

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et

de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Faculté des Sciences

Département de Physique

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Domaine : **Sciences de la matière**

Filière : **Physique**

Option : **Physique des Particules à haute Energie**

Par

Zerouak Ahlem

THEME

**Calcul des coefficients de Clebsch- Gordan pour un SU(2) et SU(3) par
une méthode non récursive**

Soutenu le : 17/06/2015

Devant le jury composé de :

S.MENAOUER

Prof .Univ. de Setif

Président

M.BEKKAR

Prof .Univ. de Setif

Examineur

S.NEHAOUA

MAA Univ. de M'sila

Rapporteur

Promotion Juin 2015

Remerciements

Je tiens à remercier en premier

Dieu le tout-puissant pour nous avoir donné la force et la possibilité d'accomplir ce travail.

Je tiens à remercier chaleureusement mon encadreur M^{me}**S.Nehaoua** pour ses encouragements, ses efforts, ses conseils, et ses orientations précieuses.

Je remercie également Pr : **S.Menaouer** d'avoir accepté la présidence de jury, et remercie Pr : **M.Bekkar** d'avoir accepté de juger ce modeste travail.

Je remercie infiniment tous mes enseignants. Et je tiens à avouer toute ma reconnaissance pour ceux qui ont contribué la réalisation de ce modeste travail

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

À mes parents qui m'ont aidé et soutenu tout au long de ma formation, c'est à vous je dis un grande merci pour tout ce que vous avez enduré pour réaliser ce que je suis maintenant.

À ma famille: les deux Frère : Rochdi et sa famille, Nabil,Fouzia et sa famille, Nadia, Farida, Nadjla, Assma et sa famille, khaoula, Hind.

À mes amies: maitresses Aicha, Ahlem ben ouarith et sa famille, khadidja ben amara et sa famille, Assmaabed, khadidjafaid, Asma zelagui,Chaima,Tasnim, Lina,Loujin,Hiba,Saffa,Rokaia, Abed ouadod.

Introduction	1
Chapitre (I) : Couplage des moments angulaires	2
1. Moment angulaire en mécanique classique	3
2. Commutativité des composantes du moment angulaire	4
3. Moment angulaire en mécanique quantique	4
4. Vecteurs et valeurs propres de l'ECOC $\{H; j^2; j_z\}$	5
4.1. Vecteurs et valeurs propres de J_z	5
4.2. Vecteurs et valeur propres de j^2	7
5. Les opérateurs j_+ et j_-	9
6. Application des opérateurs j_+ et j_-	9
7. Couplage de deux moments angulaires \vec{J}_1 et \vec{J}_2	12
8. Moment angulaire total J et son projection	13
9. Relation entre M, m_1 et m_2	13
10. Coefficients de Clebsch-Gordan	14
11. Relation entre les coefficients de Clebsch-Gordan et les coefficients de Wigner	14
Chapitre (II): Méthode récursive et méthode non récursive	15
1. Règle de sélection et d'orthogonalité	16
1.1. Règles de sélection	16
1.2. Relation d'orthogonalité	16
2. Propriétés générales des coefficients de Clebsch-Gordan	17
2.1. Réalité des coefficients de Clebsch-Gordan	17
2.2. Coefficient $\langle j_1, m_1, j_2, m_2 J, J \rangle$ phase du ket	17
2.3. Signe de quelques coefficients de Clebsch-Gordan	17
3. Méthode récursive (relation de récurrence)	18
Exemple 1: $j_1 = \frac{1}{2}$ et $j_2 = \frac{3}{2}$	19
Exemple 2: $j_1 = j_2 = \frac{1}{2}$	20
4. Huit formules générales de la méthode récursive	21
5. Tabulation des coefficients de Clebsch-Gordan	23
6. Méthode non récursive	25
6.1. Calcul des coefficients de Clebsch-Gordan dans SU(2)	25
a. 1 ^{ère} étape « Détermination du spectre de J »	25
Dédution d'autre vecteur $ J = M, M - 1\rangle, J = M, M - 2\rangle$	25
Exemple 3 : $j_1 = \frac{5}{2}$ et $j_2 = 1$	25
b. 2 ^{ème} étape « généralisation »	28
Chapitre (III) : Calcul des coefficients de Clebsch-Gordan Pour un SU(2) et SU(3)	29
1. Calcul des coefficients de Clebsch_Gordan par la méthode récursive	31

1.1.	Couplage de deux moments angulaires($j_1 = j_2 = 1$)	31
1.1.1.	Calcul des coefficients de Clebsch-Gordan : $J = 2$	31
1.1.2.	Calcul des coefficients de Clebsch-Gordan : $J = 1$	32
1.1.3.	Calcul les coefficients de Clebsch-Gordan : $J = 0$	32
1.2.	Couplage de trois moments angulaires : $j_1 = j_2 = j_3 = 1$	33
1.2.1.	Calcul les coefficients de Clebsch-Gordan : $J = 3$	33
1.2.2.	Calcul les coefficients de Clebsch-Gordan : $J = 2$	34
1.2.3.	Calcul les coefficients de Clebsch-Gordan : $J = 1$	34
1.2.4.	Calcul les coefficients de Clebsch-Gordan : $J = 0$	34
2.	Méthode non récursive	35
2.1.	Couplage de deux moments angulaires	35
2.1.	Calcul des coefficients de Clebsch-Gordan : $J = 0$	35
2.2.	Calcul des coefficients de Clebsch-Gordan : $J = 2$	36
2.3.	Calcul des coefficients de Clebsch-Gordan : $J = 1$	36
2.2.	Couplage de trois moments angulaires: $j_1 = j_2 = j_3 = 1$	37
2.2.1.	Calcul des coefficients de Clebsch-Gordan : $J = 0$	37
2.2.2.	Couplage de trois moments angulaires: $j_1 = j_2 = \frac{1}{2}; j_3 = 1$	38
2.2.1	Calcul des coefficients de Clebsch-Gordan	38
	Conclusion	40
	REFERENCES	41

Introduction

Le moment angulaire constitue une grandeur importante en mécanique quantique pour l'étude des particule subatomique, étant donné que plusieurs particules sont mises dans des champ central, ou ont un moment intrinsèque (spin), mais la constitution des systèmes de deux ou plus de particules (noyaux, molécule) conduit au couplage des moments angulaires pour trouver le moment angulaire total, ce couplage des moments angulaire permet de déterminer l'état du système complet. Les coefficients de Clebsch-Gordan sont nécessaires pour déterminer l'état du système complet, pour cela on utilise la méthode récursive qui est largement utilisée pour calculer ces coefficients, mais pour des systèmes simples composés de préférence de deux particules

$SU(2)$, ce qui mène à l'addition de deux moments angulaires, cette méthode est utilisée pour la tabulation de ces coefficients.

L'objectif de notre travail est de calculer ces coefficient mais avec une méthode non récursive qui ne nécessite pas la connaissance des autres coefficients, cette méthode est proposée *par W H Klink et al[1]* , elle permet de calculer les coefficients pour les valeurs maximale du moment angulaire total et sa projection sur l'axe Oz, la normalisation de ces états permet de déterminer les coefficients de Clebsch-Gordan, ensuite l'application successive des opérateurs d'annulation ou de d'addition permet de déterminer les autres états correspondant aux même valeur du moment angulaire total.

Ce travail comporte trois chapitres : dans le premier, on définit le moment angulaire en mécanique quantique en s'appuyant sur sa définition et ses relation de commutations en mécanique classique, et on présente les vecteurs propres commune des opérateurs de l'ECOC $\{H; j^2; j_z\}$ ainsi les valeurs propres correspondantes, ensuite on définit l'addition entre deux moments angulaires et les coefficients de Clebsch Gordan, le deuxième chapitre est consacré à l'exposition des propriétés des coefficients de Clebsch Gordan, ensuite on présente les deux méthodes : récursives et non récursive, en présentant des exemples explicatives. Dans le troisième chapitre on va pousser plus loin les calculs en faisant le couplage entre : deux et trois, moments angulaires, pour les trois cas on utilise les deux méthodes pour calculer les coefficients de Clebsch Gordan pour faire une étude comparative entre les deux méthodes.

Chapitre (I) :
Couplage des moments angulaires

1. Moment angulaire en mécanique classique:

Dans la mécanique classique on définit le moment cinétique noté \vec{l} pour une particule qui a un mouvement circulaire repars[2]:

$$\vec{l} = (\vec{r} \wedge \vec{p}) \quad (1)$$

Ou : \vec{p} est le vecteur de quantité de mouvement

\vec{r} Est le vecteur de position

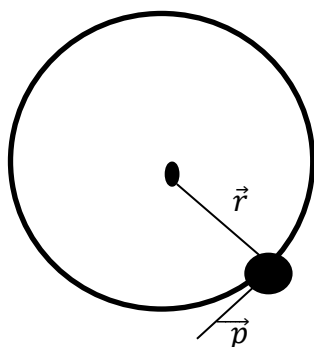


Figure 1 : particule dans un potentiel centrale

Pour un système isolé, le moment cinétique \vec{l} est une constante de mouvement (figure 1) :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{l}}{dt} &= \frac{d}{dt} (\vec{r} \wedge \vec{p}) \\ &= \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{0} \end{aligned} \quad (2)$$

Donc :

$$\vec{l} = \overrightarrow{cste}$$

Le moment cinétique total d'un système physique isolé (ex : une particule dans un potentiel central) est une constante de mouvement,

Soient : L_x ; L_y et L_z les composantes du moment cinétique \vec{l} dans le repère cartésien (Oxyz) mené de la base orthonormée $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

$$\vec{L} = L_x \vec{i} + L_y \vec{j} + L_z \vec{k} \quad (3)$$

$$\vec{l} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = (yp_z - p_yz)\vec{i} - (xp_z - p_xz)\vec{j} + (xp_y - p_xy)\vec{k}$$

Donc :

$$\begin{aligned} l_x &= yp_z - p_yz \\ l_y &= xp_z - zp_x \\ l_z &= xp_y - yp_x \end{aligned} \quad (4)$$

2. Commutativité des composantes du moment angulaire : [2]

En mécanique quantique les composantes du moment angulaire l sont associées aux opérateurs l_x, l_y et l_z et vérifiant les relations de commutation suivantes :

$$[l_x, l_y] = i\hbar l_z, \quad [l_y, l_z] = i\hbar l_x, \quad [l_z, l_x] = i\hbar l_y \quad (5)$$

Soit l^2 : le carré du moment cinétique l donné par:

$$l^2 = l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 \quad (6)$$

On peut vérifier la nullité des relations de commutation suivante:

$$[l^2, l_x] = [l^2, l_y] = [l^2, l_z] = 0 \quad (7)$$

3. Moment angulaire en mécanique quantique: [6]

En mécanique quantique, on définit l'opérateur j comme étant *un moment angulaire*, si les composantes j_x, j_y et j_z vérifiant les règles de commutation: [10]

$$\begin{aligned} [j_y, j_z] &= i\hbar j_x \\ [j_z, j_x] &= i\hbar j_y \\ [j_x, j_y] &= i\hbar j_z \end{aligned} \quad (8)$$

