

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>1 Rappels sur l'algèbre de Boole et les fonctions Booléennes</b>	<b>5</b>
1.1 Relation d'ordre sur un ensemble . . . . .	5
1.1.1 Relation d'ordre total . . . . .	6
1.1.2 Éléments remarquables d'une partie d'un ensemble ordonné . . . . .	6
1.2 Treillis . . . . .	6
1.2.1 Treillis distributif . . . . .	7
1.2.2 Treillis complété . . . . .	7
1.3 Algèbre de Boole . . . . .	8
1.3.1 Opérateurs logiques . . . . .	10
1.3.2 Fonction logique . . . . .	11
1.3.3 Règles de l'algèbre de Boole . . . . .	12
1.3.4 Théorème de De Morgan . . . . .	13
1.4 Fonction Booléenne . . . . .	14
1.4.1 Fonctions Booléennes de $n$ variables . . . . .	15
<b>2 Simplification des fonctions Booléennes</b>	<b>16</b>
2.1 Forme canonique d'un fonction logique . . . . .	16
2.1.1 Passage aux formes canoniques . . . . .	17
2.2 Les formes normales . . . . .	19
2.2.1 Forme normale disjonctive (FND) . . . . .	19
2.2.2 Forme normale conjonctive (FNC) . . . . .	20

2.3	Minimisation des fonctions logiques . . . . .	22
2.4	Simplification des fonction logique . . . . .	23
2.4.1	Simplification via algèbre de Boole . . . . .	23
2.4.2	Simplification par diagramme de Karnaugh . . . . .	24
2.4.3	Simplification par Quine-McCluskey . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Applications des circuits de commutation</b>	<b>31</b>
3.1	Circuits de commutation . . . . .	31
3.2	Portes logiques . . . . .	35
3.3	Applications des circuits de commutation . . . . .	38

## *Remerciements*

La réalisation de ce modeste travail est grâce au bon dieu, le tout puissant, que nous remercions pour le courage et la patience qu'il nous a attribué pour parvenir à la fin de notre carrière estudiantine.

A l'occasion, nous tenons à adresser nos sincères remerciement à l'encadreur : Monsieur D. MIHOUBI pour sa bienveillance, et pour son aide précieux qu'il nous a apportée.

# Introduction

Ce travail rentre dans le cadre des fonctions Booléennes et applications, le sujet est très vaste et pourrait donner lieu à bien des développements algébriques dans divers domaines des mathématiques comme par exemple : les ensembles ordonnés, les treilles, la logique ...etc. Dans ce mémoire on s'intéresse au problème de minimisation des fonctions Booléennes et leurs applications. La simplification des expressions Booléennes est principalement réalisée par l'utilisation de trois méthodes principales. La méthode algébrique (utilisation des théorèmes de l'algèbre de Boole), celle le diagramme de Karnaugh (méthode graphique) et celle de Quine-Mc Cluskey. Dans ce mémoire on décrit en détail les trois méthodes en donnant des applications comme par exemple la simplification des circuits combinatoire.

Ce mémoire est subdivise en trois chapitres :

Dans le 1<sup>er</sup> chapitre on donne un rappel sur l'algèbre de Boole et les fonctions Booléennes.

Le 2<sup>eme</sup> chapitre est consacré à la simplification des fonctions Booléennes.

Enfin, dans le dernier chapitre on traite quelques applications des circuits combinatoires.

# Chapitre 1

## Rappels sur l'algèbre de Boole et les fonctions Booléennes

Les notes qui suivent constituent une première approche des algèbres de Boole et des fonctions Booléennes. Le sujet est très vaste et pourrait donner lieu à bien des développements algébriques dans divers domaines des mathématiques comme par exemple : les ensembles ordonnés, les treilles, la logique ....

### 1.1 Relation d'ordre sur un ensemble

**Définition 1.1.1** : Une relation binaire sur un ensemble  $E$  est dite une relation d'ordre sur  $E$  si elle est réflexive, antisymétrique et transitive. Une relation d'ordre se note souvent  $\leq$ . Tout ensemble dans lequel est défini une relation d'ordre est appelé ensemble ordonné .

1. **Réflexivité** :  $x \leq x$
2. **Antisymétrie** :  $(x \leq y \text{ et } y \leq x) \Rightarrow x = y$
3. **Transitivité** :  $(x \leq y \text{ et } y \leq z) \Rightarrow x \leq z$

**Exemple 1.1.2** : La relation « inférieur ou égal » est une relation d'ordre sur l'ensemble des entiers naturels, par contre la relation « strictement inférieur », sur l'ensemble des entiers naturels, n'est pas une relation d'ordre car elle n'est pas réflexive.

**Exemple 1.1.3 :** Sur  $\mathbb{N}^*$ , l'ensemble des entiers positifs non nuls, la relation de **divisibilité** définie par :  $\ll a \text{ divise } b \text{ s'il existe un entier } k \text{ tel que } b = a \times k \gg$  est une relation d'ordre, notée  $/$ , et on écrit par exemple  $3 / 24$  pour dire que 3 divise 24

### 1.1.1 Relation d'ordre total

Un ensemble  $E$  muni d'une relation d'ordre  $R$  est totalement ordonné si pour tout  $a$  et pour tout  $b$  appartenant  $E$  on a soit  $a R b$ , soit  $b R a$ .

Ainsi l'ensemble des entiers naturels est totalement ordonné par la relation  $\leq$ .

### 1.1.2 Éléments remarquables d'une partie d'un ensemble ordonné

Soit  $E$  un ensemble ordonné par une relation d'ordre notée  $\prec$ , soit  $A$  un sous-ensemble de  $E$ . On appellera :

- **Majorant** de  $A$  (resp. minorant), tout élément  $x$  de  $E$  tel que, quel que soit  $a \in A$ ,  $a \prec x$  est vraie (resp.  $x \prec a$ ).

-**Plus grand élément** de  $A$  (resp. plus petit élément), l'élément  $M$  de  $A$  (resp.  $m$ ), s'il existe, tel que quel que soit  $a \in A$ ,  $a \prec M$  est vraie (resp.  $m \prec a$ ).

-**Borne supérieure** de  $A$  (resp. borne inférieure), le plus petit des majorants (resp. le plus grand des minorants).

## 1.2 Treillis

**Définition 1.2.1:** Tout ensemble ordonné tel que toute partie de deux éléments admet une borne supérieure et une borne inférieure est appelé treillis.

**Notation:**  $\sup \{x, y\} = x \vee y$  ,  $\inf \{x, y\} = x \wedge y$

**Exemple 1.2.2 :**  $(\mathbb{N}^*, /)$  est un treillis tel que :

$\sup \{x, y\} = ppcm \{x, y\}$  où *ppcm* désigne le plus petit commun multiple.  
 $\inf \{x, y\} = pgcd \{x, y\}$  où *pgcd* désigne le plus grand commun diviseur.

**Proposition 1.2.3:** Dans un treillis quelconque on a :

- $x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x$

$$\Leftrightarrow x \vee y = y$$

- $x \vee x = x \quad x \wedge x = x$  (idempotence)

- $x \vee y = y \vee x$  et  $x \wedge y = y \wedge x$  (commutativité)

- $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$  et  $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$  (associativité)

- $x \wedge (x \vee y) = x$  et  $x \vee (x \wedge y) = x$  (loi d'absorption)

### 1.2.1 Treillis distributif

On dit qu'un treillis est distributif si quels que soient  $x, y$  et  $z$  appartenant à  $E$  on a :

1.  $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

2.  $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

**Exemple 1.2.1.1:** L'ensemble  $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$  des entiers positifs diviseurs de 30 muni des opérations :

$$x \wedge y = p \operatorname{gcd} \{x, y\}$$

$$x \vee y = p \operatorname{pcm} \{x, y\}$$

est un treillis distributif.

### 1.2.2 Treillis complémenté

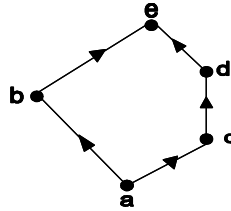
Soit  $A$  un treillis ayant un plus grand élément et un plus petit élément. On dit qu'un élément  $x$  de  $A$  est complémenté s'il existe au moins un élément  $\bar{x}$  de  $A$  tel qu'on ait à la fois :

$$\begin{cases} x \wedge \bar{x} = \inf(A) \\ x \vee \bar{x} = \sup(A) \end{cases}$$

Un tel élément  $\bar{x}$  s'appelle un complément de  $x$ .

