



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET  
POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE  
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila  
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
Département des Mathématiques



## *Mémoire de Master*

**Domaine** : Mathématiques et Informatique  
**Filière** : Mathématiques  
**Option** : Analyse Mathématique et Numérique

### Thème

---

# Solution approximative pour les équations intégréo-différentielles linéaire de Fredholm

---

Présentée par : *MOUFFOK Mohamed Oussama*

Soutenu publiquement le : .. /10/2020.

Devant le jury composé de :

**Mr. NADIR Mostefa**  
**Mr. DILMI Mustapha**  
**Mr. GAGUI Bachir**

Prof  
M.C.B  
M.C.A

Université de M'sila  
Université de M'sila  
Université de M'sila

**Président.**  
**Encadreur.**  
**Examineur.**

Année universitaire 2019/2020

---

# Remerciement

Je remercie **Allah** de m'avoir aidé à accomplir ce travail.

J'adresse grand remerciement à mon encadreur Mr. DILMI. Mustapha qui a proposé le thème de ce mémoire, pour ses conseils et ses dirigés du début à la fin de ce travail. Nous exprimons notre gratitude envers Mrs les membres de jury de. Nous avoir fait l'honneur d'accepter d'examiner notre travail.

Aussi je remercie ma famille, pour son soutien.

Merci, enfin à toute personne qui a contribué de près et de loin à la réalisation de ce travail.

---

## المخلص

في هذه المذكرة قمنا بتطبيق طريقة كثيرات الحدود من نوع توشار على المعادلات التكاملية-التفاضلية من نوع فولتيرا لأجل إيجاد الحلول التقريبية و مقارنتها مع الحلول الدقيقة.

**الكلمات المفتاحية :** المعادلات التفاضلية التكاملية، كثيرات حدود توشار.

---

# Abstract

In this work we have applied the Touchard type polynomial method to Volterra type integro-differential equations in order to find approximate solutions and compare them with exacte solutions.

**Keywords :**

Integro-differential equations, Touchard polynomials

---

# Résumé

Dans ce mémoire, nous avons appliqué la méthode polynomiale de type Touchard sur certaine classe des équations intégral-différentielle de type Volterra afin de trouver des solutions approchées et de le comparer avec des solutions exactes.

**Mots clés :**

Equations intégral-différentielles, polynome de Touchard.

# Table des matières

<b>Liste des tableaux</b>	<b>1</b>
<b>Notations</b>	<b>2</b>
<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Introduction et notions fondamentales</b>	<b>4</b>
1.1 Notions sur les espaces fonctionnelles . . . . .	4
1.2 Notions sur les opérateurs . . . . .	6
1.3 Équations intégrales linéaire et leurs classification . . . . .	8
1.4 Équations intégrales-différentielles linéaire et leurs classification . . . . .	10
<b>2 Existence et unicité de la solution des équation intégrale-différentielle</b>	<b>13</b>
2.1 Existence et unicité de la solution E.I.D . . . . .	13
2.2 Méthodes de résolution des E.I.D . . . . .	15
2.2.1 Méthodes analytiques . . . . .	15
2.2.2 Méthodes numériques . . . . .	20
<b>3 Solutions des équations intégrales-différentielles</b>	<b>24</b>
3.1 Polynômes de Touchard . . . . .	24
3.2 Solutions des équations intégrales-différentielles par des Polynômes de Touchard	27
3.3 Résultats numériques . . . . .	28
<b>Conclusion</b>	<b>33</b>

**Bibliographie**

**36**

# Liste des tableaux

1	solutions exactes et approximatives des E.I.D de Fredholm. Exemple 2.16	.....22
2	coefficients rationnels de polynôme Touchard.....	.....25
3	solutions exactes et approximatives des E.I.D de Volterra. Exemple 3.1	.....29
4	solutions exactes et approximatives des E.I.D de Volterra. Exemple 3.2	.....30
5	solutions exactes et approximatives des E.I.D de Fredholm. Exemple 3.3	.....31
6	solutions exactes et approximatives des E.I.D de Fredholm. Exemple 3.4	.....32

# Notations

$C[a, b]$	espace des fonctions continues sur $[a, b]$
$f$	terme libre dans l'équation intégrale
$A$	opérateur linéaire
$I$	opérateur identique
$\oplus$	somme directe
$r$	nombre de Riesz
$Ker(A)$	noyau de l'opérateur
$Im(A)$	image de l'opérateur
$A_n$	suite d'opérateurs continus de rangs finis
$H$	espace de Hilbert
$B(0, 1)$	boule unité
$P$	opérateur de projection
$\int$	signe intégral
$u^{(n)}$	la dérivée n-ième
$\langle, \rangle$	le produit scalaire
$T$	polynôme de Touchard
$k(x, t)$	noyau de l'équation intégrale
$u$	la fonction inconnue dans l'équation intégrale
$u_n$	solution approchée
$\lambda$	paramètre numérique
$(I - A)^{-1}$	inverse de l'opérateur intégral
$EID$	equation intégro-differentielle

# Introduction

Les équations intégro-différentielles s'inscrivent comme un des problèmes les plus appliqués où les opérateurs différentiels et intégraux apparaissent dans la même équation, ce type d'équations a été introduit par Volterra pour la première fois dans le début des années 1900, Volterra a examiné l'augmentation de la population. Consiste son étude sur les influences héréditaires où à travers sa recherche le sujet de (E.I-D) a été établi, le deuxième limite de l'intégration est variable .

Où nous trouvons un grand nombre de questions dans le domaine de l'ingénierie et les sciences physiques et sociales sont formulées mathématiquement sous la forme d'équations intégro-différentielles.

Ce mémoire est organisé en trois chapitres :

**Le premier chapitre** aborde des notions sur les équations intégrales, définition et classification des équations intégro-différentielles

**Le deuxième chapitre** dans ce chapitre, on a étudié l'existence et l'unicité des équations intégro-différentielles, et nous présenterons quelques méthodes analytiques, et numériques importantes pour résoudre les équations intégro-différentielles

**Le troisième chapitre** contient, l'utilisation des Polynômes de Touchard pour la solution des équations intégro-différentielles de Volterra. .

# Chapitre 1

## Introduction et notions fondamentales

Dans ce chapitre, on donne la base sur la théorie des équations intégrales, étudiée sur l'espace des fonctions continues sur un intervalle fermé. Ainsi on donne quelques définitions sur les bases de l'analyse numérique.

### 1.1 Notions sur les espaces fonctionnelles

#### Espace Vectoriel Normé

soit  $E$  un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , on appelle norme sur l'espace  $E$  toute application notée  $\|\cdot\|$  définie sur  $E$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ , vérifiant pour tout  $x, y$  dans  $E$  et  $\alpha$  dans  $\mathbb{k}$

- (i)  $\|x\| = 0$  si et seulement si  $x = 0$ .
- (ii)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$  (homogénéité).
- (iii)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (inégalité triangulaire).

