



# UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DE MATHEMATIQUE ET D'INFORMATIQUE

**Département de Mathématiques**

**MEMOIRE**

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

**Domaine :** Mathématiques et Informatique

**Filière :** Mathématique

**Option :** Géométrie des espaces de Banach et analyse harmonique

**Par**

**Amina SAIDANE**

**Sujet**

## **Sur les opérateurs multilinéaires Cohen $p$ -nucléaires**

Soutenu publiquement le :17/06/2012 devant le jury composé de :

|               |                            |            |
|---------------|----------------------------|------------|
| Mr. L. Mezrag | Prof. Université de M'sila | Président  |
| Mr. D. Achour | MC(A) Université de M'sila | Rapporteur |
| Mr. D. Drihem | MC(A) Université de M'sila | Examineur  |

**Promotion: 2011/2012**

# Remerciement

*Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à Mr. D. ACHOUR, mon encadreur d'avoir accepté la tâche de rapporteur sur ce travail.*

*Je tiens à exprimer aussi mes sincères remerciements à :*

*Mr. L. MEZRAG, professeur à l'université de M'sila, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury.*

*Mr. D. DRIHM, maitre de conférences à l'université de M'sila, pour accepter de consacrer du temps à mon travail et pour avoir participé à mon jury.*

*J'exprime mes profondes gratitudees à mes parents pour leur encouragement, leur soutien et pour les sacrifices qu'ils ont enduré. Mes derniers remerciements, à tous ceux qui ont participé, de près ou de loin, par leur soutien et encouragement, m'ont aidé à réaliser ce travail.*

*Amina SAIDANE*

# Table des matières

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introduction</b>  | <b>2</b>  |
| <b>1 Préliminaires</b>   | <b>4</b>  |
| 1.1 Notations et définitions de base . . . . .                         | 4         |
| 1.2 Exemples des idéaux multilinéaires . . . . .                       | 13        |
| 1.2.1 Opérateurs m-linéaires Cohen fortement p-sommants . . . . .      | 13        |
| 1.2.2 Opérateurs m-linéaires p-semi-intégrales . . . . .               | 15        |
| <b>2 L'idéal des opérateurs multilinéaires Cohen p-nucléaires</b>      | <b>19</b> |
| 2.1 Opérateurs multilinéaires Cohen p-nucléaires . . . . .             | 19        |
| 2.2 Propriétés . . . . .   | 23        |
| 2.3 Théorème de domination de Pietsch . . . . .                        | 28        |
| 2.4 Théorème de factorisation de Kwapien̄ . . . . .                    | 33        |
| <b>3 Relations entre différentes classes de sommabilités</b>           | <b>37</b> |
| 3.1 Définitions . . . . .  | 37        |
| 3.2 Comparaison avec les différentes classes de sommabilités . . . . . | 40        |
| <b>Bibliographie</b>   | <b>43</b> |

# Introduction

Un idéal des opérateurs multilinéaires (ou multi-idéal)  $\mathcal{M}$  est une classe d'opérateurs multilinéaires bornés tels que pour tout  $X_1, \dots, X_m$  et  $Y$  des espaces de Banach on a :  $\mathcal{M}(X_1, \dots, X_m; Y)$  est un sous espace de  $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$  qui est invariant par rapport à la composition d'un opérateur linéaire à gauche et  $m$  opérateurs linéaires à droite et qui contient les opérateurs de rang finis [PIE83]. Dans certains idéaux multilinéaires, la généralisation est élémentaire. C'est le cas des opérateurs  $m$ -linéaires faiblement compacts, ou complètement continus, des opérateurs intégraux et nucléaires, des opérateurs de Hilbert-Schmidt et Cohen fortement  $p$ -sommants. La propriété vérifiée dans le cas linéaire reste la même dans le cas multilinéaire. En revanche, dans le cas des opérateurs  $p$ -sommants, la généralisation n'est pas unique ; de nombreuses définitions ont été introduites dans ce sens et de nombreux articles ont été consacrés à la notion de sommabilité pour les opérateurs multilinéaires.

L'idéal  $\mathcal{N}_p^m$  des opérateurs  $m$ -linéaires Cohen  $p$ -nucléaires entre les espaces de Banach sont définies par Achour et Alouani dans [AA10] comme une extension naturelle multilinéaire de l'idéal classique des opérateurs  $p$ -nucléaires [COH73]. Ce multi-idéal ont beaucoup de bonnes propriétés.

On fera une étude approfondie de cette classe d'opérateurs. On montrera qu'elle conserve la plupart des propriétés du cas linéaire et qu'elle possède de bonnes propriétés d'idéal. Grâce au théorème de Pietsch, on montrera que l'opérateur multilinéaire  $T$  est Cohen  $p$ -nucléaire si et seulement si il existe un opérateur  $m$ -linéaire Cohen fortement  $p$ -sommant  $S$ , et des opérateurs linéaires  $p$ -sommants  $u_j$  tels que  $T$  s'écrit comme suit

$$T = S(u_1, \dots, u_m).$$

Cela généralise le théorème de factorisation de Kwapien pour les opérateurs linéaires  $p$ -nucléaires.

Notre travail est organisé comme suit :

Dans le premier chapitre, nous rappelons les résultats importants et les définitions à utiliser plus tard. On introduit les applications multilinéaires avec quelques propriétés fondamentales. Puis on définit l'idéal multilinéaire. En fin on donne des exemples très intéressants, qui sont les opérateurs Cohen fortement  $p$ -sommants [AM07] et les opérateurs  $p$ -semi-intégrales [CP07].

Dans le deuxième chapitre. Nous montrons que l'espace des opérateurs  $m$ -linéaires Cohen  $p$ -nucléaires ( $1 \leq p < \infty$ ) est un Banach multi-idéal. On démontre l'analogie du théorème de Domination de Pietsch, ce qui permet de représenter cet espace comme composition de l'espace  $\mathcal{D}_p^m$  avec les espaces des opérateurs linéaires  $p$ -sommants. Cela généralise le théorème de factorisation de Kwapien pour les opérateurs linéaires  $(p; p^*)$ -dominés.

Nous exposerons dans le dernier chapitre, quelques notions des opérateurs multilinéaires sommants. On essaye d'étudier la relation entre la classe des opérateurs Cohen  $p$ -nucléaires et les différentes définitions de sommabilité. Comme conséquence nous montrons qu'en général tout opérateur  $m$ -linéaire Cohen  $p$ -nucléaire est faiblement compact.

# Chapitre 1

## Préliminaires

Dans la première partie de ce chapitre, nous donnons la notion des opérateurs multilinéaires avec quelques propriétés fondamentales. Puis on introduit l'idéal des opérateurs multilinéaires. La dernière partie sera consacrée à l'étude des exemples importantes sur l'idéal multilinéaires, qui sont l'idéal des opérateurs Cohen fortement  $p$ -sommantes et les opérateurs  $p$ -semi-intégrales.

### 1.1 Notations et définitions de base

Soient  $X_1, \dots, X_m$  des espaces vectoriels normés, dont les normes sont notées respectivement par :

$$\|\cdot\|_1, \dots, \|\cdot\|_m.$$

Le produit cartésien  $X_1 \times \dots \times X_m = \{(x^1, \dots, x^m) : x^1 \in X_1, \dots, x^m \in X_m\}$  des espaces vectoriels est un espace vectoriel.

Si  $(x^1, \dots, x^m)$  et  $(y^1, \dots, y^m)$  deux points de  $X_1 \times \dots \times X_m$  et  $\lambda$  un scalaire alors :

$$\begin{aligned}(x^1, \dots, x^m) + (y^1, \dots, y^m) &= (x^1 + y^1, \dots, x^m + y^m) \\ \lambda (x^1, \dots, x^m) &= (\lambda x^1, \dots, \lambda x^m).\end{aligned}$$

Il n'existe pas, sur le produit  $X_1 \times \cdots \times X_m$ , une norme qui s'impose plus qu'une autre, on peut prendre par exemple l'une quelconque des normes suivantes :

$$(1) \|(x^1, \dots, x^m)\|_{\max} = \max_{1 \leq j \leq m} \|x^j\|_j$$

$$(2) \|(x^1, \dots, x^m)\|_2 = \left( \sum_{j=1}^m \|x^j\|_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(3) \|(x^1, \dots, x^m)\|_1 = \sum_{j=1}^m \|x^j\|_j$$

Par exemple l'espace  $\mathbb{R}^m$  est un espace vectoriel normé, avec les normes données par  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_{\max}$ , définissent au dessus.

**Définition 1.1.1.** Un opérateur  $T$  de  $X_1 \times \cdots \times X_m$  dans  $Y$  est dit multilinéaire si pour tout  $j = 1, \dots, m$  et pour tout suite fixé  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) on a :

$$T(x^1, \dots, \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^j, \dots, x^m) = \sum_{i=1}^n \lambda_i T(x^1, \dots, x_i^j, \dots, x^m).$$

Autrement dit,  $T$  est multilinéaire si les opérateurs :

$$\begin{aligned} T_j : X_j &\longrightarrow Y \\ x^j &\longmapsto T_j(x^j) = T(x^1, \dots, x^j, \dots, x^m). \end{aligned}$$

sont linéaires.

En particulier, on dit que  $T$  est bilinéaire si  $m = 2$ , trilinéaire si  $m = 3$  et forme multilinéaire si  $Y = \mathbb{K}$ .

### Exemple 1.1.2

(1)

$$\begin{aligned} T : \mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_m) &\longmapsto \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m \end{aligned}$$

est un opérateur multilinéaire ( $m$ -linéaire)

(2)

$$\begin{aligned} T : \mathbb{K} \times X &\longrightarrow Y \\ (\lambda, x) &\longmapsto \lambda x \end{aligned}$$

est un opérateur bilinéaire (2-linéaire).

Définissons les opérations suivantes

$$(T_1 + T_2)(x^1, \dots, x^m) = T_1(x^1, \dots, x^m) + T_2(x^1, \dots, x^m)$$

$$(\alpha T)(x^1, \dots, x^m) = \alpha T(x^1, \dots, x^m)$$

ce qui donne à  $\mathcal{F}(\prod_{i=1}^m X_j; Y)$  une structure d'espace vectoriel, où  $\mathcal{F}(\prod_{i=1}^m X_j; Y)$  l'ensemble de tous les applications de  $\prod_{i=1}^m X_j$  dans  $Y$ .

**Définition 1.1.3.** Une application multilinéaire est continue si elle est continue en fonction entre deux espaces vectoriels normés.

En conséquence de cette définition, nous avons la caractérisation de la continuités aux cas multilinéaires.

**Proposition 1.1.4** (*Multilinéaire borné*). Soit  $T$  un opérateur multilinéaire de  $X_1, \dots, X_m$  dans  $Y$ . Munissons  $X_1 \times \dots \times X_m$  de la norme

$$\|x\|_{\max} = \max_{1 \leq j \leq m} \|x^j\|_j, \quad (x = (x^1, \dots, x^m))$$

les conditions suivantes sont équivalents :

- (a)  $T$  est continue
- (b)  $T$  est continue en point  $(0, \dots, 0)$
- (c)  $\|T(x^1, \dots, x^m)\|$  est borné sur le produit des boules unité  $\|x^1\| \leq 1, \dots, \|x^m\| \leq 1$
- (d)  $\exists M > 0 : \|T(x^1, \dots, x^m)\| \leq M \|x^1\| \dots \|x^m\|$  .

Dans ce cas on dit que  $T$  est borné et on pose :

$$\|T\| = \sup_{\substack{\|x^j\| \leq 1 \\ 1 \leq j \leq m}} \|T(x^1, \dots, x^m)\| .$$

### Preuve

(a)  $\implies$  (b) évident

(b)  $\implies$  (c) on a :  $T$  continue en  $(0, \dots, 0) \implies \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \forall x = (x^1, \dots, x^m) \in X_1 \times \dots \times X_m :$

$$\|x\|_{X_1 \times \dots \times X_m} \leq \delta \implies \|T(x^1, \dots, x^m)\|_Y \leq \varepsilon$$

on pose

$$\varepsilon = 1 \exists \delta > 0 : \|(x^1, \dots, x^m)\|_{X_1 \times \dots \times X_m} \leq \delta \implies \|T(x^1, \dots, x^m)\|_Y \leq 1$$

alors

$$\left\| \left( \frac{x^1}{\delta}, \dots, \frac{x^m}{\delta} \right) \right\|_{X_1 \times \dots \times X_m} \leq 1 \implies \|T(x^1, \dots, x^m)\|_Y \leq 1$$

donc

$$\max \left( \left\| \frac{x^1}{\delta} \right\|_{X_1}, \dots, \left\| \frac{x^m}{\delta} \right\|_{X_m} \right) \leq 1 \implies \left\| T \left( \frac{\delta x^1}{\delta}, \dots, \frac{\delta x^m}{\delta} \right) \right\|_Y \leq 1$$

on pose  $z_1 = \frac{x^1}{\delta}, \dots, z_m = \frac{x^m}{\delta}$  ce qui donne

$$\begin{aligned} \|z_j\|_{X_j} \leq 1 \quad \forall j = 1, \dots, m &\implies \|T(\delta z_1, \dots, \delta z_m)\|_Y \leq 1 \\ \implies \forall (z_1, \dots, z_m) \in B_{X_1} \times \dots \times B_{X_m} : \delta^m \|T(z_1, \dots, z_m)\|_Y &\leq 1 \\ \implies \forall (z_1, \dots, z_m) \in B_{X_1} \times \dots \times B_{X_m} : \|T(z_1, \dots, z_m)\|_Y &\leq \delta^{-m} \end{aligned}$$

donc  $T$  bornée sur  $B_{X_1} \times \dots \times B_{X_m}$ .