**Exemple 1.2.2.1:** L'ensemble  $D = \{1, 2, 3, 6\}$  des entiers positifs diviseurs de 6 c'est-à-dire pour chaque un élément  $x$  quelconque admet pour complément  $6/x$ . Donc on obtient : ( $\bar{2} = 3$  ,  $\bar{3} = 2$  ,  $\bar{1} = 6$  ,  $\bar{6} = 1$ )

**Exemple 1.2.2.2:** La figure représente un treillis dans lequel  $d$  et  $c$  sont des compléments de  $b$ .



On dit qu'un treillis est **complémenté** si chacun de ses éléments possède au moins un complément.

## 1.3 Algèbre de Boole

**Définition 1.3.1:** Un treillis qui a au moins deux éléments et qui est à la fois distributif et complémenté s'appelle «**une algèbre de Boole**»

\* L'algèbre de Boole permet de manipuler des valeurs logiques. Une valeur logique n'a que deux états possibles :

*vraie*(1) ou *fausse*(0).

**Exemple 1.3.2:**

- vraie, faux
- ouvert, fermé
- avant, arrière

**Théorème 1.3.3:** Dans une algèbre de Boole chaque élément possède un unique complément

**Preuve.** : Supposons qu'un élément  $x$  possède deux compléments  $y$  et  $z$ . Nous avons

$$x \vee y = S$$

$S$  : *ppcm* désigne le plus petit commun multiple.

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} (x \vee y) \wedge z &= S \wedge z \\ &= z. \end{aligned}$$

Par distributivité

$$\begin{aligned} (x \vee y) \wedge z &= (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \\ &= \sigma \vee (y \wedge z) \\ &= y \wedge z = z. \end{aligned}$$

$\sigma$  : *pgcd* désigne le plus grand commun diviseur.

En refaisant la même raisonnement après avoir changé  $y$  et  $z$ , on obtient

$$z \wedge y = y.$$

Finalement, puisque

$$y \wedge z = z \wedge y$$

cela donne  $z = y$ . ■

**Propriétés 1.3.4:** Une algèbre de Boole on peut faire trois opérations : calculer le plus petit majorant de deux éléments, calculer leur plus grand minorant, calculer le complément d'un élément. Les formules qui suivent donnent les principales propriétés de ces opérations:

★ *Propriétés de  $\vee$  :*

- \*  $x \vee y = y \vee x$
- \*  $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$
- \*  $x \vee S = S$
- \*  $x \vee \sigma = x$
- \*  $x \vee x = x$

★ *Propriétés de  $\wedge$  :*

\*  $x \wedge y = y \wedge x$

\*  $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

\*  $x \wedge \sigma = \sigma$

\*  $x \wedge S = x$

\*  $x \wedge x = x$

★ *Propriétés de la complémentation*

\*  $x \vee \bar{x} = S$

\*  $x \wedge \bar{x} = \sigma$

\*  $\overline{(\bar{x})} = x$

\*  $\bar{\sigma} = S$

\*  $\bar{S} = \sigma$

★ *Liens entre  $\wedge$ ,  $\vee$  et  $\leq$* 

\*  $x \wedge y = x$  équivaut à  $x \leq y$

\*  $x \vee y = y$  équivaut à  $x \leq y$

**Exemple 1.3.5:** Soit  $F = \{1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110\}$  l'ensemble des diviseurs entiers positifs de 110, sur cet ensemble on définit trois opérations comme suit:

1.  $a \wedge b =$  le plus grand commun diviseur de  $a$  et  $b$
2.  $a \vee b =$  le plus petit commun multiple de  $a$  et  $b$
3.  $\bar{a} = 110/a$

### 1.3.1 Opérateurs logiques

Les opérateurs logiques servent à construire les fonctions logiques. En algèbre classique on distingue quatre opérateurs de base :  $+$ ,  $-$ ,  $*$ ,  $/$ , en algèbre de Boole ils sont au nombre de trois : *ET*, *OU*, *NON* ou encore « *intersection* », « *union* », « *complément* ».

**Exemple 1.3.1.1:** la fonction Booléenne  $f$  de trois variables  $a, b$  et  $c$  qui est vraie si  $a$  est vrai ou si  $b$  et  $c$  sont vraies ou si  $d$  est faux s'écrit :

$$f = OU(a, ET(b, c), NON(d))$$

ou encore

$$f = a + bc + \bar{d}$$

### 1.3.2 Fonction logique

On peut définir une fonction logique par deux méthodes :

\* **Par son expression logique :**

$$\begin{aligned} f : \mathbf{B}^n &\rightarrow \mathbf{B} \\ (x_1, x_2, \dots) &\mapsto f(x_1, x_2, \dots) \end{aligned}$$

tel que  $\mathbf{B} = \{0, 1\} = \{V, F\}$

comme combinaison des variables de la fonction via les opérateurs de base de l'algèbre de Boole.

**Exemple 1.3.2.1:** Soit  $a, b, c$  trois variables et  $f$  une fonction logique tel que :

$$f(a, b, c) = ab + \bar{b}c + a\bar{c}$$

\* **Par sa table de vérité:**

Les combinaisons de  $n$  variables logiques sont limitées à  $2^n$  du fait que les variables ne peuvent prendre que deux valeurs. On peut ainsi représenter la fonction logique à l'aide d'un tableau faisant correspondre à chaque combinaison des variables la valeur de la fonction (0 ou 1) correspondante. On appelle cette représentation la table de vérité de la fonction.

**Exemple 1.3.2.2:** Soit  $a$  et  $b$  deux variables logiques,  $f_1$ ,  $f_2$ , et  $f_3$  des fonctions logiques définies comme suit:

$$f_1 = a + b \quad f_2 = \overline{a \cdot b} \quad f_3 = \bar{a} + \bar{b}$$

Les tables de vérités associées à ces fonctions sont :

$a$	$b$	$f_1$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$a$	$b$	$f_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$a$	$b$	$f_3$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

### 1.3.3 Règles de l'algèbre de Boole

Si  $A$  et  $B$  sont des variables Booléennes, alors  $A+B$ ,  $AB$  sont aussi des variables Booléennes

- **Commutativité :**

$$A + B = B + A$$

$$A \cdot B = B \cdot A$$

- **Associativité :**

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

- **Distributivité :**

$$A(B + C) = AB + AC$$

- **Idempotence :**

$$A + A = A$$

$$A \cdot A = A$$

- Complémentarité :

$$A + A = A$$

$$A \cdot \bar{A} = 0$$

- Identités remarquables :

$$1 + A = 1$$

$$1 \cdot A = A$$

$$0 + A = A$$

$$0 \cdot A = 0$$

### 1.3.4 Théorème de De Morgan

\* Le complément d'une somme est le produit des compléments :

$$\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

\* Le complément d'un produit est la somme des compléments :

$$\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$$

**Corollaire 1.3.4.1:** Dans une algèbre de Boole  $\mathbf{B}$ , on a pour tout  $x, y \in \mathbf{B}$

$$x \leq y \Leftrightarrow \bar{x} \geq \bar{y}$$

**Preuve.** : On a pour tout  $x, y \in \mathbf{B}$

$$x \leq y \Leftrightarrow x \vee y = y$$

$$\Leftrightarrow \bar{x} \wedge \bar{y} = \overline{(x \vee y)} = \bar{y}$$

$$\Leftrightarrow \bar{x} \geq \bar{y}$$

■

## 1.4 Fonction Booléenne

**Définition 1.4.1:** Soit  $\mathbf{B} = \{0, 1\}$  l'ensemble des Booléens, l'ensemble  $\mathbf{B}$  est munit de l'opération unaire ( $\neg 0 = 1, \neg 1 = 0$ ) et les opération " $\vee$ " ( $0 \vee 0 = 0, 1 \vee 0 = 1, 0 \vee 1 = 1, 1 \vee 1 = 1$ ) et les opérations  $\wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$  sont définies à partir des opérations sur  $\mathbf{B}$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 * x \wedge y &= \neg(\neg x \vee y) \\
 * x \Rightarrow y &= \neg x \vee y \\
 * x \Leftrightarrow y &= (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x) \\
 &= (\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee x) \\
 &= \neg(x + y)
 \end{aligned}$$

**Théorème 1.4.2:** Un calcul Booléen peut être remplacé, par un calcul numérique par les transformations suivantes avec  $(x, y) \in B^2$ :

$$\begin{aligned}
 x \wedge y &= xy \\
 x \vee y &= x + y - xy \\
 \overline{x} &= 1 - x
 \end{aligned}$$

**Preuve.** : Pour démontrer ces formules il suffit d'examiner tous les cas possibles en constatant à chaque fois que le résultat est correct :

$x$	$y$	$x \wedge y$	$xy$	$x \vee y$	$x + y - xy$
0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1

■

### 1.4.1 Fonctions Booléennes de $n$ variables

**Définition 1.4.1.1:** On appelle **fonction Booléenne de  $n$  variables** toute application :

$$f : \mathbf{B}^n \rightarrow \mathbf{B}$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \mapsto f(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

(on dit aussi **fonction binaire** ou **fonction logique**) avec  $a_1, a_2, \dots, a_n$  et  $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$  prenant leurs valeurs dans  $\{0, 1\}$ .