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

#### Espace de Hilbert

**Définition 1.1** *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel  $H$  sur  $\mathbb{C}$  muni d'un produit scalaire  $\langle x, x \rangle$ , et qui est complet pour la norme  $\langle x, x \rangle^2$*

**Définition 1.2** Soit  $H$  un espace de Hilbert. Un système orthonormé est un sous ensemble  $E$  de  $H$  tel que pour toute  $f$  de  $E$  nous avons

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

**Définition 1.3** Une famille  $e_i, i \in I$  d'éléments de  $H$  est dite orthonormée si

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

**Définition 1.4** Soit  $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$  un système orthonormé dans un espace de Hilbert  $H$  et soit  $x \in H$  alors

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Ce résultat est appelé l'inégalité de Bessel. Une base orthonormée de  $H$  est un système orthonormé  $E$  tel que

$$x = \sum_{e \in E} \langle x, e \rangle e, x \in H$$

où la convergence est dans  $H$ .

**Définition 1.5** Soit  $H$  un espace de Hilbert, et soit  $S \subset H$ . Le complément orthogonal de  $S$  est

$$S^\perp = \{x \in H : \langle x, s \rangle = 0, \forall s \in S\}$$

Nous remarquons de cette définition que  $S^\perp$  est toujours un sous-espace fermé de  $H$  et que  $S \cap S^\perp = \{0\}$

**Définition 1.6** Un espace vectoriel  $X$  est la somme directe de deux sous-espaces  $Y$  et  $Z$  de  $X$  et on écrit

$$X = Y \oplus Z$$

si chaque  $x \in X$  a une représentation unique.

$x = y + z$  ou  $y \in Y$  et  $z \in Z$  : Soit  $M$  un sous-espace fermé de  $H$ , Alors

$$H = M \oplus M^\perp$$

**Espace de  $L^2[0,1]$** 

L'espace de fonctions  $L^2[0, 1]$  défini par

$L^2[0, 1] = \{f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ est mesurable et } \|f\| < \infty\}$

est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

**1.2 Notions sur les opérateurs****Opérateur intégrale linéaire**

**Définition 1.7** soit  $k : C[a; b] \times C[a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue l'opérateur intégrale linéaire sur  $C[a; b]$  par définit par  $\varphi \in C[a; b] \longrightarrow A\varphi \in C[a; b]$ , tel que,

$$(A\varphi)(x) = \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt \quad (1.1)$$

ou la fonction  $k(x; t)$ s'appelle le noyau de  $A$ .

**Opérateur compact**

**Définition 1.8** Soit  $E$  et  $F$  deux espace normés,  $A$  un opérateur linéaire de  $E$  dans  $F$ , on dit que  $A$  est un opérateur compact si l'image de la boule unité  $B(0, 1)$  de  $E$  (par  $A$ ) est relativement compacte dans  $F$ , i.e. si  $A(B(0, 1))$  est compacte. Autrement dit,  $A$  est compacte si pour tout suite  $(\varphi_n)$  de  $B(0, 1)$  de  $E$ , on peut extraire une sous suite  $(\varphi_{n_k})$  que transforme  $A$  en une suite convergente  $(A(\varphi_{n_k}))$  dans  $F$ .

**Proposition 1.9** soit  $X, Y$  deux espace normés

1) l'ensemble des opérateur compacte de  $X$  dans  $Y$  est un sous espace vectoriel de l'espace des opérateur linéaire  $L(x, y)$ .

2) le produit  $A_1A_2$  de deux opérateurs bornés  $A_1$  et  $A_2$  est compact si l'un des opérateurs  $A_1$  ou  $A_2$  est compacte.

3) Si  $A$  est un opérateur borné de  $X$  dans  $Y$  à image  $A(x)$  de dimension finie alors  $A$  est compacte.

**Théorème 1.10** Soit  $X$  un espace normé et  $Y$  un espace de Banach et soit  $\{A_n\}$  une suite d'opérateurs compacts, si  $\|A_n - A\| \rightarrow 0$ , alors  $A$  est compacte.

**Théorème 1.11** l'opérateur intégral  $A$  de  $C(G)$  dans  $C(G)$  à noyau continu est un opérateur compact.

**Preuve.** Soit  $E$  un ensemble borné de  $C(G)$  alors, on a  $\|A\varphi\| \leq M |G| \max |k(x, y)|$ ,  $\forall x, y \in G$  et  $\forall \varphi \in E$

cela veut dire que  $A(E)$  est borné. l'opérateur  $k$  est uniformément continu sur le compact  $G \times G$ , d'où

$\forall \varepsilon \geq 0 \exists \delta \geq 0; \forall x, y, z \in G |x - y| < \delta \implies$

$|k(x, z) - k(y, z)| < \frac{\varepsilon}{M|G|}$ , d'où

$|A\varphi(x) - A\varphi(y)| < \varepsilon$  pour tout  $\varphi \in E$  et  $x, y \in G$  avec  $|x - y| < \varepsilon$ , ceci exprime que

l'ensemble  $A(E)$  est équicontinu, d'où  $A(E)$  est relativement compact d'après le théorème d'Arzelà-Ascoli alors  $A$  est compact ■

### Théorème de Riesz

**Théorème 1.12** Soit un opérateur compact  $A : E \longrightarrow E$  tel que  $E$  est un espace normé.

Alors l'opérateur  $L = I - A$ , (l'opérateur étudié dans le cadre des équation intégral) a les propriétés suivantes :

- $\text{Ker}(L)$  est de dimension finie.

- $\text{Im}(L)$  est fermé, et de co-dimension fini.

-Il existe un unique  $r \in \mathbb{N}$  appelé nombre de Riesz de l'opérateur  $A$ ,

tel que

$$\{0\} = \text{Ker}(L^0) \subset \text{Ker}(L^1) \subset \dots \subset \text{Ker}(L^r) = \text{Ker}(L^{r+1}) = \dots$$

$$E = \text{Im}(L^0) \supset \text{Im}(L^1) \supset \dots \supset \text{Im}(L^r) = \text{Im}(L^{r+1}) = \dots$$

Et on a la somme directe

$$E = \text{Ker}(L^r) \oplus \text{Im}(L^r).$$

De plus, on a l'alternative de Fredholm :

$$\text{Im}(L) = \text{Ker}(L^*)^\perp$$

,ou  $L^*$  est l'opérateur de adjoint de  $L$ .

les inclusion énoncés ci-dessus sont strictes.