(c)  $\implies$  (d) soit  $(x^1, \dots, x^m) \in X_1 \times \dots \times X_m$  ( $x^j \neq 0 \quad \forall j$ ) on a

$$\begin{aligned} \|T(x^1, \dots, x^m)\| &= \left\| T \left( \|x^1\| \frac{x^1}{\|x^1\|}, \dots, \|x^m\| \frac{x^m}{\|x^m\|} \right) \right\| \\ &= \|x^1\| \dots \|x^m\| \left\| T \left( \frac{x^1}{\|x^1\|}, \dots, \frac{x^m}{\|x^m\|} \right) \right\| \\ &\leq M \|x^1\| \dots \|x^m\| \end{aligned}$$

(d)  $\implies$  (a) on a

$$\begin{aligned} T(x^1, \dots, x^m) - T(a_1, \dots, a_m) &= \\ T(x^1 - a_1, x^2, \dots, x^m) + T(a_1, x^2 - a_2, x^3, \dots, x^m) + \dots &+ T(a_1, \dots, a_{m-1}, x^m - a_m) \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \|T(x^1, \dots, x^m) - T(a_1, \dots, a_m)\| &\leq \\ \|T(x^1 - a_1, x^2, \dots, x^m)\| + \|T(a_1, x^2 - a_2, x^3, \dots, x^m)\| &+ \dots + \|T(a_1, \dots, a_{m-1}, x^m - a_m)\| \end{aligned}$$

d'après (d)

$$\begin{aligned} \|T(x^1, \dots, x^m) - T(a_1, \dots, a_m)\| &\leq M \|x^1 - a_1\| \|x^2\| \cdots \|x^m\| + M \|x^2 - a_2\| \|a_1\| \\ &\quad \|x^3\| \cdots \|x^m\| + \dots + M \|x^m - a_m\| \|a_1\| \|a_2\| \cdots \|a_{m-1}\| \end{aligned} \quad (1.1)$$

on a

$$\begin{aligned} \|(x^1 - a_1, x^2 - a_2, \dots, x^m - a_m)\| &= \max(\|x^1 - a_1\|, \dots, \|x^m - a_m\|) \leq \delta \\ \implies \|x^m - a_m\| &\leq \delta, \dots, \|x^m - a_m\| \leq \delta \end{aligned}$$

alors  $\|x^j\| \leq \|a_j\| + \delta$ , donc il existe un nombre  $A > 0$  tel que

$$\|x^j - a_j\| \leq \delta \quad \forall j \implies \|x^j\| \leq A \quad \forall j \quad .$$

L'inégalité (1.1) entraîne donc

$$\begin{aligned} \|T(x^1, \dots, x^m) - T(a_1, \dots, a_m)\| &\leq M A^{m-1} \left( \sum_{j=1}^m \|x^j - a_j\| \right) \\ &\leq m M A^{m-1} \delta. \end{aligned}$$

Alors la dernière inégalité montre que  $T(x^1, \dots, x^m)$  tend vers  $T(a_1, \dots, a_m)$  quand simultanément  $x^1$  tend vers  $a_1, \dots, x^m$  tend vers  $a_m$ . Donc  $T$  est continue au point  $(a_1, \dots, a_m)$ , et la démonstration est achevée. ■

### Notations

On note  $L(X_1, \dots, X_m; Y)$  l'ensemble des applications multilinéaires; c'est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel  $\mathcal{F}(\prod_{i=1}^m X_j; Y)$  de tous les applications de  $\prod_{i=1}^m X_j$  dans  $Y$ .

On note  $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$  l'ensemble de tous les applications multilinéaires continues de  $\prod_{i=1}^m X_j$  dans  $Y$ ; on a évidemment

$$\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y) = \mathcal{F}(\prod_{i=1}^m X_j; Y) \cap \mathcal{C}(\prod_{i=1}^m X_j; Y).$$

Si  $X_1 = \dots = X_m$ , on note  $L(X_1, \dots, X_m; Y) = L({}^m X; Y)$  et  $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y) = \mathcal{L}({}^m X; Y)$ .

Si  $X_1 = \dots = X_m$  et  $Y = \mathbb{K}$ , on note  $L({}^m X; \mathbb{K}) = L({}^m X)$  et  $\mathcal{L}({}^m X; \mathbb{K}) = \mathcal{L}({}^m X)$ .

**Proposition 1.1.5.** *En utilisant le caractère multilinéaire de  $T$ , on a des expressions équivalentes pour la norme précédente d'un opérateur multilinéaire et continu*

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{\substack{\|x^j\|_{X_j}=1 \\ 1 \leq j \leq m}} \|T(x^1, \dots, x^m)\| \\ &= \sup_{x^j \neq 0} \frac{\|T(x^1, \dots, x^m)\|}{\|x^1\| \dots \|x^m\|} \\ &= \inf \{k : \|T(x^1, \dots, x^m)\| \leq k \|x^1\| \dots \|x^m\|\}. \end{aligned}$$

**Proposition 1.1.6.** *Soit  $Y$  un espace de Banach, l'espace vectoriel normé  $\mathcal{L}({}^m X; Y)$  est un espace de Banach muni de la norme  $\|T\|$ .*

### Preuve

Il est clair que  $\|T\|$  est une norme sur l'espace  $\mathcal{L}({}^m X; Y)$ . Soit  $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy dans  $\mathcal{L}({}^m X; Y)$ . Alors pour tout  $(x^1, \dots, x^m) \in X^m$  on a

$$\|T_k(x^1, \dots, x^m) - T_n(x^1, \dots, x^m)\| \leq \|T_k - T_n\| \|x^1\| \dots \|x^m\|$$

et par conséquent  $(T_k(x^1, \dots, x^m))_k$  est une suite de Cauchy dans  $Y$ , donc elle est convergente vers  $T$  c'est à dire

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k(x^1, \dots, x^m) = T(x^1, \dots, x^m) \tag{1.2}$$

Maintenant il suffit de montrer que  $T \in \mathcal{L}({}^m X; Y)$ . Puisque  $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy dans  $\mathcal{L}({}^m X; Y)$  alors il existe une constante  $C > 0$ ; telle que  $\|T_k\| \leq C$  pour tout  $k$ , donc par (1.2)  $\|T\| \leq C$ . Finalement  $T \in \mathcal{L}({}^m X; Y)$  et la preuve est terminée. ■

Si  $m = 1$ , on note  $\mathcal{L}(X; Y)$  l'ensemble de tous les applications linéaires continues  $T$  de  $X$  dans  $Y$ , qui est aussi un espace de Banach, muni de la norme

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\|.$$

Si  $Y = \mathbb{K}$  alors on utilise  $\mathcal{L}(X; \mathbb{K}) = X^*$ .

Soient  $n$  un entier,  $X$  un espace de Banach et  $1 \leq p, p^* \leq +\infty$  (où  $p^*$  est appelé l'indice conjugué de  $p$  i.e.,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ ). On note  $l_p(X)$  ( resp.  $l_p^n(X)$ ) l'espace des suites  $(x_i)$  (resp.  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ ) dans  $X$  absolument  $p$ -sommables, muni de la norme

$$\|(x_i)_i\|_p = \|(x_i)\|_{l_p(X)} = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty & \text{si } 1 \leq p < +\infty \\ \sup_i \|x_i\| < +\infty & \text{si } p = +\infty \end{cases}$$

(resp.

$$\|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\|_p = \|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\|_{l_p^n(X)} = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty & \text{si } 1 \leq p < +\infty \\ \sup_{1 \leq i \leq n} \|x_i\| < +\infty & \text{si } p = +\infty \end{cases}.$$

D'une façon analogue, on désigne par  $l_p$  (ou  $l_p(\mathbb{K})$ ) l'espaces des suites scalaires  $(\lambda_i)$  telles que  $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^p < +\infty$ . C'est un espace de Banach pour la norme

$$\|(\lambda_i)\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

L'espace  $l_{\infty}$  est l'espace des suites scalaires  $(\lambda_i)$  bornées, normées par

$$\|(\lambda_i)\|_{\infty} = \sup_i |\lambda_i|.$$

L'espace  $l_{\infty}$  est complet pour cette norme. L'espace  $c_0$  est l'espace des suites scalaires  $(\lambda_i)$  telles que  $\lim_{i \rightarrow +\infty} \lambda_i = 0$ . C'est un sous espace fermé de  $l_{\infty}$ , donc un espace de Banach. On note  $l_p^{\omega}(X)$  (resp.  $l_p^{n, \omega}(X)$ ) l'espace des suites  $(x_i)_i$  (resp.  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ ) dans  $X$  faiblement  $p$ -sommables, muni de la norme

$$\|(x_i)_i\|_{p, \omega} = \|(x_i)_i\|_{l_p^{\omega}(X)} = \begin{cases} \sup_{\xi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\langle \xi, x_i \rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty & \text{si } 1 \leq p < +\infty \\ \sup_{\xi \in B_{X^*}} |\langle \xi, x_i \rangle| < +\infty & \text{si } p = +\infty \end{cases}$$

(resp.

$$\left\| (x_i)_{1 \leq i \leq n} \right\|_{p,\omega} = \left\| (x_i)_{1 \leq i \leq n} \right\|_{l_p^{n,\omega}(X)} = \begin{cases} \sup_{\xi \in B_{X^*}} \left( \sum_{i=1}^n |\langle \xi, x_i \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty & \text{si } 1 \leq p < +\infty \\ \sup_{\substack{\xi \in B_{X^*} \\ 1 \leq i \leq n}} |\langle \xi, x_i \rangle| < +\infty & \text{si } p = +\infty \end{cases}.$$

On sait que  $l_p(X) = l_p^\omega(X)$  pour tout  $1 \leq p < +\infty$  si et seulement si  $\dim(X) < \infty$ . Si  $p = +\infty$  on a  $l_\infty(X) = l_\infty^\omega(X)$ . On a aussi  $l_p^\omega(X) = \mathcal{L}(l_{p^*}, X)$  isométriquement pour  $1 < p \leq +\infty$  et  $l_1^\omega(X) = \mathcal{L}(c_0, X)$ .

**Lemme 1.1.7.** Soit  $1 \leq p, p^* \leq +\infty$  tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ . Pour tout  $x = (x_n) \in \ell_p$  on a

$$\|(x_n)\|_p = \sup \left\{ \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} y_n x_n \right| : \left( \sum_{i \in \mathbb{N}} |y_i|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq 1 \right\}. \quad (1.3)$$

### Preuve

Soit  $(x_n) \in \ell_p$ , alors à partir l'inégalité de Hölder on a

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n y_n \right| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n y_n| \leq \|x\|_p \text{ pour tous } y \in \ell_q \text{ et } \|y\|_{p^*} \leq 1.$$

Donc le supremum concerné est au plus de  $\|x\|_p$ .

On d'autre part, si  $x \in \ell_p$ ,  $x \neq 0$ , le supremum dans l'égalité est égale  $C \in \mathbb{R}_+$ , on choisit  $\lambda = (\lambda_j) \in \ell_p$  tel que  $|\lambda_j| = 1$  et  $\lambda_j x_j = |x_j|$  pour tous  $j \in \mathbb{N}$ . Alors, pour  $N \in \mathbb{N}$  suffisamment grande, la quantité  $A = \left( \sum_{j=1}^N |x_j|^p \right)^{-\frac{1}{p^*}}$  existe. On définit  $y \in \ell_{p^*}$  par  $y_j = A |x_j|^{\frac{p}{p^*}}$  pour  $1 \leq j \leq N$  et  $y_j = 0$  pour  $j > N$ . Alors, par le choix de  $A$ , on obtient

$$\|y\|_{p^*} = \left( \sum_{j=1}^N A^{p^*} |\lambda_j|^p |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p^*}} = A \left( \sum_{j=1}^N |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p^*}} = \left( \sum_{j=1}^N |x_j|^p \right)^{-\frac{1}{p^*}} \left( \sum_{j=1}^N |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p^*}} = 1.$$

Puisque  $p = 1 + \frac{p}{p^*}$  et le choix de  $A$ , on obtient pour  $N \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned}
C &\geq \left| \sum_{j=1}^N x_j y_j \right| = \left| \sum_{j=1}^N |\lambda_j x_j| A |x_j|^{\frac{p}{p^*}} \right| = A \sum_{j=1}^N |x_j|^{1+\frac{p}{p^*}} \\
&= A \sum_{j=1}^N |x_j|^p \\
&= \left( \sum_{j=1}^N |x_j|^p \right)^{1-\frac{1}{p^*}} \\
&= \left( \sum_{j=1}^N |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

D'où il suit que  $x \in \ell_p$  et  $C \geq \|x\|_p$ , ce qui implique le résultat. ■

**Remarque 1.1.8.** Pour tout  $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \subset X$  et pour toute suite de scalaires  $(\lambda_i)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Observons

$$\| (x_i)_{1 \leq i \leq n} \|_{p,\omega} = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x_i, x^* \rangle \right| ; \|x^*\|_{X^*} \leq 1, \|(\lambda_i)\|_{l_{p^*}} \leq 1 \right\}$$

laquelle est une conséquence du Lemme 1.1.7

Nous allons également utiliser la définition des idéaux multilinéaire au sens de Pietsch [PIE83].

**Définition 1.1.9** (*Opérateur de rang fini*). Un opérateur  $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$  est de rang fini s'il est somme finie des opérateurs de la forme

$$\begin{aligned}
T = T_{y \otimes_{j=1}^m x_j^*} &= x_1^* \otimes x_2^* \otimes \dots \otimes x_m^* \otimes y : X \times \dots \times X_m \longrightarrow Y \\
&(x^1, \dots, x^m) \longrightarrow x_1^*(x^1) \cdot \dots \cdot x_m^*(x^m) y
\end{aligned}$$

où  $x_j^* \in X_j^*$ ,  $y \in Y$ .