Si j^2 l'opérateur carré du moment angulaire J , les composantes j_x, j_y et j_z vérifient aussi les relations de commutation suivante :

$$[j^2, j_x] = [j^2, j_y] = [j^2, j_z] = 0$$

Donc, on peut écrire:

$$[j^2, j_i] = 0 \quad ; i = x, y, z \quad (9)$$

4. Vecteurs et valeurs propres de l'ECOC $\{H; j^2; j_z\}$: [4]

Nous repérons les vecteurs propres communs à j^2 et j_z par les indices j et m , qui caractérisent les valeurs propres associées toute fois, j^2 et j_z ne constituent pas en générale un E.C.O.C, et il est nécessaire d'introduire un troisième indice, qui permet de distinguer les différents vecteurs propres

Correspondant aux mêmes valeurs propres $j(j+1)\hbar^2$ et $(m\hbar)$ de j^2 et j_z nous noterons cet indice n qui n'implique pas forcément qu'il s'agisse toujours d'un indice discret)

Nous cherchons donc à résoudre les équations aux valeurs propres simultanées:[10]

$$j^2|n, j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|n, j, m\rangle \quad (10)$$

$$j_z|n, j, m\rangle = \hbar m|n, j, m\rangle \quad (11)$$

$$j_-|n, j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}|n, j, m-1\rangle \quad (12)$$

$$j_+|n, j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}|n, j, m+1\rangle \quad (13)$$

4.1 .Vecteurs et valeurs propres de J_z : [3]

Dans cette section, on déterminera les valeurs λ et les vecteurs propres $|\psi\rangle$ de J_z définis par :

$$j_z|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \quad (14)$$

En coordonnées cartésienne, le moment angulaire j_z est donné par l'équation (4) :

$$j_z = xp_y - yp_x$$

En coordonnées sphériques, il s'écrit :

$$j_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (15)$$

Donc l'équation (14) devient :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} |\psi\rangle = \lambda |\psi\rangle$$

$$-i\hbar \frac{\partial \psi}{\psi} = \lambda \partial \varphi \quad (16)$$

L'intégration de l'équation (16) donne la solution :

$$\psi = c e^{\frac{i\lambda\varphi}{\hbar}} \quad (17)$$

La constante c est déterminée par la normalisation de la fonction d'état ψ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 r^2 \sin\theta \, d\theta dr d\varphi = 1 \quad (18)$$

$$\int_0^{2\pi} |c|^2 d\varphi = 1 \Rightarrow |c|^2 2\pi = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Donc ψ vecteur propre de j_z est donné par :

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{i\lambda\varphi}{\hbar}} \quad (19)$$

Pour déterminer les valeurs propres λ , on a :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{i\lambda\varphi}{\hbar}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{i\lambda(\varphi+2\pi)}{\hbar}} \quad (20)$$

$$1 = e^{\frac{i\lambda 2\pi}{\hbar}} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{2\pi\lambda}{\hbar}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi\lambda}{\hbar}\right) = 1$$

On déduit que :

$$\frac{2\pi\lambda}{\hbar} = 2\pi m \Leftrightarrow \frac{\lambda}{\hbar} = m \quad \text{avec} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

Donc :

$$\lambda = \hbar m \quad (21)$$

En résumé les valeurs et les vecteurs propres de j_z sont écrits dans la notation de Dirac :

$$j_z \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{im\varphi}{\hbar}} \right) = \hbar m \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{im\varphi}{\hbar}} \right)$$

$$j_z |m\rangle = \hbar m |m\rangle \quad (22)$$

4.2. Vecteurs et valeur propres de j^2 : [2]

Au deuxième lieu, on déterminera les valeurs λ' et les vecteurs propres $|\varphi\rangle$ de j^2 définis par :

$$j^2 |\psi\rangle = \lambda' |\psi\rangle \quad (23)$$

Le moment angulaire j^2 est donné par (23):

Dans les coordonnées sphériques j^2 s'écrit:

$$j^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \quad (24)$$

On pose :

$$\psi(\theta, \phi) = f(\varphi)g(\theta) \quad (25)$$

On remplace (25) et (24) dans (23) on trouve :

$$-\hbar^2 \left[\frac{f(\varphi)}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) g(\theta) + \frac{g(\theta)}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} f(\varphi) \right] = \lambda' f(\varphi)g(\theta) \quad (26)$$

L'équation différentielle (25) a deux variables, en les séparant on trouve :

$$-\hbar^2 \frac{\sin \theta}{g(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} \right) - \lambda' \sin^2 \theta = \frac{\hbar^2}{f(\varphi)} \frac{\partial^2 f(\varphi)}{\partial \varphi^2} \quad (27)$$

On obtient les deux équations suivantes :

$$-\frac{\hbar^2}{g(\theta)} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} \right) - \lambda' \sin^2 \theta = cste \quad (28)$$

$$\frac{\hbar^2}{f(\varphi)} \frac{\partial^2 f(\varphi)}{\partial \varphi^2} = cste \quad (29)$$

Les solutions de ces équations sont :

$$g(\theta) = \left[\frac{(2j+1)(j-m)}{2(j+m)} \right]^{\frac{1}{2}} (\sin \theta)^m \frac{d}{d(\cos \theta)^m} \left\{ \frac{(-1)^j}{2j} \frac{d^j}{d(\cos \theta)^j} (\sin \theta)^{2j} \right\} \quad (30)$$

$$f(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \quad (31)$$

Tel que : $y_l^0(\theta) = \left\{ \frac{(-1)^j}{2j} \frac{d^j}{d(\cos \theta)^j} (\sin \theta)^{2j} \right\}$ est la fonction de Legendre.

Donc : la fonction propre de j^2 sont les harmoniques sphériques définies par l'équation (25):

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \left[\frac{(2j+1)(j-m)}{2(j+m)} \right]^{\frac{1}{2}} (\sin \theta)^m \frac{d}{d(\cos \theta)^m} \left\{ \frac{(-1)^j}{2j} \frac{d^j}{d(\cos \theta)^j} (\sin \theta)^{2j} \right\} \quad (32)$$

Avec les valeurs propres :

$$\lambda' = \hbar^2 j(j+1) \quad (33)$$

En fin les valeurs propres et les vecteurs propres de j^2 sont:

$$j^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \left[\frac{(2j+1)(j-m)}{2(j+m)} \right]^{\frac{1}{2}} (\sin \theta)^m \frac{d}{d(\cos \theta)^m} \left\{ \frac{(-1)^j}{2j} \frac{d^j}{d(\cos \theta)^j} (\sin \theta)^{2j} \right\} \quad (34)$$

$$= \hbar^2 j(j+1) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \left[\frac{(2j+1)(j-m)}{2(j+m)} \right]^{\frac{1}{2}} (\sin \theta)^m \frac{d}{d(\cos \theta)^m} \left\{ \frac{(-1)^j}{2j} \frac{d^j}{d(\cos \theta)^j} (\sin \theta)^{2j} \right\}$$

Nous repérons les vecteurs propres communs à j^2 et j_z par les indices j et m , qui caractérisent les valeurs propres associées

$$j^2 |j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j, m\rangle$$

Tant que J^2 et J_z commutent donc les valeurs et les vecteurs propres s'écrivent :

$$j^2 |j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j, m\rangle \quad (35)$$

$$j_z |j, m\rangle = \hbar m |j, m\rangle \quad (36)$$

Nous choisissons de l'ensemble $\{\mathbf{H}, j_x, j_y, j_z, j^2\}$ l'ensemble des observable $\{\mathbf{H}, j^2, j_z\}$ qui constitue un ensemble des opérateurs qui commutent car :

1. \mathbf{H}, j^2 et j_z des observables qui commutent deux à deux :

$$[H, j_z] = [H, j^2] = [j^2, j_z] = 0 \quad (37)$$

2. Les vecteurs propres associés aux opérateurs \mathbf{H}, j^2, j_z les kets $|n, j, m\rangle$:

$$j^2 |n, j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |n, j, m\rangle \quad (38)$$

$$j_z |n, j, m\rangle = \hbar m |n, j, m\rangle \quad (39)$$

Ces vecteurs propres $|n, j, m\rangle$ vérifient les relations d'orthogonalité et de fermeture :

$$\langle n, j, m | n', j', m' \rangle = \delta_{n n'} \delta_{j, j'} \delta_{m, m'} \quad (40)$$

$$\sum_j \sum_{m=-j}^j \sum_n |n, j, m\rangle \langle n, j, m| = 1 \quad (41)$$

Pour Alléger l'écriture des kets $|n, j, m\rangle$ on utilise la notation $|j, m\rangle$.

5. Les opérateurs j_+ et j_- : [5]

Au lieu d'utiliser les composantes j_x et j_y du moment angulaire j ; il est plus commode d'introduire les combinaisons linéaires suivantes :

$$j_+ = j_x + ij_y \quad (42)$$

$$j_- = j_x - ij_y \quad (43)$$

Tel que j_+ et j_- comme les opérateurs sont hermitiques un adjoints de l'autre.

Ces opérateurs vérifient les relations de commutation suivantes :

$$[j_+, j_-] = 2\hbar j_z \quad (44)$$

$$[j_z, j_+] = \hbar j_+ \quad (45)$$

$$[j_z, j_-] = -\hbar j_- \quad (46)$$

$$[j^2, j_+] = [j^2, j_-] = [j^2, j_z] = 0 \quad (47)$$

6. Application des opérateurs j_+ et j_- :

Calculons le produit j_+j_- et j_-j_+

$$j_+j_- = j^2 - j_z^2 + \hbar j_z \quad (48)$$

$$j_-j_+ = j^2 - j_z^2 - \hbar j_z \quad (49)$$

On applique l'opérateur (j_+j_- et j_-j_+) aux vecteurs propres de j^2 et j_z :

$$j_-j_+|j,m\rangle [j^2 - j_z^2 - \hbar j_z] = [\hbar^2 j(j+1) - \hbar^2 m^2 - \hbar^2 m]|j,m\rangle \quad (50)$$

$$j_-j_+|j,m\rangle = \hbar^2(j-m)(j+m+1)|j,m\rangle$$

$$j_+j_-|j,m\rangle = [j^2 - j_z^2 + \hbar j_z]|j,m\rangle = [\hbar^2 j(j+1) - \hbar^2 m^2 + \hbar^2 m]|j,m\rangle \quad (51)$$

$$j_+j_-|j,m\rangle = \hbar^2(j-m)(j+m-1)|j,m\rangle$$

Calculons la norme de $j_+|j,m\rangle$ et $j_-|j,m\rangle$

$$\|j_+|j,m\rangle\|^2 = \langle j,m|j_-j_+|j,m\rangle = \hbar^2(j-m)(j+m+1) \geq 0 \quad (52)$$

$$\|j_-|j,m\rangle\|^2 = \langle j,m|j_+j_-|j,m\rangle = \hbar^2(j-m)(j+m-1) \geq 0 \quad (53)$$