## 1.3 Équations intégrales linéaire et leurs classification

Nous savons l'équation intégrales dans ce formulaire :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x, t)u(t)dt \quad (1.2)$$

où  $K(x, t)$  est appelée le noyau de l'équation intégrale (1.2),  $\alpha(x)$  et  $\beta(x)$  c'est à sont les limites de l'intégration. On peut facilement observer que la fonction inconnue  $u(x)$  apparaît sous le signe de l'intégrale. Il est à noter ici que le noyau  $K(x, t)$  et la fonction  $f(x)$  dans l'équation (1.2) sont des fonctions donné, et  $\lambda$  est une constante paramètre. L'objectif principal de ce texte est de déterminer la fonction inconnue  $u(x)$  qui va satisfaire l'équation (1.2) en utilisant un certain nombre de techniques de solutions. Nous doit consacrer des effort considérables dans l'exploration de ces méthodes pour trouver des solutions de la fonction inconnue.

### Équations intégrales de Fredholm

La forme la plus classique des équations intégrales de Fredholm est de la forme

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt \quad (1.3)$$

où les limites de l'intégration  $a$  et  $b$  sont des constantes et la fonction inconnue  $u$  apparaît de façon linéaire sous le signe intégral. Si la fonction  $\phi(x) = 1$  ; alors (1.3) devient simplement

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt \quad (1.4)$$

Cette équation est appelée équation intégrale de Fredholm du second type ; si on considère

si  $\phi(x) = 0$ , alors (1.3) devient.

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt = 0 \quad (1.5)$$

qui s'appelle l'équation intégrale de Fredholm de première espèce.

### Équations intégrales de Volterra

La forme la plus classique des équations intégrales linéaires de Volterra est de la forme

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)u(t)dt \quad (1.6)$$

où les limites de l'intégration sont fonctions de  $x$  et la fonction inconnue  $u(x)$  apparaît linéairement sous le signe. Si la fonction  $\phi(x) = 1$ , alors l'équation(1.6) devient tout simplement

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)u(t)dt \quad (1.7)$$

et cette équation est connue comme l'équation intégrale de Volterra du second type ; si on considère  $\phi(x) = 0$ , alors l'équation (1.6) est connu comme l'équation de Volterra du premier type.

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)u(t)dt = 0 \quad (1.8)$$

**Remarque 1.13**  $F(u(x)) = u^n(x), n \neq 1$  ; ou  $\sin u(x)$  etc., alors l'équations de Volterra, et l'équations intégrales de Fredholm sont classés comme des équations intégrales nonlinéaires. Comme pour les exemples suivants, les équations intégrales sont non-linéaires

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)u^2(t)dt$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t) \sin(u(t))dt$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t) \ln(u(t)) dt$$

Ensuite, si nous définissons  $f(x) = 0$ , de Volterra ou équations intégrales de Fredholm, puis la suite équation est appelée une équation intégrale homogène, dans le cas contraire, il est appelé équation intégrale non homogène.

### Équations intégrales singulier

Une équation intégrale singulier est définie comme une intégrale avec les limites infinies ou lorsque le noyau de l'intégrale devienne non lié à un certain moment dans l'intervalle. Comme pour obtenir des exemples

$$\begin{aligned} u(x) &= f(x) + \lambda \int u(t) dt \\ f(x) &= \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} u(t) dt, \quad 0 < \alpha < 1 \end{aligned} \quad (1.9)$$

## 1.4 Équations intégral-différentielles linéaire et leurs classification

Une équation intégral-différentielle (E.I.D) est une équation composée de deux opérations intégrales et différentielles dont la fonction inconnue est  $\varphi$ . La forme linéaire d'une équation intégral-différentielle (E.I.D) d'ordre  $n$  est

$$\varphi^{(n)}(x) + a_1 \varphi^{(n-1)}(x) \dots a_n \varphi(x) + \sum_{m=0}^s \int_E k_m(x, t) \varphi^{(m)}(t) dt = f(x) \quad (1.10)$$

où  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sont des constantes,  $f(x), k_m(x), (m = 0, 1, \dots, s)$  des fonctions données,  $\varphi(x)$  la fonction cherchée.

La fonction  $\varphi(x)$  est assujettie à des condition initiales de la forme

$$\varphi(0) = \varphi_0, \varphi'(0) = \varphi'_0, \dots, \varphi^{(n-1)}(0) = \varphi_0^{(n-1)}$$

### Équations intégral-différentielles de Fredholm

L'équation intégral-différentielle de Fredholm apparaît dans la forme :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt$$

où  $u^{(n)}$  indique la dérivée n-ième de  $u(x)$ . Autres dérivés de l'ordre de moins peuvent apparaître avec  $u^{(n)}$  sur le côté gauche. Des exemples de Fredholm intégral-différentielles

$$u'(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \int_0^1 xu(t)dt, \quad u(0) = 0$$

et

$$u''(x) + u'(x) = x - \sin x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} xtu(t)dt, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1$$

### Équations intégral-différentielles de Volterra

L'équation intégral-différentielle de Volterra apparaît dans la forme

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)u(t)dt$$

où  $u^{(n)}$  indique la dérivée de  $u(x)$ . Autres dérivés de l'ordre de moins peuvent apparaître avec  $u^{(n)}$  sur le côté gauche. Exemples de équations l'integro-différentielle de Volterra sont données par

$$u'(x) = -1 - \frac{1}{2}x^2 - xe^x - \int_0^x tu(t)dt, \quad u(0) = 0$$

$$u''(x) + u'(x) = 1 - x - (\sin x + \cos x) - \int_0^x tu(t)dt, \quad u(0) = -1, \quad u'(0) = 1$$

### Équations intégral-différentielles de Volterra-Fredholm

Equations intégral-différentielles de Volterra-Fredholm apparaissent dans la littérature sous deux formes, à savoir

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t)u(t)dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x, t)u(t)dt \quad (1.11)$$

ou

$$u^{(n)}(x) = f(x, t) + \lambda \int_a^t \int_{\Omega} F(x, t, \zeta, \tau, u(\zeta, \tau))d\zeta d\tau, (x, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (1.12)$$

où  $f(x, t)$  et  $F(x, t, \zeta, \tau, u(\zeta, \tau))$  sont des fonctions analytiques sur  $D = \Omega \times [0, T]$ , et  $\Omega$  est une partie fermée de  $\mathbb{R}^n, n = 1, 2, 3$ . Il est intéressant de noter que (1.11) contient dis-joints équations intégrales de Volterra et Fredholm, alors (1.12) contient mixtes intégrales. Autres dérivés du moins commander peuvent apparaître ainsi. En outre, les fonctions inconnues  $u(x)$  et vous  $u(x, t)$  apparaissent à l'intérieur et à l'extérieur des signes d'intégrale. Il s'agit d'un trait caractéristique d'une sorte de deuxième partie intégrante équation. Si les fonctions inconnues apparaissent uniquement à l'intérieur des signes d'intégrale, d'équations résultantes sont de première espèce. Il faudrait des conditions initiales pour déterminer la solution particulière. Des exemples des deux types sont donnés par

$$u'(x) = 24x + x^4 + 3 - \int_0^x (x - t)u(t)dt - \int_0^1 tu(t)dt, u(0) = 0$$

$$u'(x, t) = 1 + t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - \int_0^t \int_0^1 (\tau - \zeta)d\zeta d\tau, u(0, t) = t^3,$$

