N° d'ordre :………………

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

République **A**lgérienne **D**émocratique et **P**opulaire
Ministère de l'**E**nseignement **S**upérieur et
De la **R**echerche **S**cientifique

Université Mohamed Boudiaf - **M**'sila
Faculté des **S**ciences
Département de **P**hysique

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Domaine : **Sciences de la matière**

Filière : **Physique**

Option : **Physique théorique : Physique des particules à haute énergies**

Par

Khodja MERIEM

THEME

Les niveaux d'énergies atomique produit par le potentiel inverse-carré dans l'espace-phase non commutatif à trois dimensions

Soutenue le :05 /06/2016

Devant le jury composé de :

S.MEDJBER	MC Univ. de M'sila	Président
Abdelmadjid MAIRECHE	Prof. Univ. de M'sila	Rapporteur
S.BESKRI	MA-A Univ. de M'sila	Examinateur

Promotion Juin 2016

Remerciements

Tout d'abord remercions Dieu tout poussant qui mous a éclairé vers le bon chemin.

Mes premiers remerciements s'adressent à mon directeur de Mémoire professeur : **Abdelmadjid Maireche.**

Je remercie les membres de jury qui ont accepté de juger ce travail.

Mes remerciements vont également à tous les enseignants du déportement de physique et mes collègues de promotion 2016.

Enfin je voudrais remercies ma famille, mes amies et amis et mes parents leur soutien le sacrifice qu'ils ont fait pour nous voir réussir.

Table de la Matière

Table de la Matière

Chapitre III: L'étude de l'équation de Schrödinger modifiée pour le potentiel carré-inverse inverse square dans l'espace-phase non commutatif à trios dimension

Intrudiction générale

Introduction générale

Malgré les sucées de la physique classique a l'échelle macroscopique, est totalement inadéquate pour les phénomènes observés l'échelle atomique, et cette nouvelle théorie de l'univers physique est conventionnellement appelée la mécanique quantique dans se grandes lignes, elle a été conçue entre 1925 et 1930, et elle est l'œuvre principalement de N. Bohr, Heisenberg, Schrödinger et Dirac **[1-2].**

La mécanique quantique est une révolution scientifique majeure qui modifie radicalement un certain nombre de concepts de base de physique pour décrit les systèmes microscopiques dans le cadre non-relativiste et relativiste.

La mécanique Quantique ordinaire à l'espace de Hilbert est définie en remplaçant les variables et les moments canoniques par des operateurs et postuler les règles de commutations canonique $\left[x_i, p_j\right] = i\hbar\delta$, $\left[x_i, x_j\right] = 0$ et $\left[p_i, p_j\right] = 0$ **[1-2].**

Actuellement, l'équation de Schrödinger développé par plusieurs méthodes : la méthode de Nikiforov-Uvarov, super-symétrique quantum mechanics, calcule numérique, interaction asymptotique, l'approché de l'intégrale de chemin …etc. pour étudier les différents un modèles quantique, dans les différents domaines de la science atomique, nucléaire, moléculaire….etc. **[3-31].**

De même sur un espace non commutatif les coordonnées d'espace temps ordinaire x_i sont remplacées par des coordonnées non commutatives $\hat{x}_i$ **[32-62]**.

L'idée de la non commutativité de l'espace-temps, a été introduite pour résoudre quelle que problèmes physique, comme l'unification de la gravitation avec les trois interactions fondamentales (électromagnétique, faible et forte) et le problème de la renormalisabilité**.**

L'objectif de ce travail de recherche de Master en physique théorique option physique Particules à haute énergie promotion 2015-2016 est d'étudier l'effet de la non-commutativité

De l'espace-phase à trios dimensions sur le potentiel carré-inverse.

Le but principal :

L’objectif principale de ce travail est étude l’équation de Schrödinger non relativiste avec le potentiel central de l’espace-temps à trios dimensions à (3D-NC-RPS) ce travail se divisé on trios chapitre principales avec une conclusion générale.

Représentation du mémoire :

Notre travaille est devisée on trios chapitre

Le premier chapitre :

Consacré la structure quantique de l’espace-phase non commutatif en utilisant le produit de Moyal-Weyl (produit star) et la méthode de Boopp’s Shift, et on applique cette méthode sur le potentiel central carré-inverse, inverse-square **[32-62].**

Le deuxième chapitre :

En étude l’équation de Schrödinger pour le potentiel central square-inverse dans l’espace ordinaire à trios dimension et en déduire les fonctions d’onde et les énergies **[3].**

Le troisième chapitre :

On résoudre l’équation Schrödinger sous l’effet de potentiel central square-inverse dans l’espace- phases non commutatif à trios dimension pour obtenir spectres énergétique.

On termine notre mémoire de master par une conclusion générale et l’interprétation physique.

Chapitre I:

La structure quantique de l'espace-phase non-commutatif

Chapitre I : La structure quantique de l'espace-phase non-commutatif

I.1. Introduction:

Dans ce chapitre on a traité les postulats et les hypothèses caractérisées de la structure quantique et physique de l'espace-phase non-commutatif, les éléments principales sont:

1-Rappelle sur la structure quantique ordinaire.

2-Les nouveaux postulats de l'espace-phase non-commutatif.

3- Le produit star et ces propriétés, la formule de Moyal-Weyl.

4-La méthode de Boopp's Shift et ces application pour un potentiel centrale : $V(r)=\frac{A}{r^2}-\frac{B}{r}$ connue par inverse carrée **[3].**

I.2. Rappelle sur la structure de la mécanique quantique ordinaire:

La naissance de la physique quantique environ 1900, lorsque Planck introduit la notion d''énergie $E=h\nu$ d'un quanta, ce bas est la première marche dans ce route de quantification, qui caractérisée par le constante $h\approx 6{,}6262.10^{-34}\, joul-seconde$. Actuellement, la mécanique quantique ordinaire est formulée sur l'espace des coordonnées et des moments qui sont considéré comme des opérateurs hermétiques (x_i, p_j) suivants **[1-2]** :

$$\begin{cases}[x_i, p_j]=i\hbar\delta_{ij}\\ [x_i, x_j]=0\\ [p_i, p_j]=0\end{cases} \qquad \text{(I.1)}$$

Ou $\hbar=\frac{h}{2\prod}$ et δ_{ij} sont la constant de Planck réduit et le symbole ordinaire de Kronecker, respectivement, la structure présenté par (I.1) connue par les relations des commutations pannonique canonicale (canonical commutation relations CCRs), les procédures de quantification satisfait par les deux fondamentales principes concernant l'énergie el l'impulsion E et p_i :

$$\begin{aligned}E &\to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\\ p_i &\to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x^i}\end{aligned} \qquad \text{(I.2)}$$

En mécanique classique l'énergie d'une particule de masse m_0 soumise des forces produit par potentiel extérieurs $V(\vec{r},t)$ est donnée par :

$$E=\frac{\vec{P}^2}{2m_0}+V(\vec{r},t) \qquad \text{(I.3)}$$

Maintenant en applique les deux principes de quantification canonique présentée dans l'équation (I.2), on trouve directement:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta+V\left(\vec{r},t\right)\right]\Psi\left(\vec{r},t\right)=i\hbar\frac{\partial\Psi\left(\vec{r},t\right)}{\partial t} \quad \text{(I.4)}$$

L'équation (I.4) connait par l'équation de Schrödinger dans l'espace-temps ordinaire, cette équation fondamentale basée sur les postulats présentés par (I.1). $\Psi\left(\vec{r},t\right)$ Est connue par la fonction d'onde, qui déterminer la probabilité de trouver d'une particule à l' instant t dans un volume d^3r entourant le point $\vec{r}$:

$$dP=\left|\Psi\left(\vec{r},t\right)\right|^2 d^3r \quad \text{(I.5)}$$

Et Δ est l'operateur Laplacian, en trois dimensions prendre l'expression suivant:

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{(I.6)}$$

Le point fondamentale qui représente la déférence entre la mécanique classique et la mécanique quantique ordinaire est appelée relation d'incertitude de Heisenberg :

$$\begin{aligned}\Delta x\Delta p_x &\geq \frac{\hbar}{2}\\ \Delta y\Delta p_y &\geq \frac{\hbar}{2}\\ \Delta z\Delta p_z &\geq \frac{\hbar}{2}\end{aligned} \quad \text{(I.7)}$$

Une valeur très important caractérisée la mécanique quantique ordinaire, connait par la valeur moyenne d'un operateur $\hat{A}$ noté par $\langle a\rangle$, prendre les deux expressions dans le cas à deux et trois dimensions, respectivement :

$$\langle a\rangle=\int\Psi\left(\vec{r},t\right)^*\hat{A}\Psi\left(\vec{r},t\right)d^2r \quad \text{(I.8)}$$

Et

$$\langle a\rangle=\int\Psi\left(\vec{r},t\right)^*\hat{A}\Psi\left(\vec{r},t\right)d^3r \quad \text{(I.9)}$$

Avec l'élément de surface d^2r et l'élément de volume d^3r.

En mécanique quantique le moment angulaire global $\vec{J}$ est la somme des deux moments angulaire $\vec{L}$ et le moment de spin $\vec{S}$, donc **[30,31]:**

$$\vec{J}=\vec{L}+\vec{S} \quad \text{(I.10)}$$

Ce qui permit de trouver le couplage spin-orbite $\vec{L}\vec{S}$ de la façon suivante **[30,31]:**

$$\vec{L}\vec{S} = \frac{1}{2}[\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2] \quad \text{(I.11)}$$

Les valeurs propres des operateurs $\vec{J}^2, \vec{L}^2$ et $\vec{S}^2$ en mécanique quantique $(c = \hbar = 1)$ **:**

$$\begin{aligned} \vec{J}^2\Psi &= j(j+1)\Psi \\ \vec{L}^2\Psi &= \ell(\ell+1)\Psi \\ \vec{S}^2\Psi &= s(s+1)\Psi \end{aligned} \quad \text{(I.12)}$$

Les relations (I.11) et (I.12) permettent d'obtenir :

$$\vec{L}\vec{S}\Psi = \frac{1}{2}[j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)]\Psi \quad \text{(I.13)}$$

Avec $\left|l - \frac{1}{2}\right| \leq j \leq \left|l + \frac{1}{2}\right|$, alors :

$$\begin{aligned} j &= l + \frac{1}{2} \\ j &= l - \frac{1}{2} \end{aligned} \quad \text{(I.14)}$$

Si $j = l + \frac{1}{2}$ on dit que l'électron de spin up et si $j = l - \frac{1}{2}$, l'électron de spin down.