De (52) et (53), on déduit :

$$-j \leq m \leq j \quad (54)$$

Pour déterminer les vecteur et les valeurs propres de j_+ et j_- , de l'équation (42) et (43) on a d'après (46):

$$[j_z, j_-] = j_z j_- - j_- j_z = -\hbar j_- \quad (55)$$

$$j_z j_- |j, m\rangle = (-\hbar j_- + j_- j_z) |j, m\rangle = (-\hbar j_- + \hbar m j_-) |j, m\rangle = \hbar(m-1) j_- |j, m\rangle \quad (56)$$

Donc :

$$j_- |j, m\rangle = C |j, m-1\rangle \quad (57)$$

L'équation (56) devient :

$$j_z j_- |j, m\rangle = C \hbar(m-1) |j, m-1\rangle \quad (58)$$

On cherche à de C comme suit:

$$\|j_- |j, m\rangle\|^2 = \langle j, m | j_+ j_- |j, m\rangle \quad (59)$$

On a:

$$j_- |j, m\rangle = C |j, m-1\rangle$$

On rendl'adjoins:

$$\langle j, m | j_-^* = \langle j, m-1 | C^*$$

Donc :

$$\|j_- |j, m\rangle\|^2 = |C|^2 = \hbar^2 [j(j+1) - m(m-1)] \quad (60)$$

$$C = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}$$

Donc l'application de j_- sur l'état $|j, m\rangle$ Donne :

$$j_- |j, m\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} |j, m-1\rangle \quad (61)$$

On suit le même raisonnement Pour l'opérateur j_+ :

On a :

$$[j_z, j_+] = j_z j_+ - j_+ j_z = \hbar j_+$$

$$j_z j_+ |j, m\rangle = (j_+ j_z + \hbar j_+) |j, m\rangle = (\hbar m j_+ + \hbar j_+) |j, m\rangle = \hbar(m+1) j_+ |j, m\rangle \quad (62)$$

$$j_z j_+ |j, m\rangle = \hbar(m+1) j_+ |j, m\rangle$$

On a : $j_+ |j, m\rangle = A |j, m+1\rangle$

On prend l'adjoint :

$$\langle j, m | j_+^* = \langle j, m + 1 | A^*$$

Donc :

$$\|j_+ |j, m\rangle\|^2 = |A|^2 = \hbar^2 [j(j+1) - m(m+1)]$$

$$A = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}$$

Donc l'application de j_+ sur l'état $|j, m\rangle$ Donne :

$$j_+ |j, m\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} |j, m+1\rangle \quad (63)$$

Remarque :

❖ j_+ affecte sur $|j, m\rangle$ en augmentant m avec une unité $m+1$

❖ j_- affecte sur $|j, m\rangle$ en dimunait m avec une unité $m-1$

$$j_+ |j, m\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} |j, m+1\rangle$$

$$j_- |j, m\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} |j, m-1\rangle$$

L'application 2 fois de j_+ et de j_- respectivement sur l'état $|j, m\rangle$ donne :

$$j_+^2 |j, m\rangle = \hbar^2 \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} \sqrt{j(j+1) - (m+1)(m+2)} |j, m+2\rangle$$

$$j_-^2 |j, m\rangle = \hbar^2 \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} \sqrt{j(j+1) - (m-1)(m-2)} |j, m-2\rangle$$

L'application n fois de j_+ et de j_- respectivement sur l'état $|j, m\rangle$ donne :

$$j_+^n |j, m\rangle = \hbar^n \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} \sqrt{j(j+1) - (m+n-1)(m+n)} |j, m+n\rangle \quad (64)$$

$$j_-^n |j, m\rangle = \hbar^n \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} \sqrt{j(j+1) - (m-n+1)(m-n)} |j, m-n\rangle \quad (65)$$

7. Couplage de deux moments angulaires \vec{J}_1 et \vec{J}_2 : [5]

Soit \vec{J}_1 et \vec{J}_2 deux moment angulaires : \vec{J}_1 dans l'espace (ε_1) avec la base $|j_1, m_1\rangle$, \vec{J}_2 dans l'espace (ε_2) avec la base $|j_2, m_2\rangle$.

$$j_1^2 |j_1, m_1\rangle = \hbar^2 j_1(j_1+1) |j_1, m_1\rangle \quad (66)$$

$$j_2^2 |j_2, m_2\rangle = \hbar^2 j_2(j_2 + 1) |j_2, m_2\rangle \quad (67)$$

Soit $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ l'opérateur total issue de l'addition des deux moments angulaires définit par :

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 \Rightarrow \begin{cases} J_x = J_{1x} + J_{2x} \\ J_y = J_{1y} + J_{2y} \\ J_z = J_{1z} + J_{2z} \end{cases} \quad (68)$$

L'addition $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ agit soit :

- 1) dans l'espace $(\varepsilon_1) \otimes (\varepsilon_2)$ avec la base orthonormées $|j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$, on prenant l'ECOC $\{H ; j_1^2 ; j_2^2 ; j_{1z} ; j_{2z}\}$:

$$|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle = |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \quad (69)$$

- 2) dans l'espace (ε) avec la base $|J, M\rangle$, on prenant l'ECOC $\{H, J^2, J_z\}$

Les deux bases $|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$ et $|J, M\rangle$ vérifient les relations orthogonales et fermetures suivantes :

La base $|J, M\rangle$:

$$\langle J, M | J', M' \rangle = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \quad (70)$$

$$\sum_{M=-J}^J |J, M\rangle \langle J, M| = 1 \quad (71)$$

La base $|j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$:

$$\langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j'_1, m'_1, j'_2, m'_2 \rangle = \delta_{m_1, m'_1} \delta_{m_2, m'_2} \quad (72)$$

$$\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle \langle j_1, m_1, j_2, m_2| = 1 \quad (73)$$

8. Moment angulaire total J et son projection :

Soit un système qui ayant un moment angulaire total J et son projection sur l'axe (oz) est J_z

On applique l'opérateur J_z et J^2 sur la base $|J, M\rangle$ on obtient:

$$J_z |J, M\rangle = \hbar M |J, M\rangle \quad (74)$$

$$J^2 |J, M\rangle = \hbar^2 J(J + 1) |J, M\rangle \quad (75)$$

La relation de fermeture:

$$\sum_{M=-J}^J |J, M\rangle \langle J, M| = 1 \quad (76)$$

La relation l'orthogonalité:

$$\langle J, M | J', M' \rangle = \delta_{M, M'} \delta_{J, J'} \quad (77)$$

9. Relation entre M, m_1 et m_2 :

On va déduire une relation entre les projections des deux moments \vec{J}_1 et \vec{J}_2 et la projection du moment angulaire total J En appliquant J_z sur les états $|J, M\rangle$:

$$J_z |J, M\rangle = \hbar M |J, M\rangle \quad (78)$$

$$J_z |J, M\rangle = \sum_{m_1 m_2} (j_{z1} + j_{z2}) |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | J, M\rangle$$

Sachant que :

$$J_z = j_{z1} + j_{z2} \quad (79)$$

Remplaçant (79) dans (78), et en injectant la relation de fermeture (69) on trouve :

$$\sum_{m_1 m_2} (j_{z1} + j_{z2}) |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | J, M\rangle = \sum_{m_1 m_2} (\hbar m_1 + \hbar m_2) |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | J, M\rangle = \hbar (m_1 + m_2) |J, M\rangle$$

Cette donne:

$$M = (m_1 + m_2) \quad (80)$$

Donc la projection du moment angulaire total M doit être la somme des deux projections des moments angulaires \vec{J}_1 et \vec{J}_2 : m_1 et m_2 .

10. Coefficients de Clebsch-Gordan :

Considérons l'espace vectoriel (ϵ) des états propres des opérateurs j^2 et j_z :

$$(\epsilon) = (\epsilon_1) \otimes (\epsilon_2) \quad (81)$$

Pour cet espace on peut construire deux bases $\{|n, j_1, m_1, j_2, m_2\rangle\}$ et $\{|n, J, M\rangle\}$

Passage de la base $\{|n, j_1, m_1, j_2, m_2\rangle\}$ à $\{|n, J, M\rangle\}$

Tel que : $\{|n, j_1, m_1, j_2, m_2\rangle\} \Rightarrow$ base complète orthonormée formée par les vecteurs propres commun à H, j_1^2, j_2^2, j_{1z} et j_{2z}

Et : $\{|n, j_1, j_2, J, M\rangle\} \Rightarrow$ base complète orthonormée formée par les vecteurs propres commun à H, j^2 et j_z

$|J, M\rangle$ s'écrit en fonction des kets $|j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$ comme suivant :

$$|J, M\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | J, M \rangle |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle \quad (82)$$

Les coefficients $\langle j_1, m_1, j_2, m_2 | J, M \rangle$ s'appellent les coefficients de Clebsch-Gordan.

11. Relation entre les coefficients de Clebsch-Gordan et les coefficients de Wigner:

Le coefficient de Clebsch-Gordan s'exprime en fonction des coefficients de Wigner (symboles 3j) comme suivant : [3]

$$\langle j_1, j_2, j_3 | J, M \rangle = (-1)^{j_1-j_2+M} \sqrt{2J+1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ m_1 & m_2 & -M \end{pmatrix} \quad (83)$$

Le symbole (3j) : $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ m_1 & m_2 & -M \end{pmatrix}$ est appelé coefficient de Wigner.

Chapitre (II):

Méthode récursive et méthode non récursive

Dans ce chapitre, on va présenter les deux règles qu'on doit respecter pour la détermination des coefficients de Clebsch-Gordan, puis on donne leurs propriétés pour limiter le champ de calcul, ensuite on présente les deux méthodes existantes pour calculer ces coefficients: la méthode récursive, souvent utilisée mais nécessite la connaissance auparavant de quelques coefficients de Clebsch-Gordan pour quelques états, la deuxième méthode est une méthode non récursive proposée par W H Klink et al.[1]:

1. Règle de sélection et d'orthogonalité :

Il existe deux importantes règles de sélection, qui découlent immédiatement des résultats sur la composition de deux moments cinétiques [2]

1.1. Règles de sélection :

Le coefficient de Clebsch-Gordan $\langle j_1, m_1, j_2, m_2 | J, M \rangle$ est nécessairement nul si les deux conditions suivantes ne sont pas simultanément réalisées :

$$M = m_1 + m_2 \quad (84)$$

$$|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2 \quad (85)$$

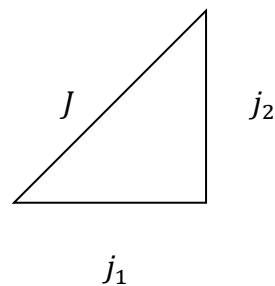


Figure 2: règle de sélection du triangle

La condition (85) appelée (règle de sélection du triangle), car elle exprime que l'on peut former un triangle avec trois segments de longueur j_1 , j_2 et J (figure 2), on peut écrire (84) sous la forme

$$|J - j_1| \leq j_2 \leq J + j_1 \quad (86)$$

Ou encore :

$$|J - j_2| \leq j_1 \leq J + j_2 \quad (87)$$

1.2. Relation d'orthogonalité :

En insérant la relation de fermeture

Dans la relation d'orthogonalité des ket $|J, M\rangle$ suivante :

$$\langle J, M | J', M' \rangle = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \quad (88)$$

