REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse Fonctionnelle

Thème

Espace vectoriel topologique et compatibilité des opérateurs

Présenté par :
BOUBAKRI Slimane

Devant le jury composé de :

M^r *TALAB* Abdel Hamid	MCA ,	Université de M'sila	**Président**.
M^r *LAKHAL* Aissa	MAA ,	Université de M'sila	**Encadreur**.
M^r *MAAZOUZ* Ahmed	MAA ,	Université de M'sila	**Examinateur**.

Année universitaire 2020/2021

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à : Mes chers parents, Omar et Kadija, qui m'ont donné tout le courage, la patience et la tendresse. Mes frères, ma soeur et toute ma famille. Mes amis et toute personne qui m'a aidé de loin et de près. Ma promotion de Master. Et sans oublier mes étudiants de Département de mathématique et d'informatique.

Remerciements

Au nom d'Allah le miséricordieux

En premier lieu, je remercie Allah, le tout puissant, qui m'a donné, durant toutes ces années, la santé, le courage et la volonté pour réaliser ce travail. J'exprime ma profonde gratitude à Monsieur Aissa LAKHAL, qui m'a encadré, durant la réalisation de mémoire. Je lui apporte aussi toute ma reconnaissance pour son aide consistante, ses conseils précieux et ses remarques. C'est grâce à lui que mon travail a pris cette forme. Je souhaiterais exprimer ma gratitude à monsieur Sofiane BOUGHERARA pour m'avoir aidé à traduire certains termes. Je tiens également à remercier deux amis, Badereddine Hasni et Shbabha abdel Halim pour m'avoir aidé à rédiger et à mener à bien cette recherche.

♡

❖ *Slimane*

Table des matières

Introduction

Dans notre travail, nous avons mentions des définitions de base afin de prouver le théorème $(2,7)$ d'un espace vectoriel topologique à *cône* métrique complet .

Puisque cette théorème prouver l'existence d'un seul point de coïncidence de trois opérateur L, K et H à condition

$$d(Lx, Ky) \leq Ad(Hx, Lx) + Bd(Hy, Ky)$$

et

$$L(X) \cup K(X) \subset H(X)$$

Et une autre condition

$$L(X) \cup K(X) \quad ou \quad H(X) \quad complet$$

Chapitre 1

Rappel et propriétés élémentaires

En mathématiques, les espaces vectoriels topologiques sont une des structures de base de l'analyse fonctionnelle. Ce sont des espaces munis d'une structure topologique associée à une structure d'espaces vectoriel, avec des relations de compatibilité entre les deux structures .

Les exemples les plus simples d'espaces vectoriels topologiques sont les espaces vectoriels normées, parmi lesquels figurent les espaces de Banach.

1.1 Les espaces topologique

Rappel

Soit X un ensemble quelconque on défini l'ensemble $\mathbb{P}(X)$ tel que $\mathbb{P}(X)$ l'ensemble des parties de X .

Définition 1.1. *Soit X un ensemble et U est un partie de X , on appelle U un ouverte de X si pour tout $x \in U$; $B(x, r) \in U$*

Définition 1.2. *Soit X un ensemble et F est un partie de X , on appelle F un ferme de X si $C_X F$ est un ouverte sur X*

1.1.1 Espace topologique

Définition 1.3. *Soit X un ensemble et U, V deux ouverte de X , on appelle topologie sur X toute partie τ de $P(X)$ vérifiant les trois propriétés suivantes .*

(O_1) $\emptyset, X \in \tau$

(O_2) *Si $U, V \in \tau$, alors $U \cap V \in \tau$*

(O_3) *Si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille de parties de X appartiennent à τ, alors $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \in \tau$*

$(X;\tau)$ s'appelle espace topologique de support X. Les éléments de τ sont appelés ouverts de $(X;\tau)$ ou de τ .

Exemple 1.1. *Soit X un ensemble quelconque*

(1) On a $\tau_d = P(X)$ est une topologie sur X , on appelle topologie discret .

(2) Est on a $\tau_g = \{\emptyset, X\}$ est une topologie sur X on appelle topologie grossière ou (triviale) .

(3) Soit $X = \{a, b\}$ est une ensemble alors les topologies sur X défini par

$$\tau_1 = \{\emptyset, X\}, \tau_2 = \{\emptyset, \{a\}, X\}, \tau_3 = \{\emptyset, \{b\}, X\}, \tau_4 = \{\emptyset\{a\}, \{b\}, X\}$$

(4) Soit $X = \{a, b, c\}$ donc l'ensemble $\{\emptyset, \{a\}, X\}$ est un topologie sur X mais l'ensemble $\{\emptyset\{a\}, \{b\}, X\}$ n'est pas topologie sur X car $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$ et $\{a, b\} \notin \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$.

Exemple 1.2. *Soit X un ensemble et $\tau_{cf} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X; X\backslash U \quad est fini\}$ est une topologie sur X on note topologie cofinie*

(1) Si X est finie alors la topologie cofinie c̈icide avec la topologie discrète .

(2) Si X infinie alors deux ouverte quelconques non vide dans X, τ_{cf} ont une intersection non vide .

Définition 1.4. *Soit (X, τ) un espace topologique est $\beta \in \tau$ donc β est une base de la topologie τ si tout ouverte non vide de X est réunion d'ouvertes appartenant ǎ β*

Définition 1.5. *Soit (X, τ) un espase topologique et $x \in X$ et A deux parties de X*

(1) *On dit que x est un voisinage de V de X si il*

$$\exists ouverte \quad U \in X \quad , \quad x \in U \subset V$$

(2) *On généralement tout partie $V \in X$ est une voisinage de A si il*

$$\exists ouverte \quad U \in X \quad , \quad A \in U \subset V$$

1.1.2 applications continues

Définition 1.6. *Une application $f : X \longrightarrow Y$, X, Y deux espace topologie . On a f et continue en x_0 si elle vérifie les deux conditions suivantes sont équivalentes*

- $\forall w \in v(f(x_0)) \quad dans \quad Y \quad f^{-1}(w) \subset v(x_0) \quad dans \quad X$
- $\forall w \in v(f(x_0)) \quad dansY \quad \exists u \in v(x_0) \quad dans \quad X \quad tq \quad f(u) = w$

Définition 1.7. *Une application $f : X \longrightarrow Y$, et X, Y deux espace topologiques*

(1) *On dit que f est continue sur X si f est continue en tout point de X*

(2) *On dit que f est homéomorphisme de X sur Y si f est bijective et f et f^{-1} sont continues*

(3) *On dit que les espaces topologiques X et Y sont homéomorphes s'il existe un homéomorphisme X sur Y*

Exemple 1.3. *Soient X, Y de ensemble muni de les topologie τ, τ' on a :*

(1) *L'application identique suivante*

$$id_X \quad : \quad x \in (X, \tau) \quad \longrightarrow \quad x \in (X, \tau)$$

est une application continue

(2) *Toute applications constante de les espaces (X, τ) vers les espaces (Y, τ') est une application continue*

1.2 les espaces vectoriels

Un corps d'un espace vectoriel .