I.3. La structure quantique de l'espace-phase non-commutatif :

L'idée principale de la non-commutative de l'espace introduit par H. Syndre en 1947, satisfait par nouveaux structure algébrique, connait par : les relations non commutatif canoniques des commutations suivant **[32-62]**:

$$\begin{aligned} [\hat{x}_i, \hat{p}_j] &= i\hbar\delta_{ij} \\ [\hat{x}_i, \hat{x}_j] &= i\hbar\theta_{ij} \\ [\hat{p}_i, \hat{p}_j] &= i\hbar\bar{\theta}_{ij} \end{aligned} \quad \text{(I.15)}$$

Ou $(i, j = \overline{1, D})$ et D la dimensions de l'espace. Les deux paramètres $\left(\theta^{\mu\nu} =, \bar{\theta}^{\mu\nu}\right) \equiv -\left(\theta^{\nu\mu} =, \bar{\theta}^{\nu\mu}\right) = \varepsilon^{\mu\nu}(\theta, \bar{\theta})$ sont deux tenseurs antisymétriques induits par la non-commutativite position-position et impulsion-impulsion, respectivement. Il est très important de noter les dimensions $\left(\theta^{\mu\nu} =, \bar{\theta}^{\mu\nu}\right)$ est $\left((Lenngth)^2 = (\mathrm{Im}\,pulsion)^2\right)$ respectivement. L'espace –phase non commutatif est définie en terme d'un ensemble des générateur ($\hat{x}_i$ et $\hat{p}_i$) dits coordonnées et moments non commutatif, **[9,10]** :

$$\begin{aligned} x_i &\rightarrow \hat{x}_i = f(x_i, p_i) \\ p_i &\rightarrow \hat{p}_i = g(x_i, p_i) \end{aligned} \qquad \text{(I.16)}$$

Dans ce mémoire de master on sintérisé par l'espace-phase a trois dimensions $N=3$, donc les indices prendre les valeurs $\left(i, j = \overline{1,3}\right)$), dans ce cas particulière, les règles de commutations canonique devient :

$$\begin{cases} [\hat{x}_1, \hat{p}_2] = [\hat{x}_1, \hat{p}_3] = [\hat{x}_2, \hat{p}_3] = 0 \\ [\hat{x}_1, \hat{x}_2] = i\theta_{12} \\ [\hat{x}_1, \hat{x}_3] = i\theta_{13} \\ [\hat{x}_2, \hat{x}_3] = i\theta_{23} \end{cases} \qquad \text{(I.17)}$$

Et

$$\begin{cases} [\hat{x}_1, \hat{p}_1] = [\hat{x}_2, \hat{p}_2] = [\hat{x}_3, \hat{p}_3] = i, \\ [\hat{p}_1, \hat{p}_2] = i\bar{\theta}_{12} \\ [\hat{p}_1, \hat{p}_3] = i\bar{\theta}_{13} \\ [\hat{p}_2, \hat{p}_3] = i\bar{\theta}_{23} \end{cases} \qquad \text{(I.18)}$$

Remarque : Les relations (I.17) et (I.18) écriées en système d'unité naturelle ($c=\hbar=1$).

Dans l'espace-phase non commutatif la construction des théories de jauge se fait de la même manière qu'en théorie de jauge sur un espace ordinaire,

1 -Les champs ordinaires remplacés par les champs non commutatifs,

2-Le produit ordinaire remplacé par le nouveaux produit connait par le produit de Moyal-Weyl (produit star).

Il très important de noter que les relations de commutation dans l'espace non commutatif, satisfait par nouveaux produit connue par le produit star.

I.3.<u>La théorie de jauge</u>

En 1919, le terme 'jauge' est introduit a la première fois par Harman Weyl dans le cadre d'unifier l'électromagnétisme et la gravitation. Mais par la suite, Weyl donna en 1929 le premier exemple d'une théorie de jauge local basée sur le groupe $U(1)$. L'idée a été généralisée par Dirac, puis Yang et Mills en utilisant des groupes plus grands que $U(1)$, ce sont les groupes $SU(2)$ et $SU(3)$ **[3,5].**

I-3-1- Rappelle sur les groupes :

La théorie des groupes joue un rôle fondamental en théorie quantique des champs, parce que toutes les transformations considérées forment des groupes. Le plus souvent même des groupes de Lie **[3, 5,14]**. Soit G un ensemble, et * une application de $G \times G$:

$$\begin{cases} * : G \times G \rightarrow G, \\ (g_1, g_2) \rightarrow g_1 * g_2 \end{cases} \quad \text{(I.19)}$$

Le couple $(G,*)$ est construit un groupe si les axiomes suivants sont satisfaits :

a-La relation de L'associativité :

$$(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3) \quad \text{(I.20)}$$

b- La relation de L'élément neutre :

$$\exists\ e \in G, \quad e*g = g*e = g \quad ; \ \forall g \in G \quad \text{(I.21)}$$

c- La relation de L'élément inverse

$$\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G, g^{-1} * g \quad = g * g^{-1} = e \quad \text{(I.22)}$$

Si g_1 et g_2 sont des éléments de G, le groupe sera qualifiée abélienne si la relation suivant est satisfait :

$$g_1 * g_2 = g_2 * g_1 \quad \text{(I.23)}$$

I.4.Le produit star :

I.4.1.Formule de Moyal-Weyl :

Le formalisme du star-produit initie pour Harman Weyl et Wigner pour permettre une description de la mécanique quantique en termes d'espace phases **[9].** La quantification de Weyl est une technique utilisée pour décrire la mécanique quantique à partir de l'espace de phase de la mécanique classique, c'est une prescription qui nous permet d'associer un opérateur quantique à une fonction classique qui dépend des variable de l'espace de phase (variable canonique).

Soit f(x) une fonction quelconque défie sur l'espace phase, pour chaque fonction f(x) on note $\widetilde{f}$ (k) transformation de Fourier **[11, 5,6] :**

$$\begin{cases} f(x) = (2\pi)^{\frac{-D}{2}} \int d^D\, k\ e^{ik_m x_m} \widetilde{f}\,(k) \\ \tilde{f}(k) = (2\pi)^{\frac{-D}{2}} \int d^D l e^{il_m \hat{x}_m}\, f(x) \end{cases} \quad \text{(I.24)}$$

F devient en opérateur de Weyl :

$$w(f) = (2\pi)^{\frac{-D}{2}} \int d^D k e^{ik_m \hat{x}_m} \tilde{f}\ (k) \quad \ldots \text{(I.25)}$$

$$w(g) = (2\pi)^{\frac{-D}{2}} \int d^D l e^{il_n \hat{x}_n} \tilde{g}\ (l) \quad \ldots \text{(I.26)}$$

On multiplie les opérateurs w(f) et w(g) pour donnée d'autres opérateurs :

$$w(f).w(g) = w(f * g) \quad \ldots \text{(I.27)}$$

$$w(f).w(g) = (2\pi)^{-D} \int d^D k d^D l\, e^{ik_m \hat{x}^m} e^{il_n \hat{x}^n} \tilde{f}\,(k)\tilde{g}(l) \quad \ldots \text{(I.28)}$$

En utilisant la formule de Campbell-Baker-Hausdorff **[8, 1,2] :**

$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}}\mathrm{e}^{\mathrm{B}} = \mathrm{e}^{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\frac{1}{2}[\mathrm{A},\mathrm{B}]+\frac{1}{12}[[\mathrm{A},\mathrm{B}],\mathrm{B}]-\frac{1}{12}[[\mathrm{A},\mathrm{B}],\mathrm{A}]\ldots\ldots}$$

Valable pour les opérateurs A et B talque **[1] :**

$$\big[\mathrm{A}, [\mathrm{A}, \mathrm{B}]\big] = \big[\mathrm{B}, [\mathrm{A}, \mathrm{B}]\big] = 0 \ldots \text{(I.29)}$$

Donc :

$$w(f).w(g) = (2\pi)^{-D} \int d^D k d^D l\, e^{i(k_m + l_n)\hat{x}^m - \frac{i}{2} k_m l_n \theta^{mn}} \tilde{f}\,(k)\tilde{g}(l)$$

$$= w(f * g) \quad \ldots \text{(I.30)}$$

Et (f*g) c'est la fonction de $Moyal - Weyl$:

$$w(f * g) = w\left[(2\pi)^{-D} \int d^D k d^D l [e^{\frac{i\theta^{mn}}{2}\frac{\partial}{\partial x^m}\frac{\partial}{\partial y^n}}\, e^{ik_m \hat{x}^m + il_n y^n}] \tilde{f}(k)\tilde{g}(l)\right]$$

$$= w\left[e^{\frac{i}{2}\theta^{mn}\frac{\partial}{\partial x^m}\frac{\partial}{\partial y^n}} f(x)g(y)\right]|_{Y\to X} \quad \ldots \text{(I.31)}$$

$$(f * g) = \left[e^{\frac{i}{2}\theta^{mn}\frac{\partial}{\partial x^m}\frac{\partial}{\partial y^n}} f(x)g(y)\right]|_{Y\to X} \quad \ldots \text{(I.32)}$$

Donc

$$(f * g)(\mathrm{x}, \mathrm{p}) = (fg)(x, p) + \frac{i}{2}\theta^{mn}\frac{\partial}{\partial x^m} f(x, p)\frac{\partial}{\partial x^n} + O(\theta^2) \quad \ldots \text{(I.33)}$$

$$+ \frac{i}{2} h\bar{\theta}^{mn} \frac{\partial}{\partial p^m} f(x, p) \frac{\partial}{\partial p^n} g(x, p) + 0(\bar{\theta}^2)$$

$\big(f(x, p) * g(x, p)\big)$ Représenté le nouveaux produit en mécanique quantique non commutatif.

I.4.2.Propriétés du de produit star :

Le produit star vérifie les déférentes propriétés suivant **[9, 5] :**

a)-Non commutatif :

$$f(x,p)*g(x,p) \neq g(x,p)*f(x,p) \quad \text{(I.34)}$$

b)-Associatif :

$$(f(x,p)*g(x,p))*h(x,p) = f(x;p)*(g(x,p)*h(x,p)) \quad \text{(I.35)}$$

c)-La relation du complexe conjugué

$$(f(x,p)*g(x,p))^* = f(x,p)^* * g(x,p)^* \quad \text{(I.36)}$$

d)-La relation d'intégrale :

$$\int d^D x (f*g)(x,p) = \int d^D x (g*f)(x,p) = \int d^D x f(x,p) g(x,p) \quad \text{(I.37)}$$

e)-Permutation cyclique :

$$\int d^D x (f*g*h)(x,p) = \int d^D x (h*f*g)(x,p) = \int d^D x (f*h*g)(x,p) \quad \text{(I.38)}$$

f)-Satisfait la règle de Leibniz :

$$\partial_\mu (f*g) = \partial_\mu f*g + f*\partial_\mu g \quad \text{(I.39)}$$

I.5.la Méthode de Boopp's Shift:

Pour écrier l'équation de Schrödinger dans l'espace-phase non-commutatif, on applique les étapes suivant **[32-62]:**

1-On remplace la fonction d'onde ordinaire $\Psi(\vec{r},t)$ par nouveaux fonction d'onde $\hat{\Psi}(\vec{\hat{r}},t)$,

2- On remplace l'operateur d'Hamiltonien ordinaire $H(p_i,x_i)$ par nouveaux operateur $\hat{H}(\hat{p}_i,\hat{x}_i)$,

3- On remplace l'énergie ordinaire E par nouveaux valeur E_{nc},

4-On remplace le produit ordinaire par le produit star.

Les quatre étapes permirent d'obtenteur l'équation de Schrödinger dans l'espace-phase non-commutatif

$$\hat{H}(\hat{p}_i,\hat{x}_i)*\hat{\Psi}(\vec{\hat{r}},t) = E_{nc}\hat{\Psi}(\vec{\hat{r}},t) \quad \text{(I.40)}$$

La fonction d'onde $\hat{\Psi}(\vec{\hat{r}},t)$ est peut être écrié

$$\hat{\Psi}(\vec{\hat{r}},t) = \hat{\Psi}(\vec{\hat{r}}) f(t) \quad \text{(I.41)}$$

Ce la permit de simplifier l'équation (I.40) :

$$\hat{H}(\hat{p}_i, \hat{x}_i) * \hat{\Psi}(\vec{\hat{r}}) = E_{nc}\hat{\Psi}(\vec{\hat{r}}) \quad \text{(I.42)}$$

La méthode Boopp's Shift permit de traité l'équation de Schrödinger déformée (I.42) comme une équation ordinaire a condition d'appliquée les deux translations :

$$H(\hat{p}_i, \hat{x}_i)\Psi(\vec{\hat{r}}) = E_{nc}\Psi(\vec{\hat{r}}) \quad \text{(I.43)}$$

Avec l'operateur d'Hamiltonien $H(\hat{p}_i, \hat{x}_i)$ peut être écrié en trois variétés :

$$H(\hat{p}_i, \hat{x}_i) \equiv H\left(\hat{p}_\mathrm{i} = p_i - \frac{\bar{\theta}^{\mathrm{ij}}}{2} x_j, \hat{x}_\mathrm{i} = x_i - \frac{\theta^{\mathrm{ij}}}{2} p_j\right) \quad \text{pour} \quad \text{NC-ND:RSP} \quad \text{(I.44)}$$

$$H(\hat{p}_i, \hat{x}_i) \equiv H\left(\hat{p}_\mathrm{i} = p_i, \hat{x}_\mathrm{i} = x_i - \frac{\theta^{\mathrm{ij}}}{2} p_j\right) \quad \text{pour} \quad \text{NC-ND:RS} \quad \text{(I.45)}$$

$$H(\hat{p}_i, \hat{x}_i) \equiv H\left(\hat{p}_\mathrm{i} = p_i - \frac{\bar{\theta}^{\mathrm{ij}}}{2} x_j, \hat{x}_\mathrm{i} = x_i\right) \quad \text{pour} \quad \text{NC-ND:RP} \quad \text{(I.46)}$$