# Chapitre 2

## Existence et unicité de la solution des équation intégral-différentielle

Dans ce chapitre nous rappelons les théorèmes célèbres du point fixe que nous allons utiliser pour obtenir des résultats d'existence variés. Nous commençons par la définition d'un point fixe, et nous présenterons quelques méthodes analytiques, et numériques importantes pour résoudre les équations intégral-différentielles de la deuxième espèce

### 2.1 Existence et unicité de la solution E.I.D

**Définition 2.1** Soit  $f$  une application d'un ensemble  $E$  dans lui-même. On appelle point fixe de  $f$  tout point  $u \in E$

tel que

$$f(u) = u$$

Rappelons que le principe de contraction de Banach, qui garantit l'existence d'un point fixe unique d'une contraction d'un espace métrique complet à valeurs dans lui-même, est certainement le plus connu des théorèmes de point fixe.

**Théorème 2.2** Ce théorème donne l'existence et l'unicité d'un point fixe pour une contraction sur un espace métrique complet.

**Théorème 2.3 (Picard)** Soient  $(E, d)$  un espace métrique complet et,  $\varphi \in E \longrightarrow E$  une application contractante, i.e Lipschitzienne par rapport  $k < 1$ . Alors,  $\varphi$  admet un unique point fixe  $a \in E$ . De plus, pour

tout point initial  $x_0 \in E$ , la suite itérée  $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ , avec  $x_0 \in E$  quelconque et  $x_{p+1} = \varphi(x_p)$  converge vers  $a$ .

**Théorème 2.4** Soit  $T$  un opérateur défini dans un espace de Banach  $X$ , tel que  $T^n$  est contractant sur  $X$ , pour un entier positif  $n$ , alors  $T$  a un point fixe unique.

**Lemme 2.5** Soit l'opérateur  $T$  tel que  $T : C([a, b]) \longrightarrow C([a, b])$ ,  $u$  et  $v \in C([a, b])$ , et  $L \in \mathbb{R}_+^*$  est le constant de Lipschitz de la fonction  $K$  au troisième variable,

$$K : [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Alors

$$\|T^p(u) - T^p(v)\|_\infty \leq \frac{L^p(b-a)^{2p}}{p!} \|u - v\|_\infty$$

et l'équation intégrale-différentielle de Fredholm

$$\begin{cases} \varphi'(x) = f(x) + \int_a^b k(x, t, \varphi(t)) dt, & x \in [a, b] \\ \varphi(a) = a, & a \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2,1)$$

admet une seule solution point fixe.

**Théorème 2.6** Supposons que  $f \in C[J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ ,  $K \in C[J \times J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$  tel que

$$\int_{t_0}^t k(r, s, u(s)) dr \leq N$$

pour

$$t_0 \leq s \leq t \leq t_0 + \alpha$$

avec

$$u \in H_0 = \{\phi \in C[J \times \mathbb{R}^n] : \phi(t_0) = u_0 \text{ et } |\phi(t) - u_0| \leq b\}$$

pour certain  $0 < \alpha \leq a$  Alors l'équation intégrale-différentielle de Volterra

$$\begin{cases} u'(x) = f(t, x(t)) + \int_s^t k(t, s, u(t))dt \\ \phi(t_0) = u_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

admet une solution unique.

## 2.2 Méthodes de résolution des E.I.D

### 2.2.1 Méthodes analytiques

**Définition 2.7** Le noyau  $K(x, t)$  d'une équation intégrale-différentielle de Fredholm est dite dégénérée s'il est la somme d'un nombre finie de produit des fonctions de variable  $x$  seul par des fonctions de variable  $t$  seul i.e il est de la forme :

$$k(x, t) = \sum_{i=0}^n g_i(x)h_i(t)$$

Les fonctions  $g_i(x)$  et  $h_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) seront supposées continues dans le carré fondamental  $a \leq x, t \leq b$  et linéairement indépendantes

**Remarque 2.8** Le noyau non dégénéré peut réduire à noyau dégénérée par développement de Taylor.

### Méthode de computation directe

On suppose la forme standard de l'équation intégrale-différentielle de Fredholm donnée par

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_a^b k(x, t)u(t)dt, \quad u^{(k)}(a) = \beta_k \quad 0 \leq k \leq n-1 \quad (2.3)$$

D'où

$$u^{(n)}(x) = f(x) + g(x) \int_a^b h(t)u(t)dt \quad (2.4)$$

On peut voir facilement de l'équation (2.4) que l'intégrale  $\int_a^b h(t)u(t)dt$  est constant.

On pose

$$\alpha = \int_a^b h(t)u(t)dt$$

Et (2.4) peut être écrite comme :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \alpha g(x) \quad (2.5)$$

On détermine le constant  $\alpha$  pour évaluer la solution exacte  $u(x)$ . Alors pour trouver  $\alpha$ , on intègre l'équation(2.5) n-fois de  $a$  à  $x$ , et on utilisant les conditions initiales données par

$$u^{(k)}(a) = \beta_k \quad 0 \leq k \leq n - 1$$

On obtient l'expression pour  $u$  sous la forme

$$u(x) = p(x, \alpha)$$

**Exemple 2.9** Soit l'équation intégrale-différentielle de Fréholm de troisième ordre

$$u'''(x) = \sin(x) - x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} xtu'(t)dt$$

avec les conditions initiales suivantes

$$u(0) = 1, u'(0) = 0, u''(0) = -1$$

**Solution 2.10** On pose

$$u'''(x) = \sin(x) - (1 + \alpha)x, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 0, \quad u''(0) = -1 \quad (2.6)$$

Où

$$\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} tu'(t)dt \quad (2.7)$$

Pour détermine  $\alpha$ , on doit trouver un expression pour  $u'(t)$ .