On rappelle qu'un corps est un ensemble muni des quatre opérations usuelles (addition, soustraction, multiplication et division) qui satisfont les règles habituelles d'associativité, de commutativité et de distributivité.

Définition 1.1. *Un corps commutatif est un ensemble K muni de deux lois interne notées en général $(+)$ et $(.)$ vérifiant le condition suivante :*

(1) $(K,+)$ *est un groupe commutatif*

(2) $(K,.)$ *est un groupe multiplication*

1.2.1 Espace vectoriel

Définition 1.2. *On dit que $(E,+)$ est un groupe commutatif sur un corps K si*

(1) Associativité : $\forall u,v,w \in E, \quad u+(v+w)=(u+v)+w$

(2) Élément neutre : $\exists e \in E, \forall v \in E, \quad v+e=e+v=v$

(3) élément symétrique : $\forall v \in E, \exists v' \in E, \quad v+v'=v'+v=e$

(4) Commutativité : $\forall v,w \in E, \quad v+w=w+v.$

Définition 1.3. *Soit E un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne notée (+) et d'une loi de composition externe de domaine $\mathbb{K}$ notée*
$(E,+,.)$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel (ou espace vectoriel sur $\mathbb{K}$) si et seulement si :

- $(E,+)$*est un groupe commutatif .*
- *la loi* $(.)$ *vérifie les quatre axiomes :*

(1) $\forall (x,y) \in E^2 \ , \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \ , \ \lambda.(x+y)=\lambda.x+\lambda.y$

(2) $\forall x \in E \ , \quad \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2 \ , \ (\lambda+\mu).x=\lambda.x+\mu.x$

(3) $\forall x \in E \ , \forall (\lambda \ , \ \mu) \in \mathbb{K}^2 \ , \ \lambda.(\mu.x)=(\lambda.\mu).x$

(4) $\forall x \in E \ , \ 1.x=x$

Les éléments de E sont les vecteur et les éléments de $\mathbb{K}$ sont les scalaires ou plus simplement les nombres .

1.2.2 Application linéaire

Une application entre deux espaces vectoriels est dite linéaire si elle respecte les deux opérations définissant la structure.

Définition 1.4. *Soit E, F deux espace vectoriel est $f : E \to F$ est une application on dira que f une application linéaire si, pour tout $x, y \in E$ et tous λ , $\mu \in \mathbb{K}$, on a :*

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

Définition 1.5. *On note $L(E, F)$ l'ensemble des application linéaire de E dans F , et $L(E)$ si $E = F$. une application linéaire de E dons E s'appelle aussi un endomorphisme de E*

Proposition 1.1. *(1) Tout combinaison linéaire d'applications linéaire est un linéaire . La composée d'applications linéaire est linéaire.*

(2) Un application $f : E \to F$ et dit isomorphisme si elle est bijective . la réciproque d'un isomorphisme est linéaire

(3) L'image directe d'un sous espace vectoriel de E par une application linéaire est un sous espace vectoriel F . L'image réciproque d'un sous espace vectoriel de F par une application linéaire est un sous espace vectoriel E .

Définition 1.6. *On appelle noyau de l'application linéaire $f \in L(E, F)$ le sous espace vectoriel de E .*

$$Ker(f) = \{x \in E, f(x) = 0\}$$

.

Théorème 1.1. *Soit f une application linéaire de E dans F défini par $f : E \to F$ donc f est injective si est seulement si $Ker(f) = 0$*

Définition 1.7. *Soit f une application linéaire on appelle image d'applications linéaire $f : E \to F$ le sous espace vectoriel de F .*

$$Im(f) = \{f(x), x \in E\}$$

Proposition 1.2.

Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E alors $Im(f) = vect\{f(x_i), i \in I\}$

1.3 Les espaces métriques

1.3.1 Distances

Définition 1.8. *Soit X un ensemble. Une distance sur X est une application $d : X \times X \longrightarrow R^+$ vérifiant pour tous $x, y, z \in X$:*

(d_1) $d(x,y) = 0 \iff x = y$.

(d_2) $d(x,y) = d(y,x)$ *(la symétrie)* .

(d_3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *(l'inégalité triangulaire)* .

Exemple 1.4. *(1) L'ensemble $\mathbb{K}^n$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est muni de plusieurs distances faisant intervenir les distances entre les composantes. Pour deux éléments arbitraires de $\mathbb{K}^n$; $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$; on pose :*

$$d_1(x;y) = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| \quad et \quad d_2(x;y) = (\sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$d_\infty(x;y) = \max_{i \in \{1,...,n\}} |y_i - x_i|$$

(2) Sur $C([0;1]) = \{f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}; f \quad continue\}$, on définit la distance :

$$d_\infty(f;g) = \sup_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)|$$

Définition 1.9. *Deux distances d_1, d_2 sur X sont dites équivalentes s'il existent deux constantes $\alpha, \beta > 0$, telles que*

$$\forall x, y \in X : \alpha d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta d_1(x,y)$$

Espaces vectoriels normés

Un exemple important d'espace métrique est le cas des espaces vectoriels normés. On consédire un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.10. *Une norme sur E est une application de E dans $\mathbb{R}^+$ notée vérifiant pour tous $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$:*

(N_1) $\| x \| = 0, x = 0$ (N_2) $\| \lambda x \| = |\lambda| \, \| x \|$ (N_3) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$

.

Exemple 1.5. *L'espace vectoriel n-dimensionnel* $\mathbb{K}_n$ *avec* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *est muni de trois normes importantes (les normes standard)* $\| \, . \, \|_2, \| \, . \, \|_1, \| \, . \, \|_\infty$ *, définies par* $x = (x_1, ..., x_n)$ *et* $y = (y_1, ..., y_n)$ *:*

$$\| x \|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad , \quad \| x \|_2 = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \| x \|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

1.3.2 Espace métrique complet

Définition 1.11. *Une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans un espace métrique* (X, d) *est dite convergente si*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_\epsilon \in N, \quad n \geq n_\epsilon \quad ona \quad d(x_n, \ell) < \epsilon$$

Proposition 1.3. *Tout suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergente a seule limite est un suite bornée*

Proposition 1.4. *L'ensemble* $C(E)$ *des suites convergentes d'un espace normé* E *est un espace vectoriel . L'application* $L : C(E) \longrightarrow E; (x_n) \longrightarrow \lim x_n$ *est linéaire.*

Définition 1.12. *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite bornée dans un espace métrique* (X, d) *, notons* $\delta_n = \sup\{d(u_p, u_q), p \geq n, q \geq n\}$ *: On dit que* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy si la suite réelle* $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 0 *.*

Définition 1.13. *Un espace métrique est dit complet si, dans cet espace, toute suite de Cauchy est convergente.*

1.4 Espaces vectoriels topologiques

Définition 1.8. *Un espace vectoriel topologique est un* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel* E *muni d'une topologie* τ *qui*

1. *L'origine* $\{0\}$ *Soit fermée dans* E
2. *Les applications*

$$(x, y) \in E \times E \longrightarrow x + y \in E$$

et

$$(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \longrightarrow \lambda x \in E$$

