{p^*}(X; Y^*) &\rightarrow (X \widehat{\otimes}_{d_p} Y)^* \\ T &\mapsto \Psi(T) \end{aligned}$$

où

$$\Psi(T)(u) = \sum_{i=1}^n \langle T(x_i), y_i \rangle.$$

Montrons que  $\Psi$  est isomorphisme isométrique. Soit  $T \in \Pi_{p^*}(X; Y^*)$ , alors

$$\|\Psi(T)\| = \sup_{u \in B_{X \widehat{\otimes}_{d_p} Y}} |\Psi(T)(u)| = \sup_{u \in B_{X \widehat{\otimes}_{d_p} Y}} \left| \sum_{i=1}^n \langle T(x_i), y_i \rangle \right|$$

par Hölder, on trouve

$$\begin{aligned} \|\Psi(T)\| &\leq \sup_{u \in B_{X \widehat{\otimes}_{d_p} Y}} \left( \sum_{i=1}^n \|T(x_i)\|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \left( \sum_{i=1}^n \|y_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup_{u \in B_{X \widehat{\otimes}_{d_p} Y}} \pi_{p^*}(T) \|(x_i)\|_{\ell_p^{n,w}(X)} \|(y_i)\|_{\ell_p^n(Y)} \\ &\leq \pi_{p^*}(T) \sup_{u \in B_{X \widehat{\otimes}_{d_p} Y}} \inf \left\{ \|(x_i)\|_{\ell_p^{n,w}(X)} \|(y_i)\|_{\ell_p^n(Y)} \right\} \\ &\leq \pi_{p^*}(T) \sup_{u \in B_{X \widehat{\otimes}_{d_p} Y}} d_p(u) = \pi_{p^*}(T). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
 \left( \sum_{i=1}^n \|T(x_i)\|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} &= \sup_{\|(y_i)_{i=1}^n\|_{\ell_p^n(Y)} \leq 1} \left\| \sum_{i=1}^n \langle T(x_i), y_i \rangle \right\| = \sup_{\|(y_i)_{i=1}^n\|_{\ell_p^n(Y)} \leq 1} \|\Psi(T)(u)\| \\
 &\leq \sup_{\|(y_i)_{i=1}^n\|_{\ell_p^n(Y)} \leq 1} \|\Psi(T)\| d_p(u) \\
 &\leq \sup_{\|(y_i)_{i=1}^n\|_{\ell_p^n(Y)} \leq 1} \|\Psi(T)\| \| (x_i) \|_{\ell_{p^*}^{n,w}(X)} \| (y_i) \|_{\ell_p^n(Y)} \\
 &\leq \|\Psi(T)\| \| (x_i) \|_{\ell_{p^*}^{n,w}(X)}.
 \end{aligned}$$

comme  $T : X \rightarrow Y^*$  est  $p^*$ -sommant on a

$$\pi_{p^*}(T) \leq \|\Psi(T)\|,$$

finalement nous avons

$$\|\Psi(T)\| = \pi_{p^*}(T).$$

Alors,  $\Psi$  est isométrique. Il reste donc de vérifier que  $\Psi$  est surjective: Soit  $B \in (X \widehat{\otimes}_{d_p} Y)^*$ .

On associe à  $B$  l'opérateur suivant

$$T_B : X \rightarrow Y^*,$$

définie par

$$T_B(x)(y) = B(x \otimes y).$$

Montrons que  $T_B$  est  $p^*$ -sommant et que  $\Psi(T_B) = B$ . Montrons que  $\Psi(T_B)$  est  $p^*$ -sommant

$$\begin{aligned}
 \left( \sum_{i=1}^n \|T_B(x_i)\|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} &= \sup_{\|(y_i)_{i=1}^n\|_{\ell_p^n(Y)} \leq 1} \left\| \sum_{i=1}^n \langle T(x_i), y_i \rangle \right\| = \sup_{\|(y_i)_{i=1}^n\|_{\ell_p^n(Y)} \leq 1} \left\| \sum_{i=1}^n B(x_i \otimes y_i) \right\| \\
 &= \sup_{\|(y_i)_{i=1}^n\|_{\ell_p^n(Y)} \leq 1} \left\| B \left( \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right) \right\| \leq \sup_{\|(y_i)_{i=1}^n\|_{\ell_p^n(Y)} \leq 1} \|B\|_{d_p} d_p(u) \\
 &\leq \sup_{\|(y_i)_{i=1}^n\|_{\ell_p^n(Y)} \leq 1} \|B\|_{d_p} \| (x_i) \|_{\ell_{p^*}^{n,w}(X)} \| (y_i) \|_{\ell_p^n(Y)} \leq \|B\|_{d_p} \| (x_i) \|_{\ell_{p^*}^{n,w}(X)}
 \end{aligned}$$

donc,  $T_B$  est bien  $p^*$ -sommant. Il reste de voir que  $\Psi(T_B) = B$ . En effet,

$$\begin{aligned}
 \Psi(T_B)(u) &= \sum_{i=1}^n \langle T_B(x_i), y_i \rangle = \sum_{i=1}^n B(x_i \otimes y_i) \\
 &= B \left( \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right) = B(u).
 \end{aligned}$$

Alors  $\Psi$  est surjective et par conséquent que on a l'identification souhaitée. ■

Par un argument analogue à celle du Théorème précédent on peut facilement montrer le résultat suivant.

