



N° d'ordre :

UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Pour l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Mathématiques

Option : Géométrie des espaces de Banach et analyse harmonique

Présenté Par :

NAILI Mourad

Sujet

Les espaces L_p non commutatifs

Dirigé par : **Dr. SAADI Khalil**

Soutenue le 25 Juin 2013, devant le jury composé de :

Mr. L. MEZRAG	Prof. Université de M'sila	Président
Mr. K. SAADI	MCB Université de M'sila	Rapporteur
Mr. A. TIAIBA	MCA Université de M'sila	Examineur

Promotion: 2012/2013

Table des matières

0.1	Remerciements	3
0.2	Introduction	4
1	Les C^*-algèbres	5
1.1	Introduction	5
1.2	Algèbres de Banach	5
1.2.1	Spectre d'une algèbre de Banach	7
1.2.2	Les idéaux d'une algèbre de Banach	10
1.2.3	Les caractères d'une algèbre de Banach	11
1.3	C^* -algèbres	15
1.3.1	Algèbres involutives ($*$ -algèbre)	15
1.3.2	Le rayon spectral d'une C^* -algèbre	21
1.4	Formes positives et représentations des C^* -algèbres	24
1.4.1	Formes positives	24
1.4.2	Représentation de GNS	27
2	Les algèbres de Von-Neumann	29
2.1	Introduction	29
2.2	Topologies sur $B(H)$	29
2.2.1	Topologie définie par une famille de semi-norme	30
2.2.2	Les topologies de $\mathcal{B}(H)$	31
2.2.3	Formes sesquilinéaires	34

0.2.3	Algèbres de Von-Neumann	36
2.3.1	Commutant et bicommutant	36
2.3.2	Les caractérisations des algèbres de VN	38
3	Intégration non-commutative et espaces L_p	44
3.1	Introduction	44
3.2	Intégration non-commutative	44
3.2.1	La trace	44
3.2.2	Intégration non-commutative	48
3.3	L'espace L_p	51

m'apprend en toute flexibilité et en toute facilité comment s'il prend les mathématiques, je remercie également Dr. SAÏDI Khalil qui m'a fait l'honneur d'être rapporteur de mon travail. Je le remercie pour sa lecture attentive.

J'ai aussi une pensée pour SOHAIB et ZOHIR, étudiants de master à M'sila pendant la même période et tous les autres étudiants de Mathématiques.

Je pense aussi à tous ceux que j'ai côtoyés pendant ces années en dehors des mathématiques. Merci à tous dans les familles ou amis, j'ai une pensée à mes élèves à Djelfa et mes amis ceux-là. Enfin et surtout, merci à BOUZAIDI Ben-alla qui a toujours été présent et il m'encourage.

0.2 Introduction

Les travaux de ce présent mémoire s'inscrivent dans le cadre de la théorie de l'analyse non commutative. On s'intéresse à la construction des espaces L_p version non commutative. La théorie de l'intégration par rapport à une trace normale fidèle sur une algèbre de Von Neumann est due à J. Dixmier [1] et C. Segal. Dans cette théorie les fonctions sont remplacées par des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert, et les mesures sont remplacées par des traces. Dixmier a traité les espaces L_p non commutatifs pour $1 \leq p \leq +\infty$ où il a montré les inégalités triangulaires et Hölder version non commutatives. D'autre part, Segal ne considère que les espaces L_1 et L_2 , qui sont beaucoup plus faciles à traiter.

Le mémoire se divise en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, on s'intéresse à étudier les espaces C^* -algèbres en donnant quelques rappels et résultats sur cette théorie. On divise le premier chapitre en deux parties, le cas commutatif où on démontre le résultat principal qui annonce que toute C^* -algèbre A unitaire commutative s'identifie à $C(K)$ tel que K est spectre de A , la deuxième partie concerne le cas non commutatif dont on verra que toute C^* -algèbre s'identifie à une C^* -sous algèbre de $\mathcal{B}(H)$.

Ensuite, on consacre le deuxième chapitre à étudier les algèbres de Von Neumann. Une algèbre de von Neumann donc (nommée en l'honneur de John von Neumann) est une $*$ -algèbre d'opérateurs bornés sur un espace de Hilbert, fermée pour la topologie faible, et qui contient l'opérateur identité. On verra que ces espaces se caractérisent par la coïncidence avec leurs bicommutants.

Dans le troisième chapitre on définit les espaces L_p non commutatifs et on essaiera d'étudier quelques propriétés sur ces nouvelles espaces. On va suivre le plan suivant :

Chapitre 1 : C^* -algèbres

Chapitre 2 : Algèbre de Von Neumann.

Chapitre 3 : Intégration non commutative et espaces L_p .

Bibliographie

- [1] J.DIXMIER. Formes linéaires sur un anneau d'opérateurs, Bull. Soc. math. France, t. 81, 1953.
- [2] J.DIXMIER. Les C^* -algèbres (et leurs représentations).
- [3] D.KALNINS. Intégration non commutative représentation projective d'espaces L^p . Séminaire de P.KREE, tome 4 (1977-1978).
- [4] F.BESNARD. Introduction à la géométrie non commutative.
- [5] D.LI et H.QUEFFELEC. Introduction à l'étude des espaces de Banach.
- [6] E.NELSON. A note on non commutative integration, J. of function. Analysis, t. 15, 1974.
- [7] T.FACK and H.KOSAKI. Generalized s -numbers of τ -mesurable operators. Pacific J. Math, 123(2) :269-300, 1986.
- [8] S.SAKAI. C^* - and W^* -algebras. Berlin, Springer-verlag, 1971 (Ergebnisse der Mathematik, 60).
- [9] K.PEDERSEN. Analysis now, volume 118 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-verlag, New York, 1989.
- [10] A.FLATTOT. Notes on non-commutative integration.