Sont des applications continues

Proposition 1.5. *Soit $(E, \| \|)$ un espace normé. Alors on a :*

1. *L'application suivante est lipschitzienne,donc uniformément continue*

$$(x, y) \in E \times E \longrightarrow x + y \in E$$

2. *L'application suivante est continue*

$$(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \longrightarrow \lambda x \in E$$

Exemple 1.6. *Tout espace normé est un espace vectoriel topologique,
voir proposition 1.5.*

Proposition 1.6. *Soit (E, τ) un espace vectoriel topologique.*

1. *La translation $x \mapsto x + a$ est un homéomorphisme de E , $\quad \forall a \in E$*
2. *L'homothétie $x \mapsto \lambda x$ est un homéomorphisme de E , $\quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \backslash \{0\}$*
3. *L'application $(x, y) \mapsto x - y$ est continue de $E \times E$ dans E.*

Corollaire 1.1. *Soient (E, τ) une espace vectoriel topologie, $a \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$*

1. *Soient* U *un ouvert de E et* A *un sous-ensemble de* E. *alors $a + U$ et $A + U = \bigcup_{x \in A} x + U$ soit des ouverts de E. et λU est un ouvert de E si $\lambda \neq 0$*
2. *Soit F un fermé de E alors $a + F$ et λF sont des fermé de E.*
3. *Soit K un compact de E, alors $a + K$ et λK sont des compacts de E.*

Proposition 1.7. *Soit (E, τ) un espace vectoriel topologique donc (E, τ) est un séparé.*

Démonstration. Soient $x_0, y_0 \in E$ tels que $x_0 \neq y_0$. Alors $E \backslash \{0\}$ est un ouvert de E contenant $x_0 - y_0$. Puisque l'application $(x, y) \to x - y$ est continue de $E \times E$ dans E, il existe un voisinage v de tx_0 est un voisinage w de y_0 tel que $v - w(E \backslash \{0\})$. D'où on a v $\cap$ w $= \emptyset$. Par conséquent, (E, τ) est séparé. □

Définition 1.9. *Soit (E, τ) un espace vectoriel topologique. Une base locale de E est un système fondamentale de voisinage du point* 0*.*

Proposition 1.8. *Soit (E, τ) est un espace vectoriel topologique*

1. *Soit, $a \in E$ les voisinages de a sont de la forme $a + V$, où* V *parcourt l'ensemble de voisinage de* 0. *En particulier, la topologie d'un espace vectoriel topologique est entièrement déterminée par l'ensemble, de voisinages de* 0.
2. *Soit $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$. Soient V un sous-ensemble de E. alors V est un voisinage de* 0 *dans E si et seulement si λV est un voisinage de* 0. *dans E*
3. *Si β est une base locale de E, alors tout élément de β contient l'adhérence d'un élément de β. En particulier, E possède une base locale formée d'ensemble fermés.*
4. *E possède une base locale formée d'ensembles équilibrés.*
5. *Soient* V *un voisinage de* 0 *et $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathbb{K}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty$. Alors on a $E = \bigcup\limits_{n\geq 0} a_n V$.*

Démonstration. Voir [1] page 404 □

Théorème 1.2. *Soit E un espace vectoriel topologique possède une base locale dénombrable. Alors il existe une distance d sur E invariante par translation telle que*

1. *La topologie définie par d est égale à la topologie de E*
2. *Les boules ouvertes de centre* 0 *sont équilibrées.*

Lemme 1.1. *Soit E un espace vectoriel topologique métrisable. Si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite dans E convergente vers 0, il existe une suite $(t_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathbb{R}_+$ tell que*
$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} t_n = +\infty$ *et* $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} t_n x_n = 0$

Lemme 1.2. *Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans un espace vectoriel topologique (E, τ). Alors $(x_n)_{n\geq 0}$ est borné.*

Théorème 1.3. *Soit (E, τ) un espace vectoriel topologique.Les propriétés suivants sont équivalents.*

1. *E est dimension finie.*
2. *E localement compact.*
3. *E est localement borné et possède la propriété de Heine-Borel.*

Démonstration. Voir [1] page 412 □

Chapitre 2

Point de coïncidence des opérateurs compatible

Dans ce chapitre nous allons donner la définition des espaces métriques à cône et explorer quelques notions bien connues dans le cadre des espaces métriques usuelles. Le lecteur intéressé pourra se référer au [17, 18, 19, 20].

2.1 Définition de cône et premières propriétés

Définition 2.1. *Soit E un espace de Banach, on appel cône de E tout ensemble noté p et satisfait les conditions suivantes*

(1) p *est fermé non vide et* $p \neq \{0_E\}$

(2) $ax + by \in p$ *pour tout* $x, y \in p$ *et* $a, b \geq 0$

(3) $p \cap (-p) = \{0_E\}$

Exemple 2.1. *(1) En générale les ensembles* $\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, 2, ..., n\}$ *sont des cône sur les espaces de Banach* $\mathbb{R}^n$ *.*

(2) L'ensemble des réels positives $\mathbb{R}^+$*, est un cône sur l'espace de Banach* $\mathbb{R}$ *.*

Proposition 2.1. *Un cône p d'un espace de Banach E, est une partie convexe dans E.*

Démonstration. Soient x et y deux élément de p, $ax + by \in p$, où a et b sont des réels positives. En particulière quand $a \in [0, 1]$, $b = 1 - a \geq 0$;donc $ax + bx \in p$. □

Dans toute la suite, supposons que E est un espace de Banach, p un cône d'intérieur non vide, et $\leq$ est une relation d'ordre partielle définie sur E par rapport à p par

$$\forall x, y \in E \quad , \quad x \leq y \quad \Longleftrightarrow \quad y - x \in p$$

(1) $x \ll y \iff y - x \in int(p)$, où $int(p)$ désigné l'intérieur de p.

(2) Lorsque $x \neq y$ on remplace $x \leq y$ par $x < y$.

Proposition 2.2. *Soit E un espace de Banach ayant un cône noté p, Alors pour tout $x \in p$ on a $0_E \leq x$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe $x \in p$, tel que $x \neq 0_E$ et $x \leq 0_E$ alors $0 - x = -x \in p$, cela implique que

$$x \in p \cap (-p) = \{0\}$$

d'où la contradiction. □

Proposition 2.3. *Soit E un espace de Banach, p un cône de E , et $a \in p$.*
Si $a \leq \lambda a$ avec $\lambda \in]0, 1[$; cela entraine que $a = 0_E$

Démonstration.

$$a \leq \lambda a \Longrightarrow (\lambda a - a) \in p \Longrightarrow (\lambda - 1)a \in p \Longrightarrow -(1 - \lambda)a \in p$$

Comme $(1 - \lambda) > 0$ et $a \in p \implies (1 - \lambda)a \in p$, alors

$$(1 - \lambda)a \in p \cap (-p) = \{0\} \Longrightarrow a = 0$$

□

Proposition 2.4. *Soit E un espace de Banach, p un cône de E, $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites d'éléments de E , et soient $a, b \in E$; supposons que*

$$a_n \leq b_n \quad et \quad a_n \longrightarrow a \quad ; \quad b_n \longrightarrow b \quad \Longrightarrow \quad a \leq b$$