\* L'ensemble des fonctions Booléennes de  $n$  variables devrait être noté  $\mathbf{B}^{\mathbf{B}^n}$ , puisque ce sont toutes les applications de  $\mathbf{B}^n$  dans  $\mathbf{B}$ , mais on devrait aussi le noter  $\mathbf{B}^{(2^n)}$  puisque ce sont les mots binaires de longueur  $2^n$ .

Donc en général, le nombre des fonctions Booléennes à  $n$  variables est égal à  $2^{(2^n)}$ .

**Exemple 1.4.1.2:** Le tableau suivant donne le nombre des fonctions Booléennes pour  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  :

Nombre de variables	Nombre de fonction Booléennes
1	4
2	16
3	256
4	65536
5	4294967296

On voit que le nombre de telles fonctions croît très vite avec  $n$  (ou ce qui revient au même de dire que le nombre de circuits électriques représentant ces fonctions augmente rapidement avec  $n$ ).

A titre d'exemple, avec  $n = 5$  on a plus de 4 milliards de fonctions Booléennes ce qui revient au même de dire qu'avec 5 relais à plusieurs contacts, on peut réaliser, selon la manière de les câbler, plus de 4 milliards de circuits différents ceci conduit à chercher des méthodes de minimisation (simplification) de ces fonctions pour obtenir des fonctions équivalentes avec un nombre de variables le minimum possible.

# Chapitre 2

## Simplification des fonctions Booléennes

La simplification des expressions Booléennes est principalement réalisée par l'utilisation de trois méthodes principales. La méthode algébrique (utilisation des théorèmes de l'algèbre de Boole), celle le diagramme de Karnaugh (méthode graphique) pour les fonctions ayant au plus 5 variables et celle de Quine-Mc Cluskey.

### 2.1 Forme canonique d'une fonction logique

Une fonction logique écrite sous forme algébrique, peut être représentée sous différentes formes: somme, produit, somme canonique, produit canonique.

- **Somme :** Une fonction est écrite sous la forme somme, si elle est constituée de plusieurs termes reliés entre eux par l'opérateur *OU* noté "+".

**Exemple 2.1.1:** Soit  $a, b, c$  trois variables Booléennes, la fonction  $f$  représente la disjonction entre 3 variables.

$$f(a, b, c) = a + b + c$$

- **Produit:** Une fonction est écrite sous la forme produit, si elle est constituée de plusieurs termes reliés entre eux par l'opérateur *ET* noté ".".

**Exemple 2.1.2:** La fonction  $f(a, b)$  représente la conjonction des variables  $a, b$

$$f(a, b) = a \cdot b$$

- **Somme canonique(mintermes) :** Une fonction logique est écrite sous la forme somme canonique si toutes les variables figurent dans chaque terme et si, dans chacun de ces termes toutes les variables sont reliées entre elles par l'opérateur *ET*

**Exemple 2.1.3:** Soient les fonctions à trois variables

$$f(a, b, c) = \bar{a} \cdot b \cdot c + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c$$

$$f(a, b, c) = a \cdot b \cdot c + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + a \cdot \bar{b} \cdot c$$

\* Chaque terme "produit" s'appelle minterme.

- **Produit canonique(maxtermes) :** Une fonction logique est écrite sous la forme produit canonique si toutes les variables figurent dans chaque produit et si, dans chacun de ces termes toutes les variables sont reliées entre elles par l'opérateur *OU*

**Exemple 2.1.4:** Soient les fonction à 3 et 4 variables :

$$f(a, b, c, d) = (a + \bar{b} + c + d) \cdot (\bar{a} + b + \bar{c} + \bar{d})$$

$$f(a, b, c) = (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) \cdot (\bar{a} + b + c) \cdot (\bar{a} + \bar{b} + c)$$

\* Chaque terme "somme" s'appelle maxterme.

### 2.1.1 Passage aux formes canoniques

Pour la transformation de la fonction et faire apparaître les minterms/ maxtermes complets on s'appuie sur les propriétés de l'algèbre de Boole, notamment les identités : ( $x \cdot \bar{x} = 0$ ,  $x + \bar{x} = 1$ )

**Exemple 2.1.1.1:**

Exemple de passage à la forme : somme canonique

Soit

$$f(a, b, c) = ab + \bar{b}c + a\bar{c}$$

Dans le minterme  $ab$ , il manque la variable  $c$  pour transformer  $ab$  en  $ab(c + \bar{c})$  car:  
 $c + \bar{c} = 1$

La même chose pour les 2 autres mintermes.

Alors :

$$\begin{aligned} f(a, b, c) &= ab(c + \bar{c}) + \bar{b}c(a + \bar{a}) + a\bar{c}(b + \bar{b}) \\ &= abc + ab\bar{c} + a\bar{b}c + \bar{a}\bar{b}c + a\bar{b}\bar{c} \end{aligned}$$

**Exemple 2.1.1.2:**

Exemple de passage à la forme : produit canonique :

Soit

$$f(a, b, c) = ab + \bar{b}c + a\bar{c}$$

On passe par :

$$\bar{\bar{x}} = x$$

Après développement :

$$\overline{f(a, b, c)} = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}bc$$

Reste à transformer les mintermes à 2 variables :

$$\bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c} = \bar{a}\bar{b}(c + \bar{c}) + \bar{a}\bar{c}(b + \bar{b})$$

Alors :

$$\overline{f(a, b, c)} = \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}$$

Finalement :

$$f(a, b, c) = (a + \bar{b} + \bar{c})(a + b + c)(a + \bar{b} + c)$$

## 2.2 Les formes normales

Les formes normales sont des expressions particulières de fonctions logiques, sous formes "produits de sommes" ou de "sommes de produits".

### 2.2.1 Forme normale disjonctive (FND)

Soit  $f$  une fonction Booléenne de  $n$  variables

**Définition 2.2.1.1:** Ecrire  $f$  sous forme normale disjonctive (ou première forme canonique) revient à l'écrire comme la somme de mintermes des  $n$  variables.

#### Théorème de Shannon 2.2.1.2

Toute fonction logique peut se décomposer sous la forme:

$$f(a, b, c, \dots) = a.f(1, b, c, \dots) + \bar{a}.f(0, b, c, \dots)$$

En utilisant successivement ce théorème on arrive à la forme normale disjonctive :

$$f(a, b, c, \dots) = a.b.f(1, 1, c, \dots) + \bar{a}.b.f(0, 1, c, \dots) + a.\bar{b}.f(1, 0, c, \dots) + \bar{a}.\bar{b}.f(0, 0, c, \dots)$$

La fonction s'écrit donc comme un *OU* de toutes les combinaisons possibles de  $n$  variables pondérées par des 0 et 1 (il y a donc  $2^n$  termes). Les termes pondérés par des 0 disparaissent et il ne reste donc que les termes pondérés par des 1, d'où l'expression : "développement de la fonction suivant les 1".

**Exemple 2.2.1.3:** soit la fonction  $f(a, b, c)$  définie par le diagramme de Karnaugh suivant, on détermine sa *FND*.