C'est-à-dire, les variétés (I.44), (I.45) et (I.46) correspond :

$$\begin{cases} p_i \to \hat{p}_\mathrm{i} = p_i - \dfrac{\bar{\theta}^{\mathrm{ij}}}{2} x_j \\ x_i \to \hat{x}_\mathrm{i} = x_i - \dfrac{\theta^{\mathrm{ij}}}{2} p_j \end{cases} \quad \text{(I.47)}$$

Et

$$\begin{cases} p_i \to \hat{p}_\mathrm{i} = p_i \\ x_i \to \hat{x}_\mathrm{i} = x_i - \dfrac{\theta^{\mathrm{ij}}}{2} p_j \end{cases} \quad \text{(I.48)}$$

Et

$$\begin{cases} p_i \to \hat{p}_\mathrm{i} = p_i - \dfrac{\bar{\theta}^{\mathrm{ij}}}{2} x_j \\ x_i \to \hat{x}_\mathrm{i} = x_i \end{cases} \quad \text{(I.49)}$$

Notre travaille est fait dans l'espace-phase non commutatif a trois dimensions, on introduit les notations :

$$\begin{cases} i = 1 & \hat{x}_1 = \hat{x} & p_1 = p_x \\ i = 2 & \hat{x}_2 = \hat{y} & p_2 = p_y \\ i = 3 & \hat{x}_3 = \hat{z} & p_3 = p_z \end{cases} \quad \text{(I.50)}$$

Et la relation (I.47) peut être écrierai explicitement dans l'espace-phase non commutatif a trois dimensions

$$\begin{cases} \hat{x}_1 = x_1 - \frac{\theta^{12}}{2} p_2 - \frac{\theta^{13}}{2} p_3 \\ \hat{x}_2 = x_2 - \frac{\theta^{21}}{2} p_1 - \frac{\theta^{23}}{2} p_3 \\ \hat{x}_3 = x_3 - \frac{\theta^{31}}{2} p_1 - \frac{\theta^{32}}{2} p_2 \end{cases} \qquad \text{(I.51)}$$

Et

$$\begin{cases} \hat{p}_1 = p_1 - \frac{\bar{\theta}^{12}}{2} x_2 - \frac{\bar{\theta}^{13}}{2} x_3 \\ \hat{p}_2 = p_2 - \frac{\bar{\theta}^{21}}{2} x_1 - \frac{\bar{\theta}^{23}}{2} x_3 \\ \hat{p}_3 = p_3 - \frac{\bar{\theta}^{31}}{2} x_1 - \frac{\bar{\theta}^{32}}{2} x_2 \end{cases} \qquad \text{(I.52)}$$

Avec la carré de $\hat{r}^2$ et $\hat{p}^2$ sont donné par :

$$\hat{r}^2 = \sum_{i=1}^{3} \hat{x}_i^{\,2} \qquad \hat{p}^2 = \sum_{i=1}^{3} \hat{p}_i^{\,2} \qquad \text{(I.53)}$$

La méthode de Boopp's Shift est considéré comme une conséquence direct du produit star elle permit de traité l'équation de Schrödinger déformé comme une équation ordinaire, de la façon suivant :

$$\left(\frac{\overleftrightarrow{\hat{p}}^{2}}{2m_0} + \hat{V}(\hat{x}) \right) * \hat{\Psi}(\hat{x}) = E_{nc} \hat{\Psi}(\hat{x}) \rightarrow \left(\frac{\overleftrightarrow{\hat{p}}^{2}}{2m_0} + V(\hat{x}) \right) \Psi(x) = E_{nc} \Psi(x) \qquad \text{(I.54)}$$

On basé sur les travaux scientifique, pour écriée les deux opérateurs $\hat{r}^2$ et $\hat{p}^2$ dans l'espace-phase non commutatif a trois dimensions:

$$\begin{cases} \hat{r}^2 = r^2 - \vec{L}\vec{\Theta} \\ \frac{\hat{p}^2}{2m_0} = \frac{p^2}{2m_0} + \frac{\vec{L}\vec{\bar{\theta}}}{2m_0} \end{cases} \qquad \text{(I.55)}$$

Avec les notations :

$$\begin{cases} L\Theta = L_x\Theta_1 + L_y\Theta_2 + L_z\Theta_3 \\ \vec{L}\vec{\bar{\theta}} = L_x\bar{\theta}_{12} + L_y\bar{\theta}_{23} + L_z\bar{\theta}_{13} \end{cases} \qquad \text{(I.56)}$$

et $\Theta = \frac{\theta}{2}$.

I.6.Application sur le potentiel carré-inverse:

Maintenant, on applique les notions de la méthode de Boopp's Shift sur le potentiel $V(r)=\frac{A}{r^2}-\frac{B}{r}$, connue par inverse carrée, ce potentiel composé par deux termes :

-Terme colombien $V_1(r)=-\frac{B}{r}$

-Terme connue par carré inverse $V_2(r)=\frac{A}{r^2}$

L'opérateur Hamiltonien $H(\hat{p}_i,\hat{x}_i)\equiv H\left(\hat{p}_i = p_i - \frac{\overline{\theta}^{ij}}{2}x_j, \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2}p_j\right)$ correspond dans l'espace NC-3D : RSP, est donnée par :

$$H(\hat{p}_i,\hat{x}_i)\equiv H\left(\hat{p}_i = p_i - \frac{\overline{\theta}^{ij}}{2}x_j, \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2}p_j\right) = \frac{\hat{p}^2}{2m_0}+\mathrm{V}(\hat{\mathrm{r}}) \quad \text{(I.57)}$$

Avec :

$$\hat{V}(\hat{r})=\frac{A}{\hat{r}^2}-\frac{B}{\hat{r}} \quad \text{(I.58)}$$

Et

$$\frac{\hat{p}^2}{2m_0}=\frac{p^2}{2m_0}+\frac{\vec{L}\vec{\overline{\theta}}}{2m_0} \quad \text{(I.59)}$$

Les résultats (I.55) permit d'obtenir les deux termes $\frac{A}{\hat{r}^2}$ et $\frac{B}{\hat{r}}$:

$$\begin{cases} \frac{A}{\hat{r}^2}=\frac{A}{r^2}+\frac{A}{r^4}\vec{L}\vec{\theta} \\ \frac{B}{\hat{r}}=\frac{B}{r}+\frac{B}{2r^3}\vec{L}\vec{\theta} \end{cases} \quad \text{(I.60)}$$

Donc le potentiel $\mathrm{V}(\hat{\mathrm{r}})$:

$$\mathrm{V}(\hat{\mathrm{r}})=\mathrm{V}(\mathrm{r})+\left(\frac{A}{r^4}-\frac{B}{2r^3}\right)\vec{\mathbf{L}}\Theta \quad \text{(I.61)}$$

La combinaison entre deux équations (I.59) et (I.61) donné

$$H(\hat{p}_i,\hat{x}_i)\equiv H\left(\hat{p}_i = p_i - \frac{\overline{\theta}^{ij}}{2}x_j, \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2}p_j\right):$$

$$H(\hat{p}_i,\hat{x}_i)\equiv H\left(\hat{p}_i = p_i - \frac{\overline{\theta}^{ij}}{2}x_j, \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2}p_j\right)=\mathrm{V}(\mathrm{r})+\frac{p^2}{2m_0}+\frac{\vec{\mathbf{L}}\vec{\overline{\boldsymbol{\theta}}}}{2m_0}+\left(\frac{A}{r^4}-\frac{B}{2r^3}\right)\vec{\mathbf{L}}\Theta \quad \text{(I.62)}$$

L'opérateur $H(\hat{p}_i,\hat{x}_i)\equiv H\left(\hat{p}_{\mathrm{i}}=p_i-\frac{\overline{\theta}^{\mathrm{ij}}}{2}x_j\,,\hat{x}_{\mathrm{i}}=x_i-\frac{\theta^{\mathrm{ij}}}{2}p_j\right)$ est la somme deux operateurs $H(p_i,x_i)$ et $H_{pert}(p_i,x_i)$:

$$H(p_i\,,x_i)=\mathrm{V}(\mathrm{r})+\frac{p^2}{2m_0} \quad \text{(I.63)}$$

Et

$$H_{pert}=\frac{\vec{\mathbf{L}}\vec{\boldsymbol{\theta}}}{2m_0}+\left(\frac{A}{r^4}-\frac{B}{2r^3}\right)\vec{\mathbf{L}}\vec{\Theta} \quad \text{(I.64)}$$

Chapitre II:

Etude l'équation de Schrödinger pour le potentiel inverse-carré dans l'espace-ordinaire à trios dimension

Chapitre II : Etude l'équation de Schrödinger pour le potentiel inverse-carré dans l'espace-ordinaire à trios dimension

II.1. Introduction :

L'équation de Schrödinger à été proposée en 1926 sur la base des Matrices de Heisenberg 1925 et c'est développée pour décrire les petits objets (relativement : les atomes), et la résolution analytique de l'équation de Schrödinger à trois dimension reste un problème très important intervenant dans de nombreux calculs de la physique moderne.

Dans ce chapitre on va résumer les solutions de l'équation de Schrödinger pour un potentiel central (potentiel carré inverse) à trois dimensions et on révisée les fonctions d'ondes, les énergies correspondantes à l'état fondamentales et les états excités.

II.2. Etude l'équation de Schrödinger pour le potentiel inverse carré dans l'espace –ordinaire à trios Dimensions :

En générale l'équation de Schrödinger est une équation de deuxième ordre par rapport aux coordonnées du système et de premier ordre par rapport au temps, décrie les phénomènes physique a l'échelle microscopique –l'échelle de Planck, ou l'énergie mesurée de l'ordre électronvolt, peut être obtenir, si on applique les principes de quantification canonique **[1-2]:**

$$E \to i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{Et } p_i \to \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad \text{(II-1)}$$

L'équation de Schrödinger, donc:

$$H\psi(\vec{r},t) = E\psi(\vec{r},t) \qquad \text{(II-2)}$$

Ou E repèrent l'énergie non relativiste total du system et H est l'opérateur Hamiltonien, qui donnée par :

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta + V(r,t) \qquad \text{(II-3)}$$

L'operateur Laplacian Δ s'écrit dans les coordonnées sphériques(r, θ, φ):

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \qquad \text{(II-4)}$$

Ou bien, de la forme equivanlant:

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\right) - \frac{\hat{L}^2}{\hbar^2 r^2} \quad \text{(II.5)}$$

Avec :

$$L^2 = -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{(\sin\theta)^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) \quad \text{(II.6)}$$

Le potentiel (inverse-square) ou carré inverse est considéré potentiel purement central, dépond par la distance r, l'expression analytique de ce potentiel dans les cordonnées sphérique **[3]:**

$$V(r) = \frac{A}{r^2} - \frac{B}{r} \quad \text{(II.7)}$$

Ce potentiel composé par deux termes, le premier terme est colombien $V_1(r) = -\frac{B}{r}$ et la deuxième connue par carré inversé $V_2(r) = \frac{A}{r^2}$, A et B sont des constantes positives. Pour lé états stationnaire, la fonction d'onde $\Psi(\vec{r};t)$ peut être écriée de la façon suivant:

$$\Psi(\vec{r};t) = \exp\left(-i\frac{E}{\hbar}\right)\Psi(\vec{r}) \quad \text{(II.8)}$$

II.2.1 Les moments cinétiques :

En mécanique quantique, les moments classée en trois familles :

- Le moment cinétique orbital noté par $\vec{L}$
- Le moment de spin, noté par $\vec{S}$
- Le moment total $\vec{J} = \vec{S} + \vec{L}$