D'une parte pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $b_n - a_n \in p$, d'autre pare et par passage à la limite on a $b_n - a_n \longrightarrow b - a$. Mais comme p est fermé alors $b - a \in p$, $a \leq b$

Démonstration. D'une parte pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $b_n - a_n \in p$, d'autre pare et par passage à la limite on a $\quad b_n - a_n \longrightarrow b - a \quad$. Mais comme p est fermé alors $\quad b - a \in p \quad \Longleftrightarrow \quad a \leq b$ □

Proposition 2.5. *Soit E un espace de Banach , p un cône de E ; soit $c \in int(p)$ et $(a_n) \subseteq E$, supposons que $0_E \leq a_n$, telle que $a_n \longrightarrow 0_E$, Alors*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0 \quad ona \quad a_n \leq c$$

Démonstration. Soit $c \gg 0$, on choisit un voisinage v de 0_E tel que $c + v \in p$. Comme $a_n \longrightarrow 0_E$, alors il existe n_0 tel que $a_n \in v$, pour tout $n \geq n_0$ nous avons

$$c \pm a_n \in c + v \subset p$$

□

Définition 2.2. *Un cône p de E est dit normal, s'il existe une constante $k > 0_{\mathbb{R}}$ telle que*

$$0 \leq x \leq y \quad \Longrightarrow \quad \| x \|_E \quad \leq k \quad \| y \|_E$$

Où x et y sont des éléments de p.

Exemple 2.2. *(1) Soit $E = \mathbb{R}$, $p = [0, +1[$, la constante de ce cône est, $k = 1$.*

(2) Soit $E = \mathbb{R}^2$, $p = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x, y \geq 0\}$, la constante de ce cône est, $k = 1$.

Remarque 2.1. *(1) Il n'existe aucun cône normal de constante $K < 1$. Autrement dit, les cônes normales ont toujours des constantes supérieur ou égale à*

(2) La condition nécessaire de la définition précédent n'est pas suffisante pour la condition suffisant de cette définition.

(3) On muni, l'ensemble suivant $E = \mathbb{C}([0, 1])$, par la norme définie comme la suite

$$\| f \|_E = \| f \|_\infty + \| f' \|_\infty$$

soit le sous-ensemble $P = \{f \in E : f \geq 0\}$ de E , il est clair que P est un cône de E . Pour tout $k \geq 1$, on pose

$$f(x) = x \quad et \quad g(x) = x^{2k}$$

Alors

$$0 \leq g \leq f \quad , \quad \| f \|_p = 1 \quad et \quad \| f \|_p \quad = \quad 2k+1$$

$k \| f \|_E \leq \| g \|_E$ *ce la entraine qu'il n'existe aucun constante* k *, pour lequel*

$$\| g \|_E \quad \leq \quad k \| f \|_E$$

Définition 2.3. *Un cône* p *d'un espace de Banach* E *est dit régulier si l'une de deux conditions suivantes est satisfaite.*

(1) Toute suite croissant $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* p *avec* $x_n \leq y$ *, où* $y \in E$ *est converge c'est-à-dire*

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \quad tq \quad x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_{n-1} \leq x_n \leq ... \leq y$$

Alors il existe $x \in E$ *pour lequel ,* $x_n \longrightarrow x$ *.*

(2) Toute suite décroissant $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* p *est convergente c'est-à-dire*

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset E \quad tq \quad ... \leq x_n \leq x_{n-1} \leq ... \leq x_2 \leq x_1$$

Alors il existe $x \in E$ *pour lequel,* $x_n \longrightarrow x$ *.*

2.2 propriétés métriques

Définition 2.1. *Soit* X *un ensemble quelconque , on dit qu'une application notée et défini par :*

$$d : X \times X \longrightarrow E$$
$$(x, y) \longmapsto d(x, y).$$

est une distance (ou métrique) à cône si elle satisfait :

$$(M_1) \quad \forall x, y \in X \quad , \quad x \neq y \quad : \quad d(x, y) > 0_E \quad ; \quad d(x, x) = 0_E$$

$$(M_2) \quad d(x; y) = d(x, y), \quad \forall x, y \in X$$

$$(M_3) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \quad \forall x, y, z \in X$$

* le couple (X, d) s'appelle espace métrique à cône. Qui est une généralisation des espaces métriques

Exemple 2.3.

$$d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto d(x, y) = (|x - y|, \alpha|x - y|)$$

. ou α est une constante positive . Alors $(\mathbb{R}, d)$ est une espace métrique à cône .En effet ,soient $x, y, z \in \mathbb{R}$

(1) $d(x, x) = (|x - x|, \alpha|x - x|) = 0_{\mathbb{R}^2}$ *, si* $x \neq y$ *on a* $0 < |x - y| et 0 \neq |x - y|$ *Alors* $(0, 0) < d(x, y)$

(2) $d(x, y) = (|x - y|, \alpha|x - y|) = (|y - x|, \alpha|y - x|) = d(y, x)$

(3) $0 \leq |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y|$

$$0 \leq \alpha|x - y| = \alpha|x - z + z - y| \leq \alpha|x - z| + \alpha|z - y|$$

$$Donc \quad (|x - z| + |z - y|, \alpha|x - z| + \alpha|z - y|) - (|x - y| + \alpha|x - y|) \in p$$

$$\iff d(x, z) + d(y, z) - d(x, y) \in p \iff d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

Donc d est une distance à cône définie sur $\mathbb{R}$ *.*

Exemple 2.4. *soit* $E = \mathbb{C}$ *,* $p = \{a + ib \in \mathbb{C} : \quad a \geq 0, \quad b \geq 0\} \subset \mathbb{C}$ *,On muni E par une relation d'ordre partiel définie par*

$$\forall x, y \in E, x \leq y \iff Re(x) \leq Re(y) et Im(x) \leq Im(y)$$

. Considérons l'application suivante

$$d : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$$

$$(x, y) \mapsto d(x, y) = (|x - y| + i|x - y|)$$

. Alors $(\mathbb{C}, d)$ *est un espace métrique a cône en effet .*

(1) Soit$x, y \in \mathbb{C}, d(x, x) = |x - x| = i|x - x| = 0_{\mathbb{C}}$ *. L'ors que* $x \neq y$ *,* $0 < |x - y|$ *et donc* $|x - y| + i|x - y| \neq 0_{\mathbb{C}}$ *, s'est-à dire* $0_{\mathbb{C}} < d(x, y)$ *.*

(2) Soit$x, y \in \mathbb{C}$ *, On a :*

$$d(x, y) = |x - y| + i|x - y| = |y - x| = i|y - x| = d(y, x)$$

(3) Pour tout $x, y, z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
&0 \leq |x-y| = |x-z+z-y| \leq |x-z| + |z-y| \\
&\Longrightarrow (|x-z| + |z-y|) + i(|x-z| + |z-y|) - (|x-y| + i|x-y|) \in p \\
&\Longrightarrow (|x-y| + i|x-y|) \leq (|x-z| + |z-y|) + i(|x-z| + |z-y|) \\
&\Longrightarrow d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)
\end{aligned}$$

Définition 2.2.