On trouve :

$$\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \langle J, M | j_1, m_1, j_2, m_2 \rangle \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | J', M' \rangle = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \quad (89)$$

Nous obtenons la première relation d'orthogonalité entre les coefficients de Clebsch-Gordan, la sommation qui figure porte en fait, sur un seul indice ; en effet pour que les coefficients du premier membre ne soient pas nuls, m_1 et m_2 doivent nécessairement être reliés par l'égalité (80):

Avec le même raisonnement on trouve la deuxième relation d'orthogonalité:

$$\sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{M=-J}^J \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | J, M \rangle \langle J, M | j_1, m_1', j_2, m_2' \rangle = \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'} \quad (90)$$

Donc en résumé, la relation d'orthogonalités écrit:

$$\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \langle J, M | j_1, m_1, j_2, m_2 \rangle \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | J', M' \rangle = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \quad (91)$$

$$\sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{M=-J}^J \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | J, M \rangle \langle J, M | j_1, m_1', j_2, m_2' \rangle = \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'} \quad (92)$$

2. Propriétés générales des coefficients de Clebsch-Gordan:

2.1. Réalité des coefficients de Clebsch-Gordan :

Pour compléter la définition des coefficients de Clebsch-Gordan qui interviennent dans la définition (10), il suffit de choisir la phase des divers ket $|J, J\rangle$, dans ce but commençons par

Étudier quelque propriété des coefficients $\langle j_1, m_1, j_2, m_2 | J, J \rangle$

2.2. Coefficient $\langle j_1, m_1, j_2, m_2 | J, J \rangle$ phase du ket : [2]

Dans ce coefficient la valeur maximale de m_1 et $m_2 = j_1$ d'après la règle de sélection (87), m_2 vaut alors

$J - j_1$ Dont le module est bien inférieur à j_2 lorsque m_1 décroît par sauts d'une unité à partir de cette valeur maximale j_1 .

$$\langle J, J | j_1, m_1, j_2, m_2 \rangle = -\sqrt{\frac{j_1(j_1+1)-m_1(m_1-1)}{j_2(j_2+1)-m_2(m_2-1)}} \langle J, J | j_1, m_1 - 1, j_2, m_2 + 2 \rangle \quad (93)$$

2.3. Signe de quelques coefficients de Clebsch-Gordon : [2]

- Le signe des coefficients de Clebsch-Gordan $\langle j_1, m_1, j_2, m_2 | J, J \rangle$ est $(-1)^{j_1-m_2}$
- Le signe des coefficients de Clebsch-Gordan $\langle j_1, m_1, j_2, m_2 | J, -J \rangle$ est $(-1)^{j_2+m_2}$
- Lorsqu'on change l'ordre j_1 et j_2 :

$$\langle j_2, m_2, j_1, m_1 | J, M \rangle = (-1)^{j_1+j_2-J} \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | J, M \rangle \quad (94)$$

- lorsqu'on change le signe de M, m_1 et m_2

$$\langle j_1-m_1, j_2-m_2 | J, -M \rangle = (-1)^{j_1+j_2-J} \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | J, M \rangle \quad (95)$$

- Le coefficient pour $j_1 = j_2$

$$\langle j, m, j, m | 0, 0 \rangle = \frac{(-1)^{j-m}}{\sqrt{2j+1}} \quad (96)$$

3. Méthode récursive (relation de récurrence) :

On va donner tout d'abord la relation de récurrence, ensuite en présente un exemple explicative, ensuite on donne les huit formules générale des coefficients de Clebsch Gordan.

Appliquons donc l'opérateur J_- sur l'état $|J, M\rangle$:

$$|J, M\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | J, M \rangle |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle \quad (97)$$

Comme $J_- = J_{1-} + J_{2-}$ on obtient si $(M > -J)$:

$$J_- |J, M\rangle = \hbar \sqrt{J(J+1) - M(M-1)} |J, M-1\rangle \quad (98)$$

D'autre part :

$$J_- = J_{1-} + J_{2-} \quad (99)$$

On trouve :

$$\begin{aligned} J_- |J, M\rangle &= \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} (J_{1-} + J_{2-}) |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | J, M \rangle = \\ &= \sum_{m'_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m'_2=-j_2}^{j_2} \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | J, M \rangle * [\sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1-1)} |j_1 m_1 - 1, j_2 m_2\rangle + \\ &+ \sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2-1)} |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle] \quad (100) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} & \sqrt{J(J+1) - M(M-1)} |J, M-1\rangle \sum_{m'_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m'_2=-j_2}^{j_2} \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | J, M \rangle * \\ & [\sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1-1)} |j_1, m_1-1, j_2, m_2\rangle + \\ & \sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2-1)} |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle] \end{aligned} \quad (101)$$

Multiplions cette égalité par le Bra $\langle j_1, m_1, j_2, m_2 |$; il vient alors :

$$\begin{aligned} \sqrt{J(J+1) - M(M-1)} \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | J, M-1 \rangle &= \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1+1)} \langle j_1, m_1-1, j_2, m_2 | J, M \rangle + \\ &+ \sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2+1)} \langle j_1, m_1, j_2, m_2-1 | J, M \rangle \end{aligned} \quad (102)$$

Si la valeur de M est égale a $-J$, on trouve :

$$\begin{aligned} \sqrt{J(J+1) + J(-J-1)} \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | J, -J \rangle &= \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1+1)} \langle j_1, m_1-1, j_2, m_2 | J, -J \rangle + \\ &+ \sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2+1)} \langle j_1, m_1, j_2, m_2-1 | J, -J \rangle \end{aligned} \quad (103)$$

$$\sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1+1)} \langle j_1, m_1-1, j_2, m_2 | J, -J \rangle = -\sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2+1)} \langle j_1, m_1, j_2, m_2-1 | J, -J \rangle \quad (104)$$

De façon analogue, l'application de l'opérateur $J_+ = J_{1+} + J_{2+}$ sur $|J, M\rangle$ conduit à :

$$\begin{aligned} \sqrt{J(J+1) - M(M+1)} \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | J, M+1 \rangle &= \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1+1)} \langle j_1, m_1+1, j_2, m_2 | J, M+1 \rangle + \\ &+ \sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2+1)} \langle j_1, m_1, j_2, m_2+1 | J, M+1 \rangle \end{aligned} \quad (105)$$

(102) Et (103) sont les relations de récurrence entre les coefficients de Clebsch-Gordan Le premier membre de cette relation étant nul si $M=J$ on trouve:

$$\begin{aligned} \sqrt{J(J+1) - J(J+1)} \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | J, J+1 \rangle &= \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1+1)} \langle j_1, m_1+1, j_2, m_2 | J, J+1 \rangle + \\ &+ \sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2+1)} \langle j_1, m_1, j_2, m_2+1 | J, J+1 \rangle \end{aligned} \quad (106)$$

$$\sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1+1)} \langle j_1, m_1+1, j_2, m_2 | J, J+1 \rangle + \sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2+1)} \langle j_1, m_1, j_2, m_2+1 | J, J+1 \rangle = 0 \quad (107)$$

Exemple 1: $j_1 = \frac{1}{2}$ et $j_2 = \frac{3}{2}$

Calculons les coefficients des Clebsch-Gordan pour les moments angulaires $j_1 = \frac{1}{2}$ et $j_2 = \frac{3}{2}$:

Le moment angulaire total doit satisfaire :

$$\left| \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \right| \leq J \leq \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \quad \text{donc} \quad J = 1, 2$$

Pour : $J = 2 \rightarrow -2 \leq M \leq +2$

Donc les bases $|J, M\rangle$ sont : $\{|2, -2\rangle; |2, -1\rangle; |2, 0\rangle; |2, 1\rangle \text{ et } |2, 2\rangle\}$

On commence par $|2, 2\rangle$:

- $|2, 2\rangle = \sum_{m_1=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{m_2=-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left\langle \frac{1}{2} m_1, \frac{3}{2} m_2 \middle| 2, 2 \right\rangle \left| \frac{1}{2} m_1, \frac{3}{2} m_2 \right\rangle$
- $|2, 2\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle$
- $|2, 1\rangle = J_- |2, 2\rangle = 2 |2, 1\rangle = \frac{1}{2} \left[\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle + 3 \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right]$

Pour $|1, 1\rangle$:

$$|1, 1\rangle = a \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle + b \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

De la normalisation et l'orthogonalité :

$$a = -\frac{1}{\sqrt{3}} b \quad \text{Et} \quad b = \sqrt{\frac{3}{4}} \quad \text{donc:} \quad a = -\frac{1}{\sqrt{4}}$$

Donc:

- $|1, 1\rangle = \frac{1}{2} \left[\sqrt{3} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle - \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right]$
- $|1, 0\rangle = J_- |1, 1\rangle = |1, -1\rangle = J_- |1, 0\rangle = \sqrt{2} |1, -1\rangle$
- $|1, -1\rangle = \frac{J_-}{\sqrt{2}} |1, 0\rangle = \frac{1}{2} \left[\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{3} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle \right]$

Exemple 2:

Calcul les coefficients de Clebsch-Gordan pour les deux moments angulaire suivant :

$$j_1 = j_2 = \frac{1}{2} \quad [2]$$

$$\text{Donc : } |j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2 \rightarrow \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right| \leq J \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow J = 0 ; 1$$

$$\text{Et : } -j_1 \leq m_1 = m_2 \leq +j_1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq m_1 = m_2 \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow m_1 = m_2 = -\frac{1}{2} ; +\frac{1}{2}$$

Pour M: $-J \leq M \leq +J \leftrightarrow \begin{cases} M = 0 & \text{si } J = 0 \\ M = -1; 0; 1 & \text{si } J = 1 \end{cases}$

- Pour $J = 0$: $|0,0\rangle$
- Pour $J = 1$: $|1,-1\rangle; |1,0\rangle; |1,1\rangle$

Pour J=1:

- $|1,1\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$
- $|1,0\rangle = J_- |1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \right]$
- $|1,-1\rangle = J_- |1,0\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$

Pour J=0:

- $|0,0\rangle = \sum_{m_1=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{m_2=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2} m_1, \frac{1}{2} m_2 \middle| 0,0 \right\rangle \left| \frac{1}{2} m_1, \frac{1}{2} m_2 \right\rangle$

$$|0,0\rangle = d \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \frac{-1}{2} \right\rangle + e \left| \frac{1}{2} \frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle$$

La normalisation:

$$\langle 0,0|0,0\rangle = 1 = |d|^2 + |e|^2$$

L'orthogonalité on multiple $\langle 1,0|$:

$$\langle 1,0|0,0\rangle = 0 = \frac{d}{\sqrt{2}} + \frac{e}{\sqrt{2}}$$

De la normalisation et l'orthogonalité:

$$d = -e \text{ Et } d = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ donc: } e = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left| \frac{1}{2} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \frac{-1}{2} \right\rangle - \left| \frac{1}{2} \frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \right]$$

4. Huit formules générales de la méthode récursive :

Il y a huit formules (expression) qui facilite le calcul de ces coefficients :