$c \backslash ab$	00	01	11	10
0	0	0	0	1
1	1	1	0	1

d'où :

$$f(a, b, c) = \bar{a}\bar{b}\bar{c}.0 + \bar{a}b\bar{c}.0 + a\bar{b}\bar{c}.0 + \bar{a}\bar{b}c.1 + \bar{a}bc.1 + abc.1 + abc.0 + \bar{a}bc.1$$

Alors :

$$f(a, b, c) = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}b\bar{c} + a\bar{b}\bar{c}$$

**Exemple 2.2.1.4:**

Soit  $f$  une forme normale définie comme :

$$f(a, b, c) = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}b\bar{c} + a\bar{b}\bar{c}$$

pour trouver le diagramme de karnaugh correspondant, on écrit  $f$  sous sa forme normale disjonctive :

$$\begin{aligned} f(a, b, c) = & \bar{a}\bar{b}\bar{c} \cdot f(0, 0, 0) + \bar{a}\bar{b}c \cdot f(0, 0, 1) + \bar{a}b\bar{c} \cdot f(0, 1, 0) + a\bar{b}\bar{c} \cdot f(0, 1, 1) + \\ & \bar{a}\bar{b}\bar{c} \cdot f(1, 0, 0) + \bar{a}\bar{b}c \cdot f(1, 0, 1) + \bar{a}b\bar{c} \cdot f(1, 1, 0) + a\bar{b}\bar{c} \cdot f(1, 1, 1) \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned} f(0, 0, 0) &= 1, & f(0, 0, 1) &= 1, & f(0, 1, 0) &= 0, & f(0, 1, 1) &= 1 \\ f(1, 0, 0) &= 0, & f(1, 0, 1) &= 1, & f(1, 1, 0) &= 0, & f(1, 1, 1) &= 0 \end{aligned}$$

D'où le diagramme de karnaugh est :

$c \backslash ab$	00	01	11	10
0	1	0	0	0
1	1	1	0	1

## 2.2.2 Forme normale conjonctive (FNC)

Soit  $f$  une fonction Booléenne de  $n$  variables

**Définition 2.2.2.1:** Ecrire  $f$  sous forme normale conjonctive (ou deuxième forme canonique) revient à l'écrire comme le produit de maxtermes des  $n$  variables.

**Théorème de Shannon 2.2.2.2 :**

Toute fonction logique peut se décomposer sous la forme:

$$f(a, b, c, \dots) = (a + f(0, b, c, \dots)).(\bar{a} + f(1, b, c, \dots))$$

Cette forme est la duale de la FND. Comme précédemment l'utilisation successive de ce théorème permet d'arriver à *la forme normale conjonctive*.

**Exemple 2.2.2.3:** Soit le diagramme de karnaugh suivant:

$c \backslash ab$	00	01	11	10
0	0	0	0	1
1	1	1	0	1

On a :

$$1^{er} \text{ terme : } a + b + c + f(0, 0, 0)$$

$$2^{ème} \text{ terme : } a + b + \bar{c} + f(0, 0, 1)$$

$$3^{ème} \text{ terme : } a + \bar{b} + c + f(0, 1, 0)$$

$$4^{ème} \text{ terme : } a + \bar{b} + \bar{c} + f(0, 1, 1)$$

$$5^{ème} \text{ terme : } \bar{a} + \bar{b} + c + f(1, 1, 0)$$

$$6^{ème} \text{ terme : } \bar{a} + b + c + f(1, 0, 0)$$

$$7^{ème} \text{ terme : } \bar{a} + b + \bar{c} + f(1, 0, 1)$$

$$8^{ème} \text{ terme : } \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + f(1, 1, 1)$$

c'est-à-dire :

$$f(a, b, c) = [(a + b + c) + 0] \cdot [(a + b + \bar{c}) + 1] \cdot [(a + \bar{b} + c) + 0] \cdot [(a + \bar{b} + \bar{c}) + 1] \cdot [(\bar{a} + \bar{b} + c) + 0] \cdot [(\bar{a} + b + c) + 1] \cdot [(\bar{a} + b + \bar{c}) + 1] \cdot [(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) + 0]$$

Les termes contenant 1 disparaissent :

$$f(a, b, c) = (a + b + c).(\bar{a} + \bar{b} + c).(\bar{a} + \bar{b} + c).(\bar{a} + b + \bar{c})$$

**Remarque 2.2.2.4:** En pratique, on cherche les cases à 0, puis on fait le *ET* des combinaisons de variables qui leur "correspondent" en prenant garde que la "correspondance" n'est pas la même que pour la *FND*. **Développement suivant les "0".**

**Exemple 2.2.2.5:** Soit la fonction  $f(a, b, c)$  passage de la *FNC* :

$$f(a, b, c) = (a + b + c).(a + \bar{b} + c).(\bar{a} + \bar{b} + c).(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$$

en écrit cette passage au diagramme de karnaugh.

On a :

$$f(a, b, c) = (a + b + c).(a + \bar{b} + c).(\bar{a} + \bar{b} + c).(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$$

s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} f(a, b, c) = & [(a + b + c) + f(0, 0, 0)] \cdot [(a + b + \bar{c}) + f(0, 0, 1)] \cdot [(a + \bar{b} + c) + f(0, 1, 0)] \cdot \\ & [(\bar{a} + b + c) + f(1, 0, 0)] \cdot [(a + \bar{b} + \bar{c}) + f(0, 1, 1)] \cdot [(\bar{a} + b + \bar{c}) + f(1, 0, 1)] \cdot \\ & [(\bar{a} + \bar{b} + c) + f(1, 1, 0)] \cdot [(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) + f(1, 1, 1)] \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned} f(0, 0, 0) &= 0, f(0, 0, 1) = 1, f(0, 1, 0) = 0, f(1, 0, 0) = 1 \\ f(0, 1, 1) &= 1, f(1, 0, 1) = 1, f(1, 1, 0) = 0, f(1, 1, 1) = 0 \end{aligned}$$

D'où le diagramme de karnaugh est :

$c \backslash ab$	00	01	11	10
0	0	0	0	1
1	1	1	0	1

## 2.3 Minimisation des fonctions logiques

Les formes canoniques d'une fonction logique sont une définition correcte de la fonction, mais elles peuvent être simplifiées pour écrire la même fonction avec le moins de termes et les plus simples possibles.

## 2.4 Simplification des fonction logique

Pour simplifier l'écriture d'une fonction logique on a trois méthodes :

1. Utiliser les propriétés de l'algèbre de Boole.
2. Utiliser le diagramme Karnaugh.
3. Utiliser la méthode Quine-McCluskey

### 2.4.1 Simplification via algèbre de Boole

\* **Principes généraux :**

Simplifier la fonction initiale à l'aide des propriétés de l'algèbre de Boole (Appliquer la propriété d'involution ( $\overline{\overline{x}} = x$ ) à la fonction simplifiée est parfois intéressant, mais calculs longs...)

**Exemple 2.4.1.1:** Soit la fonction logique suivante :

$$f(a, b, c) = abc + ab\bar{c} + a\bar{b}c + \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}\bar{b}\bar{c}$$

En factorisant, on obtient

$$\begin{aligned} f(a, b, c) &= a(b(c + \bar{c}) + \bar{b}(c + \bar{c})) + \bar{a}\bar{b}c \\ &= a + \bar{a}\bar{b}c \\ &= a + \bar{b}c \quad \text{car } (x + \bar{x}y = x + y) \end{aligned}$$

**Exemple 2.4.1.2:** Soit

$$S(a, b, c) = \overline{(a + b) \cdot c} + \bar{b}c$$

On distribue et on calcule le non :

$$S(a, b, c) = \bar{a}\bar{b} + \bar{c} + \bar{b}c$$

On utilisant l'involution:

$$\begin{aligned}
 \overline{S(a, b, c)} &= (a + b) \cdot c \cdot (b + \bar{c}) \\
 &= (ac + bc) \cdot (b + \bar{c}) \\
 &= abc + cb \\
 &= bc(a + 1) \\
 &= bc
 \end{aligned}$$

Finalement :

$$S(a, b, c) = \bar{b} + \bar{c}$$

## 2.4.2 Simplification par diagramme de Karnaugh

Le diagramme de karnaugh d'une table de vérité ou d'une fonction logique à  $n$  variables, est constitué d'un rectangle divisé en  $2^n$  cases. Chaque case de la table correspond à l'une des  $2^n$  combinaisons possibles des  $n$  variables.