En intégrant l'équation(2.6) trois fois de 0 à  $x$  utilisant les conditions initiales alors on trouve

$$\begin{aligned} u''(x) &= -\cos x - \frac{1+\alpha}{2}x^2 \\ u'(x) &= -\sin x - \frac{1+\alpha}{3!}x^3 \\ u(x) &= \cos x - \frac{1+\alpha}{4!}x^4 \end{aligned} \quad (2.8)$$

En remplaçant l'expression de  $u'(x)$  dans (2.7), on obtient

$$\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-t \tan t - \frac{1+\alpha}{3!}t^3\right) dt$$

En remplaçant  $\alpha = -1$  dans (2.8) on obtient

$$u(x) = \cos x$$

### La méthode de décomposition Adomian

On peut supposer un second ordre de Fredholm équation intégrale-différentielle donnée par

$$u''(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)u(t)dt, \quad u(0) = a_0, \quad u'(0) = a_1 \quad (2.9)$$

Intégration des deux côtés de (2.9) de 0 à  $x$  deux fois donne

$$u(x) = a_0 + a_1x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1}\left(\int_a^b k(x,t)u(t)dt\right) \quad (2.10)$$

Lorsque les conditions initiales  $u(0) = a_0$  et  $u'(0) = a_1$ . Sont utilisés, et  $L^{-1}$  double opérateur intégral. La méthode de décomposition de Adomian admet l'utilisation de la série de décomposition

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \quad (2.11)$$

dans les deux côtés de (2.10) pour obtenir

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = a_0 + a_1x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1}\left(\int_0^x k(x,t) \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) dt\right) \quad (2.12)$$

ou de façon équivalente

$$\begin{aligned} u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots &= a_0 + a_1x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1}\left(\int_0^x k(x,t)u_0(t)dt\right) + L^{-1}\left(\int_0^x k(x,t)u_1(t)dt\right) \\ &+ L^{-1}\left(\int_0^x k(x,t)u_2(t)dt\right) + \dots \end{aligned} \quad (2.13)$$

Par conséquent, pour déterminer les composants  $u_0(x)$ ,  $u_1(x)$ ,  $u_2(x)$ , de la solution  $u(x)$ , nous avons mis la relation de récurrence

$$\begin{aligned} u_0(x) &= a_0 + a_1x + L^{-1}(f(x)) \\ u_{k+1}(x) &= L^{-1}\left(\int_a^x k(x,t) \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) dt\right), k \geq 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

où le zéro élément  $u_0(x)$  est défini par tous les termes non inclus à l'intérieur le signe intégral de (2.13) . Après avoir déterminé les composants,  $u_i(x), i \geq 0$  la solution  $u(x)$  de (2.13) est ensuite obtenu sous forme de série En utilisant (2.11), la série obtenue converge vers la solution exacte si une telle solution existe.

**Exemple 2.11** Utilisez la méthode de décomposition de Adomian pour résoudre l'équation integro-differential de Fredholm

$$u'(x) = 36x^2 + \int_0^1 u(x)dt, u(0) = 1 \quad (2.15)$$

**Solution 2.12** Rappelons que l'intégrale sur le côté droit est équivalente à une constante parce que Cela dépend uniquement de la variable  $t$  avec limites constantes d'intégration pour  $t$ . Intégration des deux côtés de l'équation (2.15) de 0 à  $x$  donne

$$u(x) - u_0(x) = 12x^3 + x \left( \int_0^1 u(x) dt \right) \quad (2.16)$$

ce qui donne à l'utilisation de la condition initiale

$$u(x) = 1 + 12x^3 + x \left( \int_0^1 u(x) dt \right) \quad (2.17)$$

Son remplacement par l'hypothèse de la série

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \quad (2.18)$$

dans les deux côtés de la donne (2.17)

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = 1 + 12x^3 + x \left( \int_0^1 u_n(t) dt \right) \quad (2.19)$$

Les composants  $u_j(x)$ ,  $j \geq 0$  de  $u(x)$  peut être déterminé en utilisant la récurrence Relation

$$u_0(x) = 1 + 12x^3, \quad u_{k+1}(x) = x \left( \int_0^1 u_{k+1}(x) dt \right), \quad k \geq 0 \quad (2.20)$$

Cela donne à son tour

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 1 + 12x^3, & u_1(x) &= x \int_0^1 k(x, t) u_0(t) dt \quad (2.21) \\ u_2(x) &= x \int_0^1 k(x, t) u_1(t) dt = 2x, & u_3(x) &= x \int_0^1 k(x, t) u_2(t) dt = x \end{aligned}$$

La solution sous forme de série est donnée par

$$u(x) = 1 + 12x^3 + 4 \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) \quad (2.22)$$

qui donne la solution exacte

$$u(x) = 1 + 8x + 12x^3 \quad (2.23)$$

## 2.2.2 Méthodes numériques

### Rappel Integration Numérique

Le but de ce rappel est donner des méthodes permettant de calculer la valeur approchée d'intégrale

$$\int_a^b f(t)dt \quad (2.24)$$

Sur le plan pratique, pour obtenir une approximation lorsque les primitives de  $f$  ne sont pas calculables. Sur le plan théorique, de connaître des méthodes permettant d'obtenir des encadrements d'amplitude aussi petite que souhaitée. Lorsque la fonction  $f$  est de classe  $C^n$  sur l'intervalle réel  $I = [a, b]$ , on note :  $M_i = \max |f^{(i)}|; x \in [a, b], i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ , on subdivise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n$  intervalles  $n \in \mathbb{N}^*$  de même longueur  $h = (b - a)/n$  que l'on appelle le pas de la subdivision. Et pour tout  $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ , on note  $x_i = a + ih$ .

### Méthode des trapèzes

**Principe des méthodes** On remplace la courbe représentative de  $f$ , sur chaque segment de la subdivision, par le segment qui joint  $(x_i, f(x_i))$  a  $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ . Cela revient donc a interpoler la fonction  $f$  sur le segment  $[x_i, x_{i+1}]$  par le polynôme de Lagrange de degré 1 aux points  $x_i$  et  $x_{i+1}$ .

**Proposition 2.13** la valeur approchée de l'intégrale  $f$  sur  $I$  par le méthode des trapèzes est alor donnée par

$$T_n = \frac{b - a}{n} \left( \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \right) \quad (2.25)$$

**Preuve.** L'aire de trapèzes en base  $[x_i, x_{i+1}]$  est  $\frac{(x_{i+1} - x_i)(f(x_i) + f(x_{i+1}))}{2} = \frac{h(f(x_i) + f(x_{i+1}))}{2}$

on déduit que

$$T_n = \sum_{i=0}^{n-1} h(f(x_i) + f(x_{i+1}))/2 = h \left( \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \right) \quad (2.26)$$

■

### La méthode des fonctions de Haar rationalisées

**Définition 2.14** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , et  $0 < k \leq 2^n$ , les fonctions de Haar [22, 10] est définie comme

$$\Psi(t) = \begin{cases} 1, & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ -1, & \text{pour } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$\Psi_{n,k}(t) = \Psi(2^n t - k + 1)$$

Une autre façon

$$\Psi_{n,k}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}} & \text{si } t \in \left[ \frac{2k-2}{2^{n+1}}, \frac{2k-1}{2^{n+1}} \right] \\ -2^{\frac{n}{2}} & \text{si } t \in \left[ \frac{2k-1}{2^{n+1}}, \frac{2k}{2^{n+1}} \right] \\ 0 & \text{si } t \notin [0, 1[ \end{cases}$$

pour  $n \geq 0$  et  $k = 1, 2, \dots, 2^n$

De manière analogue, définir la famille de l'extension des fonctions.