4.1.1^{er} formule :

$$\begin{aligned}
& \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j_1, J, j_2, M \rangle \\
&= \frac{\delta_{m, m_1+m_2}}{\sqrt{(J+j_1+j_1+1)}} \sqrt{(j_1+j_2-J)!} \sqrt{(J+j_1-j_2)!} \sqrt{(J-j_1+j_2)!} \sqrt{2J+1} \sqrt{(j_1+m_1)!} \sqrt{(j_1-m_1)!} \\
& \quad \sqrt{(j_2+m_2)!} \sqrt{(j_2-m_2)!} \sqrt{(J+M)!} \sqrt{(J-M)!}
\end{aligned} \tag{108}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (j_1+j_2-J-k)! (j_1-m_1-k)! (j_2+m_2-k)! (J-j_2+m_1+k)! (J-j_1-m_2+k)!}$$

4.2.2^{ème} formule :

$$\begin{aligned}
& \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j_1, J, j_2, M \rangle \\
&= \frac{\delta_{m, m_1+m_2}}{\sqrt{(J+j_1+j_1+1)}} \sqrt{2J+1} \sqrt{(J-M)!} \sqrt{(J+M)!} \sqrt{(J+j_1-j_2)!} \sqrt{(J-j_1-j_2)!} \sqrt{(j_1+j_2-J)!} \sqrt{(j_1-m_1)!} \\
& \quad \sqrt{(j_1+m_1)!} \sqrt{(j_2-m_2)!} \sqrt{(j_2+m_2)!}
\end{aligned} \tag{109}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\theta(k, j_1+j_2-J-k, j_1-m_1-k, j_2+m_2-k, J+k-j_2+m_1, J+k-j_1-m_2)}{k! (j_1+j_2-J-k)! (-J-k+j_1+j_2)! (-k+j_1-m_1)! (-k+j_2+m_2)! (J+k-j_2+m_1)! (J+k-j_1-m_2)!}$$

4.3.3^{ème} formule :

$$\begin{aligned}
\langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j_1, J, j_2, M \rangle &= \frac{\delta_{m, m_1+m_2}}{\sqrt{(J+j_1+j_2+1)}} \sqrt{(-J+j_1+j_2)!} \sqrt{(J+j_1-j_2)!} \sqrt{(J-j_1+j_2)!} \sqrt{2J+1} \sqrt{(j_1+m_1)!} \sqrt{(j_1-m_1)!} \\
& \quad \sqrt{(j_2+m_2)!} \sqrt{(j_2-m_2)!} \sqrt{(J+M)!} \sqrt{(J-M)!}
\end{aligned} \tag{110}$$

$$\sum_{k=\max(-J+j_2-m_1, -J+j_1+m_2, 0)}^{\min(j_1-m_1, j_2+m_2)} \frac{(-1)^k}{k! (-J-k+j_1+j_2)! (-k+j_1-m_1)! (-k+j_2+m_2)! (J+k-j_2+m_2)! (J+k-j_1-m_2)!}$$

4.4.4^{ème} formule :

$$\begin{aligned}
& \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j_1, J, j_2, M \rangle = \\
& \delta_{m, m_1+m_2} \frac{\sqrt{(j_1+j_2-J)!}}{\sqrt{(1+j_1+j_2+J)!} \sqrt{(j_1-j_2+J)!} \sqrt{(-j_1+j_2+J)!}} \frac{\sqrt{(j_1-m_1)!} \sqrt{(j_2-m_2)!} \sqrt{(J+M)!} \sqrt{(J-M)!} \sqrt{2J+1}}{\sqrt{(j_1+m_1)!} \sqrt{(j_2+m_2)!}}
\end{aligned} \tag{111}$$

4.5.5^{ème} formule :

$$\begin{aligned}
& \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j_1, J, j_2, M \rangle = \\
& \delta_{m, m_1+m_2} \frac{\sqrt{(j_1+j_2-J)!} \sqrt{(j_1-j_2+J)!} \sqrt{(-j_1+j_2+J)!}}{\sqrt{(1+j_1+j_2+J)!}} \frac{\sqrt{(J+M)!} \sqrt{(J-M)!} \sqrt{2J+1}}{\sqrt{(j_1+m_1)!} \sqrt{(j_1-m_1)!} \sqrt{(j_2+m_2)!} \sqrt{(j_2-m_2)!}} \\
& \quad \sum_{k=\max(0, -J+M+j_2)}^{\min(J-j_1+j_2, J+M)} \frac{(-1)^{(j_2+m_2+k)} (J+j_2+m_1-k)! (j_1-m_1+k)!}{(J-j_1+j_2-k)! (J+M-k)! (j_1-j_2-M+k)!}
\end{aligned} \tag{112}$$

4.6. 6^{ème} formule :

$$\langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j_1, J, j_2, M \rangle = \delta_{m, m_1 + m_2} \frac{\sqrt{(-j_1 + j_2 + J)!}}{\sqrt{(j_1 - j_2 + J)!} \sqrt{(j_1 + j_2 - J)!} \sqrt{(1 + j_1 + j_2 + 1)!}} \frac{\sqrt{(j_1 + m_1)!} \sqrt{(j_1 - m_1)!} \sqrt{(j_2 - m_2)!} \sqrt{(J + M)!} \sqrt{2J + 1}}{\sqrt{(j_2 + m_2)!} \sqrt{(J - M)!}}$$

$$\sum_{k=\max(0, -j_1 + j_2, J + M)}^{\min(J - j_1 + j_2, J + M)} \frac{(-1)^{j_2 + m_2 + k} (2J - k)! (j_1 + j_2 - J + k)!}{k! (J - j_1 + j_2 - k)! (J + M - k)! (j_1 - J - m_2 + k)!} \quad (113)$$

4.7.7^{ème} formule :

$$\begin{aligned} & \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j_1, J, j_2, M \rangle \\ &= \delta_{m, m_1 + m_2} \frac{\sqrt{(-j_1 + j_2 + J)!} \sqrt{(j_1 + j_2 - J)!} \sqrt{(1 + j_1 + j_2 + J)!}}{\sqrt{(j_1 - j_2 + J)!}} \frac{\sqrt{(j_1 - m_1)!} \sqrt{(J + M)!} \sqrt{2J + 1}}{\sqrt{(j_1 + m_1)!} \sqrt{(j_2 + m_2)!} \sqrt{(j_2 - m_2)!} \sqrt{(J - M)!}} \\ & \sum_{k=0}^{\min(J - j_1 + j_2, J + M)} \frac{(-1)^{(j_2 + m_2 + k)} (2J - k)! (j_2 + J + m_1 - k)!}{k! (J - j_1 + j_2 - k)! (J + M - k)! (j_1 + j_2 + J + 1 + k)!} \end{aligned} \quad (114)$$

4.8.8^{ème} Formule :

$$\begin{aligned} & \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j_1, J, j_2, M \rangle \\ &= \delta_{m, m_1 + m_2} \frac{\sqrt{(1 + j_1 + j_2 + J)!}}{\sqrt{(j_1 + j_2 - J)!} \sqrt{(j_1 - j_2 + J)!} \sqrt{(-j_1 + j_2 + J)!}} \frac{\sqrt{(j_1 + m_1)!} \sqrt{(j_1 - m_1)!} \sqrt{(J + M)!} \sqrt{(J - M)!} \sqrt{2J + 1}}{\sqrt{(j_2 + m_2)!} \sqrt{(j_2 - m_2)!}} \\ & \sum_{k=0}^{\min(J - M, j_1 - m_1)} \frac{(-1)^{j_1 - m_1 + k} (j_1 + j_2 - M - k)! (j_2 + J - m_1 - k)!}{k! (j_1 - m_1 - k)! (J - M - k)! (j_1 + j_2 + J + 1 + k)!} \end{aligned} \quad (115)$$

5. Tabulation des coefficients de Clebsch-Gordon :

Afin de simplifier la lecture et la recherche des valeurs des coefficients de Clebsch-Gordan, souvent ils sont tabulés comme figure (3).

notation	M	J
$m_1 m_2$	coefficient	

			1		
			1	1	0
	1/2	1/2	1	0	0
		1/2	-1/2	1/2	1/2
		-1/2	1/2	1/2	-1/2
			-1/2	-1/2	1

6. Méthode non récursive: calcul des coefficients de Clebsch-Gordan

Cette méthode apparaît plus facile que la méthode récursive, on peut l'exposer en deux étapes : la première étape est consacrer à la détermination du spectre de J et les coefficients de Clebsch-Gordan

Correspondant, la dernière étape permet de généraliser la méthode pour un couplage de plus de deux moments.[1]

a. 1^{ère} étape « Détermination du spectre de J »:

On considère le cas $M = J$ le vecteur d'état $|J = M, M\rangle$ doit être une combinaison linéaire, de tous les états $|j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$ qui satisfait la relation de sélection :

$$|J = M, M\rangle = a_1 |j_1, m_1, j_2, M - m_1\rangle + a_{2\pm} |j_1, m_1 \pm 1, j_2, M - (m_1 \pm 1)\rangle + \dots \quad (116)$$

Tel que a_i sont des constantes $|m_1| \leq j_1$ et $|M - m_1| \leq j_2$

On applique l'opérateur J_{\pm} sur les états $|J = M, M\rangle$ et $J_{1\pm} + J_{2\pm}$ sur la combinaison correspondante, on trouve.

$$0 = a_1 J_{+} |j_1, m_1, j_2, M - m_1\rangle + a_{2\pm} J_{+} |j_1, m_1 \pm 1, j_2, M - (m_1 \mp 1)\rangle \quad (117)$$

$$0 = a_1 \sqrt{j_1(j_1 + 1) - m_1(m_1 + 1)} |j_1, m_1 + 1, j_2, M - m_1\rangle + a_{2\pm} \sqrt{j_2(j_2 + 1) - (M - m_1)(M - m_1 + 1)} |j_1, m_1, j_2, M - m_1 + 1\rangle + \dots \quad (118)$$

L'orthogonalité des vecteurs $|j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$ donne un ensemble d'équations linéaires couplés qui peuvent être facilement résolus en exprimant tous les coefficients a_i en fonction d'un seul coefficient, ce dernier peut être obtenue par la normalisation de $|J = M, M\rangle$:

$$\langle J = M, M | J = M, M \rangle = 1 \quad (119)$$

Les autres vecteurs $|J = M, M - 1\rangle; |J = M, M - 2\rangle; \dots$ peuvent être obtenue en appliquons J_{-} sur l'état

$|J = M, M\rangle$, ce qui permet de déduire directement les coefficients de Clebsch Gordon. Si la seule solution pour les a_i est solution triviale $a_i = 0$, donc l'état $|J = M, M\rangle$ n'existe pas, autrement dit la valeur choisie de M ne correspond pas à aucune valeur de J . Donc Le spectre de J peut être déterminée.