Soient (X, d) *un espace métrique a cône,* $x \in X$ *et* $c \in X$ *avec* $c >> 0$ *alors*

(1) On appelle boule ouverte de contre x_0 *et de rayon* c *l'ensemble :*

$$B(x_0, \mathrm{c}) = \{y \in X; d(x_0, y) \ll \mathrm{c}\}$$

(2) On appelle boule fermée de centre c *et de rayon* c *l'ensemble :*

$$\bar{B}(x_0, \mathrm{c}) = \{y \in X : d(x_0, y) \leq \mathrm{c}\}$$

(3) On appelle Sphère de Centre c *et de rayon* r *l'ensemble :*

$$S(x_0, \mathrm{c}) = \{y \in X; d(x_0, y) = \mathrm{c}\}$$

.

Notons que l'on a $\bar{B}(x_0, \mathrm{c}) = B(x_0, \mathrm{c}) \cup S(x_0, \mathrm{c})$.

Définition 2.3. *Soit* (X, d) *un espace métrique à cône,* $O \subset X$ *on dit que* O *est un ouvert de* X*, si pour tout élément* $x \in O$*, il existe* $c \in int(p)$*tel que* $B(x_0, c) \subseteq O$

Définition 2.4. *Soit* (X, d) *un espace métrique à cône, On appelle voisinage d'un point* $x_0 \in X$*, et on note* ϑ *, s'il existe une boule ouverte* x_0*, et inclus dans* ϑ *. Autrement dit,* $\exists c \in int(P)$ *tel que* $B(x_0, c) \subset \vartheta$ *.*

Proposition 2.6. *Soit* (X, d) *un espace métrique à cône, une partie* A *de* X*, est un ouvert si est un voisinage de tout ses points.*

Définition 2.4. *Soit* (X, d) *un espace métrique à cône, et* $A \subset X$*, un point* $y \in A$ *est dit point d'intérieur à* A *(au sens à cône), s'il existe un ouvert* O *contient* y *et contenant dans* A*. Notons* A *l'ensemble de tout les points d'intérieurs de* A*, autrement dire* A *désigné la réunion de tout les ouvert qui inclus dans* A*. c'est-à-dire le plus grand ouvert (au sens à cône) contenant dans* A*.*

Proposition 2.7. *Un ouvert A au (sens à cône), n'est autre que A, autrement dit $A = A$*

Définition 2.5. *Soient d_1, d_2 deux distance à cône sur l'espace X, on dit que d_1 et d_2 sont métriquement équivalentes s'il existent deux nombres strictement positives ,$\alpha, \beta \in R^+$ tels que*

$$\alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y) \tag{2.1}$$

Proposition 2.8. *Si d_1, d_2 sont deux distances métriquement équivalentes, alors (E, d_1) et (E, d_2) sont topologiquement équivalentes.*

Démonstration. En effet : si y_0 est un point quelconque de (X, d), et $c \in int(p)$ nous avons

$$\begin{aligned} B_{d_1}(y_0, \frac{c}{\beta}) = \{y \in X : d_1(x, y) \leq \frac{c}{\beta}\} &\subseteq B_{d_2}(y_0, c) = \{y \in X : d_2(x, y) \leq c\} \\ &\subseteq B_{d_1}(y_0, c) = \{y \in X : d_1(x, y) \leq \frac{c}{\alpha}\}. \end{aligned}$$

□

2.2.1 Suites et convergence

Définition 2.6. *Soit $(x_n)_{n \geq \mathbb{N}}$ une suite de l'espace métrique à cône X . On appelle converge vers x si*

$$\forall c \in int(p), \exists n \geq n_0; d(x_n, x) \ll c$$

Théorème 2.1. *Soit (X, d) un espace métrique à cône , p un cône normé , et k est un constante . Si la suite $(x_n)_{n \geq \mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ converge vers une limite ℓ dans X , alors cette limite est unique*

Démonstration. Soit (E, d) un espace métrique à cône suppose que (x_n) est un suite converge vers ℓ et converge vers ℓ' . Alors $\forall c \in int(p)$ on a

$$\exists n_0, \quad \forall n \geq n_0; d(x_n, \ell) \ll \frac{c}{2}$$

.

$$\exists n_1, \quad \forall n \geq n_1; d(x_n, \ell') \ll \frac{c}{2}$$

. Fixé $n_2 = \max(n_0, n_1), n \geq n_2$ alors

$$d(\ell, \ell') \leq d(\ell, x_n) + d(x_n, \ell') \ll \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c \iff \| d(\ell, \ell') \| \leq k \times \| c \|$$

. L'arbitraire de c implique que $d(\ell, \ell') = 0_E$ donc $\ell = \ell$, d'où l'unicité de la limite □

Théorème 2.2. *Soit* (X, d) *un espace métrique à cône,* p *un cône normal, de constante* k*. Si la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge dans* X*, alors toute sous-suite extraite de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, est converge vers la même limite.*

Démonstration. Supposons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élément de X, converge vers x, et soit $(x_{\varphi(n)})$ une suite extraite de la suite (x_n) on va démontrer que $(x_{\varphi(n)})_n$ converge vers x. Soit $c \in int(p)$, alors il existe pour ce élément un nombre entier noté $n_0 \in \mathbb{N}$, pour lequel, pour tout $n \geq n_0$ on ait $d(x_n, x) \ll c$, donc pour tout $n \geq n_0$ on a

$$d(x_{\varphi(n)}), x) \leq d(x_{\varphi(n)}), x_n) + d(x_n, x) \ll c + c = 2c$$

d'où la convergence de $(x_{\varphi(n)})$ vers x. □

Théorème 2.3. *Soit* (X, d) *un espace métrique à cône,* P *normal de constante* k*. Pour qu'une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* X *soit converge vers* $x \in X$ *il faut et il suffit que* $d(x_n, x) \longrightarrow 0_X$ *quand* n *tend vers* $+\infty$*.*

Démonstration. Supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x, pour $\epsilon > 0$, on choisit $c \in E$ avec $c \gg 0$ tel que $k \parallel c \parallel < \epsilon$ D'après la définition de la convergence d'une suite

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}; \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 d(x_n, x) \ll c$$

donc $\parallel d(x_n, x) \parallel \leq k \parallel c \parallel < \epsilon$. Ce ci implique que $d(x_n, x) \longrightarrow 0_E$ quand $n \longrightarrow +\infty$. Réciproquement supposons que $d(x_n, x) \longrightarrow 0_E$, lorsque $n \longrightarrow +\infty$, pour $c \in E$ avec :

$$\forall c \gg 0, \exists \delta > 0 \parallel y \parallel \leq \delta \longrightarrow c - y \in int(p)$$