L'espace des opérateurs  $m$ -linéaires de range fini noté  $\mathcal{L}_f(X_1, \dots, X_m; Y)$ .

**Définition 1.1.10** (*idéal des opérateurs  $m$ -linéaires*). Un idéal des opérateurs  $m$ -linéaires (ou multi idéal)  $\mathcal{M}$  est une classe d'opérateurs  $m$ -linéaires bornés tels que pour tout  $X_1, \dots, X_m$  et  $Y$  des espaces de Banach on a :

(1)  $\mathcal{L}_f(X_1, \dots, X_m; Y) \subset \mathcal{M}(X_1, \dots, X_m; Y)$ .

(2) (*Propriété d'idéal*) si  $T \in \mathcal{M}(X_1, \dots, X_m; Y)$ ,  $u_j \in \mathcal{L}(E_j; X_j)$  et  $v \in \mathcal{L}(Y; F)$ , alors  $v \circ T \circ (u_1, \dots, u_m) \in \mathcal{M}(X_1, \dots, X_m; Y)$ .

**Définition 1.1.11**

Si  $\|\cdot\|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^+$  satisfait :

(1')  $(\mathcal{M}(X_1, \dots, X_m; Y), \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$  est un espace de normé (Banach)

(2')  $\|A^m : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}; A^m(x^1, \dots, x^m) = x^1 \cdots x^m\|_{\mathcal{M}} = 1$

(3')  $\|v \circ T \circ (u_1, \dots, u_m)\|_{\mathcal{M}} \leq \|v\| \prod_{j=1}^m \|u_j\| \|T\|_{\mathcal{M}}$ .

Alors  $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$  s'appelle multi-idéal normé (Banach multi-idéal) des opérateurs  $m$ -linéaires.

## 1.2 Exemples des idéaux multilinéaires

### 1.2.1 Opérateurs $m$ -linéaires Cohen fortement $p$ -sommants

Dans cette section, nous présentons l'idéal multilinéaire des opérateurs  $m$ -linéaires Cohen fortement  $p$ -sommants défini en 2007 par Achour et Mezrag.

**Définition 1.2.1** [AM07] (*Opérateurs  $m$ -linéaires Cohen fortement  $p$ -sommants*).

Soient  $X_j$  ( $1 \leq j \leq m$ ),  $Y$  des espaces de Banach.  $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$  est Cohen fortement  $p$ -sommant ( $1 < p \leq \infty$ ) s'il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $x_1^j, \dots, x_m^j \in X_j$  et tout  $y_1^*, \dots, y_m^* \in Y^*$ , on a

$$\left\| \left( \langle T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle \right)_{1 \leq i \leq n} \right\|_{l_1^n} \leq C \left( \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \|x_i^j\|_{X_j}^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \|y_i^*(y)\|_{l_{p^*}^n}. \quad (1.4)$$

La classe des opérateurs  $m$ -linéaires Cohen fortement  $p$ -sommants de  $X_1 \times \cdots \times X_m$  dans  $Y$ , notée  $\mathcal{D}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$ , est un espace de Banach pour la norme

$$d_p^m(T) = \inf \{C \text{ vérifiant (1.4)}\}.$$

Pour  $p = 1$ , on a  $\mathcal{D}_1^m(X_1, \dots, X_m; Y) = \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ .

On sait que [AM07],  $T$  est Cohen fortement  $p$ -sommant ( $1 < p \leq \infty$ ) si et seulement s'il existe une constante  $C$  positive et une probabilité de Radon  $\mu$  sur  $B_{Y^{**}}$  telle que, pour

tout  $x^j \in X_j$  ( $1 \leq j \leq m$ ) et  $y^* \in Y^*$  on a

$$|\langle T(x^1, \dots, x^m), y^* \rangle| \leq C \prod_{j=1}^m \|x^j\| \left( \int_{B_{Y^{**}}} |\langle y^*, \eta \rangle|^{p^*} d\eta \right)^{\frac{1}{p^*}} \quad (1.5)$$

**Proposition 1.2.2.** *L'espace  $\mathcal{D}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$  est un multi idéal. i.e.,*

(i) (*Propriété d'idéal*) si  $T \in \mathcal{D}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$  et  $u_j \in \mathcal{L}(E_j; X_j)$  et  $v \in \mathcal{L}(Y; F)$ , alors  $v \circ T \circ (u_1, \dots, u_m)$  est dans  $\mathcal{D}_p^m(E_1, \dots, E_m; F)$  et

$$d_p^m(v \circ T \circ (u_1, \dots, u_m)) \leq \|v\| d_p^m(T) \prod_{j=1}^m \|u_j\|.$$

(ii) Soit  $T \in \mathcal{L}_f(X_1, \dots, X_m; Y)$ , alors  $T \in \mathcal{D}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$ .

### Preuve

(i) Soit  $(e_i^j)_{1 \leq i \leq n} \subset E_j$  et  $(f_i^*)_{1 \leq i \leq n} \subset F^*$  on a

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n |\langle v \circ T \circ (u_1(e_i^1), \dots, u_m(e_i^m)), f_i^* \rangle| \\ &= \sum_{i=1}^n |\langle T \circ (u_1(e_i^1), \dots, u_m(e_i^m)), v^*(f_i^*) \rangle| \\ &\leq d_p^m(T) \left( \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \|u_j(e_i^j)\|_{X_j}^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \left( \sum_{i=1}^n |\langle v^*(f_i^*), y \rangle|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq d_p^m(T) \left( \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \|u_j\|^p \|e_i^j\|_{E_j}^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \left( \sum_{i=1}^n |\langle f_i^*, v(y) \rangle|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq d_p^m(T) \prod_{j=1}^m \|u_j\| \left( \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \|e_i^j\|_{E_j}^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \|v(y)\| \left( \sum_{i=1}^n \left| \langle f_i^*, \frac{v(y)}{\|v(y)\|} \rangle \right|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq d_p^m(T) \prod_{j=1}^m \|u_j\| \left( \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \|e_i^j\|_{E_j}^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{\zeta \in B_F} \left( \sum_{i=1}^n |\langle f_i^*, \zeta \rangle|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \end{aligned}$$

donc  $v \circ T \circ (u_1, \dots, u_m)$  est dans  $\mathcal{D}_p^m(E_1, \dots, E_m; F)$  et

$$d_p^m(v \circ T \circ (u_1, \dots, u_m)) \leq \|v\| d_p^m(T) \prod_{j=1}^m \|u_j\|.$$

(ii) Soit  $T$  un opérateur de rang fini définie par :

$$\begin{aligned} T = T_{y \otimes_{i=1}^m x_i} &= x_1^* \otimes \dots \otimes x_n^* \otimes y : X_1 \times \dots \times X_m \longrightarrow Y \\ & (x^1, \dots, x^m) \longmapsto x_1^*(x^1) \dots x_m^*(x^m) y. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |\langle T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle| &= \sum_{i=1}^n |x_1^*(x_i^1) \cdots x_m^*(x_i^m) \langle y, y_i^* \rangle| \\
&\leq \left( \sum_{i=1}^n |x_1^*(x_i^1) \cdots x_m^*(x_i^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n |\langle y, y_i^* \rangle|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&\leq \|y\| \prod_{j=1}^m \|x_j^*\| \left( \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \|x_i^j\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \left( \sum_{i=1}^n |\langle y_i^*, y \rangle|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}}
\end{aligned}$$

donc  $T \in \mathcal{D}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$  et  $d_p^m(T) \leq \|y\| \prod_{j=1}^m \|x_j^*\|$ . ■

## 1.2.2 Opérateurs m-linéaires p-semi-intégrales

La notion des opérateurs  $p$ -semi-intégrales introduite par Çaliskan-Pellegrino dans [ÇP07] pour  $p \geq 1$ .

**Définition 1.2.3** [ÇP07] (*Opérateurs m-linéaires p-semi-intégrales*). Un opérateur  $m$ -linéaire  $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$  ( $X_j, Y$  sont des espaces de Banach arbitraires et  $m \in \mathbb{N}$ ) est  $p$ -semi-intégrale ( $1 \leq p < \infty$ ), s'il existe une constante  $C > 0$ , et une mesure de probabilité régulière  $\mu$  sur  $\sigma$ -algèbre de borel  $\mathcal{B}(B_{X_1^*} \times \cdots \times B_{X_m^*})$  de  $B_{X_1^*} \times \cdots \times B_{X_m^*}$  muni par le produit de la topologie  $*$ -faible  $\sigma(X_j^*, X_j)$  telle que pour tout  $x^j \in X_j$ , et tout  $\varphi_j \in X_j^*$  ( $j = 1, \dots, m$ ), on a

$$\|T(x^1, \dots, x^m)\| \leq C \left[ \int_{B_{X_1^*} \times \cdots \times B_{X_m^*}} |\varphi_1(x^1) \cdots \varphi_m(x^m)|^p d\mu(\varphi_1, \dots, \varphi_m) \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (1.6)$$

On note  $\|T\|_{si,p}$  le plus petit nombre  $C$  tel que l'inégalité 1.6 est vraie pour tout  $x^j \in X_j$ . L'opérateur  $T \rightarrow \|T\|_{si,p}$  est une norme sur l'espace d'opérateurs multilinéaires  $p$ -semi-intégrales qui sera noté  $\mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$ .

**Théorème 1.2.4** [ÇP07]. *Soit  $T$  un opérateur multilinéaire continu de  $X_1 \times \cdots \times X_m$  dans  $Y$ . Il équivale de dire.*

(i) *L'opérateur  $T$  est dans  $\mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$ .*

(ii) Il existe une constante positive  $C$ , telle que pour tous  $x_1^j, \dots, x_n^j \in X_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) on

a

$$\left( \sum_{i=1}^n \|T(x_i^1, \dots, x_i^m)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left( \sup_{\substack{\varphi_j \in B_{X_j^*} \\ j=1, \dots, m}} \sum_{i=1}^n |\varphi_1(x_i^1) \dots \varphi_m(x_i^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.7)$$

aussi,  $\|T\|_{si,p} = \inf \{C \text{ vérifiant l'inégalité (1.7)}\}$ .

**Proposition 1.2.5.** *L'espace  $(\mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y), \|\cdot\|_{si,p})$  est un idéal Banach des opérateurs  $m$ -linéaires i.e.,*

(i) (Propriété d'idéal). Si  $T \in \mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$ ,  $A_j \in \mathcal{L}(E_j; X_j)$ ,  $j = 1, \dots, m$ , et  $S \in \mathcal{L}(Y; F)$ , alors  $S \circ T \circ (A_1, \dots, A_m) \in \mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$  et

$$\|S \circ T \circ (A_1, \dots, A_m)\|_{si,p} \leq \|S\| \|T\|_{si,p} \prod_{j=1}^m \|A_j\|.$$

(ii)  $\mathcal{L}_f(X_1, \dots, X_m; Y) \subset \mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$  pour  $1 \leq p < \infty$ .

### Preuve

(i) Soient  $m \in \mathbb{N}$ ,  $e_1^j, \dots, e_n^j \in E_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) et  $\|A_j\| \neq 0$ . Il suffit d'après (1.7) de démontrer que

$$\left( \sum_{i=1}^n \|S \circ T \circ (A_1, \dots, A_m)(e_i^1, \dots, e_i^m)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left( \sup_{\psi_j \in B_{E_j^*}, 1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^n |\psi_1(e_i^1) \dots \psi_m(e_i^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.8)$$

tel que

$$\begin{array}{ccccccc} E_1 & \times \dots \times & E_m & & & & \\ \downarrow A_1 & & & \downarrow A_m & & & \\ X_1 & \times \dots \times & X_m & \xrightarrow{T} & Y & \xrightarrow{S} & G. \end{array}$$

On pose  $C = \|S\| \|T\|_{si,p} \prod_{j=1}^m \|A_j\|$ , on a

$$\begin{aligned}
& \left( \sum_{i=1}^n \|S \circ T(A_1(e_i^1), \dots, A_m(e_i^m))\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \leq \|S\| \left( \sum_{i=1}^n \|T(A_1(e_i^1), \dots, A_m(e_i^m))\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \leq \|S\| \|T\|_{si,p} \left( \sup_{\varphi_j \in B_{X_j^*}, 1 \leq j \leq m} |\varphi_1(A_1(e_i^1)) \dots \varphi_m(A_m(e_i^m))|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
& = \|S\| \|T\|_{si,p} \prod_{j=1}^m \|A_j\| \left( \sup_{\varphi_j \in B_{X_j^*}, 1 \leq j \leq m} \left| \frac{\varphi_1(A_1(e_i^1))}{\|A_1\|} \dots \frac{\varphi_m(A_m(e_i^m))}{\|A_m\|} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

On a  $E_j \xrightarrow{A_j} X_j \xrightarrow{\varphi_j} \mathbb{K}$ ,

on pose  $\psi_j = \varphi_j \circ \frac{A_j}{\|A_j\|}$ , alors

$$\begin{aligned}
& \left( \sum_{i=1}^n \|S \circ T(A_1(e_i^1), \dots, A_m(e_i^m))\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\
& \|S\| \|T\|_{si,p} \prod_{j=1}^m \|A_j\| \left( \sup_{\psi_j \in B_{E_j^*}, 1 \leq j \leq m} |\psi_1(e_i^1) \dots \psi_m(e_i^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

ce qui entraîne (1.8).