Le moment cinétique orbital $\vec{L}$ définie par :

$$\begin{cases} \vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} \\ \vec{p} = m_0\vec{V} \end{cases} \quad \text{(II.9)}$$

Avec:

$$\vec{L} = \begin{cases} L_x = y\,p_z - z\,p_y \\ L_y = z\,p_x - x\,p_z \\ L_z = x\,p_y - y\,p_x \end{cases} \quad \text{(II.10)}$$

Donc :

$$\begin{cases} L_x = \frac{\hbar}{i}\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ L_y = \frac{\hbar}{i}\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ L_z = \frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) \end{cases} \quad \text{(II.11)}$$

Dans ce cas $\widehat{L}$ devient en coordonnées sphérique :

$$\widehat{L} = \begin{cases} \widehat{L}_X = \frac{\hbar}{i}\left(-\cos\varphi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi} - \sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \\ \widehat{L}_Y = \frac{\hbar}{i}\left(-\sin\varphi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi} + \cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \\ \widehat{L}_Z = \frac{\hbar}{i}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \end{cases} \quad \text{(II.12)}$$

Et

$$\begin{cases} L_z\, y_m^l(\theta,\varphi) = m\hbar\, y_m^l(\theta,\varphi) \\ L^2\, y_m^l(\theta,\varphi) = l(l+1)\hbar^2\, y_m^l(\theta,\varphi) \end{cases} \quad \text{(II.13)}$$

Avec $1 \geq 0$ et $-l \leq m \leq l$. Les moments orbitaux et de spin commutent entre eux, il reste :

$$\left[\vec{J},\vec{L},\vec{S}\right] = -\frac{1}{2}\left[\vec{L},\vec{L}^2\right] - \frac{1}{2}\left[\vec{S},\vec{S}^2\right] = 0 \quad \text{(II.14)}$$

Et on a :

$$\widehat{L}^2\Psi = \hbar^2 l(l+1)\Psi \quad \text{(II-15)}$$

Et la fonction d'onde transformée en coordonnées sphérique :

$$\Psi(\vec{r},t)\rightarrow\Psi(r,\theta,\varphi) \quad \text{(II.16)}$$

Et le moment cinétique J est :

$$\hat{J}^2=\hat{J}_x^2+\hat{J}_y^2+\hat{J}_z^2 \quad \text{(II.17)}$$

Et :

$$\begin{cases}\hat{J}^2|\,j,m\rangle=j(j+1)\hbar^2|\,j,m\rangle\\ \hat{J}_z|\,j,m\rangle=m|\,j,m\rangle\end{cases} \quad \text{(II.18)}$$

Avec l'opérateur de couplage spin-orbite $\hat{\vec{L}}\hat{\vec{S}}$ peut récrierai sous la forme:

$$\hat{\vec{L}}\hat{\vec{S}}=\frac{1}{2}\left[\left(\hat{\vec{L}}+\hat{\vec{S}}\right)-\hat{L}^2-\hat{S}^2\right]=\frac{1}{2}\left[\hat{J}^2-\hat{L}^2-\hat{S}^2\right] \quad \text{(II.19)}$$

Donc l'équation de Schrödinger devient :

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2(\sin\theta)^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]-V(r)\right\}\Psi(r,\theta,\varphi) =\mathrm{E}\Psi(r,\theta,\varphi) \quad \text{(II.20)}$$

et

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]-V(r)\right\}\Psi(r,\theta,\varphi) =\mathrm{E}\Psi(r,\theta,\varphi) \quad \text{(II-21)}$$

Maintenant on écrire les solutions de l'équation de Schrödinger à la forme d'un produit d'une fonction radiale $R_l(r)$ et d'une fonction angulaire $Y_l^l(\theta,\varphi)$ à trois dimensions :

$$\Psi(r,\theta,\varphi)=R_l(r)Y_l^l(\theta,\varphi) \quad \text{(II.22)}$$

Ou $R_l(r)$ est la partie radiale de la fonction d'onde qui dépend seulement de rayon r el $Y_l^l(\theta,\varphi)$ représenté la partie angulaire dépend des angles θ et φ. La fonction radiale $R_l(r)$ satisfait l'équation suivant **[3]:**

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)R_l(r)-\frac{l(l+1)}{r^2}R_l(r)+2(\mathrm{E}-V(r))R_l(r)=0 \quad \text{(II.23)}$$

Ou bien, sous la forme :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)R_l(r)+\left[2(\mathrm{E}-V(r))-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R_l(r)=0 \quad \text{(II.24)}$$

On remplace le potentiel $V(r)$ et le paramètre dimensionnel $\rho=r\sqrt{-8\mathrm{E}}$ dans l'équation (II.24) pour trouver **[3]:**

$$\frac{d^2}{d\rho^2}R_l(\rho)+\frac{2}{\rho}\frac{d}{d\rho}R_l(\rho)+\left[-\frac{1}{4}+\frac{\tau}{\rho}-\frac{2\mathrm{A}+l(l+1)}{\rho^2}\right]R_l(\rho)=0 \quad \text{(II.25)}$$

Avec :

$$\tau=\mathrm{B}\sqrt{\frac{1}{-2\mathrm{E}}} \quad \text{(II.26)}$$

La forme de la fonction radiale $R_l(\rho)$ est :

$$R_l(\rho)=\rho^{\lambda}e^{-\frac{\rho}{2}}F(\rho) \quad \text{(II.27)}$$

Et

$$\begin{cases}\lambda=\dfrac{2-D+\sqrt{8\mathrm{A}+\kappa^2}}{2}\\ \kappa=2l+1\end{cases} \quad \text{(II.28)}$$

Donc l'équation (II.26) devient :

$$\rho\frac{d^2}{d\rho^2}F(\rho)+(2+2\lambda-\rho)+\frac{d}{d\rho}F(\rho)+(\tau-\lambda-1)F(\rho)=0 \quad \text{(II.29)}$$

La solution proposée est de la forme des fonctions hypergéométriques $\phi(\lambda-\tau+1,2\lambda+2;\rho)$ **[3]** :

$$R(\rho)=\mathrm{N}\rho^{\lambda}e^{-\frac{\rho}{2}}\phi(\lambda-\tau+1,2\lambda+2;\rho) \quad \text{(II.30)}$$

Et N représente le facteur de normalisation qui déterminité par la relation :

$$\int_0^{+\infty}(R(\rho))^2 r^2 dr = 1 \quad \text{(II.31)}$$

Ce qui donné le facteur de normalisation :

$$\mathrm{N} = \left(\frac{4\mathrm{B}}{2n-2l+2\lambda}\right)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{(n-l-1)!}{(2n-2l+2\lambda)(n-l+2\lambda)!}\right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{(II.32)}$$

Et les autres des fonctions hypergéométriques $\phi(\lambda-\tau+1,2\lambda+2;\rho)$ sont exprimés de la façon suivant:

$$\begin{cases} \tau-\lambda-1 = n' = 0,1,2,\ldots\ldots \\ n = n' + \dfrac{\kappa}{2} + \dfrac{1}{4} = n' + l + 1 \\ \tau = \mathrm{B}\sqrt{\dfrac{1}{-2\mathrm{E}}} = n - l + \lambda \rangle 0 \end{cases} \quad \text{(II.33)}$$

L'équation (II.25) donnée la fonction de l'énergie **[3]:**

$$\mathrm{E} = \frac{-\mathrm{B}^2}{2(n-l+\lambda)^2} \quad \text{(II.34)}$$

Le spectre d'énergie $\mathrm{E}(\mathrm{n},\mathrm{l},\mathrm{D})$ estdonnée par:

$$\mathrm{E} = (n,l,D) = -\left(\frac{2\mathrm{B}}{2n-2l-1+\sqrt{8\mathrm{A}+\kappa^2}}\right) \quad \text{(II.35)}$$

Et d'autre forme:

$$E(n,l,D) = -2B^2\left\{D^2 - 2(2n-3)D^{-3} + \left[3(2n-3)^{-3} - 8A - (2l-2)^2\right]D^{-4}\ldots\ldots\ldots\right\} \quad \text{(II.36)}$$

Dans le cas ou, $D=3$, l'expression (II.34) devient :

$$E(n,l,3) = -2B^2\left\{3^2 - 2(2n-3)3^{-3} + \left[3(2n-3)^{-3} - 8A - (2l-2)^2\right]3^{-4}\ldots\ldots\ldots\right\} \quad \text{(II.37)}$$

Si A est infinitésimale, l'expression (II.36) devient :

$$E(n,l,3) = -2B^2\left\{(2n)^{-2} - \frac{8A}{\kappa}(2n)^{-3} + \frac{16A^2}{\kappa^3}(2n)^{-3} + \frac{48A^2}{\kappa^2}(2n)^{-4} - ...\right\} \quad \text{(II.38)}$$

Les fonctions radiales ainsi obtenues sont construites avec les polynômes $L_n^{\beta}(\rho)$ satisfaisant (II.25) **[3] :**

$$L_n^{\beta}(\rho) = \frac{\beta(\beta+n+1)}{n!\,\beta(\beta+1)} F_1(-n, \beta+1; \rho) \quad \text{(II.39)}$$

On définitive les fonctions radiales sont $R(\rho)$:

$$R(\rho) = N\rho^{\lambda} e^{\frac{-\rho}{2}} L_{n-l-1}^{2\lambda+1} \quad \text{(II.40)}$$

$L_{n-l-1}^{2\lambda+1}$ Est un polynôme de degré $n-l-1$.

Donc :

$$J_{n,\alpha}^{(\gamma)} = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha+\gamma}\left[L_n^{\alpha}(x)\right]^2 dx$$
$$= \frac{(\alpha+n)!}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)k\,\frac{\Gamma(n+\kappa-\gamma)}{\Gamma(-\kappa-\gamma)}\frac{(\alpha+k+\gamma)!}{(\alpha+k)!}\frac{1}{\kappa!(n-\kappa)!}, \mathrm{Re}(\alpha+\gamma+1)\rangle 0 \quad \text{(II.41)}$$

On obtient :

$$J_{n,\alpha}^{(1)} = \frac{(2n+\alpha+1)(\alpha+n)!}{n!} \quad \text{(II.42)}$$

Et le facteur de normalisation est :

$$N = \left(\frac{4B}{2n-2l+2\lambda}\right)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{(n-l-1)!}{(2n-2l+2\lambda)(n-l+2\lambda)!}\right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{(II.43)}$$

Maintenant on considère le cas spécial pour $A = 0$:

$$E(n,3) = -\frac{B^2}{2n^2} \quad \text{(II.44)}$$

$E(n,3)$ Est indépendant le nombre quantique l, on écrire la fonction radiale $R(\rho)$:

$$R(\rho) = \mathrm{N}_{nl3}\,\rho^{l}\,e^{-\frac{\rho}{2}}\,L_{n-l-1}^{2l+1}(\rho) \quad \text{(II.45)}$$

Le polynôme de Laguerre $L_{n-l-1}^{2l+1}(\rho)$:

$$L_{n-l-1}^{2l+1}(\rho) = \frac{(2l+1)(2l+n-l+1)}{(n-l-1)!(2l+1)(2l+2)}\,{}_1F_1(-n;\beta+1,\rho) \quad \text{(II.46)}$$

Et le facteur de normalisation devient :

$$\mathrm{N}_{nl3} = \left(\frac{2B}{n}\right)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!}\right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{(II.47)}$$

Maintenant on écrire la fonction d'onde $\Psi(x) = R_l(r)Y_l^l(\theta,\varphi)$, et remplacé la fonction radiale et fonction angulaire **[3]:**

$$\Psi(\rho) = \left(\frac{2B}{n}\right)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!}\right]^{\frac{1}{2}}\rho^{l}\,e^{-\frac{\rho}{2}}\,L_{n-l-1}^{2l+1}(\rho)Y_l^l(\theta,\varphi) \quad \text{(II.48)}$$

Chapitre III:

l'étude de l'équation de Schrödinger modifiée pour le potentiel carré-inverse -inverse-square-dans l'espace-phase non commutatif à trois dimensions

III.1Introduction :

L'objectif de ce chapitre, est l'étude de l'équation de Schrödinger modifiée pour le potentiel carré-inverse -inverse-square- dans l'espace-phase non commutatif à trois dimensions en utilisant la méthode Boopp's Shift et le théorème de perturbation pour trouver les corrections des énergies correspondant aux états excité *n*.