Pour δ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, pour tout $n \geq n_n$

$$\parallel d(x_n, x) \parallel < \delta \iff c - d(x_n, x) \in int(p) \iff d(x_n, x) \ll c$$

d'où la convergence de la suite (x_n), vers l'élément x. □

Théorème 2.4. *Soit* (X, d) *un espace métrique à cône,* P *un cône normal de* E *, de constante* k*, soient* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites d'éléments de* E*, Converges respectivement vers* x, y*. Alors :*

$$d(x_n, y_n) \longrightarrow d(x, y), n \longrightarrow +\infty$$

Démonstration. Pour $\epsilon > 0$, On choisit $c \in E$ avec $c \gg 0, \| c \| \leq \frac{\epsilon}{2k+1}$ Par définition

$$\exists n_0, \quad \forall n \geq n_0; d(x_n, \ell) \ll \frac{c}{2}$$

$$\exists n_1, \quad \forall n \geq n_0; d(x_n, \ell') \ll \frac{c}{2}$$

Prenons $n_2 = max\{n_0, n_1\}$ donc pour tout $n \geq n_2$

$$*d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n) \leq \frac{c}{2} + d(x, y) + \frac{c}{2} = d(x, y) + c$$

$$*d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y) \leq \frac{c}{2} + d(x_n, y_n) + \frac{c}{2} = d(x_n, y_n) + c$$

Alors de ce dernier inégalité on a

$$d(x, y) - d(x_n, y_n) \leq c.$$

Donc on obtient

$$0 \leq d(x, y) - d(x_n, y_n) + c \leq 2c.$$

Et

$$\begin{aligned} \| d(x, y) - d(x_n, y_n) \| &\leq \| d(x, y) + c - d(x_n, y_n) - c \|, \\ &\leq \| d(x, y) + c - d(x_n, y_n) \| + \| c \|, \\ &\leq 2k \| c \| + \| c \|, \\ &\leq (2k+1) \| c \| . \end{aligned}$$

Autrement dit

$$d(x_n, y_n) \longrightarrow 0, n \longrightarrow +\infty,$$

d'où le résultat désiré. □

Définition 2.7. *Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'espace métrique à cône X est dite de Cauchy si*

$$\forall c \in E, 0_E \ll \quad \exists n(c) \in \mathbb{N} \quad \forall m > n \geq n(c) \Longrightarrow d(x_n, x_m) \ll c$$

Théorème 2.5. *Soit (X, d) un espace métrique à cône , la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de X . Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est converge dans X , alors $(x_n)_{\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy.*

Démonstration. Pour $c \in int(p)$

$$\exists n_0 \quad \forall n \geq n_0; d(x_n, x) \ll \frac{c}{2}$$

Donc pour $n, m > n_0$ on a :

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) \ll \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c$$

donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy. $\square$

Théorème 2.6. *Soit (X, d) un espace métrique à cône, P un cône normal de E , de constante k . Pour au'une suite $(x_n)_{n_i n \mathbb{N}}$ d'élément de X , est de Cauchy , il faut et il suffit , $d(x_n, x_m) \longrightarrow 0_E$ quand $n, m \longrightarrow +\infty$*

Démonstration. Supposons que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, pour $\epsilon > 0$, on choisit $c \in E$ avec $c \gg 0$, telle que , il existe $n_0 \in \mathbb{N}$

$$\forall m, n > n_0; d(x_n, x) \ll c$$

donc $\| d(x_n, x_m) \| \ll k \| c \|$, Ce si implique que $d(x_n, x_m) \longrightarrow 0_E$ quand $m, n \longrightarrow +\infty$
Réciproquement Supposons que $d(x_n, x_m) \longrightarrow 0_E$ quand $n, m \longrightarrow +\infty$, et montrons que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, pour $c \in E$ avec $c \gg 0$, $\exists \delta > 0$ tel que

$$\| c \| \leq \delta \Longrightarrow c - x \in int(p)$$

Pour cette δ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, m \geq n > n_0 \| d(x_n, x_m) \| < \delta$$

Alors

$$c - d(x_n, x_m) \in int(p)$$

Donc $d(x_n, x_m) \ll c$. d'où la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy dans X. $\square$

Théorème 2.7. *Soit (X, d) un espace métrique à cône , et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X , de tel sorte que*

$$d(x_n, x_m) \ll \frac{c_0}{n} \quad n \leq m \quad 0 \ll c_0 \tag{2.2}$$

Alors la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans l'espace X.

Démonstration. Soit $c \gg 0$, il existe $\alpha > 0$ telle que

$$c + B(0_E, \alpha) = \{b \in E : \| b \| < \alpha\} \subseteq p$$

Quand $n \longrightarrow \infty$ on a $\dfrac{c_0}{n} \longrightarrow 0_E$

On choisit $n_0 \in \mathbb{N}$ pour lequel $-\dfrac{c_0}{n_0} \in B(0_E, \alpha), \quad \forall n \geq n_0$. Alors $\dfrac{c_0}{n_0} \ll c, \quad \forall n \leq n_0$, pour l'équation (1,4) on obtient que

$$d(x_n, x_m) \ll \frac{c_0}{n} \ll c \quad \forall m \geq n > n_0$$

□

Théorème 2.8. *Soient $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites de Cauchy de l'espace métrique à cône X, par rapport à ce cône normal P avec constante k. Alors la limite de la suite $d(x_n, y_n)$ existe dans $(X, \| \, . \, \|)$*

Démonstration. Comme $(X, \| \, . \, \|)$ est un espace *à* cône , il suffit donc, de montre que la suite $d(x_n, y_n)$ est de Cauchy. Les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ de Cauchy alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$$d(x_i, x_j) \ll c \quad d(y_i, y_j) \ll c$$

Pour tout $i, j \geq n_0$ alors on obtient

$$d(x_i, y_i) \leq d(x_i, x_j) + d(x_j, y_j) + d(y_i, y_j) \leq d(x_j, y_j) + 2c \tag{2.3}$$

Et

$$d(x_j, y_j) \leq d(x_j, x_i) + d(x_i, y_i) + d(y_j, y_i) \leq d(x_i, y_i) + 2c \tag{2.4}$$

De (1.5) et (1.6) on obtient

$$0 \leq d(x_j, y_j) + 2c - d(x_i, y_i) \leq d(x_i, y_i) + 2c + 2c - d(x_i, y_i) = 4c$$

$$\| \, d(x_j, y_j) + 2c - d(x_i, y_i) \, \| \leq k \, \| \, 4c \, \|$$

l'inégalité triangulaire permis de conclure que E on obtient

$$\| \, d(x_j, y_j) - d(x_i, y_i) \, \| \leq \| \, d(x_j, y_j) + 2c - d(x_i, y_i) \, \| + \| \, 2c \, \| \leq (4K + 2) \, \| \, c \, \| < \epsilon$$

On en déduit que la suite $d_n = d(x_n, y_n)$ est de Cauchy dans E, Donc elle est convergent.