L'ordre des variables en abscisse et en ordonnée est choisi de telle sorte qu'entre deux cases adjacentes, il n'y a qu'une seule variable qui change de valeur.

Nous allons avoir dans ce qui suit, avec des exemples, comment construire un diagramme de karnaugh à partir de :

- Une table de vérité.
- Une expression algébrique sous forme d'une somme canonique.
- Une expression algébrique sous forme d'une produit canonique.

**Exemple 2.4.2.1:** On construit les diagramme de karnaugh relatifs aux tables des vérité suivantes :

- Table de vérité à deux variables :

$a$	$b$	$f(a, b)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Alors le diagramme de karnaugh est :

	$\bar{a}$	$a$
$\bar{b}$	0	1
$b$	1	1

Donc l'équation simplifiée est :

$$f(a, b) = a + b$$

• Table de vérité à trois variables :

$c$	$b$	$a$	$f(a, b, c)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Le diagramme de karnaugh est :

	$\bar{a}\bar{b}$	$\bar{a}b$	$ab$	$a\bar{b}$
$\bar{c}$	1	0	0	0
$c$	1	1	0	0

Donc l'équation simplifiée est :

$$f(a, b, c) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}c$$

**Exemple 2.4.2.2:** Dans cette exemple on a cherche le diagramme de karnaugh correspondant à la fonction logique à quatre variables écrite sous la forme de somme caconique suivante :

$$f(a, b, c, d) = a \cdot \bar{b} \cdot c \cdot d + a \cdot \bar{b} \cdot c \cdot \bar{d} + a \cdot b \cdot c \cdot \bar{d}$$

Alors le diagramme de karaugh est :

	$\bar{a}\bar{b}$	$\bar{a}b$	$ab$	$a\bar{b}$
$\bar{c}\bar{d}$	0	0	0	0
$\bar{c}d$	0	0	0	0
$cd$	0	0	0	1
$c\bar{d}$	0	0	1	1

**Exemple 2.4.2.3:** Dans cette exemple on a détermine le diagramme de karnaugh correspondant à la fonction logique à trois variables écrite sous la forme de produit canonique suivante :

$$f(a, b, c) = (\bar{a} + b + \bar{c}) \cdot (\bar{a} + \bar{b} + c) \cdot (a + b + \bar{c})$$

Comme cette fonction  $f(a, b, c)$  n'est pas écrite sous la forme somme canonique, le complémentaire  $\overline{f(a, b, c)}$  est d'après le théoreme de De Morgan :

$$\overline{f(a, b, c)} = \bar{a}\bar{b}c + abc + \bar{a}\bar{b}\bar{c}$$

Alors le diagramme de karnaugh est :

	$\bar{a}\bar{b}$	$\bar{a}b$	$ab$	$a\bar{b}$
$\bar{c}$	1	1	1	1
$c$	0	1	0	0

Les cases "0" du diagramme de karnaugh correspondent aux mintermes de la fonction  $\overline{f(a, b, c)}$ , alors que les cases "1" correspondent à celles de la fonction  $f(a, b, c)$ .

### 2.4.3 Simplification par Quine-McCluskey

La méthode de Quine-McCluskey peut être employé pour des fonctions Booléennes dans tout nombre de variables. La méthode de Quine-McCluskey se compose de deux parties. La première partie trouve ces termes qui sont des candidats pour l'inclusion dans une expansion minimale comme somme Booléenne de produits Booléens. La deuxième partie détermine lesquelles de ces termes à employer réellement.

Nous montrerons à comment la méthode de Quine-McCluskey peut être employée pour trouver une expansion minimale équivalente

$$xyz + x\bar{y}z + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z}$$

Nous représenterons les minterms dans cette expansion par les chaînes binaires. Le premier bit sera 1 si  $x$  se produit et 0 si  $\bar{x}$  se produit. Le deuxième bit sera 1 si  $y$  se produit et 0 si  $\bar{y}$  se produit. Le troisième bit sera 1 si  $z$  se produit et 0 si  $\bar{z}$  se produit. Nous regroupons ensuite ces termes en fonction du nombre de 1 dans les chaînes binaires correspondants. Cette information est montrée dans le tableau 1.

TABLEAU 1		
minterm	Chaîne binaire	Nombre de 1
$xyz$	111	3
$x\bar{y}z$	101	2
$\bar{x}yz$	011	2
$\bar{x}\bar{y}z$	001	1
$\bar{x}y\bar{z}$	000	0

Minterms qui peuvent être combinés sont ceux qui diffèrent dans exactement un littéral. Ainsi, deux termes qui peuvent être combinés diffèrent exactement un dans le nombre de 1 dans les chaînes binaires qui les représentent. Lorsque deux minterms sont combinés dans un produit, ce produit contient deux littéraux. Un produit en deux littéraux est représentée par un tiret pour indiquer la variable qui ne se produit pas. Par exemple, le minterms  $x\bar{y}z$  et  $\bar{x}\bar{y}z$ , représenté par les chaînes binaires 101 et 001, peuvent être combinés dans le  $\bar{y}z$ ,

représenté par la corde  $-01$ . Toutes les paires des minterms qui peuvent être combinés et du produit formé de ces combinaisons sont présentés dans le tableau 2.

TABLEAU 2					
		étape 1		étape 2	
terme	Chaîne binaire	terme	chaîne	terme	chaîne
1 $xyz$	111	(1, 2) $xz$	1 – 1	(1, 2, 3, 4) $z$	– – 1
2 $x\bar{y}z$	101	(1, 3) $yz$	– 11		
3 $\bar{x}yz$	011	(2, 4) $\bar{y}z$	– 01		
4 $\bar{x}\bar{y}z$	001	(3, 4) $\bar{x}z$	0 – 1		
5 $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	000	(4, 5) $\bar{x}\bar{y}$	00–		

Dans le tableau 2, nous indiquons également les termes ont été utilisés pour former des produits avec peu de littéraux; ces termes ne seront pas nécessaires à une expansion minimale. L'étape suivante consiste à identifier un ensemble minimal de produits nécessaires pour représenter la fonction Booléenne. Nous commençons avec tous ces produits qui n'ont pas été utilisés pour construire des produits avec moins de littéreau. Ensuite, nous formons le tableau 3, qui a une rangée pour chaque produit de candidat constitué en combinant des originales termes, et une colonne pour chaque terme originale; et nous avons mis un X dans une position si le terme original dans l'expansion de somme-de-produits était employé pour former ce produit de candidat. Dans ce cas, nous disons que le produit de candidat couvre le minterm original. Nous devons inclure au moins un produit qui couvre chacun des minterms d'origina. Par conséquent, chaque fois qu'il ya seulement un X dans une colonne de la table, le produit correspondant à la ligne cet X est doit être utilisé. Dans le tableau 3, nous voyons que les deux  $z$  et  $\bar{x}\bar{y}$  sont nécessaires. Par conséquent, la réponse finale est  $z + \bar{x}\bar{y}$ .

<b>TABLEAU 3</b>					
	$xyz$	$x\bar{y}z$	$\bar{x}yz$	$\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$
$z$	X	X	X	X	
$\bar{x}y$				X	X

**Exemple 2.4.3.1:** Utilisez la méthode Quine-McCluskey pour simplifier l'expansion de somme de produits

$$wxy\bar{z} + w\bar{x}yz + w\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}xyz + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}\bar{x}yz + \bar{w}\bar{x}\bar{y}z$$

Nous d'abord représentons les minterms par les chaînes binaires et ensuite groupons ces termes ensemble, selon le nombre de 1 dans les chaînes binaires. Ceci est montré dans le tableau 1.

<b>TABLEAU 1</b>		
terme	Chaîne binaire	Nombre de 1
$wxy\bar{z}$	1110	3
$w\bar{x}yz$	1011	3
$\bar{w}xyz$	0111	3
$w\bar{x}y\bar{z}$	1010	2
$\bar{w}x\bar{y}z$	0101	2
$\bar{w}\bar{x}yz$	0011	2
$\bar{w}x\bar{y}\bar{z}$	0001	1

Tous les produits Booléens qui peuvent être constitués en prenant des sommes Booléennes de ces produits sont montrés dans le tableau 2.