III.2.L'operateur d' Hamiltonien pour le potentiel carré –inverse dans l'espace-phase non commutatif (NC : 3D-RSP) :

On a vu dans le premier chapitre, que le potentiel carré-inverse -inverse-square-$V(r)=\frac{A}{r^2}-\frac{B}{r}$ peut être traité dans le cadre de l'équation de Schrödinger modifiée en utilisant la méthode de Boopp's Shift, présenté par l'équation (I.41), au lieu résoudre directement l'équation de Schrödinger modifiée par le produit étoile (I.42). Donc L'expression explicite de l'équation de Schrödinger modifiée devient maintenant sous la forme suivant **[33-56]:**

$$H_{nc-is}\left(\hat{p}_{\mathrm{i}}=p_i-\frac{\bar{\theta}^{\mathrm{ij}}}{2}x_j\,,\hat{x}_{\mathrm{i}}=x_i-\frac{\theta^{\mathrm{ij}}}{2}p_j\right)\Psi(\vec{r})=E_{nc-is}\Psi(\vec{r}) \quad \text{(III.1)}$$

D'après l'équation (I.62), l'opérateur d' Hamiltonien $H_{nc-is}\left(\hat{p}_{\mathrm{i}}=p_i-\frac{\bar{\theta}^{\mathrm{ij}}}{2}x_j\,,\hat{x}_{\mathrm{i}}=x_i-\frac{\theta^{\mathrm{ij}}}{2}p_j\right)$correspond le potentiel carré-inverse dans l'espace-phase non commutatif à trois dimensions peut être écrit sous la forme sauvant :

$$H_{nc-is}\left(\hat{p}_{\mathrm{i}}=p_i-\frac{\bar{\theta}^{\mathrm{ij}}}{2}x_j\,,\hat{x}_{\mathrm{i}}=x_i-\frac{\theta^{\mathrm{ij}}}{2}p_j\right)=\frac{A}{r^2}-\frac{B}{r}+\frac{p^2}{2m_0}+\left(\frac{A}{r^4}-\frac{B}{2r^3}\right)\vec{L}\vec{\Theta}+\frac{\vec{L}\vec{\bar{\theta}}}{2m_0} \quad \text{(III.2)}$$

Logiquement, l'équation (III.2) représenté deux parties:

1-L'Hamiltonien $H_{is}(\hat{p}_{\mathrm{i}}=p_i\,,\hat{x}_{\mathrm{i}}=x_i)$: Correspond le potentiel ordinaire $V(r)=\frac{A}{r^2}-\frac{B}{r}$ a trios dimensions :

$$H_{is}(\hat{p}_{\mathrm{i}}=p_i\,,\hat{x}_{\mathrm{i}}=x_i)=\frac{p^2}{2m_0}+\frac{A}{r^2}-\frac{B}{r} \quad \text{(III.3)}$$

- L'Hamiltonien $H_{pert-is}\left(\hat{p}_{\mathrm{i}}=p_i-\frac{\bar{\theta}^{\mathrm{ij}}}{2}x_j\,,\hat{x}_{\mathrm{i}}=x_i-\frac{\theta^{\mathrm{ij}}}{2}p_j\right)$ additive qui produit par les propriétés de l'espace-phase non commutatif :

$$H_{pert-is}\left(\hat{p}_i = p_i - \frac{\overline{\theta}^{ij}}{2} x_j , \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j\right) = \left(\frac{A}{r^4} - \frac{B}{2r^3}\right)\vec{L}\vec{\Theta} + \frac{1}{2m_0}\vec{L}\vec{\overline{\theta}} \quad \text{(III.4)}$$

D'après l'équation (I.55), on rappeler par les 2-couplages $\mathbf{L\Theta}$ et $\vec{\mathbf{L}}\vec{\overline{\boldsymbol{\theta}}}$, qui sont donnée par **[48-53]**:

$$\mathrm{L\Theta} \equiv L_x\Theta_{12} + L_y\Theta_{23} + L_z\Theta_{13} \quad \text{(III.5)}$$

Et

$$\vec{\mathbf{L}}\vec{\overline{\boldsymbol{\theta}}} \equiv L_x\overline{\theta}_{12} + L_y\overline{\theta}_{23} + L_z\overline{\theta}_{13} \quad \text{(III.6)}$$

Le paramétrer $\Theta \equiv \frac{\theta}{2}$ et les composantes L_x, L_y et L_z :

$$\begin{aligned} L_x &= yp_z - zp_y \\ L_y &= \mathrm{zp_x - xp_z} \\ L_z &= xp_y - yp_x \end{aligned} \quad \text{(III.7)}$$

III.3. L'operateur Spin-Orbite d' Hamiltonien pour le potentiel carré –inverse dans l'espace-phase non commutatif (NC : 3D-RSP) :

D'après, les formes mathématiques du 2-couplages $\mathbf{L\Theta}$ et $\vec{\mathbf{L}}\vec{\overline{\boldsymbol{\theta}}}$, observé dans les équations (III.5) et (III.6), elle est possible physiquement de remplacé ($\vec{L}\vec{\Theta}$ et $\vec{L}\vec{\overline{\theta}}$) par ($\alpha\vec{\Theta}\vec{S}\vec{L}$ et $\alpha\vec{\overline{\theta}}\vec{S}\vec{L}$), respectivement:

$$\mathbf{L\Theta} \rightarrow \alpha\vec{\Theta}\vec{S}\vec{L} \quad \text{(III.9)}$$

Et

$$\vec{\mathbf{L}}\vec{\overline{\boldsymbol{\theta}}} \rightarrow \alpha\vec{\overline{\theta}}\vec{S}\vec{L} \quad \text{(III.10)}$$

Avec $\vec{S} = \overrightarrow{1/2}$ et α constante ordinaire de proportionnalité. Ce qui permit de réécrire l'équation (III.4) comme suivant :

$$H_{pert-is}\left(\hat{p}_i = p_i - \frac{\overline{\theta}^{ij}}{2} x_j , \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j\right) \equiv H_{pert-is}\left(r, \Theta, \overline{\theta}\right) = \left[\Theta\left(\frac{A}{r^4} - \frac{B}{2r^3}\right) + \frac{\overline{\theta}}{2m_0}\right]\vec{L}\vec{S} \quad \text{(III.11)}$$

En mécanique quantique ordinaire, les ensembles d'operateurs $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}\ldots$qui forment un ensemble complet d'observables complet sont commutent (ECOC). En applique ce règle sur les ensembles d'operateurs ($\overleftrightarrow{J}^2, \overleftrightarrow{L}^2, \overleftrightarrow{S}^2$ et J_z) , c'est-à-dire **[1-2]:**

$$\begin{aligned} &\left[\overleftrightarrow{J}^2, \overleftrightarrow{L}^2\right]=0 \\ &\left[\overleftrightarrow{J}^2, \overleftrightarrow{S}^2\right]=0 \\ &\left[\overleftrightarrow{J}^2, J_z\right]=0 \end{aligned} \qquad \text{(III.12)}$$

Et leurs valeurs propres correspondent : $j(j+1)$, $\ell(\ell+1)$, $s(s+1)$ et $m(-l \le m \le +l)$ dans le système $(c=\hbar=1)$, donc :

$$\begin{aligned} &\vec{J}^2\Psi = j(j+1)\Psi \\ &\vec{L}^2\Psi = \ell(\ell+1)\Psi \\ &\vec{S}^2\Psi = s(s+1)\Psi \\ &J_z\Psi = m\Psi \end{aligned} \qquad \text{(III.13)}$$

Avec $\vec{J}$ est la somme géométrique des moments $\vec{L}$ et $\vec{S}$:

$$\vec{J}=\vec{L}+\vec{S} \qquad \text{(III.14)}$$

Ce qui permit de trouver le couplage spin-orbite $\vec{L}\vec{S}$ de la façon suivante **[1-2]:**

$$\vec{L}\vec{S}=\frac{1}{2}[\vec{J}^2-\vec{L}^2-\vec{S}^2] \qquad \text{(III.15)}$$

Les relations (III.12) et (III.14) permettent d'obtenir :

$$\vec{L}\vec{S}\Psi=\frac{1}{2}[j(j+1)-\ell(\ell+1)-s(s+1)]\Psi \qquad \text{(III.16)}$$

Avec $\left|l-\frac{1}{2}\right| \le j \le \left|l+\frac{1}{2}\right|$, alors :

$$j=l+\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad j=l-\frac{1}{2} \qquad \text{(III.17)}$$

Si $j=l+\frac{1}{2}$ on dit que l'électron de spin up et si $j=l-\frac{1}{2}$, l'électron de spin down. Donc, on a:

$$\vec{L}\vec{S}\Psi=\begin{cases} \frac{1}{2}\left\{\left(l+\frac{1}{2}\right)(l+\frac{1}{2}+1)+l(l+1)-\frac{3}{4}\right\}\Psi \equiv p_+\Psi: \; Si \quad j=l+\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\left\{\left(l-\frac{1}{2}\right)(l-\frac{1}{2}+1)+l(l+1)-\frac{3}{4}\right\}\Psi \equiv p_-\Psi: \; Si \quad j=l-\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \text{(III.18)}$$

Ou p_+ et p_- sont donnée par $\frac{1}{2}\left\{\left(l+\frac{1}{2}\right)(l+\frac{1}{2}+1)+l(l+1)-\frac{3}{4}\right\}$ et $\frac{1}{2}\left\{\left(l+\frac{1}{2}\right)(l+\frac{1}{2}+1)+l(l+1)-\frac{3}{4}\right\}$,

respectivement. Maintenait, on peut former une matrice d'ordre (3×3) pour représenté l'operateur spin-orbite d' Hamiltonien pour le potentiel carré –inverse dans l'espace-phase Non Commutatif (NC : 3- RSP) :

$$\left(\hat{H}_{so-is}\right)\equiv\begin{pmatrix}\left(\hat{H}_{so-is}\right)_{11} & \left(\hat{H}_{so-is}\right)_{12} & \left(\hat{H}_{so-is}\right)_{13}\\ \left(\hat{H}_{so-is}\right)_{21} & \left(\hat{H}_{so-is}\right)_{22} & \left(\hat{H}_{so-is}\right)_{23}\\ \left(\hat{H}_{so-is}\right)_{32} & \left(\hat{H}_{so-is}\right)_{32} & \left(\hat{H}_{so-is}\right)_{33}\end{pmatrix} \quad \text{(III.19)}$$

Dans la base ECOC, la matrice $\left(\hat{H}_{so-is}\right)$ peut être diagonale et ces éléments none nulle :

$$\begin{cases}\left(\hat{H}_{so-is}\right)_{11}=\mathrm{p}_+\left[\Theta\left(\frac{A}{r^4}-\frac{B}{2r^3}\right)+\frac{\bar{\theta}}{2m_0}\right] avec\ \mathrm{J}=\ell+1/2 \Rightarrow \text{spin up}\\ \left(\hat{H}_{so-is}\right)_{22}=\mathrm{p}_-\left[\Theta\left(\frac{A}{r^4}-\frac{B}{2r^3}\right)+\frac{\bar{\theta}}{2m_0}\right] avec\ \mathrm{J}=\ell-1/2 \Rightarrow \text{spin down}\\ \left(\hat{H}_{so-is}\right)_{33}=0\end{cases} \quad \text{(III.20)}$$

III.4. Le spectre énergétique:

III.4.1 Le spectre exacte produit par l'operateur spin-orbite pour le potentiel de carrée inverse en (NC : 3D-RSP):