Ce qui implique  $S \circ T \circ (A_1, \dots, A_m)$  est  $p$ -semi-intégrale, et

$$\|S \circ T \circ (A_1, \dots, A_m)\|_{si,p} \leq \|S\| \|T\|_{si,p} \prod_{j=1}^m \|A_j\|.$$

(ii) Soient  $T$  un opérateur  $m$ -linéaire de rang fini de  $X_1 \times \dots \times X_m$  dans  $Y$ , par définition de  $T$ , on a

$$T = \sum_{i=1}^n \bigotimes_{j=1}^m x_i^{*j} \otimes y.$$

L'opérateur  $T$  s'écrit comme la somme d'opérateurs  $m$ -linéaires de la forme

$$T(x^1, \dots, x^m) = x^{*1}(x^1) \dots x^{*m}(x^m) y.$$

Puis, il suffit de prouver que les opérateurs de la forme

$$T = T_{y \otimes_{j=1}^m x^{*j}} = x^{*1} \otimes \dots \otimes x^{*m} \otimes y,$$

pour  $x^{*j} \in X_j^*$  ( $1 \leq j \leq m$ ) et  $y \in Y$ , sont dans l'espace  $\mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$ . En effet, soit  $(x_i^j)_{i=1}^n$  dans  $X_j$  ( $1 \leq j \leq m$ ), on a

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \|x^{*1} \otimes \dots \otimes x^{*m} \otimes y(x_i^1, \dots, x_i^m)\|^p \\
&= \sum_{i=1}^n \|x^{*1}(x_i^1) \dots x^{*m}(x_i^m) y\|^p \\
&\leq \|y\|^p \sum_{i=1}^n |x^{*1}(x_i^1) \dots x^{*m}(x_i^m)|^p \\
&= \|y\|^p \prod_{j=1}^m \|x^{*j}\|^p \sum_{i=1}^n \left| \frac{x^{*1}(x_i^1)}{\|x^{*1}\|} \dots \frac{x^{*m}(x_i^m)}{\|x^{*m}\|} \right|^p \\
&\leq \|y\| \prod_{j=1}^m \|x^{*j}\| \left( \sup_{\varphi_j \in B_{X_j^*}, 1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^n |\varphi_1(x_i^1) \dots \varphi_m(x_i^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Donc  $T$  est  $p$ -semi-intégral et  $\|T\|_{si,p} = \|y\| \prod_{j=1}^m \|x^{*j}\|$ . ■

# Chapitre 2

## L'idéal des opérateurs multilinéaires Cohen $p$ -nucléaires

Dans ce chapitre on introduit les opérateurs  $m$ -linéaires Cohen  $p$ -nucléaires. On donne quelques propriétés fondamentales. Puis on démontre le théorème de domination de Pietsch, ce qui permet de représenter cet espace comme composition de l'espace des opérateurs  $m$ -linéaires Cohen fortement  $p$ -sommant avec les espaces des opérateurs linéaires  $p$ -sommant (qui est la version multilinéaire du théorème de factorisation de Kwapien).

### 2.1 Opérateurs multilinéaires Cohen $p$ -nucléaires

La classe des opérateurs  $p$ -nucléaires introduite par Cohen dans [COH73] et généralisée au opérateurs Cohen  $(p, q)$ -nucléaires par Apiola dans [API76].

Rappelons q'un opérateur linéaire  $T : X \longrightarrow Y$  est Cohen  $p$ -nucléaire ( $1 < p < \infty$ ) s'il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, \dots, x_n \in X$  et  $y_1^*, \dots, y_n^* \in Y^*$  on a

$$\left| \sum_{i=1}^n \langle T(x_i), y_i^* \rangle \right| \leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} \|(x^*(x_i))\|_p \sup_{y \in B_Y} \|(y_i^*(y))\|_{p^*} .$$

Maintenant nous donnons la version multilinéaire, introduite par Achour-Alouani dans [AA10].

**Définition 2.1.1.** (*Opérateurs multilinéaires Cohen  $p$ -nucléaires*). Un opérateur  $m$ -linéaire  $T : X_1 \times \cdots \times X_m \longrightarrow Y$  est Cohen  $p$ -nucléaire ( $1 < p < \infty$ ), s'il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $x_1^j, \dots, x_n^j \in X_j$  ( $1 \leq j \leq m$ ) et tout  $y_1^*, \dots, y_n^* \in Y^*$ , on a

$$\left| \sum_{i=1}^n \langle T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle \right| \leq C \left( \sup_{\substack{\varphi_j \in B_{X_j^*} \\ 1 \leq j \leq m}} \prod_{i=1}^m |\langle x_i^j, \varphi_j \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \|(y_i^*(y))\|_{p^*}. \quad (2.1)$$

La classe des opérateurs  $m$ -linéaires Cohen  $p$ -nucléaire de  $X_1 \times \cdots \times X_m$  dans  $Y$ , notée  $\mathcal{N}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$ , et par

$$n_p^m(T) = \inf \{C \text{ vérifiant (2.1)}\}.$$

Pour  $p = \infty$ , on a

$$\left| \sum_{i=1}^n \langle T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle \right| \leq C \left( \sup_{1 \leq i \leq n} \prod_{j=1}^m \|x_i^j\|_{X_j} \right) \sup_{y \in B_Y} \|(y_i^*(y))\|_1.$$

En effet

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n \langle T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle \right| &\leq C \sup_{\substack{\varphi_j \in B_{X_j^*} \\ 1 \leq j \leq m}} \sup_{1 \leq i \leq n} \prod_{j=1}^m |\langle x_i^j, \varphi_j \rangle| \sup_{y \in B_Y} \|(y_i^*(y))\|_1 \\ &= C \sup_{1 \leq i \leq n} \sup_{\varphi_j \in B_{X_j^*}} \prod_{j=1}^m |\langle x_i^j, \varphi_j \rangle| \sup_{y \in B_Y} \|(y_i^*(y))\|_1 \\ &\leq C \sup_{1 \leq i \leq n} \prod_{j=1}^m \|x_i^j\|_{X_j} \sup_{y \in B_Y} \|(y_i^*(y))\|_1. \end{aligned}$$

**Exemple 2.1.2.** Soient  $K$  un espace compact,  $\mu$  une mesure régulière de Borel positive sur  $K$  et soit  $1 \leq p < \infty$ . Pour chaque  $g \in L_p(\mu)$  on définit un opérateur  $m$ -linéaire de multiplication  $T_g \in \mathcal{L}(^m C(K); L_p(\mu))$ ,  $T_g(f^1, \dots, f^m) = g \cdot f^1 \cdots f^m$ . Cet opérateur est Cohen  $p$ -nucléaire et

$$n_p^m(T_g) = \|g\|_{L_p(\mu)}.$$

En effet. Pour  $(f^1, \dots, f^m) \in C(K_1) \times \dots \times C(K_m)$  et  $h^* \in L_{p^*}(\mu)$ . On utilise l'inégalité de Hölder, nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\langle T_g(f_i^1, \dots, f_i^m), h_i^* \rangle| &= \sum_{i=1}^n |\langle g \cdot f_i^1 \dots f_i^m, h_i^* \rangle| \\ &= \sum_{i=1}^n \|g \cdot f_i^1 \dots f_i^m\| \left| \left\langle \frac{g \cdot f_i^1 \dots f_i^m}{\|g \cdot f_i^1 \dots f_i^m\|}, h_i^* \right\rangle \right| \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^n \|g \cdot f_i^1 \dots f_i^m\|_{L_p(\mu)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sup_{h \in B_{L_p}} \sum_{i=1}^n |\langle h, h_i^* \rangle|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^n \|g \cdot f_i^1 \dots f_i^m\|_{L_p(\mu)}^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left( \sum_{i=1}^n \int |g \cdot f_i^1 \dots f_i^m|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left( \int \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m |g|^p |f_i^j|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup_{\omega_j \in K} \left( \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m |f_i^j(\omega_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup_{\omega_j \in K} \left( \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m |f_i^j(\omega_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \|g\|_{L_p(\mu)}. \end{aligned}$$

Alors,

$$\sum_{i=1}^n |\langle T_g(f_i^1, \dots, f_i^m), h_i^* \rangle| \leq \|g\|_{L_p(\mu)} \sup_{\omega_j \in K} \left( \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m |f_i^j(\omega_j)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{h \in B_{L_p}} \left( \sum_{i=1}^n |\langle h, h_i^* \rangle|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}}.$$

D'où  $T_g$  est Cohen  $p$ -nucléaire et

$$n_p^m(T_g) \leq \|g\|_{L_p(\mu)}.$$

D'autre part,  $n_p^m(T_g) \geq \|T_g\| = \sup_{\|f^j\| \leq 1} \|T_g(f^1, \dots, f^m)\| \geq \|T_g(1, \dots, 1)\| = \|g\|_{L_p(\mu)}$ ,  
d'où  $n_p^m(T_g) = \|g\|_{L_p(\mu)}$ .

**Proposition 2.1.3.** *Si  $p = 1$  ou  $p = \infty$ , on trouve la coïncidence suivante :*

- (1)  $\mathcal{N}_1^m(X_1, \dots, X_m; Y) = \mathcal{L}_{si,1}(X_1, \dots, X_m; Y)$ .
- (2)  $\mathcal{N}_\infty^m(X_1, \dots, X_m; Y) = \mathcal{D}_\infty^m(X_1, \dots, X_m; Y)$ .

**Preuve**

- (1) Soit  $T \in \mathcal{N}_1^m(X_1, \dots, X_m; Y)$ . Alors

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i=1}^n \langle T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle \right| &\leq n_1^m(T) \left( \sup_{\substack{\varphi_j \in B_{X_j^*} \\ 1 \leq j \leq m}} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m |\langle x_i^j, \varphi_j \rangle| \right) \sup_{y \in B_Y} \|(y_i^*(y))\|_\infty \\
&\leq n_1^m(T) \left( \sup_{\substack{\varphi_j \in B_{X_j^*} \\ 1 \leq j \leq m}} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m |\langle x_i^j, \varphi_j \rangle| \right) \sup_i \|y_i^*\|.
\end{aligned}$$

En d'autre part, on a

$$\sum_{i=1}^n \|T(x_i^1, \dots, x_i^m)\| = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n \langle T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle \right| : \sup_i \|y_i^*\| \leq 1 \right\}.$$

Ce qui implique

$$\sum_{i=1}^n \|T(x_i^1, \dots, x_i^m)\| \leq n_1^m(T) \sup_{\substack{x^{j*} \in B_{X_j^*} \\ 1 \leq j \leq m}} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m |\langle x_i^j, x^{j*} \rangle|.$$

ainsi par (1.7),  $T$  est 1-semi-intégrale et  $\|T\|_{si,1} \leq n_1^m(T)$ .

Inversement, soit  $T$  un opérateur 1-semi-intégrale. On a

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i=1}^n \langle T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle \right| &\leq \sup_i \|y_i^*\| \sum_{i=1}^n \|T(x_i^1, \dots, x_i^m)\| \\
&\leq \|T\|_{si,1} \sup_{\substack{\varphi_j \in B_{X_j^*} \\ 1 \leq j \leq m}} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m |\langle x_i^j, \varphi_j \rangle| \sup_i \|y_i^*\| \\
&\leq \|T\|_{si,1} \sup_{\substack{\varphi_j \in B_{X_j^*} \\ 1 \leq j \leq m}} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m |\langle x_i^j, \varphi_j \rangle| \sup_{y \in B_Y} \|(y_i^*(y))\|_\infty.
\end{aligned}$$

Donc  $T$  est un opérateur  $m$ -linéaire 1-nucléaire et  $n_1^m(T) \leq \|T\|_{si,1}$ .

(2) Soit  $T \in \mathcal{D}_\infty^m(X_1, \dots, X_m; Y)$ . Alors

$$\sum_{i=1}^n |\langle T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle| \leq d_\infty^m(T) \sup_{1 \leq i \leq n} \prod_{j=1}^m \|x_i^j\|_{X_j} \sup_{y \in B_Y} \|y_i^*(y)\|_{p^*}.$$

On d'autre part

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i=1}^n \langle T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle \right| &\leq \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle| \\
&\leq d_\infty^m(T) \sup_{1 \leq i \leq n} \prod_{j=1}^m \|x_i^j\|_{X_j} \sup_{y \in B_Y} \|y_i^*(y)\|_{p^*}.
\end{aligned}$$

Donc  $T \in \mathcal{N}_\infty^m(X_1, \dots, X_m; Y)$  et  $n_\infty^m(T) \leq d_\infty^m(T)$ .

Inversement, soit  $T \in \mathcal{N}_\infty^m(X_1, \dots, X_m; Y)$ . Soit  $(\lambda_i)$  une suite scalaires. Alors

$$\left| \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle \right| \leq n_p^m(T) \|(\lambda_i)\|_\infty \sup_{1 \leq i \leq n} \prod_{j=1}^m \|x_i^j\|_{X_j} \sup_{y \in B_Y} \|y_i^*(y)\|_{p^*}.$$

D'après l'égalité (1.3) on a

$$\sum_{i=1}^n |\langle T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle| \leq n_p^m(T) \sup_{1 \leq i \leq n} \prod_{j=1}^m \|x_i^j\|_{X_j} \sup_{y \in B_Y} \|y_i^*(y)\|_{p^*}.$$

Donc  $T \in \mathcal{D}_\infty^m(X_1, \dots, X_m; Y)$  et  $d_\infty^m(T) \leq n_\infty^m(T)$ . ■

## 2.2 Propriétés

Le but fondamental de cette partie est de montrer que l'espace  $\mathcal{N}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$  est un Banach multi idéal.