□

2.3 espace vectoriel topologique à cône espace métrique

Définition 2.8. *Soit* (X, d) *un espace métrique et* L *un opérateur* $L : X \to X$*,on dit que* L *est un opérateur de contraction s'il existe* $\lambda \in [0, 1)$

$$d(Lx, Ly) \leq \lambda d(x, y), \quad \forall x, y \in X \tag{2.5}$$

Définition 2.9. *Soit* (X, d) *un espace métrique et* L *un opérateur* $L : X \to X$*,on dit que* L *est un opérateur de Kannan s'il existe* $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$ *tel que*

$$d(Lx, Ly) \leq \alpha[d(x, Lx) + d(y, Ly)], \quad \forall x, y \in X \tag{2.6}$$

Définition 2.10. *Soit* X *un ensemble no vide. Supposons que l'application* $X \times X \longrightarrow E$ *satisfait*

(1) $0_E < d(x, y), \quad \forall x, y \in X \quad$ *et* $\quad d(x, y) = 0_E \iff x = y$.

(2) $d(x, y) = d(y, x), \quad \forall x, y \in X$.

(3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \quad \forall x, y, z \in X$

Alors d *est appelé espace vectoriel topologique ă valeur de cône métrique et* (X, d) *est appelé espace vectoriel topologique ă valeur de cône espace métrique .*
Si X *est un espace de Banach réel alors* (X, d) *est appelé espace métrique conique.*

Définition 2.5. (X, d) *un espace vectoriel topologique à valeur cône métrique et* $x \in X$ *et* (x_n) *une suite de* X

(1) On dit que $\{x_n\}_n$ *converge vers* x *si et seulement*

$$\forall c \in E, \quad avec \quad 0_E \ll c, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad d(x_n, x) \ll c, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(2) On dit que $\{x_n\}_n$ *est de Cauchy si*

$$\forall c \in E, \quad avec \quad 0_E \ll c, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad d(x_n, x_m) \ll c, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(3) (X, d) *un espace vectoriel topologique de cône espace métrique complet si tout suit de Cauchy est convergente*

Définition 2.6. *le couple (L, K) des application définies de X dans X sont faiblement compatible si $LKx = KLx$ dés que $Lx = Kx$ .et un point $y \in X$ est appelé point de coïncidence de la famille $\{K_j\}_{j\in J}$ d'application défini de X dans X s'il existe un point*

$$x \in X \quad telleque : y = k_j x, \quad \forall j \in J$$

Théorème 2.9. *Soit (X, d) un espace vectoriel topologique à valeur de cône espace métrique complet p en cône solide et soit $L, K, H : X \longrightarrow X$ des applications que satisfait :*

$$d(Lx, Ky) \leq A.d(Hx, Lx) + B.d(Hy, Ky), \quad \forall x, y \in X \tag{2.7}$$

Ou A, B sont des réel positive , $A + B < 1$ .Si $L(X) \cup K(X) \subset F(X)$, $F(X)$ ou $L(X)\cup K(X)$ sont des espaces complets de X .Alors L, K et H ont un point de coïncidence unique . De plus si (L, H) et (K, H) sont faiblement compatible ; alors L, K, H ont un point fixe commun unique

Démonstration : *(1) Unicité :* on suppose que il existe $u, u^\star$ telle que

$$v \quad = \quad Hu \quad = \quad Lu \quad = \quad Ku$$

Et

$$v^\star \quad = \quad Hu^\star \quad = \quad Lu^\star \quad = \quad Ku^\star$$

De $(2, 7)$ on a

$$d(v, v^\star) = d(Lu, Ku^\star)$$

Donc

$$d(v, v^\star) \leq Ad(Hu, Lu) + Bd(Hu, Ku)$$

Alors

$$d(v, v^\star) \leq (A + B)d(v, v^\star)$$

Ce qui implique $v = v^\star$ contradiction

(2) L'existence :

Soit $x_0 \in X$ donc il existe $x_1 \in X$ telle que $Hx_1 = Kx_0$ car $L(X) \cup K(X) \subseteq H(X)$ de même raisonnement il existe $x_2 \in X$ tel que $Hx_2 = Lx_1$ on a en construit avec le même raisonnement ou peut construire une suite de Cauchy telle que

$$Hx_{2n+1} = Kx_{2n}$$

$$Hx_{2n+2} = Lx_{2n+1}$$

donc on a les cas suivantes

$a)$ S'il existe n_0 tel que $Hx_{2n_0} = Hx_{2n_0+1}$, alors $Hx_{2n_0} = Kx_{2n_0}$ et de $(2,7)$ on a

$$d(Hx_{2n_0}, Lx_{2n_0}) = d(Hx_{2n_0+1}, Lx_{2n_0})$$

Donc

$$d(Hx_{2n_0}, Lx_{2n_0}) \leq Ad(Hx_{2n_0}, Lx_{2n_0}) + Bd(Hx_{2n_0}, Kx_{2n_0})$$

Donc

$$d(Hx_{2n_0}, Lx_{2n_0}) \leq Ad(Hx_{2n_0}, Lx_{2n_0})$$

Donc

$$Hx_{2n_0} = Lx_{2n_0} = Kx_{2n_0} = y_0$$

Donc il existe un point de coïncidence

$b)$ On suppose que $Hx_n \neq Hx_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Don de $(2,7)$ on a :

$$d(Hx_{2n}, Hx_{2n+1}) = d(Lx_{2n-1}, Kx_{2n})$$

Donc

$$d(Hx_{2n}, Hx_{2n+1}) \leq Ad(Hx_{2n-1}, Lx_{2n-1}) + Bd(Hx_{2n}, Kx_{2n})$$

Donc

$$d(Hx_{2n}, Hx_{2n+1}) \leq Ad(Hx_{2n-1}, Hx_{2n}) + Bd(Hx_{2n}, Hx_{2n+1})$$

Ce implique que Donc

$$d(Hx_{2n}, Hx_{2n+1}) \leq \frac{A}{1-B} d(Hx_{2n-1}, Hx_{2n})$$

Et implique

$$d(Hx_{2n}, Hx_{2n+1}) \leq \max\{\frac{B}{1-A}, \frac{A}{1-B}\} d(Hx_{2n-1}, Hx_{2n})$$

de même raisonnement

$$d(Hx_{2n-1}, Hx_{2n}) = d(Kx_{2n-2}, Lx_{2n-1})$$

Donc de $(2,7)$ on a :

$$d(Hx_{2n-1}, Hx_{2n}) \leq Ad(Hx_{2n-1}, Lx_{2n-1}) + Bd(Hx_{2n-2}, Kx_{2n-2})$$

Donc

$$d(Hx_{2n-1}, Hx_{2n}) \leq Ad(Hx_{2n-1}, Hx_{2n}) + Bd(Hx_{2n-2}, Hx_{2n-1})$$

Ce ce implique que

$$d(Hx_{2n-1}, Hx_{2n}) \leq \frac{B}{1-A} d(Hx_{2n-2}, Hx_{2n-1})$$

Donc

$$d(Hx_{2n-1}, Hx_{2n}) \leq \max\{\frac{B}{1-A}, \frac{A}{1-B}\} d(Hx_{2n-2}, Hx_{2n-1})$$