<b>TABEAU 2</b>					
		étape 1		étape 2	
terme	Chaîne binaire	terme	chaîne	terme	chaîne
$wxy\bar{z}$	1110	(1, 4) $wy\bar{z}$	1 – 10	(3, 5, 6, 7) $\bar{w}z$	0 – –1
$w\bar{x}yz$	1011	(2, 4) $w\bar{x}y$	101 –		
$\bar{w}xyz$	0111	(2, 6) $\bar{x}yz$	–011		
$w\bar{x}y\bar{z}$	1010	(3, 5) $\bar{w}xz$	01 – 1		
$\bar{w}\bar{x}yz$	0101	(3, 6) $\bar{w}yz$	0 – 11		
$\bar{w}xy\bar{z}$	0011	(5, 7) $\bar{w}y\bar{z}$	0 – 01		
$\bar{w}\bar{x}y\bar{z}$	0001	(6, 7) $\bar{w}\bar{x}z$	00 – 1		

Dans le tableau 3 nous montrons les minterms couverts par chacun de ces produits. Pour couvrir ces minterms nous devons inclure  $\bar{w}z$  et  $wy\bar{z}$ , parce que ces produits sont les seuls produits qui couvrent  $\bar{w}xyz$  et  $wxy\bar{z}$ , respectivement. Une fois que ces deux produits sont inclus, nous voyons que seulement un des deux produits gauche est nécessaire. En conséquence, nous pouvons prendre  $\bar{w}z + wy\bar{z} + w\bar{x}y$  ou  $\bar{w}z + wy\bar{z} + \bar{x}yz$  comme réponse finale.

<b>TABEAU 3</b>							
	$wxy\bar{z}$	$w\bar{x}yz$	$\bar{w}xyz$	$w\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{w}\bar{x}yz$	$\bar{w}xy\bar{z}$	$\bar{w}\bar{x}y\bar{z}$
$\bar{w}z$			X		X	X	X
$wy\bar{z}$	X			X			
$w\bar{x}y$		X		X			
$\bar{x}yz$		X				X	

# Chapitre 3

## Applications des circuits de commutation

### 3.1 Circuits de commutation

L'aspect principal de l'algèbre des circuits de commutation est de décrire des circuits de commutation électrique ou électronique d'une manière mathématique ou de concevoir un diagramme d'un circuit avec les propriétés données. Ici nous combinons les commutateurs électriques ou électroniques dans des séries ou des circuits parallèles. De tels commutateurs ou contacts sont des éléments de commutation avec deux états (fermé ouvert), par exemple, les contacts, les relais, les semi-conducteurs, les cellules photo-électriques, ou les transistors mécaniques. Le type des deux états dépend de ces éléments de commutation; nous pouvons considérer des éléments de conducteur-non-conducteur, chargé-unchargées, franchement magnétisé-négatif magnétisé, etc. Nous emploierons la notation présentée dans les treillis.

Des commutateurs ou les contacts électriques peuvent être symbolisés dans un croquis de commutation ou de schéma ou de contact de circuit, suivant les indications du figure 1.

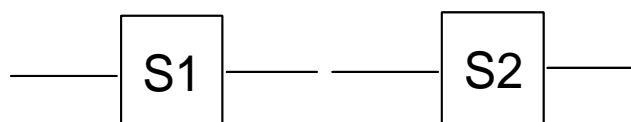


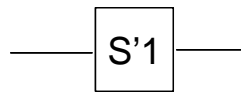
Figure 1

Un tel commutateur peut être bistable, l'un ou l'autre « ouvert » ou « fermé ». Parfois ouvert et fermé commutés sont symbolisés par

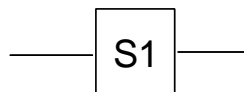


La prétention de base est celle pour que le courant traverse un commutateur ou pour qu'un contact lui soit établi est nécessaire que le commutateur soit fermé.

Le symbole



(complémentation) indique qu'un commutateur qui est ouvert ssi



(un commutateur apparaissant ailleurs dans le circuit) est fermé. En d'autres termes, le S1 et les S'1 constituent deux commutateurs qui sont liés, dans le sens que leurs états sont rapportés de cette façon. De même, pareillement, si le S1 apparaît dans deux endroits séparés dans un circuit, il signifie qu'il y a deux commutateurs séparés liés, afin de s'assurer qu'ils sont toujours les deux ouverts ou tous les deux clôturés. Sur le figure 2 nous avons le « courant » si et seulement si S1 et S2 sont fermés. Ces propriétés des commutateurs électriques motivent les définitions suivantes, qui donnent un raccordement entre les commutateurs électriques et les éléments d'une algèbre Booléenne. Laissez le  $X_n := \{x_1, \dots, x_n\}$ .

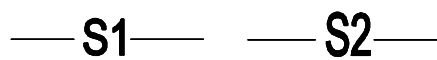
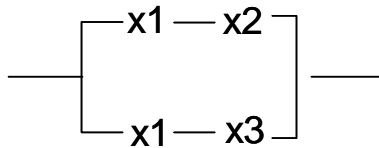


Figure 2 séries de raccordement

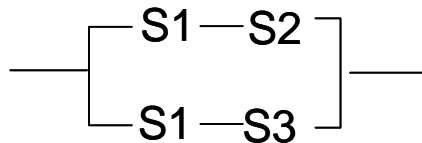
**Définition 3.1.1**

- (i) Chaque  $x_1, x_2, \dots, x_n \in X_n$  s'appelle **un commutateur**.
  - (ii) Chaque  $p \in p_n$  s'appelle **un circuit de commutation**.
  - (iii)  $x'_i$  s'appelle **le commutateur de complémentation** de  $x_i$ .
  - (iv)  $x_i x_j$  s'appelle **le raccordement de série** de  $x_i$  et de  $x_j$ .
  - (v)  $x_i + x_j$  s'appelle **le raccordement parallèle** de  $x_i$  et de  $x_j$ .
  - (vi) pour le  $p \in p_n$  correspondant de fonction polynôme  $\bar{p} \in p_n(B)$  s'appelle **la fonction de commutation** du P.
  - (vii)  $\bar{p}(a_1, a_2, \dots, a_n)$  s'appelle la valeur du circuit  $p$  de commutation à  $a_1, a_2, \dots, a_n \in B$ .
- Le  $a_i$  s'appellent **les variables d'entrée**.

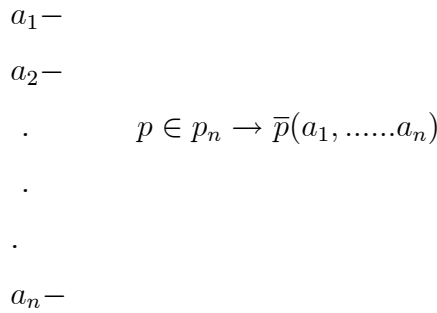
Les commutateurs et la commutation fait le tour dans le sens définition 3.1.1, les modèles mathématiques des circuits, peuvent être graphiquement représentés en employant des diagrammes de contact. Au lieu du  $S_i$  nous employons  $x_i$  selon 3.1.1. Par exemple, le polynôme(c.-à-d., le circuit)  $x_1 x_2 + x_1 x_3$  peut être représenté comme



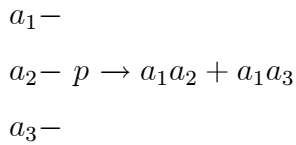
La réalisation électrique serait



Une autre méthode de représentation est aussi un schéma de commutation ou de circuit. Ceci montre le circuit en termes de « boîte », qui convertit des variables d'entrée en valeurs: variables d'entrée  $a_i \in B$



Pour l'exemple donné ci-dessus nous avons le diagramme



$\bar{p}(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$  (ou  $= 0$ ) signifie que le circuit  $p$  conduit le courant (ou ne conduit pas le courant).

**Exemple 3.1.2:**

(i) Le diagramme pour le circuit  $p = x_1(x_2(x_3 + x_4) + x_3(x_5 + x_6))$  de commutation est donné sur le figure 3.