Nous avons observé que le potentiel modifié $H_{pert-is}\left(r,\Theta,\bar{\theta}\right)$ est proportionnel au deux paramètres infinitésimale $\left(\Theta,\bar{\theta}\right)$ et cela signifie que $H_{pert-is}\left(r,\Theta,\bar{\theta}\right)$ prend une valeur très petite par rapport à la partie principale $H_{ic}\left(\hat{p}_i=p_i\,,\hat{x}_i=x_i\right)$, donc on peut appliquer le théorème de perturbation pour obtenir les modifications exacte d'énergie E_{ic-per} au premier ordre en $\left(\Theta,\bar{\theta}\right)$. L'énergie totale dans l'espace-temps non commutatif E_{nc-is} est la somme de l'énergie correspondant à l'espace ordinaire E et les corrections E_{nc-per} :

$$E_{nc-is}=E+E_{nc-per} \quad \text{(III.21)}$$

Le théorème de perturbation permet d'obtenir les corrections au premier ordre de la façon suivante :

$$E_{nc-per}=\langle n|H_{pert-cp}\left(r,\Theta,\bar{\theta}\right)|n\rangle \quad \text{(III.22)}$$

On peut récrire l'équation (III.21) sous la forme :

$$E_{nc-per}(\Theta,\bar{\theta}) = \int \Psi^{(p)*}(\vec{r}) H_{pert-cp}(r,\Theta,\bar{\theta}) \Psi^{(p)}(\vec{r}) d\tau \quad \text{(III.23)}$$

Ou $d\tau$ représenté l'élément de volume en coordonnées sphériques (r,θ,φ), qui est donnée par :

$$d\tau = r^2 dr d\Omega \quad \text{(III.24)}$$

Avec l'angle solide $d\Omega = \sin(\theta) d\theta . d\varphi$ et $\Psi^{(p)}(\vec{r})$ la fonction d'onde qui est définie par :

$$\Psi^{(p)}(\vec{r}) = R(r) Y_l^m(\theta,\varphi) \quad \text{(III.25)}$$

Donc, on peut écrire l'équation (III.23), de la forme :

$$E_{nc-per}(\Theta,\bar{\theta}) = \int \Psi^{(p)*}(r) \left(\Theta\left(\frac{A}{r^4} - \frac{B}{2r^3}\right) + \frac{\bar{\theta}}{2m_0} \right) \vec{L}\vec{S} \Psi^{(p)}(r) r^2 dr \int Y_l^m(\theta,\varphi) Y_l^m(\theta,\varphi) d\Omega \quad \text{(III.26)}$$

La fonction d'onde $\Psi^{(p)}(\vec{r})$ normalisée, cela permet d'écrire :

$$\int Y_l^m(\theta,\varphi) Y_l^m(\theta,\varphi) d\Omega = 1 \quad \text{(III.27)}$$

Ce qui permit de réduit les corrections trouvées par l'équation (III.26) sont réduites sous la forme:

$$E_{nc-per} = \int \Psi^{(p)*}(r) \alpha \left[\Theta\left(\frac{A}{r^4} - \frac{B}{2r^3}\right) + \frac{\bar{\theta}}{2m_0} \right] \vec{L}\vec{S} \Psi^{(p)}(r) r^2 dr \quad \text{(III.28)}$$

On remplace le terme de couplage spin-orbite $\left\{ \Theta\left(\frac{A}{r^4} - \frac{B}{2r^3}\right) + \frac{\bar{\theta}}{2m_0} \right\} \vec{L}\vec{S}$ par :

$$\left\{ \Theta\left(\frac{A}{r^4} - \frac{B}{2r^3}\right) + \frac{\bar{\theta}}{2m_0} \right\} \vec{L}\vec{S} = \left\{ \Theta\left(\frac{A}{r^4} - \frac{B}{2r^3}\right) + \frac{\bar{\theta}}{2m_0} \right\} \begin{cases} \frac{1}{2}\left\{ \left(l+\frac{1}{2}\right)(l+\frac{1}{2}+1) + l(l+1) - \frac{3}{4} \right\} \Psi \equiv p_+ \Psi : & Si \quad j = l + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\left\{ \left(l-\frac{1}{2}\right)(l-\frac{1}{2}+1) + l(l+1) - \frac{3}{4} \right\} \Psi \equiv p_- \Psi : & Si \quad j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{(III.29)}$$

En compagne entre les équations (III.28) et (III.29) pour trouver les corrections au premier ordre:

$$E_{nc-per}(\Theta,\bar{\theta}) = \begin{cases} \alpha p_+ \int R^*(r) \left[\Theta\left(\frac{A}{r^4} - \frac{B}{2r^3}\right) + \frac{\bar{\theta}}{2m_0} \right] R(r) r^2 dr \equiv E_{nc-per.u}(\Theta,\bar{\theta}) & Si \quad j = l + \frac{1}{2} \\ \alpha p_- \int R^*(r)(r) \left[\Theta\left(\frac{A}{r^4} - \frac{B}{2r^3}\right) + \frac{\bar{\theta}}{2m_0} \right] R(r) r^2 dr \equiv E_{nc-per.D}(\Theta,\bar{\theta}) & Si \quad j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{(III.30)}$$

L'équation (III.28) réduit en deux équations séparée :

$$E_{nc-per.u}\left(\Theta,\bar{\theta}\right)\equiv \alpha p_{+}\int R^{*}(r)\left[\Theta\left(\frac{A}{r^{4}}-\frac{B}{2r^{3}}\right)+\frac{\bar{\theta}}{2m_{0}}\right]R(r)r^{2}dr \qquad Si \quad j=l+\frac{1}{2} \quad \text{(III.31)}$$

Et

$$E_{nc-per.D}\left(\Theta,\bar{\theta}\right)\equiv \alpha p_{-}\int R(r)^{*}\left[\Theta\left(\frac{A}{r^{4}}-\frac{B}{2r^{3}}\right)+\frac{\bar{\theta}}{2m_{0}}\right]R(r)r^{2}dr \qquad Si \quad j=l-\frac{1}{2} \quad \text{(III.32)}$$

On remplace $R(r)$ dans les équations (III.31) et (III.32) :

$$E_{nc-per.u}\left(\Theta,\bar{\theta}\right)\equiv -\frac{\alpha p_{+}}{(-8E)^{3/2}}\left(\frac{2B}{n}\right)^{3}\frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!}\int \rho^{2l+2}e^{-\rho}\left[L_{n-l-1}^{2l+1}(\rho)\right]^{2}\left[\Theta\left(\frac{A'}{\rho^{4}}-\frac{B'}{2\rho^{3}}\right)+\frac{\bar{\theta}}{2m_{0}}\right]d\rho \quad \text{(III.33)}$$

et

$$E_{nc-per.D}\left(\Theta,\bar{\theta}\right)\equiv -\frac{\alpha p_{-}}{(-8E)^{3/2}}\left(\frac{2B}{n}\right)^{3}\frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!}\int \rho^{2l+2}e^{-\rho}\left[L_{n-l-1}^{2l+1}(\rho)\right]^{2}\left[\Theta\left(\frac{A'}{\rho^{4}}-\frac{B'}{2\rho^{3}}\right)+\frac{\bar{\theta}}{2m_{0}}\right]d\rho \quad \text{(III.34)}$$

Avec $A'=(-8E)^{2}$ et $B'=(-8E)^{3/2}$.On peut simplifiée les 2-équations (III.33) et (III.34) pour trouver :

$$E_{nc-per.u}\left(\Theta,\bar{\theta}\right)\equiv -\frac{\alpha p_{+}}{(-8E)^{3/2}}\left(\frac{2B}{n}\right)^{3}\frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!}\left(\Theta\sum_{i=1}^{2}T_{i}+\frac{\bar{\theta}}{2m_{0}}T_{3}\right) \quad \text{(III.35)}$$

Et

$$E_{nc-per.D}\left(\Theta,\bar{\theta}\right)\equiv -\frac{\alpha p_{-}}{(-8E)^{3/2}}\left(\frac{2B}{n}\right)^{3}\frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!}\left(\Theta\sum_{i=1}^{2}T_{i}+\frac{\bar{\theta}}{2m_{0}}T_{3}\right) \quad \text{(III.36)}$$

Avec les trios termes $T_i\left(i=\overline{1,3}\right)$qui sont donnée par:

$$\begin{aligned}
T_{1} &= A'\int_{0}^{+\infty}\rho^{2l-2}e^{-\rho}\left[L_{n-l-1}^{2l+1}(\rho)\right]^{2}d\rho \\
T_{2} &= -\frac{B'}{2}\int_{0}^{+\infty}\rho^{2l-1}e^{-\rho}\left[L_{n-l-1}^{2l+1}(\rho)\right]^{2}d\rho \quad \text{(III.37)} \\
T_{3} &= \int_{0}^{+\infty}\rho^{2l+2}e^{-\rho}\left[L_{n-l-1}^{2l+1}(\rho)\right]^{2}d\rho
\end{aligned}$$

Pour obtenir les résultants d'intégrales, on appliqué l'intégrale spéciale parenté dans l'équation (II.42) suivant **[49]:**

$$J_{n,\alpha}^{(\gamma)}=\int_{0}^{\infty}e^{-x}x^{\alpha+\gamma}\left[L_{n}^{\alpha}(x)\right]^{2}dx=\frac{(\alpha+n)!}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)k\frac{\Gamma(n+\kappa-\gamma)}{\Gamma(-\kappa-\gamma)}\frac{(\alpha+k+\gamma)!}{(\alpha+k)!}\frac{1}{\kappa!(n-\kappa)!} \quad \text{(III.38)}$$

Avec $\mathrm{Re}(\alpha+\gamma+1)\rangle 0$, pour appliquée l'intégrale (III.38), le système (III.37) réécrire de la façon suivant :

$$T_1 = A'\int_0^{+\infty}\rho^{(2l+1)-3}e^{-\rho}\left[L_{n-l-1}^{2l+1}(\rho)\right]^2 d\rho$$
$$T_2 = -\frac{B'}{2}\int_0^{+\infty}\rho^{(2l+1)-2}e^{-\rho}\left[L_{n-l-1}^{2l+1}(\rho)\right]^2 d\rho \quad \text{(III.39)}$$
$$T_3 = \int_0^{+\infty}\rho^{(2l+1)+1}e^{-\rho}\left[L_{n-l-1}^{2l+1}(\rho)\right]^2 d\rho$$

γ Prendre les trois valeurs : -3, -2 et +1, ce qui permit de trouver les résultats suivant :

$$T_1 = A' J_{n-l-1,2l+1}^{(-3)} = \frac{(2l+1+n-l-1)!}{(n-l-1)!}\sum_{k=0}^{n}(-1)k\frac{\Gamma(n-l-1+\kappa+3)}{\Gamma(-\kappa+3)}\frac{(2l+1+k-3)!}{(2l+1+k)!}\frac{1}{\kappa!(n-l-1-\kappa)!} \quad \text{(III.40)}$$

$$T_1 = -\frac{B'}{2} J_{n-l-1,2l+1}^{(-2)} = \frac{(2l+1+n-l-1)!}{(n-l-1)!}\sum_{k=0}^{n}(-1)k\frac{\Gamma(n-l-1+\kappa+2)}{\Gamma(-\kappa+2)}\frac{(2l+1+k-2)!}{(2l+1+k)!}\frac{1}{\kappa!(n-l-1-\kappa)!} \quad \text{(III.41)}$$

$$T_1 = J_{n-l-1,2l+1}^{(+1)} = \frac{(2l+1+n-l-1)!}{(n-l-1)!}\sum_{k=0}^{n}(-1)k\frac{\Gamma(n-l-1+\kappa-1)}{\Gamma(-\kappa-1)}\frac{(2l+1+k+1)!}{(2l+1+k)!}\frac{1}{\kappa!(n-l-1-\kappa)!} \quad \text{(III.42)}$$