### Les fonctions de Haar rationalisées

**Définition 2.15** Les fonctions de Haar rationalisées sont composées [9] seulement de trois valeurs  $+1$ ,  $-1$  et  $0$  et peuvent être définie sur l'intervalle  $[0, 1)$  comme

$$\Psi_{n,k}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \left[ \frac{j-1}{2^i}, \frac{2j-1}{2^{i+1}} \right] \\ -1 & \text{si } t \in \left[ \frac{2j-1}{2^{i+1}}, \frac{j}{2^i} \right] \\ 0 & \text{si } t \notin \left[ \frac{j-1}{2^i}, \frac{j}{2^i} \right[ \end{cases}$$

**Exemple 2.16** Considérons les équations intégro-différentielles suivant

$$\begin{cases} u'(t) = \int_0^1 e^{st} u(s) ds + y(t) + \frac{1-e^{t+1}}{t-1} \\ u(0) = 1 \end{cases} \quad (2.27)$$

La solution exacte de cette équation est  $u(t) = e^t$  : on va trouver la solution approchée  $u(t)$  de l'équation (2.27) par la méthode des fonctions de Haar rationalisées.

On applique la méthode de Haar [9],

**Tableau.1** Nous présentons les solutions exactes et approximatives de l'équation dans l'exemple.

$t$	s.app( $k = 8$ )	s.app ( $k = 16$ )	s.app( $k = 32$ )	s.app( $k = 64$ )	soultion exact
0.1	1.0688	1.0996	1.1159	1.1069	1.1052
0.2	1.2156	1.2471	1.2258	1.2349	1.2214
0.3	1.3823	1.3281	1.3465	1.3564	1.3499
0.4	1.5717	1.5062	1.5261	1.4897	1.4918
0.5	1.7868	1.7081	1.6763	1.6620	1.6487
0.6	1.7868	1.8189	1.8413	1.8254	1.8221
0.7	2.0309	2.0626	2.0226	2.0049	2.0138
0.8	2.3080	2.1964	2.2217	2.2367	2.2255
0.9	2.6227	2.4906	2.4403	2.4567	2.4596
1	2.6227	2.6521	2.6805	2.6982	2.7183

### Méthode de perturbation d'homotopie(HPM)

La méthode de perturbation homotopique a été introduite et développée par Jihvan He [8]. La méthode de perturbation homotopique couple une homotopie technique de topologie et technique de perturbation.

Considérer l'équation integro-différentielle de Fredholm suivante de la deuxième type de formulaire On appelle l'équation integro-différentielle de Fredholm du deuxième espèce, une équation de la forme

$$v'(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 k(x, t)v(t)dt \quad (2.28)$$

Nous définissons l'opérateur

$$L(u) = u'(x) - \lambda \int_0^1 k(x, t)u(t)dt - f(x) = 0 \quad (2.29)$$

Où  $u'(x) = v'(x)$ . En suite, nous définissons l'homotopie  $H(u, m)$ ,  $m \in [0, 1]$  par

$$H(u, 0) = F(u) \quad , \quad H(u, 1) = L(u) \quad (2.30)$$

Où  $F(u)$  est un opérateur fonctionnel. Nous construisons une homotopie convexe de la forme

$$H(u, m) = (1 - m)F(u) + mL(u) \quad (2.31)$$

Cette homotopie satisfait (2.30) pour  $m = 0$  et  $m = 1$  respectivement. Le paramètre d'intégration  $m$  augmente monotone de zéro à l'unité comme le problème trivial  $F(u) = 0$  est continuellement déformé au problème d'origine  $L(u) = 0$ . HPM utilise le paramètre Homotopy  $m$  comme paramètre d'extension pour obtenir

$$u = w_0 + mw_1 + m^2w_2 + m^3w_3 + \dots \quad (2.32)$$

quand  $m \rightarrow 1$ , (2.32) correspond à (2.31) et devient le solution de (2.29), c.-à-d.

$$v = \lim_{m \rightarrow 1} u = w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + \dots \quad (2.33)$$

La série (2.33) est convergente pour la plupart des cas et le taux de convergence dépend de  $L(u)$ .

Supposons que  $F(u) = u(x) - f(x)$ , et substituant (2.32) dans (2.29) et assimilant les termes avec la puissance identique de  $m$ , nous avons

$$m^0 : w_0'(x) = f(x) \quad (2.34)$$

$$m^n : w_n'(x) = \int_0^1 k(x, t)w_{n-1}(t)dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.35)$$

# Chapitre 3

## Solutions des équations intégré-différentielles

Dans ce chapitre, nous avons appliqué la méthode polynômiale de type Touchard sur certaine classe des équations intégré-différentielle de type Volterra [6, 3], et de Fredholm du deuxième espèce.

### 3.1 Polynômes de Touchard

Les polynômes de Touchard, étudiés dans (1939) par J. Touchard, composé de (a séquence polynômiale de type binomial). Les polynômes de touchard [23, 5] sont donné comme

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n s(n, k)x^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \quad (3.1)$$

où  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ,  $n$  est le degré de polynômes,  $(k)$  est l'index des polynômes et  $(x)$  est la variable.

Les premiers polynômes de Touchard sur l'intervalle  $[0, 1]$ , pour  $n = 6$  sont

$T_0(x)$	1
$T_1(x)$	$1 + x$
$T_2(x)$	$1 + 2x + x^2$
$T_3(x)$	$1 + 3x + 3x^2 + x^3$
$T_4(x)$	$1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$
$T_5(x)$	$1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$

**Tableau.2** présente coefficients rationnels de polynôme de Touchard

### Les dérivés des Polynômes de Touchard

Sont

$$\frac{d}{dx}T_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} x^{k-1} \quad (3.2)$$

### représentation matricielle des Polynômes de Touchard

Dans de nombreuses applications, une formule matricielle des polynômes de Touchard [6] est utile. Ceux-ci sont simples à développer si l'on ne regarde qu'une combinaison linéaire en termes de produits. Etant donné un polynôme écrit comme une combinaison linéaire des fonctions de base de Touchard.

$$T(x) = c_0T_0(x) + c_1T_1(x) + \cdots + c_nT_n(x) \quad (3.3)$$

où  $c_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$  sont inconnus coefficients à déterminer. Il est facile de écrire l'équation (3.3) comme un produit de point de deux Vecteurs .