(ii) le figure 4 détermine le circuit de commutation

$$p = x_1(x'_2(x_6 + x_3(x_4 + x'_5)) + x_7(x_3 + x_6)x'_8)$$

Aujourd'hui, les commutateurs électriques sont de moins d'importance que des éléments de semi-conducteur. Ces éléments sont des types de blocs électroniques qui sont prédominants dans la conception logique des composants numériques de bâtiment des ordinateurs électroniques. Dans ce contexte les commutateurs sont représentés comme

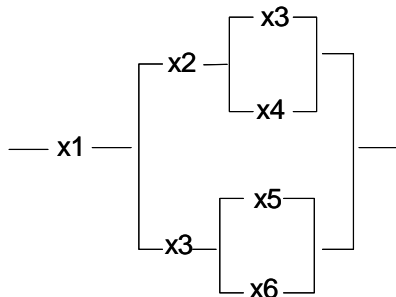


Figure 3

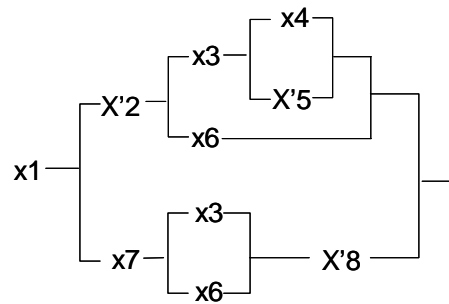
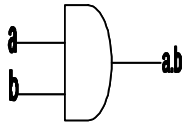
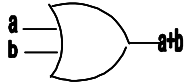
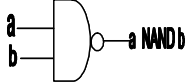
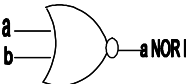


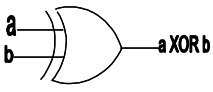
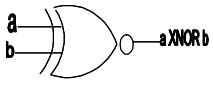
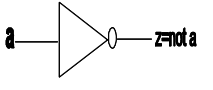
Figure 4

soi-disant portes, ou les combinaisons des portes. Nous appelons ceci la représentation symbolique. Ainsi une porte (ou une combinaison des portes) est un polynôme  $p$  qui a, comme valeurs dans  $\mathbf{B}$ , les éléments obtenus en remplaçant  $x_i$  par  $a_i \in \mathbf{B}$  pour chaque  $i$ . Nous disons également que la porte est une réalisation d'une fonction de commutation. Si  $\bar{p}(a_1, \dots, a_n) = 1$  (ou 0). Nous avons le courant (ou aucun courant) dans le circuit  $P$ . de commutation. Nous définissons des portes de special de la Somme.

## 3.2 Portes logiques

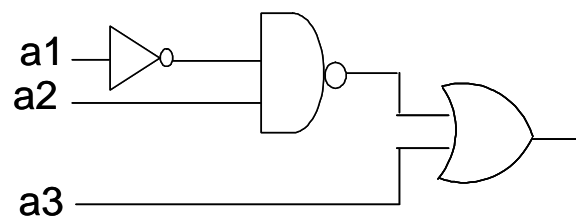
Avec l'évolution de la technologie, on inventa des composants plus versatiles que les circuits à relais, qui donnèrent naissance aux circuits logiques. On définit alors un ensemble de composants appelés portes logiques. Chaque porte correspond à une fonction logique précise, à laquelle on associe un symbole. Les portes élémentaires sont :

Opérateur logique	Nom français	Nom anglais	Symbole	Table de vérité															
$A \cdot B$	<i>ET</i>	<i>AND</i>		<table border="1"> <thead> <tr> <th><i>A</i></th> <th><i>B</i></th> <th><i>F</i></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>F</i>	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1
<i>A</i>	<i>B</i>	<i>F</i>																	
0	0	0																	
0	1	0																	
1	0	0																	
1	1	1																	
$A + B$	<i>OU</i>	<i>OR</i>		<table border="1"> <thead> <tr> <th><i>A</i></th> <th><i>B</i></th> <th><i>F</i></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>F</i>	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
<i>A</i>	<i>B</i>	<i>F</i>																	
0	0	0																	
0	1	1																	
1	0	1																	
1	1	1																	
$\overline{A \cdot B}$	<i>NON ET</i>	<i>NAND</i>		<table border="1"> <thead> <tr> <th><i>A</i></th> <th><i>B</i></th> <th><i>F</i></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>F</i>	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0
<i>A</i>	<i>B</i>	<i>F</i>																	
0	0	1																	
0	1	0																	
1	0	0																	
1	1	0																	
$\overline{A + B}$	<i>NON OU</i>	<i>NOR</i>		<table border="1"> <thead> <tr> <th><i>A</i></th> <th><i>B</i></th> <th><i>F</i></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>F</i>	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0
<i>A</i>	<i>B</i>	<i>F</i>																	
0	0	1																	
0	1	0																	
1	0	0																	
1	1	0																	

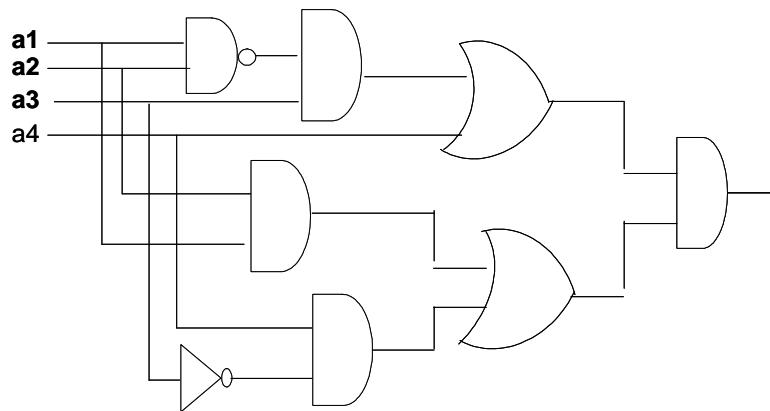
$A \oplus B$	<i>OU exclusif</i>	<i>XOR</i>		<table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>F</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	A	B	F	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0
A	B	F																	
0	0	1																	
0	1	0																	
1	0	0																	
1	1	0																	
$\overline{A \oplus B} = A \otimes B$	<i>NON OU exclusif</i>	<i>XNOR</i>		<table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>F</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	A	B	F	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0
A	B	F																	
0	0	1																	
0	1	0																	
1	0	0																	
1	1	0																	
$\overline{A}$	<i>NON</i>	<i>NOT</i>		<table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>F</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	A	F	0	1	1	0									
A	F																		
0	1																		
1	0																		

**Exemple 3.2.1**

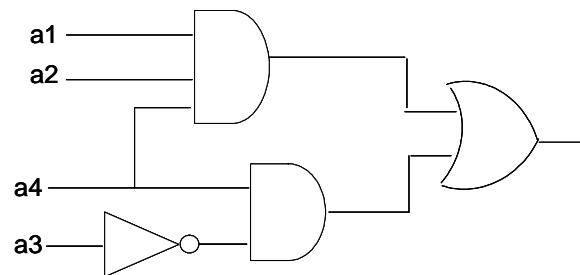
(i) La représentation symbolique du  $p = (x_1'x_2)' + x_3$  (utilisant 3.2) est



(ii) Le polynôme  $p$  qui correspond au diagramme



est  $p = ((x_1x_2)'x_3 + x_4)(x_1x_2 + x_3'x_4)$ . Maintenant, nous simplifions  $p$  à  $q = x_1x_2x_4 + x_3'x_4$ :



Nous voyons que le  $p \neq q$  de , puisque  $q$  est beaucoup plus simple et meilleur marché que le  $p$ . Mais depuis le  $\bar{p} = \bar{q}$ , les circuits fonctionnent de la même manière. Ceci montre clairement la différence entre l'égalité et l'équivalence des polynômes.

### 3.3 Applications des circuits de commutation

Nous décrivons quelques applications par des exemples.

**Exemple 3.3.1:** Dans une grande salle il y a les commutateurs électriques à côté des trois portes pour actionner l'éclairage central. Les trois commutateurs fonctionnent alternativement, c.-à-d., chaque commutateur peut brancher ou éteindre les lumières. Nous souhaitons déterminer le circuit  $p$  de commutation, sa représentation symbolique, et diagramme de

contact. Chaque commutateur a deux positions : l'un ou l'autre "Marche/Arrêt". Nous dénotons les commutateurs par  $x_1, x_2, x_3$  et les deux états possibles des commutateurs  $x_i$  par  $a_i \in \{0, 1\}$ .