Ce qui permit d'obtenir les corrections $E_{nc-per}(\Theta,\bar{\theta})$ on fonctions des paramètres $(\Theta,\bar{\theta})$ et les paramétrées de potentiels A et B :

$$E_{nc-per.u}(\Theta,\bar{\theta}) \equiv -\frac{\alpha p_+}{(-8E)^{3/2}}\left(\frac{2B}{n}\right)^3\frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!}\left(\Theta T_{s-is}(A,B,n,l)+\frac{\bar{\theta}}{2m_0}T_3\right) \quad \text{(III.43)}$$

et

$$E_{nc-per.D}(\Theta,\bar{\theta}) \equiv -\frac{\alpha p_-}{(-8E)^{3/2}}\left(\frac{2B}{n}\right)^3\frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!}\left(\Theta T_{s-is}(A,B,n,l)+\frac{\bar{\theta}}{2m_0}T_3\right) \quad \text{(III.44)}$$

Avec $T_{s-is}(A,B,n,l)$ est donnée par :

$$T_{s-is}(A,B,n,l) = \sum_{i=1}^{2}T_i \quad \text{(III.45)}$$

L'énergie $E_{nc.u}(\Theta,\bar{\theta})$ et $E_{nc.D}(\Theta,\bar{\theta})$ de l'état excité n dans l'espace –phase -non commutatif, est la somme de l'énergie $E(n,l,3)$ (donnée par (II.40) de l'état excité n dans l'espace temps-ordinaire et les modifications non commutatif, correspondant aux deux polarisations de l'électron up et down, et qui sont détermines par les équations (III.43) et (III.44), respectivement :

$$E_{ncu}\left(\Theta,\bar{\theta}\right)\equiv -2B^{2}\left\{\left(2n\right)^{-2}-\frac{8A}{\kappa}\left(2n\right)^{-3}+\frac{16A^{2}}{\kappa^{3}}\left(2n\right)^{-3}+\frac{48A^{2}}{\kappa^{2}}\left(2n\right)^{-4}-...\right\}$$
$$-\frac{\alpha p_{+}}{\left(-8E\right)^{3/2}}\left(\frac{2B}{n}\right)^{3}\frac{\left(n-l-1\right)!}{2n\left(n+l\right)!}\left(\Theta T_{s-is}\left(A,B,n,l\right)+\frac{\bar{\theta}}{2m_{0}}T_{3}\right) \quad \text{(III.46)}$$

Et

$$E_{ncD}\left(\Theta,\bar{\theta}\right)\equiv -2B^{2}\left\{\left(2n\right)^{-2}-\frac{8A}{\kappa}\left(2n\right)^{-3}+\frac{16A^{2}}{\kappa^{3}}\left(2n\right)^{-3}+\frac{48A^{2}}{\kappa^{2}}\left(2n\right)^{-4}-...\right\}$$
$$-\frac{\alpha p_{-}}{\left(-8E\right)^{3/2}}\left(\frac{2B}{n}\right)^{3}\frac{\left(n-l-1\right)!}{2n\left(n+l\right)!}\left(\Theta T_{s-is}\left(A,B,n,l\right)+\frac{\bar{\theta}}{2m_{0}}T_{3}\right) \quad \text{(III.47)}$$

Et l'operateur d'Hamiltonien diagonale $\hat{H}_{nc-is}$ correspondant peut être représenté par une matrice carrée d'ordre (3*3), composée par les éléments suivants :

$$\begin{cases}\left(\hat{H}_{nc-is}\right)_{11}=\frac{A}{r^{2}}-\frac{B}{r}+\frac{p^{2}}{2m_{0}}+\mathrm{p}_{+}\left[\Theta\left(\frac{A}{r^{4}}-\frac{B}{2r^{3}}\right)+\frac{\bar{\theta}}{2m_{0}}\right] avec\ \mathrm{J}=\ell+1/2 \Rightarrow \text{spin up}\\ \left(\hat{H}_{nc-is}\right)_{22}=\frac{A}{r^{2}}-\frac{B}{r}+\frac{p^{2}}{2m_{0}}+\mathrm{p}_{-}\left[\Theta\left(\frac{A}{r^{4}}-\frac{B}{2r^{3}}\right)+\frac{\bar{\theta}}{2m_{0}}\right] avec\ \mathrm{J}=\ell-1/2 \Rightarrow \text{spin down}\\ \left(\hat{H}_{nc-is}\right)_{33}=\frac{A}{r^{2}}-\frac{B}{r}+\frac{p^{2}}{2m_{0}}\end{cases} \quad \text{(III.48)}$$

conclusion générale

Conclusions et interprétations Physique

D'après les résultants représenté par les équations les (III.46) et (III.47), les énergies correspondant à l'état excité n, chaque niveaux d'énergie se transforme en deux nouveaux états : $E_{ncu}(\Theta,\bar{\theta})$ et $E_{ncD}(\Theta,\bar{\theta})$ correspondant une particule fermionique avec deux polarisations up et down, produit par le potentiel modifié inverse-carré.

$$\left(V_{nc-CP}\left(\hat{p}_i = p_i - \frac{\bar{\theta}^{ij}}{2} x_j \,,\, \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j\right) = \frac{A}{r^2} - \frac{B}{r} + \left[\left(\frac{A}{r^4} - \frac{B}{2r^3}\right)\vec{L}\vec{\Theta} + \frac{\vec{L}\vec{\bar{\theta}}}{2m_0}\right]\vec{L}\vec{S}\ \right):$$

$$E_{ncu}(\Theta,\bar{\theta}) \equiv -2B^2\left\{(2n)^{-2} - \frac{8A}{\kappa}(2n)^{-3} + \frac{16A^2}{\kappa^3}(2n)^{-3} + \frac{48A^2}{\kappa^2}(2n)^{-4} - \ldots\right\} - \frac{\alpha p_+}{(-8E)^{3/2}}\left(\frac{2B}{n}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!}\left(\Theta T_{s-is}(A,B,n,l) + \frac{\bar{\theta}}{2m_0}T_3\right)$$

$$E_{ncD}(\Theta,\bar{\theta}) \equiv -2B^2\left\{(2n)^{-2} - \frac{8A}{\kappa}(2n)^{-3} + \frac{16A^2}{\kappa^3}(2n)^{-3} + \frac{48A^2}{\kappa^2}(2n)^{-4} - \ldots\right\} - \frac{\alpha p_-}{(-8E)^{3/2}}\left(\frac{2B}{n}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!}\left(\Theta T_{s-is}(A,B,n,l) + \frac{\bar{\theta}}{2m_0}T_3\right)$$

Et l'operateur d'Hamiltonien diagonale $\hat{H}_{nc-is}$ correspondant peut être représenté par une matrice carrée d'ordre (3*3), composée par les éléments suivants :

$$\begin{cases} \left(\hat{H}_{nc-is}\right)_{11} = \dfrac{A}{r^2} - \dfrac{B}{r} + \dfrac{p^2}{2m_0} + \mathrm{p}_+\left[\Theta\left(\dfrac{A}{r^4} - \dfrac{B}{2r^3}\right) + \dfrac{\bar{\theta}}{2m_0}\right] avec\ \mathrm{J} = \ell + 1/2 \Rightarrow \text{spin up} \\ \left(\hat{H}_{nc-is}\right)_{22} = \dfrac{A}{r^2} - \dfrac{B}{r} + \dfrac{p^2}{2m_0} + \mathrm{p}_-\left[\Theta\left(\dfrac{A}{r^4} - \dfrac{B}{2r^3}\right) + \dfrac{\bar{\theta}}{2m_0}\right] avec\ \mathrm{J} = \ell - 1/2 \Rightarrow \text{spin down} \\ \left(\hat{H}_{nc-is}\right)_{33} = \dfrac{A}{r^2} - \dfrac{B}{r} + \dfrac{p^2}{2m_0} \end{cases}$$

L'interaction spin-orbite, qu'elle a été vue dans le potentiel déforme se produit automatiquement, cet effet des propriétés de la non commutativité de l'espace -phase, donc la symétrie de l'espace-ordinaire est prolongée d'inclure une nouvelle symétrie qui égale l'ancienne symétrie et le couplage spin-orbite.

Références Bibliographiques

[01] J. L. Basidevant, Mécanique Quantique, ellipses, ISBN 2-7298-8614-1 (1986), Paris, France.

[02] E. Elbaz, Quantum, The quantum theory of particles, Fields, and Cosmology, Springere, ISBN 3-540-62093-1 (1995), New York, USA.

[03] Shi-Hai Dong and Guo-Hua Sun, The Schrödinger equation with a Coulomb plus inverse-square potential in D dimensions, Physica Scripta, Vol. 70-73, Number 2-3 (2004) 94-97. Doi http://dx.doi.org/10.1088/0031-8949/70/2-3/004.

[04] J J Pena, G Ovando and J Morales, D-dimensional Eckart+deformed Hylleraas potential:

Bound state solutions, Journal of Physics: Conference Series **574** (2015) 012089, doi:10.1088/1742-6596/574/1/012089

[05] L. Buragohain and S. A. S .Ahmed, Exactly solvable quantum mechanical systems generated from the anharmonic potentials, Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. 4, No. 1, 79-83 (2010).

[06] A. Niknam, A. A. Rajab and M. Solaimani, Solutions of D-dimensional Schrödinger equation for Woods-Saxon potential with spin-orbit, coulomb and centrifugal terms through a new hybrid numerical fitting Nikiforov-Uvarov method, J Theor App Phys, (2015) DOI 10.1007/s40094-015-0201-9.

[07] Sameer M. Ikhdair1 and Ramazan Sever, Exact solutions of the radial Schrödinger equation for some physical potentials, CEJP. 5(4) (2007) 516–527.

[08] M. M. Nieto: “Hydrogen atom and relativistic pi-mesic atom in N-space dimension”, Am. J. Phys. Vol.47 (1979), pp. 1067–1072.

[09] S. M. Ikhdair and R. Sever, Exact polynomial eigensolutions of the Schrödinger equation for the pseudoharmonic potential, J. Mol. Struc.-Theochem. Vol. 806, (2007), pp. 155–158.

[10] Ahmed, A. S. and Buragohain, L., Generation of new classes of exactly solvable potentials, Phys.Scr.80. (2009) 1-6.

[11] Bose, S. K., Exact solution of non-relativistic Schrödinger equation for certain central physical potentials, Nouvo Cimento B. 113 (1996) 299- 328.

[12] Flesses, G. P. and Watt, A., An exact solution of the Schrödinger equation for a multiterm potential, J. Phys. A: Math. Gen. 14, (19981) L315-L318.

[13] M. Ikhdair and R. Sever, Exact solution of the Klein–Gordon equation for the PT symmetri generalized Woods–Saxon potential by the Nikiforov–Uvarov method, Ann.

Phys. (Leipzig), Vol. 16, (2007), pp. 218–232.

[14] S. H. Dong, Schrödinger equation with the potential V(r) =r*−4+r*−3+r*−2+r*−1, Physica Scripta. Vol. 64, no. 4 (2001) pp. 273–276.

[15] S. H. Dong and Z. Q. Ma, Exact solutions to the Schrödinger equation for the potential V(r) =r*2+r*−4+r*−6 in two dimensions, Journal of Physics A, Vol. 31, No. 49 (1998) pp. 9855–9859.

[16] S. H. Dong, A new approach to the relativistic Schrödinger equation with central potential: Ansatz method, International Journal of Theoretical Physics. Vol. 40, No. 2 (2001) pp. 559–567.

[17] Ali Akder et al., A new Coulomb ring-shaped potential via generalized parametetric Nikivforov-Uvarov method, Journal of Theoretical and Applied Physics, 7 (2013) 17.

[18] Sameer M. Ikhdair and Ramazan Sever, Relativistic Two-Dimensional Harmonic Oscillator Plus Cornell Potentials in External Magnetic and AB Fields, Advances in High Energy Physics. Volume 2013, Article ID 562959, 11 pages.

[19] Shi-Hai Dong, Guo-Hua San, Quantum Spectrum of Some Anharmonic Central Potentials: Wave Functions Ansatz, Foundations of Physics Letters. 16, Issue 4 (2003) pp 357-367.

[20] L.Buragohain1, S. A. S. Ahmed, Exactly solvable quantum mechanical systems generated from the anharmonic potentials, Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. 4, No. 1 (2010) 79-83.