**Proposition 2.2.1.** *Soit  $T$  un opérateur multilinéaire continu de  $X_1 \times \dots \times X_m$  dans  $Y$ . Alors :*

*L'opérateur  $T$  est Cohen  $p$ -nucléaire si et seulement si.*

$$\sum_{i=1}^n |\langle T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle| \leq n_p^m(T) \left( \sup_{\substack{\varphi_j \in B_{X_j^*} \\ 1 \leq j \leq m}} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m |\langle x_i^j, \varphi_j \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \|(y_i^*(y))\|_{p^*}$$

pour tout  $x_1^j, \dots, x_n^j$  dans  $X_j$  ( $1 \leq j \leq m$ ) et  $y_1^*, \dots, y_n^*$  dans  $Y^*$ .

**Preuve**

$\implies$ ) Résulte aisément de l'égalité(1.3). En effet, supposons que  $T$  dans  $\mathcal{N}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$  et soit  $(\lambda_i)$  une suite scalaires, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |\langle T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle| &= \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle \right| : \|(\lambda_i)\|_\infty \leq 1 \right\} \\
&= \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n \langle T(\lambda_i^{\frac{1}{m}} x_i^1, \dots, \lambda_i^{\frac{1}{m}} x_i^m), y_i^* \rangle \right| : \|(\lambda_i)\|_\infty \leq 1 \right\} \\
&\leq \sup \left\{ n_p^m(T) \|(\lambda_i)\|_\infty \left( \sup_{\substack{\varphi_j \in B_{X_j^*} \\ 1 \leq j \leq m}} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m |\langle x_i^j, \varphi_j \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \|(y_i^*(y))\|_{p^*} : \|(\lambda_i)\|_\infty \leq 1 \right\} \\
&\leq n_p^m(T) \left( \sup_{\substack{\varphi_j \in B_{X_j^*} \\ 1 \leq j \leq m}} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m |\langle x_i^j, \varphi_j \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \|(y_i^*(y))\|_{p^*}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{i=1}^n |\langle T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle| \leq n_p^m(T) \left( \sup_{\substack{\varphi_j \in B_{X_j^*} \\ 1 \leq j \leq m}} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m |\langle x_i^j, \varphi_j \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \|(y_i^*(y))\|_{p^*}.$$

$\implies$ ) Immédiate.

**Proposition 2.2.2.** *Si  $T \in \mathcal{N}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$ , alors  $T$  est continue et  $\|T\| \leq n_p^m(T)$ .*

**Preuve**

Soit  $T \in \mathcal{N}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$ , alors pour tout  $x_1^j, \dots, x_n^j \in X_j$  ( $1 \leq j \leq m$ ) et tout  $y_1^*, \dots, y_n^* \in Y^*$ , on a

$$\sum_{i=1}^n |\langle T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle| \leq n_p^m(T) \left( \sup_{\substack{\varphi_j \in B_{X_j^*} \\ 1 \leq j \leq m}} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m |\langle x_i^j, \varphi_j \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \|(y_i^*(y))\|_{p^*}.$$

Pour  $n = 1$ , on a

$$\begin{aligned}
|\langle T(x^1, \dots, x^m), y^* \rangle| &\leq n_p^m(T) \sup_{\substack{\varphi_j \in B_{X_j^*} \\ 1 \leq j \leq m}} \prod_{j=1}^m |\langle x^j, \varphi_j \rangle| \sup_{y \in B_Y} |(y^*(y))| \\
&\leq n_p^m(T) \sup_{\varphi_j \in B_{X_j^*}, j=1}^m \|x^j\| \|\varphi_j\| \|y^*\| \\
&\leq n_p^m(T) \prod_{j=1}^m \|x^j\| \|y^*\|.
\end{aligned}$$

Alors

$$\sup_{y^* \in B_{Y^*}} |\langle T(x^1, \dots, x^m), y^* \rangle| \leq n_p^m(T) \prod_{j=1}^m \|x^j\|.$$

ce qui implique

$$\|T(x^1, \dots, x^m)\| \leq n_p^m(T) \prod_{j=1}^m \|x^j\|.$$

Donc  $T$  est continue et  $\|T\| \leq n_p^m(T)$ . ■

**Proposition 2.2.3.** *L'espace  $\mathcal{N}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$  est un espace de Banach pour la norme  $n_p^m(T)$ .*

### Preuve

(i)  $\mathcal{N}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$  est un espace vectoriel normé

(a) D'après la Proposition 2.2.2, on a

$$\begin{aligned} \|T\| \leq n_p^m(T) = 0 &\iff \|T\| = 0 \\ &\iff T = 0 \end{aligned}$$

(b) Soient  $\alpha \in \mathbb{K}$  et  $T \in \mathcal{N}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\langle \alpha T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle| &= |\alpha| \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle| \\ &\leq |\alpha| n_p^m(T) \left( \sup_{\substack{\varphi_j \in B_{X_j^*} \\ 1 \leq j \leq m}} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m |\langle x_i^j, \varphi_j \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \|(y_i^*(y))\|_{p^*} \end{aligned}$$

donc  $\alpha T \in \mathcal{N}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$  et

$$n_p^m(\alpha T) \leq |\alpha| n_p^m(T) \tag{*}$$

ce qui implique

$$n_p^m(T) = n_p^m\left(\alpha \frac{1}{\alpha} T\right) \leq \frac{1}{|\alpha|} n_p^m(\alpha T) \tag{**}$$

Donc, (\*) et (\*\*) donne

$$n_p^m(\alpha T) = |\alpha| n_p^m(T).$$

(c) Soient  $T_1, T_2 \in \mathcal{N}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$ , on a

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n |\langle (T_1 + T_2)(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle| \\ &= \sum_{i=1}^n |\langle T_1(x_i^1, \dots, x_i^m) + T_2(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\langle T_1(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle| + \sum_{i=1}^n |\langle T_2(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle| \\ &\leq (n_p^m(T_1) + n_p^m(T_2)) \left( \sup_{\varphi_j \in B_{X_j^*}} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m |\langle x_i^j, \varphi_j \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \|(y_i^*(y))\|_{p^*}. \end{aligned}$$

D'où  $T_1 + T_2 \in \mathcal{N}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$  et  $n_p^m(T_1 + T_2) \leq n_p^m(T_1) + n_p^m(T_2)$ .

(ii)  $\mathcal{N}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$  est complet.

Soit  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de cauchy dans  $\mathcal{N}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$ . Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall k, k' \in \mathbb{N}, \forall k > k' > n_0 : \|T_k - T_{k'}\| \leq n_p^m(T_k - T_{k'}) \leq \varepsilon.$$

Donc  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de cauchy dans  $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ , alors converge vers  $T$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a (pour  $k \geq n_0$  fixé). On a  $\forall k' > n_0$  :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\langle (T_k - T)(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle| &= \sum_{i=1}^n \lim_{k'} |\langle (T_n - T_k)(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle| \\ &= \lim_{k'} \sum_{i=1}^n |\langle (T_n - T_k)(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle| \\ &\leq \lim_{k'} n_p^m(T_n - T_k) \left( \sup_{\varphi_j \in B_{X_j^*}} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m |\langle x_i^j, \varphi_j \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \|(y_i^*(y))\|_{p^*} \\ &\leq \varepsilon \left( \sup_{\varphi_j \in B_{X_j^*}} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m |\langle x_i^j, \varphi_j \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \|(y_i^*(y))\|_{p^*}. \end{aligned}$$

D'où  $n_p^m(T_k - T) \leq \varepsilon$ . Ceci montre que  $T \in \mathcal{N}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$  et  $n_p^m(T_k - T) \rightarrow 0$ . ■

**Proposition 2.2.4**

(i) Toute opérateur de rang fini est Cohen  $p$ -nucléaire, c'est à dire  $\mathcal{L}_f(X_1, \dots, X_m; Y) \subset \mathcal{N}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$ .

(ii) (Propriété d'idéal) Si  $T \in \mathcal{N}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$ ,  $u_j \in \mathcal{L}(E_j, X_j)$ ,  $j = 1, \dots, m$ , et  $w \in \mathcal{L}(Y, Z)$ , alors  $w \circ T \circ (u_1, \dots, u_m)$  est Cohen  $p$ -nucléaire et

$$n_p^m(w \circ T \circ (u_1, \dots, u_m)) \leq \|w\| n_p^m(T) \prod_{j=1}^m \|u_j\|.$$

**Preuve**

(i) Il suffit de montrer la propriété pour les opérateurs de rang un de la forme  $T = x_1^* \otimes \dots \otimes x_m^* \otimes y : (x^1, \dots, x^m) \mapsto x_1^*(x^1) \dots x_m^*(x^m) y$  ( $T$  comme une somme d'opérateurs de rang un des opérateurs en tant que membre de l'espace vectoriel  $\mathcal{N}_p^m$ ).

On a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle| &= \sum_{i=1}^n |\langle x_1^*(x_i^1) \dots x_m^*(x_i^m) y, y_i^* \rangle| \\ &= \sum_{i=1}^n |x_1^*(x_i^1) \dots x_m^*(x_i^m) \langle y, y_i^* \rangle| \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m |\langle x_i^j, x_j^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n |\langle y, y_i^* \rangle|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &= \|y\| \prod_{j=1}^m \|x_j^*\| \left( \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \left| \left\langle x_i^j, \frac{x_j^*}{\|x_j^*\|} \right\rangle \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n \left| \left\langle \frac{y}{\|y\|}, y_i^* \right\rangle \right|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq \|y\| \prod_{j=1}^m \|x_j^*\| \sup_{\varphi_j \in B_{X_j^*}} \left( \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m |\langle x_i^j, \varphi_j \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{\eta \in B_Y} \left( \sum_{i=1}^n |\langle \eta, y_i^* \rangle|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}}. \end{aligned}$$

D'où  $T \in \mathcal{N}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$  et  $n_p^m(T) = \|y\| \prod_{j=1}^m \|x_j^*\|$  (car  $\|y\| \prod_{j=1}^m \|x_j^*\| = \|T\| \leq n_p^m(T)$ ).

(ii) Soit  $(e_i^j) \subset E_j$  et  $(z_i^*) \subset Z^*$ . On a

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{i=1}^n \langle w \circ T(u_1(e_i^1), \dots, u_m(e_i^m)), z_i^* \rangle \right| \\
&= \left| \sum_{i=1}^n \langle T(u_1(e_i^1), \dots, u_m(e_i^m)), w^*(z_i^*) \rangle \right| \\
&\leq n_p^m(T) \left( \sup_{\substack{\xi_j^* \in B_{X_j^*} \\ 1 \leq j \leq m}} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m |\langle u_j(e_i^j), \xi_j^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \|\langle w^*(z_i^*), y \rangle\|_{p^*} \\
&\leq n_p^m(T) \left( \sup_{\substack{\xi_j^* \in B_{X_j^*} \\ 1 \leq j \leq m}} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m |\langle e_i^j, u_j^*(\xi_j^*) \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \|\langle z_i^*, w(y) \rangle\|_{p^*} \\
&\leq n_p^m(T) \left( \sup_{\xi_j^* \in B_{X_j^*}} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \|u_j^*(\xi_j^*)\| \left\| \left\langle e_i^j, \frac{u_j^*(\xi_j^*)}{\|u_j^*(\xi_j^*)\|} \right\rangle \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \|w(y)\| \left\| \left\langle z_i^*, \frac{w(y)}{\|w(y)\|} \right\rangle \right\|_{p^*} \\
&\leq n_p^m(T) \|w\| \prod_{j=1}^m \|u_j^*\| \sup_{\varphi_j \in B_{E_j^*}} \left( \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m |\langle e_i^j, \varphi_j \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{\eta \in B_Z} \|\langle z_i^*, \eta \rangle\|_{p^*}
\end{aligned}$$

Donc  $w \circ T \circ (u_1, \dots, u_m) \in \mathcal{N}_p^m(E_1, \dots, E_m; Z)$  et

$$n_p^m(w \circ T \circ (u_1, \dots, u_m)) \leq \|w\| n_p^m(T) \prod_{j=1}^m \|u_j\| \quad \blacksquare.$$

**Corollaire 2.2.5.** *L'espace  $\mathcal{N}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$  est un Banach multi idéal.*

**Preuve**

Il est immédiate par la Proposition (2.2.3) et (2.2.4).

## 2.3 Théorème de domination de Pietsch

On présente maintenant le théorème de domination concernant cette classe. Avant ceci, on donne le lemme de Ky Fan pour la preuve le lecteur pourra consulter [DJT95].

**Lemme 2.3.1 (Ky Fan).** *Soient  $E$  un espace topologique séparé,  $\mathcal{C}$  une partie convexe compacte de  $E$ . Soit  $M$  un ensemble de fonctions définies sur  $\mathcal{C}$  à valeurs dans*

*$(-\infty, +\infty]$  vérifiant les propriétés suivantes :*

- (a) *Toute  $f \in M$  est convexe et semicontinue inférieurement.*
- (b) *Si  $g \in \text{conv}(M)$ , il existe  $f \in M$  telle que  $g(x) \leq f(x)$ ,  $\forall x \in \mathcal{C}$ .*
- (c) *S'il existe  $r \in \mathbb{R}$  telle que pour toute  $f \in M$ ,  $f(x) \leq r$ .*

Alors, il existe  $x_0 \in \mathcal{C}$  telle que  $f(x_0) \leq r \forall f \in M$ .

On dit qu'une fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  est semi-continue inférieurement (sci) si, pour chaque réel  $\lambda$ ,  $f^{-1}([\lambda, +\infty[)$  est un ouvert de  $X$ .