La situation légère dans la chambre est donnée par la valeur  $\bar{p}(a_1, a_2, a_3) = 0$  ( $= 1$ ) si les lumières sont éteintes (sont sur, respectivement). Nous choisissons arbitrairement  $\bar{p}(1, 1, 1) = 1$ .

(i) Si nous actionnons un ou chacun des trois commutateurs, alors les lumières s'éteignent, c.-à-d., nous avons  $\bar{p}(a_1, a_2, a_3) = 0$  pour tous  $(a_1, a_2, a_3)$  ce qui diffèrent dans un ou dans trois endroits forment (1.1.1).

(ii) Si nous exploitons deux commutateurs, les lumières restent allumées, c'est à dire, nous avons  $\bar{P}(a_1, a_2, a_3) = 1$  pour tout ceux  $(a_1, a_2, a_3)$  qui diffèrent deux places de  $(1, 1, 1)$ .

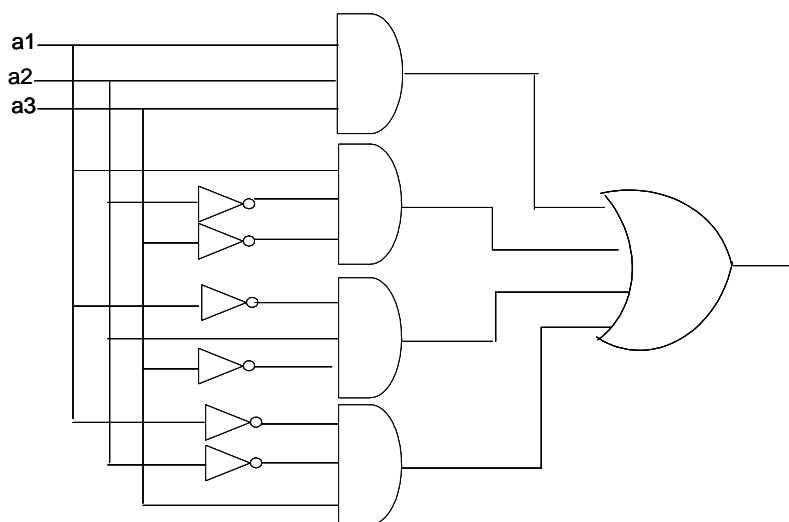
On obtient le tableau de valeurs de la fonction suivante:

$a_1$	$a_2$	$a_3$	minterms	$\bar{p}(a_1, a_2, a_3)$
1	1	1	$x_1x_2x_3$	1
1	1	0	$x_1x_2x'_3$	0
1	0	1	$x_1x'_2x_3$	0
1	0	0	$x_1x'_2x'_3$	1
0	1	1	$x'_1x_2x_3$	0
0	1	0	$x'_1x_2x'_3$	1
0	0	1	$x'_1x'_2x_3$	1
0	0	0	$x'_1x'_2x'_3$	0

De ce tableau nous pouvons déduire la forme normale disjonctive pour le circuit  $p$  de commutation :

$$p = x_1x_2x_3 + x_1x'_2x'_3 + x'_1x_2x'_3 + x'_1x'_2x_3$$

$P$  est déjà en forme minimale. Ainsi nous obtenons la représentation symbolique :



Ce circuit de commutation peut également être représenté en termes de commutateurs d'antivalence et d'équivalence :

$$\begin{aligned}
 p &= x_1x_2x_3 + x_1x_2'x_3' + x_1'x_2x_3' + x_1'x_2'x_3 \\
 &\sim (x_1 \underbrace{(x_2x_3 + x_2'x_3')}_{\substack{\text{équivalence of} \\ x_2 \text{ et } x_3}}) + (x_1' \underbrace{(x_2x_3' + x_2'x_3)}_{\substack{\text{antivalence of} \\ x_2 \text{ et } x_3}})
 \end{aligned}$$

Cette solution est représentée symboliquement sur la figure 5. Un schéma de circuit est sur la figure 6.

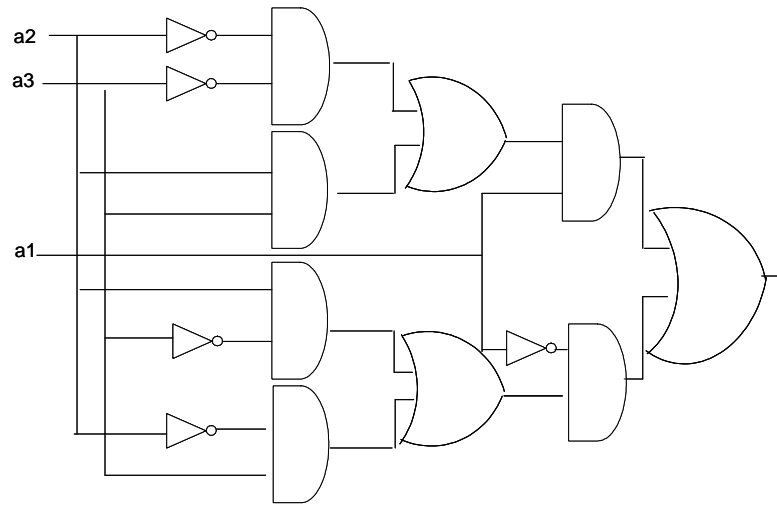


Figure 5

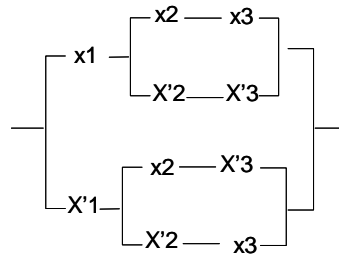


Figure 6

**Exemple 3.3.2:** Un moteur est alimenté par trois générateurs. Le fonctionnement de chaque générateur est surveillé par un élément de commutation correspondant qui ferme un circuit dès qu'un générateur échouera. Nous exigeons les conditions suivantes du système de contrôle électrique:

- (i) Une lampe d'avertissement s'allume si un ou deux générateurs échouent.
- (ii) Une alarme acoustique est lancée si deux ou chacun des trois générateurs échoue.

Nous déterminons une représentation symbolique comme modèle mathématique de ce problème. Soit  $a_i = 0$  dénoter ce générateur  $i$  fonctionne,  $i \in \{1, 2, 3\}$ ;  $a_i = 1$  dénote ce générateur  $i$  ne fonctionne pas. La table des valeurs de fonction a deux parts de  $\overline{p_1}(a_1, a_2, a_3)$  et  $\overline{p_2}(a_1, a_2, a_3)$ , défini par :

$\overline{p_1}(a_1, a_2, a_3) = 1$  : alarme sonore retentit;;

$\overline{p_1}(a_1, a_2, a_3) = 0$  : alarme sonore ne retentit pas;

$\overline{p_2}(a_1, a_2, a_3) = 1$  : la lampe d'avertissement s'allume ;

$\overline{p_2}(a_1, a_2, a_3) = 0$  : la lampe d'avertissement n'est pas allumée.

Alors nous obtenons la table suivante pour les valeurs de fonction :

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$\overline{p_1}(a_1, a_2, a_3)$	$\overline{p_2}(a_1, a_2, a_3)$
1	1	1	1	0
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	1
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1
0	0	0	0	0

Pour  $p_1$  nous choisissons la forme normale disjonctive, à savoir

$$p_1 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x'_3 + x_1x'_2x_3 + x'_1x_2x_3$$

Pour  $p_2$  nous choisissons la forme normale conjonctive :

$$p_2 = (x_1 + x_2 + x_3)(x'_1 + x'_2 + x'_3)$$

**Remarque 3.3.3:** Un circuit  $P$  de commutation peut être simplifié par nos méthodes, comme suit:

(i) Il peut être simplifié selon les lois d'une algèbre Booléenne (par exemple, en appliquant la distributif, idempotent, l'absorption, et les lois de De Morgan).

(ii) Nous pouvons également déterminer la forme minimale de  $P$  en utilisant la méthode de Quine. Rappelons que cet algorithme peut seulement être commencé si  $P$  est sous la forme normale disjonctive.

(iii) Utilisez des diagrammes de Karnaugh.