* Déduction de autres vecteur $|J = M, M - 1\rangle, |J = M, M - 2\rangle, \dots$ [1]

Une fois que les valeurs spectrales de J est déterminées, on obtient les autres états par

L'application successive de J_{-} :

$$J_-|J = M, M\rangle = \sqrt{M(M+1) - M(M-1)}|M, M-1\rangle \quad (120)$$

Donc :

$$= a_1 J_- |j_1, m_1, j_2, M - m_1\rangle + a_2 J_- |j_1, m_1 + 1, j_2, M - (m_1 + 1)\rangle = \quad (121)$$

$$\begin{aligned} & a_1 \left[\sqrt{j_1(j_1 + 1) - m_1(m_1 - 1)} |j_1, m_1 - 1, j_2, M - m_1\rangle \right. \\ & \quad \left. + \sqrt{j_2(j_2 + 1) - (M - m_1)(M - m_1 - 1)} |j_1, m_1, j_2, M - m_1 - 1\rangle \right] \\ & + a_2 \left[\sqrt{(j_1 + 1) - (m_1 + 1)(m_1 + 1 - 1)} |j_1, m_1 + 1 - 1, j_2, M - (m_1 + 1)\rangle \right. \\ & \quad \left. + \sqrt{j_2(j_2 + 1) - M - (m_1 + 1)(M(m_1 + 1) - 1)} |j_1, m_1 + 1, j_2, M - (m_1 + 1) - 1\rangle \right] \end{aligned}$$

Exemple 3 : $j_1 = \frac{5}{2}$ et $j_2 = 1$ [1]

Le spectre de m_1 est $m_1 = -\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}$

le spectre de m_2 est $m_2 = 1; 0; -1$

Ce qui implique que le spectre M est $M = \frac{7}{2}; \frac{5}{2}; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}; -\frac{7}{2}$

Pour chaque des quatre valeurs positives (116) devient

$$\square \quad \left| \frac{7}{2}, \frac{7}{2} \right\rangle = \left| \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1, 1 \right\rangle \quad (122)$$

$$\square \quad \left| \frac{5}{2}, \frac{5}{2} \right\rangle = a_1 \left| \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1, 0 \right\rangle + a_2 \left| \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 1, 1 \right\rangle \quad (123)$$

$$\square \quad \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle = a_3 \left| \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1, -1 \right\rangle + a_4 \left| \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 1, 0 \right\rangle + a_5 \left| \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1 \right\rangle \quad (124)$$

$$\square \quad \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = a_6 \left| \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1, -1 \right\rangle + a_7 \left| \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0 \right\rangle + a_8 \left| \frac{5}{2}, \frac{-1}{2}, 1, 1 \right\rangle \quad (125)$$

On applique l'opérateur J_{\pm} sur les états $\left| \frac{5}{2}, \frac{5}{2} \right\rangle$ et $J_{1\pm} + J_{2\pm}$ sur la combinaison correspondante, on trouve.

$$0 = a_1 (j_{2+} + j_{1+}) \left| \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1, 0 \right\rangle + a_2 (j_{2+} + j_{1+}) \left| \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 1, 1 \right\rangle$$

Donc :

$$0 = a_1 \sqrt{2} \left| \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1, 1 \right\rangle + a_2 \sqrt{5} \left| \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1, 1 \right\rangle$$

$$\text{On trouve : } a_2 = -\sqrt{\frac{2}{5}} a_1$$

Pour la normalisation de $\left| \frac{5}{2}, \frac{5}{2} \middle| \frac{5}{2}, \frac{5}{2} \right\rangle$ permet d'obtenir :

$$a_1 = \sqrt{\frac{5}{7}} ; a_2 = -\sqrt{\frac{2}{7}}$$

$$\text{Donc : } \left| \frac{5}{2}, \frac{5}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{5}{7}} \left| \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{7}} \left| \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 1, 1 \right\rangle \quad (126)$$

On applique l'opérateur J_+ sur $\left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle$ dans la relation (124):

$$0 = a_3 \sqrt{2} \left| \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1, 0 \right\rangle + a_4 \sqrt{5} \left| \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1, 0 \right\rangle + a_4 \sqrt{2} \left| \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 1, 1 \right\rangle + a_5 \sqrt{8} \left| \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 1, 1 \right\rangle$$

L'orthogonalité permet de déduire :

$$-a_4 \sqrt{2} = a_5 \sqrt{8} \leftrightarrow a_5 = -\sqrt{\frac{2}{8}} a_4 \leftrightarrow a_5 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{5}} a_3$$

La normalisation de $\left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \middle| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle$ permet de trouver :

$$a_3 = \sqrt{\frac{2}{3}} ; a_4 = -\sqrt{\frac{4}{5}} ; a_5 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4}{15}}$$

Donc :

$$\left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1, -1 \right\rangle - \frac{2}{\sqrt{15}} \left| \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 1, 0 \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{15}} \left| \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1 \right\rangle$$

On applique l'opérateur J_- sur les kets $\left| \frac{7}{2}, \frac{7}{2} \right\rangle ; \left| \frac{5}{2}, \frac{5}{2} \right\rangle ; \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle$ et $\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$ on trouve :

Sur $\left| \frac{7}{2}, \frac{7}{2} \right\rangle$ dans la relation (122):

$$\diamond \left| \frac{7}{2}, \frac{5}{2} \right\rangle = J_- \left| \frac{7}{2}, \frac{7}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{5}{7}} \left| \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 1, 1 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{7}} \left| \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1, 0 \right\rangle$$

$$\diamond \left| \frac{7}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle = J_- \left| \frac{7}{2}, \frac{5}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{21}} \left[\sqrt{10} \left| \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1 \right\rangle + \sqrt{10} \left| \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 1, 0 \right\rangle + \left| \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1, -1 \right\rangle \right]$$

$$\diamond \left| \frac{7}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = J_- \left| \frac{7}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{3}{21}} \left[\sqrt{2} \left| \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 1 \right\rangle + 2 \left| \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0 \right\rangle + \left| \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 1, -1 \right\rangle \right]$$

$$\diamond \left| \frac{7}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = J_- \left| \frac{7}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{3}{21}} \left[\left| \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, 1, 1 \right\rangle + 2 \left| \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0 \right\rangle + \sqrt{2} \left| \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 1, -1 \right\rangle \right]$$

$$\diamond \left| \frac{7}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle = J_- \left| \frac{7}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{21}} \left[\left| \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, 1, 1 \right\rangle + \sqrt{2} \left| \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, 1, 0 \right\rangle + \sqrt{2} \left| \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -1 \right\rangle \right]$$

On a pour m_1 et m_2 les deux minimaux:

$$\diamond \left| \frac{7}{2}, -\frac{7}{2} \right\rangle = \left| \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, 1, -1 \right\rangle$$

$$\diamond \left| \frac{7}{2}, -\frac{5}{2} \right\rangle = J_+ \left| \frac{7}{2}, -\frac{7}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{7}} \left[\sqrt{5} \left| \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, 1, -1 \right\rangle + \sqrt{2} \left| \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, 1, 0 \right\rangle \right]$$

Sur $\left| \frac{5}{2}, \frac{5}{2} \right\rangle$ dans l'équation (123):

$$\diamond \left| \frac{5}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle = J_- \left| \frac{5}{2}, \frac{5}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{5}{7}} \left| \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 1, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{7}} \left| \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1, -1 \right\rangle - 2 \left| \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 1, 1 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 1, 0 \right\rangle$$

$$\diamond \left| \frac{5}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = J_- \left| \frac{5}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{5}{7}} \left| \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{5}{7}} \left| \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 1, -1 \right\rangle - 2 \left| \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1 \right\rangle - \left| \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 1, 0 \right\rangle$$

Sur $\left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle$ dans l'équation (124):

$$\diamond \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = J_- \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1, -1 \right\rangle - \frac{2}{\sqrt{15}} \left| \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 1, 0 \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{15}} \left| \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1 \right\rangle$$

$$\diamond \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = J_- \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \left| \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, 1, 1 \right\rangle$$

$$\diamond \left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle = J_- \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \left| \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -1 \right\rangle - \frac{2}{\sqrt{15}} \left| \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, 1, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, 1, -1 \right\rangle$$

b. 2^{ème} étape « généralisation »: [1]

La procédure ci-dessus peut être étendue à un produit tensoriel multiples, comme dans la

Première étape on procède par la détermination de toutes les valeurs possible du champ

Angulaire total, le système des équations linéaire trouvé est parfois indéterminé contrairement au cas de couplage de deux moments angulaires, dans ces cas la différence entre le nombre d'inconnues et le nombre des équations est égal à la multiplicité de la représentation irréductible correspondant.

La première étape donnée dans la section précédant peut être généralisée pour un couplage de plus de deux représentations irréductible du groupe SU(2) de rotation comme par exemple SU(3), on expliquera cette étape en prenant l'exemple d'addition de trois moments angulaires $j_1, j_2,$ et j_3 avec $j_1 = j_2 = j_3 = 1$.

Pour trois moments angulaires $j_1 = j_2 = j_3 = 1$ [1]

L'espace de produit tenseur est donné par :

$$\phi = \phi^{j_1=1} \otimes \phi^{j_2=1} \otimes \phi^{j_3=1} \quad (127)$$

Il est généralement obtenu en utilisant le résultat de couplage double entre j_1 et j_2 , avec le troisième moment j_3 .

$$\phi = (\phi^{j_1=1} \otimes \phi^{j_2=1}) \otimes \phi^{j_3=1} \quad (128)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\bigoplus_{J=0}^2 \phi^J \right) \otimes \phi^{j_3=1} \\ &= (\phi^{J=0} \otimes \phi^{j=1}) \oplus (\phi^{J=1} \otimes \phi^{j=1}) \oplus (\phi^{J=2} \otimes \phi^{j=1}) \\ &= (\phi^{j=1}) \oplus (\phi^{J=0} \otimes \phi^{J=1} \otimes \phi^{j=2}) \oplus (\phi^{J=1} \otimes \phi^{J=2} \otimes \phi^{j=3}) \end{aligned} \quad (129)$$

Notez que la représentation $J = 2$ a la multiplicité 2 tandis que la représentation $J = 1$ a la

Multiplicité 3. Les espaces $\phi^{j=3}$; $\phi^{j=2}$ et $\phi^{j=0}$ ont respectivement les dimensions 7, 5, 3 et 1, notons que la dimension de l'espace du produit tensoriel est égal à la somme des dimensions sous espaces

$$3 * 3 * 3 = 27 = 1 * 7 + 2 * 5 + 3 * 3 + 1 * 1 \quad (130)$$

Pour quatre moments $j_1 = j_2 = j_3 = j_4 = 1$

$$\phi = (\phi^{j_1=1} \otimes \phi^{j_2=1}) \otimes (\phi^{j_3=1} \otimes \phi^{j_4=1}) \quad (131)$$

$$= \left(\bigoplus_{J_{12}=0}^2 \phi^{J_{12}} \right) \otimes \left(\bigoplus_{J_{34}=0}^2 \phi^{J_{34}} \right)$$

$$\begin{aligned} &= (\phi^{J_{12}=0} \otimes \phi^{J_{34}=0}) \oplus (\phi^{J_{12}=0} \otimes \phi^{J_{34}=1}) \oplus (\phi^{J_{12}=0} \otimes \phi^{J_{34}=2}) \oplus (\phi^{J_{12}=1} \otimes \phi^{J_{34}=0}) \oplus (\phi^{J_{12}=1} \\ &\quad \otimes \phi^{J_{34}=1}) \oplus (\phi^{J_{12}=1} \otimes \phi^{J_{34}=2}) \oplus (\phi^{J_{12}=2} \otimes \phi^{J_{34}=0}) \oplus (\phi^{J_{12}=2} \otimes \phi^{J_{34}=1}) \oplus (\phi^{J_{12}=2} \\ &\quad \otimes \phi^{J_{34}=2}) \\ &= (\phi^{J=0}) \oplus (\phi^{J=1}) \oplus (\phi^{J=0} \otimes \phi^{J=1} \otimes \phi^{J=2}) \oplus (\phi^{J=1}) \oplus (\phi^{J=0} \otimes \phi^{J=1} \otimes \phi^{J=2}) \oplus (\phi^{J=1} \otimes \phi^{J=2} \otimes \\ &\quad \phi^{J=3}) \oplus (\phi^{J=2}) \end{aligned} \quad (132)$$

La dernière équation permet de calculer la multiplicité de chaque moment.