**Théorème 2.3.2.** Soit  $T$  un opérateur multilinéaire continu de  $X_1 \times \dots \times X_m$  dans  $Y$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) L'opérateur  $T$  est Cohen  $p$ -nucléaire.
- (ii) Ils existes des mesures de radon  $\mu_j \in C(B_{X_j^*})^*$  ( $1 \leq j \leq m$ ) et  $\lambda \in C(B_{Y^{**}})^*$  tel que pour tout  $(x^1, \dots, x^m) \in X_1 \times \dots \times X_m$  et  $y^* \in Y^*$ , on a

$$|\langle T(x^1, \dots, x^m), y^* \rangle| \leq C \prod_{j=1}^m \left( \int_{B_{X_j^*}} |\langle x^j, \varphi_j \rangle|^p d\mu_j(\varphi_j) \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{B_{Y^{**}}} |\langle y^*, \psi \rangle|^{p^*} d\lambda(\psi) \right)^{\frac{1}{p^*}}. \quad (2.2)$$

### Preuve

(i)  $\implies$  (ii) On consider les ensembles  $P(B_{X_j^*})$  et  $P(B_{Y^{**}})$  des mesures de probabilités dans  $C(B_{X_j^*})^*$  et  $C(B_{Y^{**}})^*$ , respectivement. Ils sont convexes et compacts lorsque on munit  $C(B_{X_j^*})^*$  et  $C(B_{Y^{**}})^*$  de leurs topologies  $*$ -faibles. Posons  $E = C(B_{X_1^*})^* \times \dots \times C(B_{X_m^*})^* \times C(B_{Y^{**}})^*$  et  $\mathcal{C} = P(B_{X_1^*}) \times \dots \times P(B_{X_m^*}) \times P(B_{Y^{**}})$ . Soit  $M$  l'ensemble des fonctions définies sur  $\mathcal{C}$  à valeur dans  $\mathbb{R}$  de la forme

$$f_{((x_i^j), (y_i^*))}(\mu_1, \dots, \mu_m, \lambda) = \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle| - \frac{C}{p} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \int_{B_{X_j^*}} |\langle x_i^j, \varphi_j \rangle|^p d\mu_j(\varphi_j) - \frac{C}{p^*} \sum_{i=1}^n \int_{B_{Y^{**}}} |\langle y_i^*, \psi \rangle|^{p^*} d\lambda(\psi) \quad (2.3)$$

où  $(x_i^j) \subset X_j$ ,  $1 \leq j \leq m$  et  $(y_i^*) \subset Y^*$ . Nous allons vérifier les hypothèses du lemme de Ky Fan.

- (a) Il est facile de voir que les éléments de  $M$  sont des fonctions convexes et semi continues sur  $\mathcal{C}$ .

(b) Il suffit de voir que  $M$  est convexe. Soient  $f, g$  dans  $M$  et  $\alpha \in [0, 1]$  telles que

$$f((x_i^{\prime j}), (y_i^{\prime *})) (\mu_1, \dots, \mu_m, \lambda) := \sum_{i=1}^k \left| \langle T(x_i^{\prime 1}, \dots, x_i^{\prime m}), y_i^{\prime *} \rangle \right| - \frac{C}{p} \sum_{i=1}^k \prod_{j=1}^m \int_{B_{X_j^*}} \left| \langle x_i^{\prime j}, \varphi_j \rangle \right|^p d\mu_j(\varphi_j) - \frac{C}{p^*} \sum_{i=1}^k \int_{B_{Y^{**}}} |\langle y_i^{\prime *}, \psi \rangle|^{p^*} d\lambda(\psi)$$

et

$$g((x_i^{\prime\prime j}), (y_i^{\prime\prime *})) (\mu_1, \dots, \mu_m, \lambda) := \sum_{i=1}^l \left| \langle T(x_i^{\prime\prime 1}, \dots, x_i^{\prime\prime m}), y_i^{\prime\prime *} \rangle \right| - \frac{C}{p} \sum_{i=1}^l \prod_{j=1}^m \int_{B_{X_j^*}} \left| \langle x_i^{\prime\prime j}, \varphi_j \rangle \right|^p d\mu_j(\varphi_j) - \frac{C}{p^*} \sum_{i=1}^l \int_{B_{Y^{**}}} |\langle y_i^{\prime\prime *}, \psi \rangle|^{p^*} d\lambda(\psi).$$

Il s'ensuit que

$$\alpha f((x_i^{\prime j}), (y_i^{\prime *})) (\mu_1, \dots, \mu_m, \lambda) := \sum_{i=1}^k \left| \langle T(\alpha^{\frac{1}{mp}} x_i^{\prime 1}, \dots, \alpha^{\frac{1}{mp}} x_i^{\prime m}), \alpha^{\frac{1}{p^*}} y_i^{\prime *} \rangle \right| - \frac{C}{p} \sum_{i=1}^k \prod_{j=1}^m \int_{B_{X_j^*}} \left| \langle \alpha^{\frac{1}{mp}} x_i^{\prime j}, \varphi_j \rangle \right|^p d\mu_j(\varphi_j) - \frac{C}{p^*} \sum_{i=1}^k \int_{B_{Y^{**}}} |\langle \alpha^{\frac{1}{p^*}} y_i^{\prime *}, \psi \rangle|^{p^*} d\lambda(\psi)$$

et

$$(1 - \alpha) g((x_i^{\prime\prime j}), (y_i^{\prime\prime *})) (\mu_1, \dots, \mu_m, \lambda) := \sum_{i=1}^l \left| \langle T((1 - \alpha)^{\frac{1}{mp}} x_i^{\prime\prime 1}, \dots, (1 - \alpha)^{\frac{1}{mp}} x_i^{\prime\prime m}), (1 - \alpha)^{\frac{1}{p^*}} y_i^{\prime\prime *} \rangle \right| - \frac{C}{p} \sum_{i=1}^l \prod_{j=1}^m \int_{B_{X_j^*}} \left| \langle (1 - \alpha)^{\frac{1}{mp}} x_i^{\prime\prime j}, \varphi_j \rangle \right|^p d\mu_j(\varphi_j) - \frac{C}{p^*} \sum_{i=1}^l \int_{B_{Y^{**}}} |\langle (1 - \alpha)^{\frac{1}{p^*}} y_i^{\prime\prime *}, \psi \rangle|^{p^*} d\lambda(\psi).$$

Finalement, on a

$$\alpha f + (1 - \alpha) g := \sum_{i=1}^{k+l} \left| \langle T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle \right| - \frac{C}{p} \sum_{i=1}^{k+l} \prod_{j=1}^m \int_{B_{X_j^*}} \left| \langle x_i^j, \varphi_j \rangle \right|^p d\mu_j(\varphi_j) - \frac{C}{p^*} \sum_{i=1}^{k+l} \int_{B_{Y^{**}}} |\langle y_i^*, \psi \rangle|^{p^*} d\lambda(\psi) \in$$

$M$

où

$$x_i^j = \begin{cases} \alpha^{\frac{1}{mp}} x_i'^j & \text{si } 1 \leq i \leq k, \\ (1 - \alpha)^{\frac{1}{mp}} x_i''^j & \text{si } k + 1 \leq i \leq l \end{cases}$$

$$y_i^* = \begin{cases} \alpha^{\frac{1}{p^*}} y_i'^* & \text{si } 1 \leq i \leq k, \\ (1 - \alpha)^{\frac{1}{p^*}} y_i''^* & \text{si } k + 1 \leq i \leq l. \end{cases}$$

(c) Soient  $x_0^{*j} \in B_{X_j^*}$  et  $y_0 \in B_{Y^{**}}$  tels que

$$\sup_{x^{*j} \in B_{X_j^*}} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m |\langle x_i^j, \varphi_j \rangle|^p = \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m |\langle x_i^j, \varphi_j^0 \rangle|^p$$

et

$$\sup_{\psi \in B_{Y^{**}}} \|\psi(y_i^*)\|_{p^*}^{p^*} = \sum_{i=1}^n |\langle y_i^*, \psi_0 \rangle|^{p^*}.$$

Soit  $f$  de la forme (2.3) et  $\delta_{x_0^{*j}}, \delta_{y_0}$  les mesures de dirac,

$$\begin{aligned} & f((x_i^j), (y_i^*)) \left( \delta_{\varphi_1^0}, \dots, \delta_{\varphi_m^0}, \delta_{y_0} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle| - \frac{C}{p} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \int_{B_{X_j^*}} |\langle x_i^j, \varphi_j \rangle|^p \delta_{\varphi_j^0}(\varphi_j) - \frac{C}{p^*} \sum_{i=1}^n \int_{B_{Y^{**}}} |\langle y_i^*, \psi \rangle|^{p^*} \delta_{y_0}(\psi) \\ &= \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle| - \frac{C}{p} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m |\langle x_i^j, \varphi_j^0 \rangle|^p - \frac{C}{p^*} \sum_{i=1}^n |\langle y_i^*, \psi_0 \rangle|^{p^*} \\ &= \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle| - \frac{C}{p} \sup_{\varphi_j \in B_{X_j^*}} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m |\langle x_i^j, \varphi_j \rangle|^p - \frac{C}{p^*} \sup_{\psi \in B_{Y^{**}}} \|(\psi(y_i^*))\|_{p^*}^{p^*}. \end{aligned}$$

En utilisant l'identité élémentaire

$$\alpha\beta = \inf \left\{ \frac{1}{p} \left( \frac{\alpha}{\varepsilon} \right)^p + \frac{1}{p^*} (\varepsilon\beta)^{p^*} \right\} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^* \quad (2.4)$$

nous trouvons en prenant

$$\begin{aligned} \alpha &= \left( \sup_{x^{*j} \in B_{X_j^*}} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m |\langle x_i^j, \varphi_j \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \beta = \sup_{\psi \in B_{Y^{**}}} \|(\psi(y_i^*))\|_{p^*} \text{ et } \varepsilon = 1 \text{ que} \\ & f((x_i^j), (y_i^*)) \left( \delta_{x_0^{*1}}, \dots, \delta_{x_0^{*m}}, \delta_{y_0} \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle| - C \left( \sup_{\varphi_j \in B_{X_j^*}} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m |\langle x_i^j, \varphi_j \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{\psi \in B_{Y^{**}}} \|(\psi(y_i^*))\|_{p^*} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

d'après le lemme de Ky Fan, il existe  $(\mu_1, \dots, \mu_m, \lambda) \in \mathcal{C}$  telle que  $f(\mu_1, \dots, \mu_m, \lambda) \leq 0$  pour toute  $f \in M$ . Si en prend  $(x^1, \dots, x^m) \in X_1 \times \dots \times X_m$  et  $y^* \in Y^*$  on a

$$|\langle T(x^1, \dots, x^m), y^* \rangle| \leq \frac{C}{p} \prod_{j=1}^m \int_{B_{X_j^*}} |\langle x^j, \varphi_j \rangle|^p d\mu_j(\varphi_j) + \frac{C}{p^*} \int_{B_{Y^{**}}} |\langle y^*, \psi \rangle|^{p^*} d\lambda(\psi).$$

Fixant  $\varepsilon > 0$ . En remplaçant  $x^j$  par  $\varepsilon^{-\frac{1}{m}} x^j$ ,  $y^*$  par  $\varepsilon y^*$  et en prenant l'infimum pour  $\varepsilon > 0$ , utilisant l'identité élémentaire (2.4), on trouve

$$\begin{aligned} & |\langle T(x^1, \dots, x^m), y^* \rangle| \\ & \leq C \left[ \frac{1}{p} \left( \prod_{j=1}^m \int_{B_{X_j^*}} |\langle x_i^j, \varphi_j \rangle|^p d\mu_j(\varphi_j) \right)^{\frac{1}{p}} / \varepsilon \right]^p + \frac{1}{p^*} \left( \varepsilon \int_{B_{Y^{**}}} |\langle y^*, \psi \rangle|^{p^*} d\lambda(\psi) \right)^{\frac{1}{p^*}} \right] \\ & \leq C \prod_{j=1}^m \left( \int_{B_{X_j^*}} |\langle x_i^j, \varphi_j \rangle|^p d\mu_j(\varphi_j) \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{B_{Y^{**}}} |\langle y^*, \psi \rangle|^{p^*} d\lambda(\psi) \right)^{\frac{1}{p^*}}. \end{aligned}$$

(ii)  $\implies$  (i) Soit  $(x_i^1, \dots, x_i^m) \in X_1 \times \dots \times X_m$  et  $y_i^* \in Y^*$ . par (2.2), on a

$$|\langle T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle| \leq C \prod_{j=1}^m \|x_i^j\|_{L_p(B_{X_j^*}, \mu_j)} \|y_i^*\|_{L_{p^*}(B_{Y^{**}}, \lambda)}$$

pour tout  $1 \leq i \leq n$ , et ainsi

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n \langle T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle \right| & \leq \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle| \\ & \leq C \sum_{i=1}^n \left( \prod_{j=1}^m \|x_i^j\|_{L_p(B_{X_j^*}, \mu_j)} \|y_i^*\|_{L_{p^*}(B_{Y^{**}}, \lambda)} \right) \end{aligned}$$

nous utilisons l'inégalité de Hölder pour obtenir

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle| \\ & \leq C \left( \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \|x_i^j\|_{L_p(B_{X_j^*}, \mu_j)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n \|y_i^*\|_{L_{p^*}(B_{Y^{**}}, \lambda)}^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ & = C \left( \sum_{i=1}^n \int_{B_{X_1^*} \times \dots \times B_{X_m^*}} |\varphi_1(x_i^1) \dots \varphi_m(x_i^m)|^p d(\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_m)(x^1, \dots, x^m) \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \quad \left( \sum_{i=1}^n \int_{B_{Y^{**}}} |\psi(y_i^*)|^{p^*} d\lambda(\psi) \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ & \leq C \left( \sup_{\substack{x^j \in B_{X_j^*} \\ 1 \leq j \leq m}} \sum_{i=1}^n |\varphi_1(x_i^1) \dots \varphi_m(x_i^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{\psi \in B_{Y^{**}}} \left( \sum_{i=1}^n |\psi(y_i^*)|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \end{aligned}$$

Donc  $T$  est Cohen  $p$ -nucléaire et  $n_p^m(T) \leq C$ , ce qui termine la preuve.  $\blacksquare$

**Remarque 2.3.3.** Si  $p = 1$  ou  $p = \infty$ . On a le théorème de domination suivant :

(1)  $T \in \mathcal{N}_1^m(X_1, \dots, X_m; Y) = \mathcal{L}_{si,1}(X_1, \dots, X_m; Y)$  si et seulement si

$$\|T(x^1, \dots, x^m)\| \leq C \int_{B_{X_1^*} \times \dots \times B_{X_m^*}} |\varphi_1(x^1) \dots \varphi_m(x^m)| d\mu(\varphi_1, \dots, \varphi_m).$$

pour tout  $x^j \in X_j$ , et tout  $\varphi_j \in X_j^*$  ( $j = 1, \dots, m$ ) (voir 1.6).