[21] S. M. Ikhdair, Exact solution of Dirac equation with charged harmonic oscillator in electric field: bound states, Journal of Modern Physics. vol. 3, no. 2 (2012) pp. 170–179.

[22] H. Hassanabadi et al., Exact solution Dirac equation for an energy-depended potential, Tur. Phys. J. Plus. 127 (2012) 120.

[23] H. Hassanabadi, M. Hamzavi, S. Zarrinkamar and A. A. Rajabi, Exact solutions of N-Dimensional Schrödinger equation for a potential containing coulomb and quadratic terms, International Journl of the Physical Sciences, Vol. 6(3), pp. 583-586, 2011.

[24] Shi-Hai Dong, Zhoung-Qi Ma, and Giampieero Esposito, Exact solutions of the Schrödinger equation with inverse-power potential, Foundations' of Physics Letters. Vol, 12, N, 5, 1999.

[25] D. Agboola, Complte Analytical Solutions of the Mie-Type Potentials in N-Dimensions, ACTA PHYSICA POLONICA A, Vol. 120 (2011) 371-377.

[26] D. Shi-Hai, Exact solutions of the two-dimensional Schrödinger equation with certain central potentials, Int J Theor Phys. 39 (2000) 1119-1128.

[27] B. I. Ita, Solutions of the Schrödinger equation with inversely quadratic Hellmann plus Mie-type potential using Nikiforov-Uvarov Method, International Journal of Recent advances in Physics (IJRAP), Vol. 2, No, 4, 2013.

[28] B. I. Ita and A. I. Ikeuda, Solutions of the Schrödinger equation with inversely quadratic Yukawa plus inversely quadratic Hellmann potential using Nikiforov-Uvarov Method, Journal of Atomic and Molecular Physics, Vol. 2013, Article ID 582610, 4 Pages http://dx.doi.org/10,1155/2013/582610

[29] B. I. Ita, A. I. Ikeuba and A. N. Ikot, Solutions of the Schrödinger Equation with Quantum Mechanical Gravitational Potential Plus Harmonic Oscillator Potential, Commun. Theor. Phys. 61 (2014) 149.

[30] Shi-Hai Dong, Zhoung-Qi Ma, and Giampieero Esposito, Exact solutions of the Schrödinger equation with inverse-power potential, Foundations of Physics Letters, Vol, 12, N, 5, 1999.

[31] Shi-Hai Dong, Schrödinger Equation with the Potential V(r) = Ar-4 + Br-3 + Cr-2 + Dr-1; Physica Scripta, Volume 64, 273-276 (2001).DOI http://dx.doi.org/10.1238/Physica.Regular.064a00273

[32] H. Snyder, The Quantization of space time, Phys. Rev. 71 (1946) 38-41.

[33] Mémoire de master préparé par: Gharbi Noura et dirigé par Dr : Maireche Abdelmadjid, L'atome d'Hydrogène sous l'action d'un potentiel Coulombien dans l'espace non commutatif a deux dimensions, promotion : 2013-2014, département de physique, université de M'sila, Algérie.

[34] Mémoire de master préparé par: Elbahi Fatima et dirigé par Dr : Maireche Abdelmadjid, L'atome d'Hydrogène sous l'action d'un multi-potentiels dans l'espace non commutatif a deux dimensions, promotion : 2013-2014, département de physique, université de M'sila, Algérie.

[35] Mémoire de master préparé par: Zellagui Asma et dirigé par Dr : Maireche Abdelmadjid, Les nivaux d'énergies atomique produit par le Mie-type potentiel dans l'espace non commutatif à deux dimensions : 2014-2015, département de physique, université de M'sila, Algérie.

[36] Mémoire de master préparé par: Delaldja HANANEet dirigé par Dr : Maireche Abdelmadjid, Les niveaux d'énergie atomique produit par le Mie-type potentiel dans l'espace non-commutatif à trois dimensions, promotion : 2013-2014, département de physique, université de M'sila, Algérie.

[37] Abdelmadjid Maireche, Spectrum of Schrödinger Equation with H.L.C. Potential in Non-Commutative Two-dimensional Real Space, The African Rev. Phys. 9: 0060, 479-483 (2014).

[38] Abdelmadjid Maireche, Deformed Quantum Energy Spectra with Mixed Harmonic Potential for Nonrelativistic Schrödinger equation, J. Nano- Electron. Phys. 7 No 2, (2015) 02003.

[39] Abdelmadjid Maireche, A Study of Schrödinger Equation with Inverse Sextic Potential in 2-dimensional Non-commutative Space, The African Rev. Phys. 9:0025, (2014) 185-193.

[40] Abdelmadjid Maireche Deformed Bound States for Central Fraction Power Potential: Non Relativistic Schrödinger Equation, The African Rev. Phys. 10:0014, (2015) 97-103.

[41] Abdelmadjid. Maireche, Nonrelativistic Atomic Spectrum for Companied Harmonic Oscillator Potential and its Inverse in both NC-2D: RSP, International Letters of Chemistry, Physics and Astronomy, Vol. 56, pp. 1-9, Jul. 2015.

[42] Abdelmadjid Maireche, Atomic Spectrum for Schrödinger Equation with Rational Spherical Type Potential in Non-commutative Space and Phase, The African Review of Physics, Vol. 10:0046, 373-381(2015).

[43] Abdelmadjid Maireche, New exact bound states solutions for (C.F.P.S.) potential in the case of Non-commutative three dimensional non relativistic quantum mechanics, Med. J. Model. Simul. 04 (2015) 060-072.

[44] Abdelmadjid. Maireche, New Exact Solution of the Bound States for the Potential Family V(r)=A/r2-B/r+Crk (k=0,-1,-2) in both Noncommutative Three Dimensional Spaces and Phases: Non Relativistic Quantum Mechanics, International Letters of Chemistry, Physics and Astronomy, Vol. 58, pp. 164-176, Sep. 2015.

[45] Abdelmadjid Maireche, New Quantum atomic spectrum of Schrödinger equation with pseudoharmonic potential in both noncommutative three dimensional spaces and phases, Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol.09, March, Year 2015, 1301-1--1301-8.

[46] Abdelmadjid Maireche, A New Approach to the Non Relativistic Schrödinger equation for an Energy-Depended Potential $V(r,E_{n,l})=V_0(1+\eta E_{n,l})r^2$ in Both Noncommutative three Dimensional spaces and phases, International Letters of Chemistry, Physics and Astronomy, Vol. 60, pp. 11-19, Sep. 2015.

[47] Abdelmadjid Maireche, A Recent Study of Quantum Atomic Spectrum of the Lowest Excitations for Schrödinger Equation with Typical Rational Spherical Potential at Planck's and Nanoscales, J. Nano- Electron. Phys. 7 No 3, (2015) 02003.

[48] Abdelmadjid Maireche, A New Study to the Schrödinger Equation for Modified Potential V(r)=ar2+br-4+cr-6 in Nonrelativistic Three Dimensional Real Spaces and Phases, International Letters of Chemistry, Physics and Astronomy, Vol. 61, pp. 38-48, Nov. 2015.

[49] Abdelmadjid Maireche, Quantum Hamiltonian and Spectrum of Schrödinger Equation with companied Harmonic Oscillator Potential and its Inverse in three Dimensional Noncommutative Real Space and Phase, J. Nano- Electron. Phys. Vol. 7 N0 4, (2015) 04021-1 0402, 1-7 (7pp).

[50] Abdelmadjid Maireche, Spectrum of Hydrogen Atom Ground State Counting Quadratic Term in Schrödinger Equation, The African Rev. Phys. Vol.10, (2015) 177-183.

[51] Abdelmadjid Maireche, New Bound State Energies for Spherical Quantum Dots in Presence of a Confining Potential Model at Nano and Plank's Scales, NanoWorld J, 1(4): (2016) 120-127.

[52] Abdelmadjid Maireche, New Relativistic Atomic Mass Spectra of Quark (u, d and s) for Extended Modified Cornell Potential in Nano and Plank's Scales, J. Nano- Electron. Phys. 8 No 1, (2016) 01020.

[53] Abdelmadjid Maireche, The Nonrelativistic Ground State Energy Spectra of Potential Counting Coulomb and Quadratic Terms in Non-commutative Two Dimensional Real Spaces and Phases, J. Nano- Electron. Phys. 8 No 1, (2016) 01021.

[54] A. E. F. Djemei and H. Smail, On Quantum Mechanics on Noncommutative Quantum Phase Space, Commun. Theor. Phys. (Beijinig, China). 41 (2004) pp.837-844.

[55] Shaohong Cai, Tao Jing, Guangjie Guo, Rukun Zhang, Dirac Oscillator in Noncommutative Phase Space, International Journal of Theoretical Physics. 49 (8) (2010) pp 1699-1705.

[56] Joohan Lee, Star Products and the Landau Problem, Journal of the Korean Physical Society, Vol. 47, No. 4, (2005) pp. 571-576.

[57] A. Jahan, Noncommutative harmonic oscillator at finite temperature: a path integral approach, Brazilian Journal of Physics, vol. 37, no. 4 (2007) 144-146.

[58] Anselme F. Dossa, Gabriel Y. H. Avossevou, Noncommutative Phase Space and the Two Dimensional Quantum Dipole in Background Electric and Magnetic Fields, Journal of Modern Physics. 4 (2013) 1400-1411.

[59] Yang, Zu-Hua et al., DKP Oscillator with spin-0 in Three dimensional Noncommutaive Phase-Space, Int. J. Theor. Phys. 49 (2010) 644-657.

[60] Y. Yuan e al. Spin ½ relativistic particle in a magnetic field in NC Ph, Chinese Physics C, 34(5) (2010) 543.

[61] Jumakari-Mamat; Sayipjamal Dulat and Hekim Mamatabdulla, Landau-like Atomic Proplem on a Non-commutative Phase Space, Int J Theor Phys; DIO 10.1007/s10773-016-2922-1 (2016).

[62] Behrouz Mirza et al., Relativistic Oscillators in a Noncommutative space in a Magnetic field, Commun. Theor. Phys. 55 (2011) 405-409.

Abstract

In this work, of master memory, in theoretical physics, option, particles physics at high energy (2015/2016), we have been studied the Schrödinger equation for inverse-sqaure potentials in noncommutative three dimensional spaces by applying the Boopp's shift method to first order in the noncommutative parameter $(\Theta.\theta)$, instead of using the star product method. We apply perturbation theory to solving the Schrödinger equation for modified inverse-sqaure potentials; we obtain the modification energy levels of atoms with one electron, it has been observed that the obtained energy spectra was changed radically, and replaced by degenerate new states, depending on the discrete quantum j,l and the spin of electron . These results spin-orbital interactions.

Keywords: Star product, noncommutative space and inverse-sqaure potentials.

Pacs number(s): 11.10.Nx, 32.30-r, 03.65-w.

ملخـــــــــــص

في هذا العمل الخاص بمذكرة الماستر في الفيزياء النظرية تخصص فيزياء الجسيمات عالية الطاقة (2015/2014). درسنا معادلة شرودينغر تحت تأثير كمون يسمي inverse-sqaure potentials في الفضاء اللاتبادلي ثلاثي البعد وثلاثي الطور بتطبيق مبدأ Boopp بدلا من الحل المباشر الناتج عن الجداء النجمي. إعتمدنا الناتج الموافقة للحد $(\Theta.\theta)$. وجدنا الكمون الناتج عن خواص الفضاء يحتوي على حد جديد متناهي في الصغر بالمقارنة مع الحد الرئيسي و هذا يسمح بتطبيق نظرية الاضطرابات المستقرة. قمنا بحساب الطاقات الجديدة. حيث أن النتائج المحصل عليها تختلف جذريا عن النتائج الأصلية و أصبحت متوالدة و متعلقة باعداد الكمية جيدة: j,l. هذا التوالد في مستويات الطاقة يمكن تفسيره فيزيائيا نتيجة لتأثير التفاعل سبين -مدار.

الكلمات المفتاحية: الجداء النجمي. الفضاء اللاتبادلي و الكمون المركزي inverse-sqaure potentials.