Chapitre (III) :

Calcul des coefficients de Clebsch-Gordan Pour un SU(2) et SU(3)

1. Calcul des coefficients de Clebsch_Gordan par la méthode récursive:

1.1. Couplage de deux moments angulaires ($j_1 = j_2 = 1$) :

Soit deux moments angulaires, ($j_1 = j_2 = 1$), ses projections prennent les valeurs :

$$\begin{cases} -j_1 \leq m_1 \leq j_1 \\ -j_2 \leq m_2 \leq j_2 \end{cases} \text{ donc: } m_1 = m_2 = -1, 0, 1$$

Le moment angulaire total prend les valeurs :

$$|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2 \Rightarrow J = 0, 1, 2$$

La projection du moment angulaire total prend les valeurs :

$$-J \leq M \leq J$$

Pour : $J = 0 \mapsto M = 0$ la base est $|0,0\rangle$

$J = 1 \mapsto M = -1, 0, 1$ les bases sont : $|1,-1\rangle, |1,0\rangle, |1,1\rangle$

$J = 2 \mapsto M = -2, -1, 0, 1, 2$ les bases sont: $|2,-2\rangle, |2,-1\rangle, |2,0\rangle, |2,1\rangle, |2,2\rangle$

1.1.1. Calcul des coefficients de Clebsch_Gordan : $J = 2$

- $|2,2\rangle = \sum_{m_1, m_2=-1}^1 \langle 1, m_1, 1, m_2 | 2,2\rangle |1, m_1, 1, m_2\rangle = |1,1,1,1\rangle$

En appliquant J_- sur l'état $|2,2\rangle$, on trouve l'état $|2,1\rangle$:

- $J_- |2,2\rangle = (j_{1-} + j_{2-}) |1,1,1,1\rangle$

Donc :

$$|2,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|1,0,1,1\rangle + |1,1,1,0\rangle]$$

En appliquant J_- sur l'état $|2,1\rangle$, on trouve l'état $|2,0\rangle$:

- $J_- |2,1\rangle = (j_{1-} + j_{2-}) \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} [|1,0,1,1\rangle + |1,1,1,0\rangle] \right\}$

Donc : $|2,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} [|1, -1, 1, 1\rangle + 2|1,0,1,0\rangle + |1,1,1, -1\rangle]$

En appliquant J_- sur l'état $|2,1\rangle$, on trouve l'état $|2,0\rangle$:

- $J_-|2,0\rangle = (j_{1-} + j_{2-})\frac{1}{\sqrt{6}}[|1, -1,1,1\rangle + 2|1,0,1,0\rangle + |1,1,1, -1\rangle]$
 Donc : $|2,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|1, -1,1,0\rangle + |1,0,1, -1\rangle]$

En appliquant J_- sur l'état $|2,-1\rangle$, on trouve l'état $|2,-2\rangle$:

- $J_-|2,-1\rangle = (j_{1-} + j_{2-})\frac{1}{\sqrt{2}}[|1, -1,1,0\rangle + |1,0,1, -1\rangle]$
 Donc : $|2,-2\rangle = |1, -1,1, -1\rangle$

1.1.2. Calcul des coefficients de Clebsch-Gordan : $J = 1$

- $|1,1\rangle = \sum_{m_1=-1}^1 \sum_{m_2=-1}^1 \langle 1, m_1, 1, m_2 | 1,1\rangle |1, m_1, 1, m_2\rangle = a|1,0,1,1\rangle + b|1,1,1,0\rangle$

Pour qu'il soit orthogonal à l'état $|2,1\rangle$, il faut :

$$\langle 2,1|1,1\rangle = 0 = a + b \text{ Donc :}$$

$$b = -a$$

$$\text{Donc : } |1,1\rangle = a|1,0,1,1\rangle - a|1,1,1,0\rangle$$

De la normalisation de $|1,1\rangle$ on déduit :

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}; b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Donc : } |1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|1,0,1,1\rangle - |1,1,1,0\rangle]$$

L'application successive de J_- sur l'état $|2,-1\rangle$ et de ses états résultants donne :

- $|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|1, -1,1,1\rangle - |1,1,1, -1\rangle]$
- $|1,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|1, -1,1,0\rangle - |1,0,1, -1\rangle]$

1.1.3. Calcul les coefficients de Clebsch-Gordan : $J = 0$

- $|0,0\rangle = \sum_{m_1=-1}^1 \sum_{m_2=-1}^1 \langle 1, m_1, 1, m_2 | 0,0\rangle |1, m_1, 1, m_2\rangle = a|1, -1,1,1\rangle + b|1,1,1, -1\rangle + c|1,0,1,0\rangle$

L'état $|0,0\rangle$ est orthogonale à $\langle 2,0|$ et $\langle 1,0|$, donc:

$$\langle 2,0|0,0\rangle = 0 = a + b + 2c$$

$$\langle 1,0|0,0\rangle = 0 = a - b$$

Ces relations impliquent :

$$a = b = -c$$

On exprime l'état en fonction de a et normalisant $|0,0\rangle$, on trouve :

$$a = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Donc :

$$b = -c = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Donc : } |0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} [|1,1,1, -1\rangle + |1, -1,1,1\rangle - |1,0,1,0\rangle]$$

1.2. Couplage de trois moments angulaires : $j_1 = j_2 = j_3 = 1$ [1]

Soit les moments angulaires : $j_1 = j_2 = j_3 = 1$, pour trouver le moment angulaire total on suit les étapes suivantes :

1. On fait le couplage entre j_1 et j_2 ,

$$\vec{J}_{12} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 \leftrightarrow |j_1 - j_2| \leq J_{12} \leq j_1 + j_2$$

Le moment résultant prend les valeurs suivantes :

$$J_{12} = 0, 1, 2 \text{ pour chaque valeur on a la projection : } \begin{cases} J_{12} = 0, M_{12} = 0 \\ J_{12} = 1, M_{12} = -1, 0, 1 \\ J_{12} = 2, M_{12} = -2, -1, 0, 1, 2 \end{cases}$$

2. on additionne le moment résultant \vec{J}_{12} avec j_3 :

La base $|J_{12}, M_{12}\rangle$ de \vec{J}_{12} est calculée dans la section précédente :

$J_{12}=2$ et $j_3 = 1$ donc les valeurs possibles du moment angulaire total sont : $J = 3; 2; 1$, les valeurs que prend la projection M sont :

$$\begin{cases} J = 3 \leftrightarrow M = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \\ J = 2 \leftrightarrow M = -2, -1, 0, 1, 2 \\ J = 1 \leftrightarrow M = -1, 0, 1 \\ J = 0 \leftrightarrow M = 0 \end{cases}$$

1.2.1. Calcul les coefficients de Clebsch-Gordan : $J = 3$

Commençant par les valeurs maximales de J et de M , Pour faciliter le calcul on peut changer $|j_1, m_1, j_2, m_2, j_3, m_3\rangle$ par $|m_1, m_2, m_3\rangle$

- $|3,3\rangle = |2,2,1,1\rangle = |2,2\rangle \otimes |1,1\rangle = |1,1,1,1,1,1\rangle = |1,1,1\rangle$

L'application successive de J_- donne les autres états de $J = 3$:

- $|3,2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} [|0,1,1\rangle + |1,0,1\rangle + |1,1,0\rangle]$
- $|3,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{15}} [|1,1,-1\rangle + 2|0,1,0\rangle + 2|1,0,0\rangle + |1,-1,1\rangle + 2|0,0,1\rangle + |-1,1,1\rangle]$
- $|3,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} [|0,1,-1\rangle + |1,0,-1\rangle + |-1,1,0\rangle + 2|0,0,0\rangle + |0,-1,1\rangle + |1,-1,0\rangle + |-1,0,1\rangle]$
- $|3,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{15}} [|1,-1,-1\rangle + 2|0,0,-1\rangle + 2|0,-1,0\rangle + |-1,1,-1\rangle + 2|-1,0,0\rangle + |-1,-1,1\rangle]$
- $|3,-2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} [|0,-1,-1\rangle + |-1,0,-1\rangle + |-1,-1,0\rangle]$
- $|3,-3\rangle = |-1,-1,-1\rangle$

1.2.2. Calcul les coefficients de Clebsch-Gordan : $J = 2$

- $|2,2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|1,1,1,0,1,1\rangle - |1,0,1,1,1,1\rangle]$
- $|2,1\rangle = \frac{1}{2} [|1,-1,1\rangle + |1,0,0\rangle - |-1,1,1\rangle - |0,1,0\rangle]$
- $|2,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{12}} [|0,-1,1\rangle + 2|1,-1,0\rangle + |1,0,-1\rangle - |-1,0,1\rangle - 2|-1,1,0\rangle - |0,1,-1\rangle]$
- $|2,-1\rangle = J_- |2,0\rangle = \sqrt{6} |2,-1\rangle$
- $|2,-1\rangle = \frac{1}{2} \{ [|0,-1,0\rangle + |1,-1,-1\rangle - |-1,0,0\rangle - |-1,1,-1\rangle] \}$
- $|2,-2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|0,-1,-1\rangle - |-1,0,-1\rangle]$

1.2.3. Calcul les coefficients de Clebsch-Gordan : $J = 1$

- $|1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} [|1,-1,1\rangle - |-1,1,1\rangle + |0,0,1\rangle]$
- $|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} [2|0,-1,1\rangle + |1,-1,0\rangle - |-1,1,0\rangle + |0,0,0\rangle]$
- $|1,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} [2|-1,-1,1\rangle + 3|0,-1,0\rangle + |1,-1,-1\rangle - |-1,1,-1\rangle + |0,0,-1\rangle]$

1.2.4 Calcul les coefficients de Clebsch-Gordan : $J = 0$

- $|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} [|1,1,1,0,1, -1\rangle - |1,1,1,-1,1,0\rangle - |1,0,1,1,1, -1\rangle + |1,0,1,-1,1,1\rangle + |1, -1,1,1,1,0\rangle - |1, -1,1,0,1,1\rangle]$