(2)  $T \in \mathcal{N}_\infty^m(X_1, \dots, X_m; Y) = \mathcal{D}_\infty^m(X_1, \dots, X_m; Y)$  si et seulement si

$$|\langle T(x^1, \dots, x^m), y^* \rangle| \leq C \prod_{j=1}^m \|x^j\| \cdot \int_{B_{Y^{**}}} |\langle y^*, \psi \rangle| d\lambda(\psi).$$

pour tout  $x^j \in X_j$ , et tout  $y^* \in Y^*$  ( $j = 1, \dots, m$ ) (voir [AM07]).

## 2.4 Théorème de factorisation de Kwapien

En comparant la condition (ii) du théorème 2.3.2 avec condition (b) du [DF93, Corollaire 19.2], on peut dire que les opérateurs multilinéaires Cohen  $p$ -nucléaire sont une généralisation des opérateurs linéaires  $(p; p^*)$ -dominés. En conséquence, le théorème suivant peut être considéré comme une version multilinéaire du théorème de factorisation de Kwapien.

On commence par rappeler la définition des opérateurs linéaires absolument  $p$ -sommants et son théorème de domination de Pietsch introduite en 1967 (pour plus de détail voir [DJT95]).

**Définition 2.4.1** (*Opérateurs linéaires absolument  $p$ -sommants*). Soit  $X, Y$  deux espaces de Banach, et soit  $u$  un opérateur de  $X$  dans  $Y$ . On dit que  $u$  est  $p$ -sommant  $1 \leq p \leq \infty$  s'il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour tous  $x_1, \dots, x_n$ , on ait

$$\left( \sum_{i=1}^n \|u(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup \left\{ \left( \sum_{i=1}^n |x^*(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, x^* \in B_{X^*} \right\} \quad (2.5)$$

La classe des opérateurs linéaires absolument  $p$ -sommants notée  $\Pi_p(X, Y)$ , est un espace de Banach pour la norme  $\pi_p(u) := \inf \{C : \text{vérifiant l'ingalité (2.5)}\}$ .

**Théorème 2.4.2.** *Soit  $u : X \rightarrow Y$  un opérateur linéaire et  $C$  une constante positive. Alors les propriétés suivantes sont équivalents,*

i)  $u$  est  $p$ -sommant et  $\pi_p(u) \leq C$ .

ii) Il existe une probabilité  $\mu$  sur  $K = (B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$  telle que :

$$\|u(x)\| \leq C \left( \int_K |\langle x^*, x \rangle|^p d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{p}}, \forall x \in X. \quad (2.6)$$

Le théorème suivant généralise un résultat de Kwapień [DF93, Corollaire 19.2].

**Théorème 2.4.3** (théorème de factorisation de Kwapień). Soit  $1 < p < \infty$ . Alors  $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$  est Cohen  $p$ -nucléaire si et seulement s'il existe des espaces de Banach  $G_1, \dots, G_m$ , des opérateurs linéaires absolument  $p$ -sommants ( $1 < p < \infty$ )  $u_j \in \mathcal{L}(X_j, G_j)$  et un opérateur multilinéaire Cohen fortement  $p$ -sommant  $S \in \mathcal{L}(G_1, \dots, G_m; Y)$  tels que  $T = S(u_1, \dots, u_m)$ , de plus

$$n_p^m(T) = \inf \left\{ d_p^m(S) \prod_{j=1}^m \pi_p(u_j) : T = S \circ (u_1, \dots, u_m) \right\}$$

(i.e.,  $\mathcal{N}_p^m = \mathcal{D}_p^m \circ (\Pi_p, \dots, \Pi_p)$  isométriquement).

### Preuve

Soit  $T \in \mathcal{D}_p^m \circ (\Pi_p, \dots, \Pi_p)(X_1, \dots, X_m; Y)$ ; alors il existe des espaces de Banach  $G_1, \dots, G_m$ ,  $u_j \in \Pi_p(X_j, G_j)$  et un opérateur  $m$ -linéaire Cohen fortement  $p$ -sommant  $S \in \mathcal{D}_p^m(G_1, \dots, G_m; Y)$  tels que

$$T = S(u_1, \dots, u_m).$$

Nous avons pour tout  $(x^1, \dots, x^m) \in X_1 \times \dots \times X_m$  et  $y^* \in Y^*$

$$\begin{aligned} |\langle T(x^1, \dots, x^m), y^* \rangle| &= |\langle S(u_1(x^1), \dots, u_m(x^m)), y^* \rangle| \\ &\leq d_p^m(S) \prod_{j=1}^m \|u_j(x^j)\| \|y^*\|_{L_{p^*(\eta)}} \\ &\leq d_p^m(S) \prod_{j=1}^m \pi_p(u_j) \prod_{j=1}^m \|x^j\|_{L_{p_j(\mu_j)}} \|y^*\|_{L_{p^*(\eta)}}. \end{aligned}$$

Réciproquement, Soit  $T \in \mathcal{N}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$ . Alors, par (2.2) Ils existes des mesures de radon  $\mu_j \in C(B_{X_j^*})^*$  ( $1 \leq j \leq m$ ) et  $\lambda \in C(B_{Y^{**}})^*$  tel que pour tout  $(x^1, \dots, x^m) \in X_1 \times \dots \times X_m$  et  $y^* \in Y^*$ ,

$$|\langle T(x^1, \dots, x^m), y^* \rangle| \leq C \prod_{j=1}^m \|x^j\|_{L_p(B_{X_j^*}, \mu_j)} \|y^*\|_{L_{p^*}(B_{Y^{**}}, \lambda)}.$$

Soit  $(x^1, \dots, x^m) \in X_1 \times \dots \times X_m$ . On définit  $u_j^0(x^j) = \langle \cdot, x^j \rangle \in C(B_{X_j^*})$  et considérer le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} X_1 & \times \dots \times & X_m & & \xrightarrow{T} & & Y \\ \downarrow i_{X_1} & & \downarrow i_{X_m} & & & & S \uparrow \\ i_{X_1}(X_1) & \times \dots \times & i_{X_m}(X_m) & \xrightarrow{(I_1, \dots, I_m)} & G_1 & \times \dots \times & G_m \\ \downarrow & & \downarrow & & \cap & & \cap \\ C(B_{X_1^*}) & \times \dots \times & C(B_{X_m^*}) & \xrightarrow{(I_1, \dots, I_m)} & L_p(\mu_1) & \times \dots \times & L_p(\mu_m) \end{array}$$

où  $I_j : C(B_{X_j^*}) \longrightarrow L_p(\mu_j)$  est l'injection canonique,  $i_{X_j} : X_j \longrightarrow C(B_{X_j^*})$  est une isométrie injective et  $G_j$  est la fermeture de l'espace  $I_j \circ u_j^0(X_j)$ ,  $u_j(x^j) = I_j(u_j^0(x^j))$ . Comme  $\pi_p(I_j) = 1$  et  $\|u_j^0\| = 1$ , alors  $\pi_p(u_j) \leq 1$  (voir [DJT95]).

L'opérateur  $S$  définie sur  $u_1(X_1) \times \dots \times u_m(X_m)$ ,  $u_j(X_j) = I_j(u_j^0(X_j))$  ( $1 \leq j \leq m$ ), par

$$S(u_1(x^1), \dots, u_m(x^m)) = T(x^1, \dots, x^m)$$

est bien défini car

$$|\langle S(u_1(x^1), \dots, u_m(x^m)), y^* \rangle| \leq n_p^m(T) \prod_{j=1}^m \|u_j(x^j)\|_{G_j} \left( \int_{B_{Y^{**}}} |\langle y^*, \psi \rangle|^{p^*} d\lambda(\psi) \right)^{\frac{1}{p^*}}.$$

Il s'ensuit que  $S$  est continue sur  $u_1(X_1) \times \dots \times u_m(X_m)$  et a une extension unique de  $\overline{u_1(X_1)} \times \dots \times \overline{u_m(X_m)} = G_1 \times \dots \times G_m$ , de plus l'inégalité implique que

$$\begin{aligned} \|S^*(y^*)\| &= \sup \{ |\langle S^*(y^*), (u_1(x^1), \dots, u_m(x^m)) \rangle| : \|u_j(x^j)\| \leq 1 \} \\ &\leq n_p^m(T) \left( \int_{B_{Y^{**}}} |\langle y^*, \psi \rangle|^{p^*} d\lambda(\psi) \right)^{\frac{1}{p^*}} \end{aligned}$$

ce qui implique que  $S^*$  est absolument  $p^*$ -sommant. Grâce au Théorème 3.1 [MS09],  $S$  est un opérateur  $m$ -linéaire Cohen fortement  $p$ -sommant et  $d_p^m(S) = \pi_{p^*}(S^*) \leq n_p^m(T)$ . Ceci termine la preuve.  $\blacksquare$

**Remarque 2.4.4**

Si  $p = 1$ , on a  $\mathcal{D}_1^m \circ (\Pi_1, \dots, \Pi_1) = \mathcal{L}(\Pi_1, \dots, \Pi_1) \subset \mathcal{L}_{si,1} = \mathcal{N}_1^m$

**Exemple 2.4.5.** L'opérateur  $T : l_1 \times l_1 \longrightarrow l_1$  donné par  $T((x_k^1)_k, (x_k^2)_k) = (x_k^1 x_k^2)_k$  est 1-nucléaire.

**Preuve**

Soit

$$\begin{aligned} S : l_2 \times l_2 &\longrightarrow l_1 \\ ((x_k^1)_k, (x_k^2)_k) &\longmapsto (x_k^1 x_k^2)_k \end{aligned}$$

pour tout  $(x_k^1)_k, (x_k^2)_k \in l_2$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $(x_{1,k}^j)_k, \dots, (x_{n,k}^j)_k \in l_2$  ( $1 \leq j \leq 2$ ),  $y_1^*, \dots, y_n^* \in l_\infty$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\langle S((x_{i,k}^1)_k, (x_{i,k}^2)_k), y_i^* \rangle| &\leq \sum_{i=1}^n \|S((x_{i,k}^1)_k, (x_{i,k}^2)_k)\| \|y_i^*\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^{\infty} |x_{i,k}^1|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=1}^{\infty} |x_{i,k}^2|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sup_i \left( \sup_{y \in B_{l_1}} |y_i^*(y)| \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^2 \|(x_{i,k}^j)_k\|_{l_2} \cdot \sup_{y \in B_{l_1}} \left( \sup_i |y_i^*(y)| \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^2 \|(x_{i,k}^j)_k\|_{l_2} \cdot \sup_{y \in B_{l_1}} \|y_i^*(y)\|_\infty. \end{aligned}$$

Donc  $S$  est Cohen fortement 1-sommant et aussi continu. On d'autre part, l'opérateur canonique  $I_j : l_1 \longrightarrow l_2$  ( $1 \leq j \leq 2$ ) est 1-sommant. On conclut par la Remarque 2.4.4 que  $T = S(I_1, I_2) : l_1 \times l_1 \longrightarrow l_1$  est Cohen 1-nucléaire.  $\blacksquare$

# Chapitre 3

## Relations entre différentes classes de sommabilités

Dans ce chapitre nous allons obtenir certaines inclusions entre les différentes classes étudiées dans le présent document et d'établir la position des opérateurs Cohen  $p$ -nucléaires par rapport à d'autres concepts. En conséquence de nos résultats, nous montrons que tous les opérateurs multilinéaires Cohen  $p$ -nucléaires sur des espaces de Banach arbitraires est faiblement compact.

### 3.1 Définitions

On commence par définir quelques classes d'opérateurs multilinéaires.

**Définition 3.1.1** [GEI84] (*Opérateurs  $r$ -dominés*). Un opérateur multilinéaire  $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$  est  $r$ -dominé ( $1 \leq r < \infty$ ), s'il existe une constante positive  $C$ , et une mesure de radon  $\mu_j$  sur  $B_{X_j^*}$  ( $1 \leq j \leq m$ ) telle que

$$\|T(x^1, \dots, x^m)\| \leq C \prod_{j=1}^m \left( \int_{B_{X_j^*}} |x^j(x^*)|^r d\mu_j(x^*) \right)^{\frac{1}{r}} \quad (3.1)$$

pour tout  $x^j \in X_j$ . De plus, on a

$$\delta_r(T) = \inf \{C > 0 : \text{vérifiant l'inégalité (3.1)}\}.$$

On note  $\mathcal{L}_{d,r}(X_1, \dots, X_m; Y)$  l'espace des opérateurs multilinéaires  $r$ -dominé, est un espace quasi-Banach avec le quasi-norme  $\delta_r(T)$ . Si  $r > m$ , alors  $\delta_r(T)$  est un norme. Comme conséquence,  $r_1$ -dominé implique  $r_2$ -dominé pour  $r_1 \leq r_2$ .