$$T(x) = \begin{bmatrix} T_0(x) & T_1(x) & \dots & T_n(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

nous pouvons convertir l'équation(3.4) à la forme

$$u(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & \dots & nt^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} & b_{0,2} & \dots & b_{0,n} \\ 0 & b_{1,2} & b_{1,3} & \dots & b_{1,n} \\ 0 & 0 & b_{2,3} & \dots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Telle que les  $b_{i,j}$  sont les coefficients de la base de puissance qui sont utilisées pour déterminer le. Polynômes de Touchard. Nous notons que le matrice dans ce cas est triangulaire supérieure. Les dérivés la matricie des Polynômes de Touchard

$$u'(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x & \dots & nx^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} & b_{0,2} & \dots & b_{0,n} \\ 0 & b_{1,2} & b_{1,3} & \dots & b_{1,n} \\ 0 & 0 & b_{2,3} & \dots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Maintenant, dans le cas linéaire ( $n = 1$ ), la matrice de représentation est

$$u(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix}$$

Dans le cas quadratique ( $n = 2$ ), la matricela représentation est

$$u(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Dans le cas cubique ( $n = 3$ ), la matrice de représentation est

$$u(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

### 3.2 Solutions des équations intégro-différentielles par des Polynômes de Touchard

La forme générale de l'équation intégro- différentielle de Volterra est donnée par

$$\begin{aligned} u'(x) &= f(x) + \int_0^x k(x,t)u(t)dt \\ u(0) &= u_0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

et en utilisant l'équation (3.4), nous avons

$$u(x) = T(x) = \begin{bmatrix} T_0 & T_1 & \dots & T_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

aussi en utilisant l'équation (3.2)

$$u'(x) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} x^{k-1}$$

En appliquant la méthode des polynômes de Touchard d'équation(3.7), à l'aide d'équations (3.5) et (3.6) nous obtenir la formule suivante

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x & \cdots & nx^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} & b_{0,2} & \cdots & b_{0,n} \\ 0 & b_{1,2} & b_{1,3} & \cdots & b_{1,n} \\ 0 & 0 & b_{2,3} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix} \\
 &= \lambda \int_0^x k(x,t) \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & \cdots & nt^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} & b_{0,2} & \cdots & b_{0,n} \\ 0 & b_{1,2} & b_{1,3} & \cdots & b_{1,n} \\ 0 & 0 & b_{2,3} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix} dt \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

Maintenant, pour trouver toute l'intégration dans l'équation (3.9). Ensuite, afin de déterminer  $c_0, c_1, \dots, c_n$  nous avons besoin de  $n$  équations, Choix  $x_i$   $i = 1, 2, \dots, n$  dans l'intervalle  $[0, 1]$ , ce qui donne  $(n)$  équations.

Résoudre ces  $(n)$  équations par "élimination de Gauss "pour trouver les valeurs  $c_0, c_1, \dots, c_n$ .

### 3.3 Résultats numériques

**Exemple 3.1** considérons l'équation integro- différentielle linéaire de Volterra.

$$u'(x) = 2 - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} \int_0^x u(t) dt$$

avec la condition initiale  $u(0) = 0$

où la fonction  $f(x)$  est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$u(x) = 2x$$

La solution approximative  $u_n(x)$  de  $u(x)$  est obtenue par la méthode des polynômes de Touchard.

**Tableau 1.** Nous présentons les solutions exactes et approximatives de l'équation dans l'exemple 3.1 dans certains points arbitraires, l'erreur pour  $N = 10$ .

$x$	solution exacte $u$	solution approchée $u_n$	Erreur
0.0	0.0000	0.0000	0.000000e+00
0.1	0.2000	0.2000	4.546100e-11
0.2	0.4000	0.4000	3.050771e-11
0.3	0.6000	0.6000	2.620604e-11
0.4	0.8000	0.8000	4.714906e-11
0.5	1.0000	1.0000	9.988899e-12
0.6	1.2000	1.2000	4.605494e-11
0.7	1.4000	1.4000	6.851408e-12
0.8	1.6000	1.6000	3.263234e-11
0.9	1.8000	1.8000	3.237899e-11
1	2.0000	2.0000	8.881784e-16

**Exemple 3.2** considérons l'équation integro- différentielle linéaire de Volterra

$$u'(x) = 1 - \int_0^x u(t) dt$$

avec la condition initiale  $u(0) = 0$

où la fonction  $f(x)$  est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$u(x) = \sin x$$

La solution approximative  $u_n(x)$  de  $u(x)$  est obtenue par la méthode des polynômes de Touchard.

**Tableau 2.** Nous présentons les solutions exactes et approximatives de l'équation dans

l'exemple 3.2 dans certains points arbitraires, l'erreur pour  $N = 10$ .

$x$	solution exacte $u$	solution approchée $u_n$	Erreur
0.0	0.0000	0.0000	0.000000e+00
0.1	0.0998	0.0998	2.867290e-13
0.2	0.1986	0.1986	3.625156e-13
0.3	0.2955	0.2955	2.089995e-13
0.4	0.3894	0.3894	2.010614e-13
0.5	0.4794	0.4794	3.566036e-13
0.6	0.5646	0.5646	4.030110e-14
0.7	0.6442	0.6442	2.834399e-13
0.8	0.7173	0.7173	2.831069e-13
0.9	0.7833	0.7833	1.811884e-13
1	0.8414	0.8414	1.110223e-16

**Exemple 3.3** considérons l'équation integro- différentielle linéaire de Fredholm

$$u'(x) = xe^x + e^x - x + \int_0^1 xu(t)dt$$

avec la condition initiale  $u(0) = 0$

où la fonction  $f(x)$  est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$u(x) = xe^x$$

La solution approximative  $u_n(x)$  de  $u(x)$  est obtenue par la méthode des polynômes de Touchard.

**Tableau 3.** Nous présentons les solutions exactes et approximatives de l'équation dans

l'exemple 3.3 dans certains points arbitraires, l'erreur pour  $N = 10$ .

$x$	solution exacte $u$	solution approchée $u_n$	Erreur
0.0	0.0000	0.0000	0.000000e+00
0.1	0.1105	0.1105	1.684015e-10
0.2	0.2442	0.2442	5.280915e-12
0.3	0.4049	0.4049	1.925111e-10
0.4	0.5967	0.5967	5.011702e-11
0.5	0.8243	0.8243	1.482066e-10
0.6	1.0932	1.0932	4.893796e-11
0.7	1.4096	1.4096	9.171108e-11
0.8	1.7804	1.7804	5.911982e-11
0.9	2.2136	2.2136	4.014122e-12
1	2.7182	2.7182	5.684342e-14

**Exemple 3.4** considérons l'équation integro- différentielle linéaire de Fredholm

$$u'(x) = 3e^{3x} - \frac{1}{3}(2e^3 + 1)x + \int_0^1 3xtu(t)dt$$

avec la condition initiale  $u(0) = 1$

où la fonction  $f(x)$  est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$u(x) = e^{3x}$$

La solution approximative  $u_n(x)$  de  $u(x)$  est obtenue par la méthode des polynômes de Touchard.