2. Méthode non récursive:

2.1. Couplage de deux moments angulaires

Pour deux moments angulaires $j_1 = j_2 = 1$

$$m_1 = m_2 = -1, 1, 0$$

Le moment angulaire total prend comme valeurs :

$$|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2$$

$$J = 0; 1; 2 \left\{ \begin{array}{l} J = 0 \leftrightarrow M = 0 \quad |0,0\rangle \\ J = 1 \leftrightarrow M = -1; 1; 0 \quad |1,0\rangle, |1,-1\rangle, |1,1\rangle \\ J = 2 \leftrightarrow M = -2; -1; 0; 1; 2 \quad |2,0\rangle, |2,-1\rangle, |2,-2\rangle, |2,1\rangle, |2,2\rangle \end{array} \right.$$

2.1.1. Calcul des coefficients de Clebsch-Gordan : $J = 0$

- $|0,0\rangle = a_4 |1, -1, 1, 1\rangle + a_5 |1, 1, 1, -1\rangle + a_6 |1, 0, 1, 0\rangle$

On applique J_+ sur l'état $|0,0\rangle$:

$$0 = \sqrt{2}(a_4 + a_6) |1, 0, 1, 1\rangle + \sqrt{2}(a_5 + a_6) |1, 1, 1, 0\rangle$$

On multiplie par $\langle 1, 0, 1, 1 |$ on obtient:

$$\sqrt{2}(a_4 + a_6) = 0 \rightarrow a_4 = -a_6$$

On multiplie par $\langle 1, 1, 1, 0 |$ on obtient:

$$\sqrt{2}(a_5 + a_6) = 0 \rightarrow a_5 = -a_6$$

Donc:

$$a_4 = a_5 = -a_6$$

La normalisation de $|0,0\rangle$ donne:

$$a_6 = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ et } a_4 = a_5 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Donc :

- $|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} [|1,0,1,0\rangle - |1,-1,1,1\rangle - |1,1,1,-1\rangle]$

2.1.2. Calcul des coefficients de Clebsch-Gordan : $J = 2$

- $|2,2\rangle = |1,1,1,1\rangle$
- $|2,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|1,0,1,1\rangle + |1,1,1,0\rangle]$
- $|2,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} [|1,-1,1,1\rangle + 2|1,0,1,0\rangle + |1,1,1,-1\rangle]$
- $|2,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|1,-1,1,0\rangle + |1,0,1,-1\rangle]$
- $|2,-2\rangle = |1,-1,1,-1\rangle$

2.1.3. Calcul des coefficients de Clebsch-Gordan : $J = 1$

- $|1,1\rangle = a_2 [|10,1,1\rangle] + a_3 |1,1,1,0\rangle$

On applique J_- sur l'état $|1,1\rangle$:

$$J_+ |1,1\rangle = a_2 (j_{1+} + j_+) [|10,1,1\rangle] + a_3 (j_{1-} + j_2) |1,1,1,0\rangle$$

On trouve :

$$0 = a_2 [\sqrt{2} |1,1,1,1\rangle] + a_3 [\sqrt{2} |1,1,1,1\rangle]$$

Donc :

$$-a_2 = a_3$$

La normalisation de $|1,1\rangle$ donne:

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, a_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Donc l'état $|1,1\rangle$ s'écrit :

- $|1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |10,1,1\rangle - |1,1,1,0\rangle \}$

L'application successive de l'opérateur J_- sur le ket $|1,1\rangle$ et son résultant donne :

- $|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|1,-1,1,1\rangle - |1,1,1,-1\rangle]$
- $|1,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|1,-1,1,0\rangle - |1,0,1,-1\rangle]$

2.2. Couplage de trois moments angulaires: $j_1 = j_2 = j_3 = 1$

2.2.1. Calcul des coefficients de Clebsch-Gordan : $J = 0$

Les coefficients de Clebsch-Gordan ne peuvent être clairement déterminés pour des espaces Avec une multiplicité supérieur à 1, cela signifie également que le calcul des coefficients de Clebsch-Gordan pour $j=0$ représentation, qui se produit avec une multiplicité est difficile en utilisant la technique usuelle.

Pour calculer les coefficients correspondant à l'état $|J = 0,0\rangle$, on écrit tout d'abord la combinaison linéaire de cet état :

$$|J = 0,0\rangle = a_1|1,1,1,0,1,-1\rangle + a_2|1,1,1,-1,1,0\rangle + a_3|1,0,1,1,1,-1\rangle + a_4|1,0,1,-1,1,1\rangle + a_5|1,-1,1,1,1,0\rangle + a_6|1,-1,1,0,1,1\rangle + a_7|1,0,1,0,1,0,1,0\rangle$$

L'opérateur J_+ s'écrit :

$$J_+ = j_{+1} + j_{+2} + j_{+3}$$

Appliquons J_+ sur l'état $|J = 0,0\rangle$:

$$\begin{aligned} J_+|J = 0,0\rangle &= a_1(j_{+1} + j_{+2} + j_{+3})|1,1,1,0,1,-1\rangle + a_2(j_{+1} + j_{+2} + j_{+3})|1,1,1,-1,1,0\rangle \\ &+ a_3(j_{+1} + j_{+2} + j_{+3})|1,0,1,1,1,-1\rangle + a_4(j_{+1} + j_{+2} + j_{+3})|1,0,1,-1,1,1\rangle \\ &+ a_5(j_{+1} + j_{+2} + j_{+3})|1,-1,1,1,1,0\rangle + a_6(j_{+1} + j_{+2} + j_{+3})|1,-1,1,0,1,1\rangle \\ &+ a_7(j_{+1} + j_{+2} + j_{+3}) \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } 0 = \sqrt{2}[a_1 + a_3]|1,1,1,1,1,-1\rangle + \sqrt{2}[a_2 + a_4]|1,1,1,-1,1,1\rangle + \sqrt{2}[a_5 + a_6]|1,0,1,1,1,0\rangle + \sqrt{2}[a_1 + a_2 + a_7]|1,1,1,0,1,0\rangle + \sqrt{2}[a_3 + a_5 + a_7]|1,0,1,1,1,0\rangle + \sqrt{2}[a_4 + a_6 + a_7]|1,0,1,0,1,1\rangle$$

On obtient six équations linéaires pour sept inconnus, en les résolvants et on exprime six inconnus en fonction d'un seul inconnu, par exemple a_1 :

$$a_7 = 0$$

$$-a_2 = -a_3 = a_4 = a_5 = -a_6 = a_1$$

La normalisation de $|0,0\rangle$ permet de calculer a_1 :

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Donc:

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} [|1,1,1,0,1,-1\rangle - |1,1,1,-1,1,0\rangle - |1,0,1,1,1,-1\rangle + |1,0,1,-1,1,1\rangle + |1,-1,1,1,1,0\rangle - |1,-1,1,0,1,1\rangle]$$

2.2. Couplage de trois moments angulaires: $j_1 = j_2 = \frac{1}{2}; j_3 = 1$

2.2.1 Calcul des coefficients de Clebsch-Gordan :

★ Méthode récursive:

Le couplage de deux moments angulaires $j_1 = j_2 = \frac{1}{2}$

Déjà calcul $|J_{12}, M_{12}\rangle$ dans le chapitre II:

- $|1,1\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$
- $|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \right]$
- $|1,-1\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$
- $|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle - \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \right]$

Le couplage de trois moments: $J_{12} = 0, 1$ et $j_3 = 1$

Pour $J_{12} = 1 \rightarrow J = 0, 1, 2$

- $|2,2\rangle = |1,1,1,1\rangle = |1,1\rangle \otimes |1,1\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1,1 \right\rangle$
- $|2,1\rangle = J_- |2,2\rangle = \frac{1}{2} \left[\left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right\rangle + \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right\rangle + \sqrt{2} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right\rangle \right]$
- $|2,0\rangle = J_- |2,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \left[\left| -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right\rangle + \sqrt{2} \left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right\rangle + \sqrt{2} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right\rangle + \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1 \right\rangle \right]$
- $|2,-1\rangle = J_- |2,0\rangle = \frac{1}{2} \left[\left| -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right\rangle + \left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1 \right\rangle + \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1 \right\rangle \right]$
- $|2,-2\rangle = J_- |2,-1\rangle = \left| -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1 \right\rangle$

Pour $J_{12} = 0 \rightarrow J = 1$

- $|1,1\rangle = |0,0,1,1\rangle = |0,0\rangle \otimes |1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right\rangle - \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right\rangle \right]$
- $|1,0\rangle = J_- |1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right\rangle - \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right\rangle \right]$

- $|1,-1\rangle = J_-|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left| -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right\rangle - \left| -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right\rangle \right]$

Le couplage double permet de clarifier les deux méthodes : récursive et non récursive, il apparait que la dernière est plus simple ou on peut identifier n'importe état sans l'utilisation d'un autre état avec un moment différent. L'application de la méthode récursive pour des couplage plus compliqué que le couplage double est lourde et compliqué , mais ils semble que c'est la seule méthode qui permet de déterminer tous les état même dans un ordre bien déterminé, la méthode non récursive ne permet que calculer les états qui prennent la valeur minimale du moment total , et qui présentent toujours une multiplicité égale à 1.

Conclusion

Dans ce travail, on a présenté la méthode proposée par *W H Klink*. [1], qui ont donné une méthode simple pour le calcul des coefficients de Clebsch-Gordon qui sont généralement calculés par la méthode récursive, qui apparaît lourd pour des couplages triple ou produit tensoriel de plus de trois moments angulaires.

En a essayer d'appliquer la méthode récursive pour un couplage double et triple, ou il apparaît que c'est difficile de déduire tous les coefficients dans un ordre bien déterminé en commençant par les valeurs maximale du moment et de son projection.

La méthode dit non récursive ne nécessite pas la connaissance des états avec des valeurs du moment et de sa projection supérieure, cette méthode permet aux états correspondant aux moments totaux avec une multiplicité d'unité d'être calculés facilement. L'étude comparative entre exposera très bien les difficultés rencontrées dans les deux méthodes.

REFERENCES:

- [1] *W H Klink and swichramasekara* (article)
- [2] ClaudeCohen – tannoudji, BernardDiu, Francklaloé (mécanique quantique 2)
- [3] tawnsend J S 2000 A modern approach to quantum mechanics (mill valley, C A:university science books)
- [4] Griffiths D J 1995 introduction to quantum mechanics (Englewood cliffs, N J: pretice_hall)
- [5] Bohm A 2001 quantum mechanics: foundations and applications 3rd end (berlin: springer)
- [6] Edmonds A R 1957 angular momentum in quantum mechanics (Princeton, N J: Princeton university press)
- [7] Rose M E 1957 elementary theory of angular momentum (New York: wiley)
- [8] Gottfried k 1989 quantum mécanique (C A: addison_wesley)
- [9] Messiah A 1961 quantum mécanique vols 1 and 2 (New York: interscience)
- [10] Abers E S 2004 quantum mechanics (C A: addition_wesley)
- [11] Shankar R 1988 principles of quantum mechanics (New York: plenum)