On pose

$$\lambda = \max\{\frac{b}{1-A}, \frac{A}{1-B}\} < 1$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$d(Hx_n, Hx_{n+1}) \leq \lambda^2 d(Hx_{n-2}, Hx_{n-1}) \leq ... \leq \lambda^n d(Hx_0, Hx_1)$$

Pour tout $n < m$ on obtient $\forall n < m$ on a

$$d(Hx_m, Hx_n) \leq [\lambda^n + \lambda^{n+1} + ... + \lambda^{m-1}] d(Hx_0, Hx_1)$$

Donc

$$d(Hx_m, Hx_n) \leq [\frac{\lambda^n}{1-\lambda}] d(Hx_0, Hx_1)$$

Pour tout $n < m$ on déduit que (Hx_n) est une suite de Cauchy sur l'espace $H(X)$

(a) Si $H(X)$ est un espace complet il existe $u \in H(X)$ telle que $Hx_n \longrightarrow v = Hu$

(b) Si $L(X) \cup K(X)$ est un espace complet il existe $v \in L(X) \cup K(X)$ telle que $Hx_n \longrightarrow v$

On obtient

$$d(Hu, Ku) \leq d(Hu, Hx_{2n+2}) + d(Hx_{2n+2}, Ku)$$

$$d(Hu, Ku) \leq d(Hu, Hx_{2n+2}) + d(Sx_{2n+1}, Ku)$$

$$d(Hu, Ku) \leq d(Hu, Hx_{2n+2}) + Ad(Hx_{2n+1}, Hx_{2n+2}) + Bd(Hu, Ku)$$

$$d(Hu, Ku) \leq \frac{1}{1-B} d(Hu, Hx_{2n+2}) + \frac{A}{1-B} d(Hx_{2n+1}, Hx_{2n+2})$$
$$d(Hu, Ku) \ll \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c$$

Donc

$$d(Hu, Ku) \ll \frac{c}{m}, \quad \forall m \geq 1$$

Alors $\frac{c}{m} - d(Hu, Kv) \in p, \quad \forall m \geq 1$ comme

$$\frac{c}{m} \longrightarrow 0, \quad m \longrightarrow +\infty \quad et \quad p = \bar{p}, -d(Hu, Lu) \in p \quad mais \quad d(Hu, Ku) \in p$$

Alors

$$d(Hu, Ku) = v \quad donc \quad v = Hu = Ku$$

□

Bibliographie

[1] N . El Hage Hassan , *Topologie générale et espaces normés* , Dunod , Paris , 2011 .

[2] G . Aissa cours d'lgébre premier année licence , Universite Mohamed Boudiafde de M'sila , 2016 : 2017

[3] Mujahid Abbas et B.E. Rhoades. "Fixed and periodic point results in cone metric spaces". In : Applied Mathematics Letters 22 (4 2009).

[4] Mohammad A. Alghamdi et al. "Fixed point theorems for convex contraction mappings on cone metric spaces". In : Mathematical and Computer Modelling 54 (9-10 2011).

[5] M. Alimohammady et al. "Conditions of regularity in cone metric spaces". In : Applied Mathematics and Computation 217 (13 2011).

[6] Shahrazad H. Alnafei, Stojan Radenovic et Naseer Shahzad. "Fixed point theorems for mappings with convex diminishing diameters on cone metric spaces". In : Applied Mathematics Letters 24 (12 2011).

[7] Ishak Altun, Boško Damjanovic et Dragan Djoric. "Fixed point and common fixed point theorems on ordered cone metric spaces". In : Applied Mathematics Letters 23 (3 2010).

[8] A. Amini-Harandi et M. Fakhar. "Fixed point theory in cone metric spaces obtained via the scalarization method". In : Computers et Mathematics with Applications 59 (11 2010).

[9] Muhammad Arshad, Akbar Azam et Pasquale Vetro. "Some Common Fixed Point Results in Cone Metric Spaces". In : Fixed Point Theory and Applications 2009 (1 2009).

[10] H. Aydi et al. “Coincidence and common fixed point results in partially ordered cone metric spaces and applications to integral equations”. In : Nonlinear Analysis : Theory, Methods et Applications 74 (17 2011).

[11] Akbar Azam, Muhammad Arshad et Ismat Beg. “Banach contraction principle on cone rectangular metric spaces”. In : Applicable Analysis and Discrete Mathematics 3 (2 2009).

[12] Hüseyïn Cakalli, Ayse Sönmez et Çigdem Genç. “On an equivalence of topological vector space valued cone metric spaces and metric spaces”. In : Applied Mathematics Letters 25 (3 2012).

[13] Kieu Phuong Chi et Tran Van An. “Dugundji’s theorem for cone metric spaces”. In : Applied Mathematics Letters 24 (3 2011).

[14] A. P. Farajzadeh. “On the scalarization method in cone metric spaces”. In : Positivity 18 (4 2014).

[15] A.P. Farajzadeh, A. Amini-Harandi et D. Baleanu. “Fixed point theory for generalized contractions in cone metric spaces”. In : Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 17 (2 2012).

[16] M. Hazi. Topologie Au de là travaux Dirigés. 2e éd. office des publications universitaires, 1975.

[17] Long-Guang Huang et Xian Zhang. “Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings”. In : Journal of Mathematical Analysis and Applications 332 (2 2007).

[18] Sh. Rezapour et R. Hamlbarani. “Some notes on the paper "Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings"”. In : Journal of Mathematical Analysis and Applications 345 (2 2008).

[19] Shenghua Wang et Baohua Guo. “Distance in cone metric spaces and common fixed point theorems”. In : Applied Mathematics Letters 24 (10 2011).

[20] B.Ismat et A.Akbar "Kannan type mapping in TVE-valued cone metric space and their application to Urysohn integral equations" . Article in : SARAJUVO JOURNAL OF MATHEMATICS November 174 (4 2013)

Abstract

The objective of our work is to find point of coïncidence for a sequence of operator satisfies certain conditions in topologie vector space and cones metric spaces. Some results from about the existence and Uniqueness the point of coïncidence of a sequence of opérators

Key words : Fixe point, point of coïncidence, common fixed point, metric space, cone space.

ملخص

الهدف من عملنا هو العثور على نقاط التلاقي لمجموعة من المؤثرات التي تلبي شروط معينة في الفضاءات الطوبولوجية و الفضاءات المتر ية المخروطية، ثم تقديم بعض النتائج حول وجود و وحدانية نقطة تلاقي مشتركة لمتتالية من الدوال

الكلمات المفتاحية: نقطة ثابتة، نقطة تلاقي ، نقطة ثابتة مشتركة، فضاء متري، فضاء متري مخروطي.

Résumé

L'objectif de notre travail et de trouver des points de coïncidence pour une suites des opérateurs satisfait certaines conditions dans les espaces vectoriels topologiques et les espaces métriques cônes. On a présenté quelques résultats sur l'existence et l'unicité de point de coïncidence d'une suite des fonctions

Mots clés : Point fixe, point de coïncidence, point fixe commun, espace métrique, espace cône.