**Tableau 4.** Nous présentons les solutions exactes et approximatives de l'équation dans

*l'exemple 3.4 dans certains points arbitraires, l'erreur pour  $N = 10$ .*

$x$	<i>solution exacte <math>u</math></i>	<i>solution approchée <math>u_n</math></i>	<i>Erreur</i>
0.0	1.0000	1.0000	0.000000e+00
0.1	1.3498	1.3498	1.821110e-07
0.2	1.8221	1.8221	2.196689e-07
0.3	2.4596	2.4596	1.080370e-07
0.4	3.3201	3.3201	1.372972e-07
0.5	4.4816	4.4816	2.037644e-07
0.6	6.0496	6.0496	3.222279e-09
0.7	8.1661	8.1661	1.723809e-07
0.8	11.0231	11.0231	1.568693e-07
0.9	14.8797	14.8797	9.678357e-08
1	20.0855	20.0855	8.384404e-13

# Conclusion

Dans ce mémoire nous avons présenté et étudié une méthode de résolution numérique d'équations intégral-différentielles basée sur le polynôme de Touchard. On a illustré à la fin de notre mémoire par des exemples avec la programmation par logiciel de calcul numérique MATLAB, où on a estimé les erreurs pour la méthodes, et de comparer les solutions approchées avec la solution exacte .

# Bibliographie

- [1] A. Adawi, F. Awawdeh, A numerical method for solving linear integral equations, *Int. J. Contemp. Mathematics Sciences*, 10, (2009) pp 485-496.
- [2] K. Atkinson, *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*, the press Syndicate of the University of Cambridge, United Kingdom, 1997.
- [3] S. Aggarwal, N. Sharma, R. Chauhan. Solution of Linear Volterra Integro-Differential equations of Second Kind Using Mahgoub Transform. *International Journal of Latest Technology in Engineering, Management & Applied Science*. Volume VII, Issue V, (2018) 173-176.
- [4] E. Babolian, A. Davari, Numerical implementation of Adomian decomposition method for linear Volterra integral equations of the second kind, *App. Math. Comput*, 165 (2005) 223–227.
- [5] O. Chrysaphinou, *Discrete Mathematics*. 143-152 Elsever Noth-Holland, 1985
- [6] M. Djalil, H. Souidan, W. Souidan, Approximate Solution of Linear Volterra Integro-Differential Equation by Touchard Polynomials Method, (*WJSM*) 11(2), (2018), 29-41.
- [7] A. Jerri. *Introduction to integral equations with applications*. John Wiley and Sons, INC, 1999.
- [8] J. He, Homotopy perturbation technique, *Comput, Methods Appl. Mech. Engrg*, 178 (1999) 257-262.
- [9] A. Hocine, Résolution de système d'équations intégro-différentielles par la méthode des fonctions de Haar rationalisées, mémoire de magister universite kasdi merbah ouargla, 2012.

- 
- [10] S. Krasnov, A. Kissèlev, G.Makarenko, équations intégrales ,problèmes et exercices, éditions Mir, Moscou , Traduction française Editions Mir, 1977.
- [11] C. Kwang. Algorithms for Bernoulli numbers and Euler numbers. Journal of Integer Sequences, volume 4 article, 01.1.6, issue 1 (2001), pp 1-7.
- [12] W. Lovitt. linear integral equation, Dover, NewYork. 1950.
- [13] K. Maleknejad, N. Aghazadeh, Numerical solution of Volterra integral equations of the second kind with convolution kernel by using Taylor-series expansion method, Appl. Math. Comput, 161, (2005) 915–922.
- [14] K. Maleknejad, M. Karami, Using the WPG method for solving integral equations of the second kind, App. Math. and Comput., 166, (2005) 123-130.
- [15] K. Maleknejad, K. Nouri, M. Yousefi, Discussion on convergence of Legendre polynomial for numerical solution of integral equations, Applied Mathematics and Computation, 193, (2007), 335-339.
- [16] F. Mirzaee, Numerical Solution for Volterra Integral Equations of the First Kind via Quadrature Rule, Applied Mathematical Sciences, Vol. 6, no. 20, (2012), 969 - 974.
- [17] M. Nadir, Cours sur les équations intégrales, université M'sila 2008.
- [18] M. Nadir, Solving Fredholm integral equations with application of the four Chebyshev polynomials, in Journal of Approximation Theory and Applied Mathematics, 4, ( 2014), pp 37-44.
- [19] M. Nadir, Solving linear integral equations with Fibonacci polynomials, Malaya Journal of Matematik, Vol. 6, No. 4, (2018), 711-715.
- [20] M. Nadir, D. Mustapha, Euler Series solutions for linear Integral equations AJMAA, Vol. 14, No. 2, Art. 11, (2017) pp 1-7.
- [21] M. Nadir, A. Rahmoune, Modified Method for Solving Linear Volterra Integral equations of the Second Kind Using Simpson's Rule, in International Journal Mathematical Manuscripts (IJMM), 1, (2) (2007), 133-140.
- [22] M. Rahman, Mathematical Methods with Application, WIT Press, Southampton, UK, pp. 456,2000

- [23] S. Roman, The umbral Calculus. 208 Dover Publications USA, 2005.
- [24] S. Wang, J.H. He. Variational iteration method for solving integro-differential equations. Phys. Lett., A 367 (2007) 188-191.

**ملخص:** في هذه المذكرة قمنا بتطبيق طريقة كثيرات الحدود من نوع توشار على المعادلات التكاملية-التفاضلية من نوع فولتيرا لأجل إيجاد الحلول التقريبية و مقارنتها مع الحلول الدقيقة.

**الكلمات المفتاحية:** المعادلات التفاضلية التكاملية، كثيرات حدود توشار.

**Résumé :** Dans ce mémoire, nous avons appliqué la méthode polynômiale de type Touchard sur certaine classe des équations intégro-différentielles de type Volterra afin de trouver des solutions approchées et de le comparer avec des solutions exactes.

**Mots-clés :** Equations intégro-différentielles, polynôme de Touchard.

**Abstract:** In this work we have applied the Touchard type polynomial method to Volterra type integro-differential equations in order to find approximate solutions and compare them with exacte solutions.

**keywords :** Integro-differential equations, Touchard polynomials.