**Définition 3.1.2** [PIE83] (*Opérateurs absolument  $p$ -sommants*).  $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$  est absolument  $p$ -sommant ( $1 \leq p < \infty$ ) s'il existe  $C > 0$  telle que pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $(x_i^j)_{1 \leq i \leq n} \subset X_j$  ( $1 \leq j \leq m$ ), on a

$$\left\| T(x_i^1, \dots, x_i^m)_{1 \leq i \leq n} \right\|_p \leq C \prod_{j=1}^m \left\| (x_i^j)_{1 \leq i \leq n} \right\|_{p, \omega}. \quad (3.2)$$

On note  $\mathcal{L}_{as,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$  l'espace de Banach des opérateurs  $m$ -linéaires absolument  $p$ -sommants muni de la norme

$$\|T\|_{as,p} = \inf \{C \text{ vérifiant (3.2)}\}.$$

**Définition 3.1.3** [DIM03] (*opérateurs fortement  $p$ -sommants*). Soit  $1 \leq p \leq \infty$ . Alors  $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$  est fortement  $p$ -sommant s'il existe une constant  $C > 0$  telle que pour tous  $x_i^1, \dots, x_i^m \in X_j$  ( $1 \leq j \leq m$ ) on a

$$\left\| T(x_i^1, \dots, x_i^m)_{1 \leq i \leq n} \right\|_p \leq C \sup_{\phi \in B_{\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)}} \left( \sum_{i=1}^n |\phi(x_i^1, \dots, x_i^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.3)$$

La classe des opérateurs multilinéaires fortement  $p$ -sommants de  $X_1, \dots, X_m$  dans  $Y$ , notée  $\mathcal{L}_{sas,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$ , est un espace de Banach pour la norme

$$\|T\|_{sas,p} = \inf \{C \text{ vérifiant (3.3)}\}.$$

**Définition 3.1.4** [MAT03] (*opérateurs multi  $p$ -sommants*).  $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$  est multi  $p$ -sommant (fully  $p$ -sommant) s'il existe une constant  $C > 0$  telle que pour tous  $x_1^j, \dots, x_n^j \in X_j$  ( $1 \leq j \leq m$ ) on a

$$\left( \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{\infty} \|T(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_m}^m)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \prod_{j=1}^m \left\| (x_i^j)_{1 \leq i \leq n} \right\|_{p, \omega}. \quad (3.4)$$

L'espace des opérateurs multilinéaires multi  $p$ -sommants de  $X_1, \dots, X_m$  dans  $Y$ , qu'est noté  $\mathcal{L}_{fas,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$  est un espace de Banach muni de la norme

$$\|T\|_{fas,p} = \inf \{C \text{ vérifiant (3.4)}\}.$$

**Définition 3.1.5** [CD'AJ02] (*opérateur intégral*). On dit que  $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$  est intégral ( $T \in \mathcal{I}(X_1, \dots, X_m; Y)$ ) s'il existe une constant  $C \geq 0$  tels que pour tous  $m \in \mathbb{N}$ ,  $(x_i^j)_{1 \leq i \leq n} \subset X_j$  et  $y_i^* \subset Y^*$ , on a

$$\left| \sum_{i=1}^n \langle T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle \right| \leq C \sup_{\substack{x^{j*} \in B_{X_j^*} \\ 1 \leq j \leq m}} \left\| \sum_{i=1}^n x^{1*}(x_i^1) \dots x^{m*}(x_i^m) y_i^* \right\|_{Y^*}.$$

L'infimum de  $C$  définit une norme  $\|\cdot\|_I$  sur l'espace des opérateurs  $m$ -linéaires intégraux.

**Théorème 3.1.6** [CP07, Théorème 3].

- (i)  $\mathcal{L}_{d,p}(X_1, \dots, X_m; Y) \subset \mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$ .
- (ii)  $\mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y) \subset \mathcal{L}_{d,mp}(X_1, \dots, X_m; Y)$ .
- (ii)  $\mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y) \subset \mathcal{L}_{fas,p}(X_1, \dots, X_m; Y) \subset \mathcal{L}_{as,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$ .
- (iii)  $\mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y) \subset \mathcal{L}_{sas,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$ .

## 3.2 Comparaison avec les différentes classes de sommabilités

Nous allons maintenant étudier la relation entre la classe des opérateurs Cohen  $p$ -nucléaires et les différentes classes de sommabilités qui rappelés au-dessus.

**Théorème 3.2.1.** *Soit  $1 < p < \infty$ . Soit  $X_1, \dots, X_m, Y$  des espaces de Banach et soit  $T : X_1 \times \dots \times X_m \longrightarrow Y$  un opérateur  $m$ -linéaire.*

- (i) *Si  $T \in \mathcal{N}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$ , alors  $T \in \mathcal{D}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$  et  $d_p^m(T) \leq n_p^m(T)$ .*
- (ii) *Si  $T \in \mathcal{N}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$ , alors  $T \in \mathcal{L}_{d,r}(X_1, \dots, X_m; Y)$  pour toute  $r \geq p$  et  $\delta_r(T) \leq n_p^m(T)$ .*
- (iii) *Si  $1 < p \leq 2$  et  $T \in \mathcal{N}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$ , alors  $T$  est absolument  $q$ -sommant pour tout  $q$ .*

### Preuve

- (i) Si  $T$  est Cohen  $p$ -nucléaire, alors

$$\begin{aligned}
 |\langle T(x^1, \dots, x^m), y^* \rangle| &\leq n_p^m(T) \prod_{j=1}^m \left( \int_{B_{X_j^*}} |\langle x^j, \xi^j \rangle|^p d\mu_j(\xi^j) \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{B_{Y^{**}}} |\langle y^{**}, y^* \rangle|^{p^*} d\lambda(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}} \\
 &\leq n_p^m(T) \prod_{j=1}^m \left( \sup_{\xi^j \in B_{X_j^*}} |\langle x^j, \xi^j \rangle| \right) \left( \int_{B_{Y^{**}}} |\langle y^{**}, y^* \rangle|^{p^*} d\lambda(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}} \\
 &\leq n_p^m(T) \prod_{j=1}^m \|x^j\|_{X_j} \left( \int_{B_{Y^{**}}} |\langle y^{**}, y^* \rangle|^{p^*} d\lambda(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}}.
 \end{aligned}$$

Donc par (1.5),  $T \in \mathcal{D}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$  et  $d_p^m(T) \leq n_p^m(T)$ .

- (ii) Soit  $T \in \mathcal{N}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$ , alors

$$\begin{aligned}
 \|T(x^1, \dots, x^m)\| &= \sup_{y^* \in B_{Y^*}} |\langle T(x^1, \dots, x^m), y^* \rangle| \\
 &\leq n_p^m(T) \prod_{j=1}^m \|x^j\|_{L_p(B_{X_j^*}, \mu_j)} \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \left( \int_{B_{Y^{**}}} |\langle y^{**}, y^* \rangle|^{p^*} d\lambda(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}} \\
 &\leq n_p^m(T) \prod_{j=1}^m \|x^j\|_{L_p(B_{X_j^*}, \mu_j)} \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \|y^*\| \\
 &\leq n_p^m(T) \prod_{j=1}^m \|x^j\|_{L_r(B_{X_j^*}, \mu_j)}.
 \end{aligned}$$

Donc par (3.1),  $T$  est  $r$ -dominé et  $\delta_r(T) \leq n_p^m(T)$ .

(iii) D'après (ii)  $T$  est 2-dominé ( $r = 2$ ); donc Proposition (4.3) dans [CD03] montre que  $T$  est absolument  $q$ -sommant pour tout  $q$ . ■

**Théorème 3.2.2.** *Tout opérateur  $m$ -linéaire intégral est Cohen  $p$ -nucléaire.*

**Preuve**

Soit  $T \in \mathcal{N}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$ . Si  $T$  est intégral, l'inégalité de Hölder donne

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n \langle T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle \right| &\leq \|T\|_I \sup_{\substack{x^{j*} \in B_{X_j^*} \\ 1 \leq j \leq m}} \left| \sup_{y \in B_Y} \sum_{i=1}^n x^{1*}(x_i^1) \dots x^{m*}(x_i^m) y_i^*(y) \right| \\ &\leq \|T\|_I \sup_{\substack{x^{j*} \in B_{X_j^*} \\ 1 \leq j \leq m}} \left( \sum_{i=1}^n |x^{1*}(x_i^1) \dots x^{m*}(x_i^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \left( \sum_{i=1}^n |y_i^*(y)|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}}. \end{aligned}$$

Donc  $T$  est Cohen  $p$ -nucléaire. ■

**Corollaire 3.2.3**

- (i)  $\mathcal{I}(X_1, \dots, X_m; Y) \subset \mathcal{N}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y) \subset \mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y) \subset \mathcal{L}_{sas,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$ .
- (ii)  $\mathcal{N}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y) \subset \mathcal{L}_{as,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$ .
- (iii)  $\mathcal{I}(X_1, \dots, X_m; Y)$  et  $\mathcal{N}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y) \subset \mathcal{L}_{fas,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$ .

En conséquant, la proposition 2.1.3 (1) et [ÇP07, Remarque 1], donne :

**Remarque 3.2.4.** Les inclusions suivants sont parfois stricte.

- (1)  $\mathcal{N}_1^m(X_1, \dots, X_m; Y) \subset \mathcal{L}_{sas,1}(X_1, \dots, X_m; Y)$ .
- (2)  $\mathcal{N}_1^m(X_1, \dots, X_m; Y) \subset \mathcal{L}_{fas,1}(X_1, \dots, X_m; Y)$ .
- (3)  $\mathcal{N}_1^m(X_1, \dots, X_m; Y) \subset \mathcal{L}_{as,1}(X_1, \dots, X_m; Y)$ .

Un multilinéaire  $T$  entre espaces de Banach est faiblement compact si, et seulement si, il peut s'écrire  $T = u \circ B$  où  $B$  est un opérateur multilinéaire borné et  $u$  est un opérateur linéaire faiblement compact.

On note  $\mathcal{L}_w(X_1, \dots, X_m; Y)$  le sous espace fermé de  $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$  des opérateurs  $m$ -linéaires faiblement compact. Il bien connu que tout opérateur multilinéaire Cohen fortement  $p$ -sommant est faiblement compact [AA10, Corollaire 3.3].

Le résultat principal de cette partie est le corollaire suivant, qui est une conséquence directe du Théorème 3.2.1 (i) et [BPR07, Proposition 5.7 et Remarque 5.9].

**Corollaire 3.2.5**

1) *Tout opérateur  $m$ -linéaire Cohen  $p$ -nucléaire sur des espaces de Banach arbitraire est faiblement compact.*

2) *Soit  $K_1, \dots, K_m$  des espaces compacts, pour un opérateur  $m$ -linéaire de  $C(K_1) \times \dots \times C(K_m)$  dans un espace de Banach  $Y$ , on a*

$$\mathcal{N}_1^m \subseteq \Pi \circ \mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_{sas,p} \cap \mathcal{L}_w.$$

3) *(1) n'est pas vraie pour  $p = 1$ .*

# Bibliographie

- [AA10] D. ACHOUR AND A. ALOUANI, *On the multilinear generalizations of the concept of nuclear operators*, Colloquium mathematicum. 120 (2010), 85–102.
- [AM07] D. ACHOUR AND L. MEZRAG, *On the Cohen strongly  $p$ -summing multinéairear operators*, J. Math. Anal. Appl. 327(2007), 550-563.
- [API76] H. APIOLA. *Duality between spaces of  $p$ -summable sequences,  $(p, q)$ -summing operators and characterisations of nuclearity*, Math. Ann. 219(1976), 53-64.
- [BPR07] G. BOTELHO, D.M. PELLEGRINO AND P. RUEDA, *On composition ideals of multilinear mappings and homogeneous polynomials*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 43 (2007), 1139–1155.
- [CD03] D. CARANDO AND V. DIMANT, *On summability of bilinear operators*, Math. Nachr. 259 (2003), 3-11.
- [CD’AJ02] R. CILIA, M. D’ANNA AND J. M. GUTIÉRREZ, *Polynomial characterization of  $L_\infty$ -spaces*, J. Math. Anal. Appl. 275 (2002), 900-912.
- [COH73] J. S. COHEN, *Absolutely  $p$ -summing,  $p$ -nuclear operators and their conjugates*, Math. Ann. 201(1973), 177-200.
- [ÇP07] E. ÇALISKAN AND D.M. PELLEGRINO, *On the multilinear generalizations of the concept of absolutely summing operators*, Rocky Mountain J. Math. 37 (2007), 1137–1152.
- [DF93] A. DIEFANT AND K. FLORET, *Tensor Norms and Operator Ideals*, North-Holland Math. Studies. 176, North-Holland, 1993.

- [DJT95] J. DIESTEL, H. JARCHOW AND A. TONGE, *Absolutely summing operators*, Cambridge University. Press, 1995.
- [DIM03] V. DIMANT. *Strongly  $p$ -summing multilinear operators*, J. Math. Anal. Appl. 278(2003), 182-193.
- [GEI84] S. GEISS, *Ideale multilinearer Abbildungen, Diplomarbeit*. 1984.
- [MAT03] M. C. MATOS, *Fully absolutely summing and Hilbert Schmidt multilinear mappings*, Collect, Math. 54 (2003),111-136.
- [MS09] L. MEZRAG AND K. SAADI, *Inclusion theorems for Cohen strongly summing multilinear operators*. Bull. elg. Math. Soc. Simon Stevin 16, 1-11 (2009).
- [PIE83] A. PIETSCH, *Ideals of multilinear functionals* (designs of a theory), Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras. Ideals, and their Applications in Theoretical Physics (Leibzig). Teubner-Texte.(1983), 185-199.