**Théorème 3.6.2** *L'espace des opérateurs linéaires Cohen fortement  $p$ -sommants de  $X$  dans  $Y^*$  coïncide avec le dual du produit tensoriel de Chevet-Saphar. C'est à dire nous avons*

$$(X \widehat{\otimes}_{g_p} Y)^* = \mathcal{D}_p(X; Y^*) \text{ isométriquement.}$$

*En faisant les mêmes démarches, on peut montrer le résultat suivant qui va donner une version utile en pratique.*

**Théorème 3.6.3** *Soit  $1 \leq p < \infty$ . Alors*

- (1) *Nous avons  $(X \widehat{\otimes}_{d_p} Y^*)^* = \Pi_{p^*}(X; Y)$  isométriquement.*
- (2) *Nous avons  $(X \widehat{\otimes}_{g_p} Y^*)^* = \mathcal{D}_p(X; Y)$  isométriquement.*

Combinant (2.3.2) avec le Théorème 3.6.2 on obtient une coïncidence très connue dans cas linéaire.

**Corollaire 3.6.1** *Pour tout  $1 \leq p < \infty$ , nous avons*

$$\mathcal{D}_p(X; Y) = (X \widehat{\otimes}_{g_p} Y^*)^* = (Y^* \widehat{\otimes}_{d_p} X)^* = \Pi_{p^*}(Y^*; X^*).$$

## Conclusion

A la fin de ce travail on a étudié le produit tensoriel entre espaces de Banach.

Nous avons étudié le produit tensoriel de Chevet Sapher et ses propriétés.

Finalment, on présente la relation entre l'espace des opérateurs  $p$ -sommants et le dual du produit tensoriel de Chevet Sapher.

# Bibliographie

- [1] D. ACHOUR *Factorisation des opérateurs sous linéaires et géométrie des espaces de Banach*. Thèse de Doctorat en science, Université de Batna, Algérie 2005.
- [2] R. M. ARON, C. HERVÉS AND M. VALDIVIA. *Weakly continuous mappings on Banach spaces*. J. Funct. Anal. **52**, 189–204 (1983).
- [3] (1980), 257-267.
- [4] D. ACHOUR AND L. MEZRAG. *On the Cohen strongly  $p$ -summing multilinear operators*. J. Math. Anal. Appl. **327** (1) (2007), 550-563.
- [5] D. ACHOUR AND K. SAADI. *A polynomial characterization of Hilbert spaces*. Collect. Math. **61**, 3 (2010), 291 – 301
- [6] F. BOMBAL, D. PÉREZ-GARCÍA, I. VILLANUEVA. *Multilinear extensions of Grothendieck's theorem*. Quart. J. Math. **55** (2004), 441-450.
- [7] F. BOMBAL, M. FERNÁNDEZ AND I. VILLANUEVA. *Unconditionally converging multilinear operators*. Math.Nachr. **226**, 5–15 (2001).
- [8] H. A. BRAUNSS. *Multi-ideals with special properties*, Blätter Potsdamer Forschungen1/87, Potsdam, (1987).
- [9] HÏM BREZIS. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*. MASSON Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo 1987
- [10] J. M. F. CASTILLO, R. GARCÍA AND J. A. JARAMILLO. *Extension of bilinear forms on Banach spaces*. Proc. Amer. Math. Soc. **129** (12), 3647-3656.

- 
- [11] J. DIESTEL, H. JARCHOW, A. TONGE. *Absolutely summing operators*. Cambridge University Press, (1995).
- [12] A. DEFANT, K. FLORET. *Tensor Norms and Operator Ideals*. North-Holland (1993).
- [13] K. FLORET. *Natural norms on symmetric tensor products of normed spaces*, Note Mat. 17 (1997), 153–188.
- [14] A. GROTHENDIECK. *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*. Bol. Soc. Mat. SaoPaulo **8**, 1–79 (1956).
- [15] RAYMOUND A. RYAN. *Introduction to tensor products of Banach spaces*. Springer Monographs in Mathematics. (2001).
- [16] K SAADI. *Les opérateurs multi  $p$ -sommant et leurs applications*. Thèse de Doctorat en science, Université de Batna, Algérie 2010.
- [17] A TIAIBA. *Les opérateurs sous linéaires  $L_p$ -sommant version commutative et non commutative*. Thèse de Doctorat en science, Université de Batna, Algérie 2006.
- [18] I. VILLANUEVA. *Integral mappings between Banach spaces*. J. Math. Anal. Appl. **279**, 56–70 (2003).
- [19] A. C. ZAAANEN. *Introduction to operator theory in Riesz space*. Springer-Verlag. (1997).